

PYTHA GORAS

WISKUNDETIJDSCHRIFT VOOR JONGEREN



De formalist

David Hilbert

Het gretige algoritme

Escher exposeert Riemann

48ste JAARGANG - NUMMER 4 - FEBRUARI 2009

Heb je al meegedaan met de *Pyth-actie*? Je kunt inzenden tot 1 april en meedingen naar prachtige prijzen: objecten van wiskunstenaar Koos Verhoeff. Lees er meer over op pagina 9.



ARABESK

de spannendste speelgoedwinkel van Nederland

Arabesk verkoopt artikelen waarbij kunstenaars en ontwerpers zich hebben laten inspireren door wiskunde, natuurkunde en logica. De resultaten zijn zeer verrassende puzzels, spellen en objecten, soms ingewikkeld, soms eenvoudig, maar altijd intrigerend en mooi.

Bij Arabesk kun je altijd terecht als je op zoek bent naar iets bijzonders. Zelfs als wij iets niet in voorraad hebben, weten we vaak wel de weg er naar toe. In onze winkel met 130 m² verkoopruimte en acht etalages kan iedereen naar hartelust ronddwalen en zich (laten) verbazen. Je mag overal aankomen. En alles kan uitgelegd worden.

Kom eens langs in de leukste en vreemdste winkel van Rotterdam en verre omstreken! Of bezoek onze uitgebreide website met de catalogus.



Arabesk
Oostzeedijk Beneden 113
3061 VP Rotterdam
010-2140361
Webwinkel: www.arabesk.nl

INHOUD



HEBZUCHT LOONT – NIET ALTIJD

Hoe verbind je een stel steden met zo weinig mogelijk kilometers asfalt? Hoe maak je een optimaal computernetwerk met kabels die maar een beperkte capaciteit hebben? Het gretige algoritme uit de discrete wiskunde biedt uitkomst.

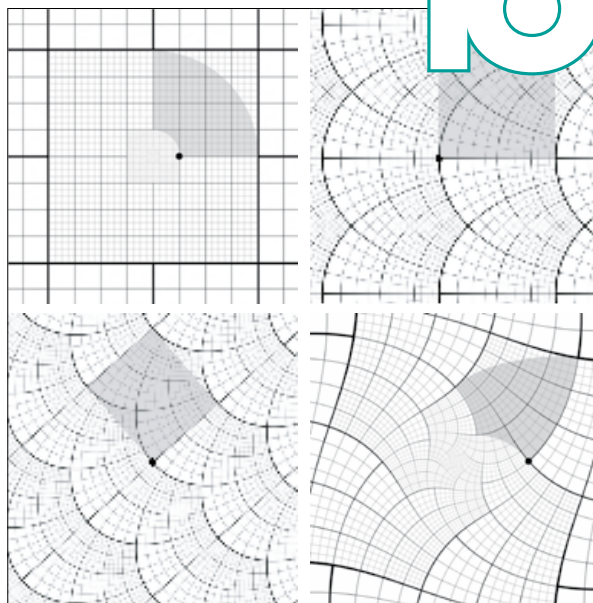
28



DAVID HILBERT (1862-1943): DE PAUS VAN HET FORMALISME

In Hilberts visie zou de hele wiskunde in de twintigste eeuw gevangen worden in een handvol axioma's, waaruit bijna machinaal alle ware stellingen zijn af te leiden. Hilberts visie, het formalisme, bleek een luchtkasteel. Toch twijfelt niemand aan Hilberts grootheid.

16



ESCHER EXPOSEERT RIEMANN

In november schreven we over hoekbehoudende vervormingen, een idee van de wiskundige Riemann. Dit abstracte wiskundige concept laat zich illustreren met iets heel bekends: de *Prentententoonstelling* van Escher.

EN VERDER

- 2 Kleine nootjes
- 9 De repeterende Pyth-actie
- 10 Hokjesgeest in hogere dimensies
- 13 Journaal
- 14 Het Taxicab-vermoeden
- 18 Problemen - Oplossingen
- 20 Ellipsenparade
- 24 Negens, negens en nog meer negens
- 26 Pythagoras Olympiade
- 33 Oplossingen Kleine nootjes nr. 3

■ **NIVEAUBALKJES** Pagina's met één of meer zwarte balkjes (onder de paginanummering) geven de moeilijkheidsgraad aan. Eén balkje: lastig. Twee balkjes: vereist wiskundekennis uit de vijfde of zesde klas. Drie balkjes: net iets moeilijker.

KLEINE NOOTJES

Kleine nootjes zijn eenvoudige opgaven die weinig of geen wiskundige voorkennis vereisen om opgelost te kunnen worden.

De antwoorden vind je in het volgende nummer van *Pythagoras*.

■ door Dick Beekman en Jan Guichelaar

2009

2009 kun je op meerdere manieren schrijven als verschil van twee kwadraten, bijvoorbeeld $45^2 - 4^2$.
Vind jij een andere soortgelijke schrijfwijze?

FOUT DELEN

Kees moet een getal delen door $2\frac{1}{3}$.
Eerst deelt hij door 2 en het antwoord door $\frac{1}{3}$;
fout natuurlijk! De uitkomst blijkt 60 te groot te zijn.
Welk getal was het?

VERSTELBARE RIEM

Een lange leren riem heeft geen gesp; alleen aan elk eind een gaatje. Met een splitpen door de twee gaatjes maak je hem vast. De lengte is dan 100 cm. Ik wil een aantal gaatjes extra maken, aan beide eindén binnen het laatste gaatje, zodat met de splitpen elke omtrek van 85 tot en met 100 cm te maken is (geheel aantal cm).

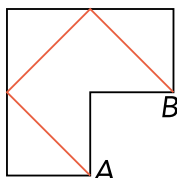
Wat is het minimale aantal extra gaatjes en waar moet ik ze maken?

DOBBELSTENEN PLAKKEN

Je plakt acht dobbelstenen aan elkaar tot één grote dobbelsteen. Kun je dat op zo'n manier doen dat je met deze grote dobbelsteen altijd 20 gooit?

HOEKBILJART

Op dit hoekbiljart kun je eenvoudig een bal van A naar B stoten; op het plaatje wordt de bal twee keer tegen een zijkant gekaatst. Bedenk een manier om een bal van A naar B te stoten, waarbij de bal tien keer tegen een zijkant kaatst.



Hoe verbind je een stel steden met zo weinig mogelijk kilometers asfalt? Hoe maak je een optimaal computernetwerk met kabels die maar een beperkte capaciteit hebben? Veel van zulke problemen zijn op te lossen met het *gretige algoritme*. Hoewel het principe voor de hand ligt, werkt het niet altijd. In dit vierde thema-artikel legt Klaas Pieter Hart dit algoritme uit de discrete wiskunde uit. Ga er even goed voor zitten; hier en daar is enig doorzettingsvermogen nodig!

■ door Klaas Pieter Hart

HEBZUCHT LOONT – NIET ALTIJD



Het kiezen van een beperkt aantal koekjes uit een trommel is een ernstige zaak; je wilt natuurlijk zo veel mogelijk koek verzamelen. Een natuurlijke strategie is: eerst het grootste koekje pakken, dan het op één na grootste, enzovoort. Dit voor de hand liggende idee ziet er ook eenvoudig te programmeren uit: je laat je programma telkens de overgebleven mogelijkheden doorzoeken en de beste overgebleven mogelijkheid kiezen.

Soms is deze strategie echter niet optimaal, om-

dat er randvoorwaarden aan de uiteindelijke verzameling worden gesteld. Een flauw voorbeeld waarin gretig zijn niet helpt, is het volgende: je hebt drie ballen b_1 , b_2 en b_3 die respectievelijk 3, 2 en 2 kilogram wegen. Je taak is ballen te kiezen zó dat het totale gewicht maximaal is. Er zit één adder onder het gras: je keuze moet een deelverzameling van $\{b_1\}$ zijn of van $\{b_2, b_3\}$. Nu keert gretig zijn zich tegen je: meteen de zwaarste bal, b_1 , kiezen geeft je in totaal 3 kilogram omdat je niet meer ballen mag

kiezen. Het was beter geweest eerst b_2 en dan b_3 te pakken, dan heb je in totaal 4 kilogram te pakken.

Dit voorbeeld lijkt zo flauw omdat je ook zo wel ziet dat $\{b_2, b_3\}$ de beste keuze is. Als je echter een programma schrijft dat die optimale keuze moet opsporen, zul je merken dat het probleem helemaal niet zo eenvoudig is: wat een mens in één oogopslag ziet en doet, kost in een programma heel wat stappen. Je moet bij elke bal kijken in welke toegelaten verzameling hij zit en welke van die verzamelingen de zwaarste is. En denk daarbij niet aan een handvol ballen maar aan miljoenen ballen waar een optimale deelverzameling uit gekozen moet worden.

Nu zijn er problemen waarbij gretig zijn wel werkt en het mooie is dat je die problemen kunt karakteriseren. Het verhaal wordt hier en daar wel wat abstract, maar met pen en papier bij de hand zijn de redeneringen goed te volgen.

Als voorbeeld laten we zien hoe je in een samenhangende graaf optimale opspannende bomen kunt opsporen.

OPSPANNENDE BOMEN Stel je een groep steden voor waartussen wegen lopen, of computers die met kabels verbonden zijn, of pompstations in een netwerk van oliepijpleidingen. Je kunt zo'n situatie beschrijven als een samenhangende graaf (V, E) met een functie $w : E \rightarrow [0, \infty)$, zie ook de vorige *Pythagoras*. Hier komt V overeen met de knooppunten, E met de verbindingen en w geeft een eigenschap van de verbindingen aan: bijvoor-

Een *pad* is een rij verschillende punten $v_1, v_2, \dots, v_k$ waarbij opeenvolgende punten zijn verbonden door een lijn. Als v_1 en v_k ook verbonden zijn door een lijn, dan vormen de lijnen $v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{k-1}v_k, v_kv_1$ een *circuit*.

Een *boom* is een samenhangende graaf zonder circuits.

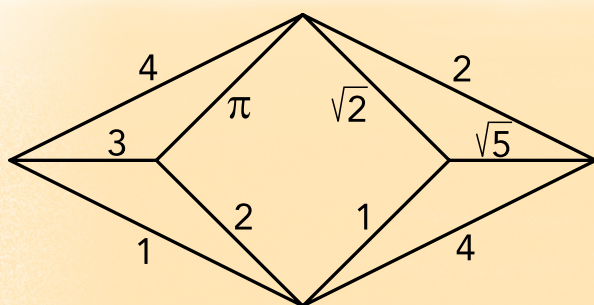
Een *opspannende boom* in een graaf is een verzameling lijnen die een boom vormen en zó dat elk punt eindpunt van een van die lijnen is.

beeld het aantal auto's dat per uur over een weg kan, of het aantal liters olie per seconde dat door een leiding gepompt kan worden.

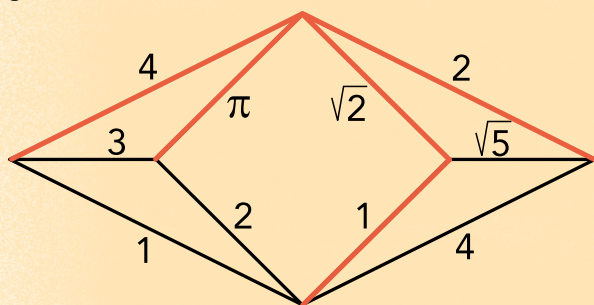
De functie w wordt meestal een *gewichtsfunctie* genoemd en het (totaal)gewicht van een verzameling lijnen is de som van de gewichten van die lijnen.

Een *opspannende boom* verbindt alle knooppunten in een graaf, maar zodanig dat er nergens een circuit (rondwandeling) ontstaat. Het optimaliseringsprobleem is nu, om een opspannende boom te vinden met een totaalgewicht dat zo klein mogelijk (de eerste twee voorbeelden) is, of juist zo groot mogelijk (in het derde voorbeeld).

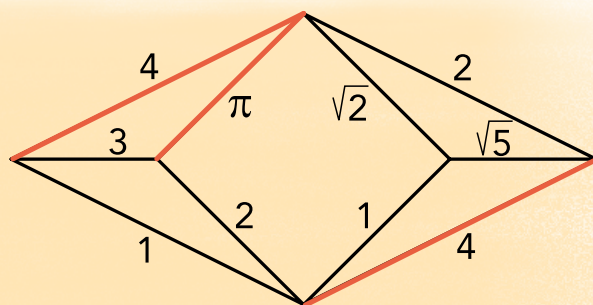
In figuur 1 zie je een voorbeeld van een samenhangende graaf. In figuur 2 staat een opspannende boom getekend met een totaal gewicht van



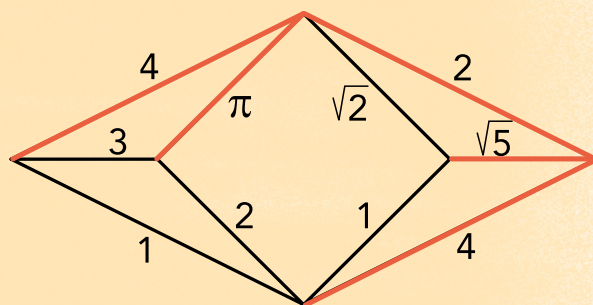
Figuur 1 Voorbeeld van een samenhangende graaf



Figuur 2 Een opspannende boom van de graaf uit figuur 1



Figuur 3 De eerste zetten van het gretige algoritme



Figuur 4 Een opspannende boom via het gretige algoritme

$4 + \pi + \sqrt{2} + 2 + 1 = 7 + \pi + \sqrt{2}$. Deze is niet de zwaarste en ook niet de lichtste.

Opgave 1. Maak een lichtere en een zwaardere opspannende boom.

Laten we eens kijken wat het gretige algoritme oplevert: in dit geval kiezen we telkens een lijn met het hoogste gewicht die we toe kunnen voegen *zonder een circuit te maken*. We kunnen zonder gevaar een lijn van gewicht 4 kiezen, want één lijn maakt geen circuit; de tweede lijn van gewicht 4 ligt los van de eerste en geeft dus nog steeds geen circuit. Daarna kunnen we ook nog de lijn van gewicht π kiezen zonder een circuit te maken, zie figuur 3.

Nu moeten we oppassen: de lijn van gewicht 3 is het zwaarst, maar die mogen we niet meer kiezen want dan maken we een circuit. De lijn van gewicht $\sqrt{5}$ is de op één na zwaarste en die kan veilig toegevoegd worden. Vervolgens kan een van de lijnen van gewicht 2 nog worden toegevoegd om een opspannende boom te maken, zie figuur 4.

De rode lijnen in figuur 4 vormen een opspannende boom: als we een lijn toevoegen, creëren we een circuit. Deze heeft ook het maximale totale gewicht. Dat is in dit geval nog wel met de hand na te gaan, maar voor (veel) grotere problemen is dat niet praktisch. We zullen gaan bewijzen dat het gretige algoritme het probleem van de opspannende bomen altijd optimaal oplost.

Opgave 2. Gebruik het gretige algoritme om een opspannende boom van minimaal gewicht te vinden (wees niet gretig maar bescheiden).

Het bewijs van de bewering dat het gretige algoritme altijd werkt, doen we in twee stappen. We beschrijven een abstracte structuur (matroïd) en bewijzen dat in een dergelijke structuur het algoritme altijd werkt; vervolgens laten we zien dat het opspannende-bomenprobleem zich in een matroïd afspeelt.

MATROÏDEN Een matroïd is een familie deelverzamelingen, $\mathcal{M}$, van een vaste eindige verzameling X . (Het woord ‘matroïd’ komt van ‘matrix’. Voor wie iets van lineaire algebra weet: als je een matrix

hebt, dan vormen de lineair onafhankelijke verzamelingen kolommen een matroïd.)

De familie $\mathcal{M}$ moet aan twee eisen voldoen:

1. als $M \in \mathcal{M}$ en $N \subseteq M$, dan ook $N \in \mathcal{M}$;
2. als $M, N \in \mathcal{M}$ en $|M| < |N|$, dan is er een $x \in N \setminus M$ zó dat $M \cup \{x\} \in \mathcal{M}$.

Met $N \setminus M$ wordt bedoeld: de verzameling N minus de elementen die ook in M zitten. De familie $\mathcal{M}$ speelt de rol van de ‘toegelaten’ verzamelingen; het legt beperkingen op aan de deelverzamelingen van X die je kunt kiezen. In de definitie staat dat als een verzameling toegelaten is, elke deelverzameling daarvan ook toegelaten is, en als je twee toegelaten verzamelingen hebt van verschillende grootte, dan kun je uit de grotere extra elementen lenen om de kleinere uit te breiden tot toegelaten verzamelingen met meer elementen.

Deze definitie (uit 1935) is het resultaat van heel wat denkwerk en brengt een heel scala aan verschijnselen onder één noemer.

In de volgende twee paragrafen laten we zien: als $\mathcal{M}$ een matroïd op een verzameling X is en $w : X \rightarrow [0, \infty)$ een gewichtsfunctie is, dan levert toepassing van het gretige algoritme altijd een verzameling in $\mathcal{M}$ van maximaal gewicht; en *omgekeerd*: als het gretige algoritme bij elke functie w de optimale oplossing vindt, dan hebben we met een matroïd te maken.

Het is informeel wel duidelijk hoe het gretige algoritme werkt, maar voor het komende bewijs moeten we wel een nette beschrijving hebben.

Stap 1: kies $x_1 \in X$ met $\{x_1\} \in \mathcal{M}$ en $w(x_1)$ zo groot mogelijk.

Stap $i + 1$: als $x_1, \dots, x_i$ gekozen zijn, kies dan $x_{i+1} \in X$ (ongelijk aan de reeds gevonden punten) zó dat $\{x_1, \dots, x_i, x_{i+1}\} \in \mathcal{M}$ en met $w(x_{i+1})$ zo groot mogelijk.

Als zo'n keuze niet mogelijk is, stop dan.

Merk op dat dit precies is wat we bij de opspannende boom gedaan hebben! Het flauwe voorbeeld, waarin het gretige algoritme niet werkte, is ook geen matroïd: aan eis 1 kunnen we nog wel voldoen door $\mathcal{M} = \{\emptyset, \{b_1\}, \{b_2\}, \{b_3\}, \{b_2, b_3\}\}$ te

nemen, maar eis 2 lukt niet: $\{b_1\}$ heeft één element en $\{b_2, b_3\}$ heeft er twee, maar we kunnen geen element lenen om $\{b_1\}$ uit te breiden en binnen $\mathcal{M}$ te blijven.

GRETIG ZIJN WERKT We moeten eerst een extra notie invoeren, die van *basis*. Sommige verzamelingen in een matroïd zijn maximaal, dat wil zeggen dat er geen grotere verzamelingen in de matroïd zijn; zo'n maximale verzameling noemen we een basis. Wat opmerkelijk is, is dat elk tweetal bases even groot is. Kijk maar naar eis 2: als $|M| < |N|$, dan kunnen we uit N een element lenen om M te vergroten, dus M is geen basis.

Het gretige algoritme produceert altijd een basis: we stoppen pas als we onze verzameling niet kunnen uitbreiden. Maar waarom is die basis zeker van het grootste gewicht? Dat gaan we nu bewijzen.

Noem de gevonden basis M . We gaan M vergelijken met een basis van maximaal gewicht; dergelijke bases bestaan, want we kunnen in principe van elke basis zijn totaalgewicht uitrekenen en omdat er maar eindig veel bases zijn, is er een maximum totaalgewicht. Neem dus een basis N van maximaal gewicht en wel zo dat de doorsnede $M \cap N$ zo veel mogelijk elementen heeft. Als $M = N$ zijn we klaar; neem eens aan dat $M \neq N$. Omdat M en N bases zijn, hebben ze even veel elementen en dat betekent dat $M \setminus N$ en $N \setminus M$ allebei niet leeg zijn. Neem de eerste i met $x_i \in M \setminus N$. We kijken naar $Y = N \cup \{x_i\}$ en naar $\mathcal{N} = \{A \in \mathcal{M} : A \subseteq Y\}$.

Opgave 3. Ga na dat $\mathcal{N}$ een matroïd op Y is.

Opgave 4. Ga na dat $\{x_1, \dots, x_i\}$ ook gekozen wordt als we het gretige algoritme toepassen binnen Y en met gebruik van de matroïd $\mathcal{N}$.

Nu komt de cruciale opmerking: als we het gretige algoritme binnen Y voortzetten, zullen we alle punten van $N \setminus M$, op één na, kiezen. Het algoritme produceert namelijk een basis B in $\mathcal{N}$ en die moet even groot zijn als N , maar omdat $Y = N \cup \{x_i\}$ kan B maar één element met N verschillen. Het niet gekozen punt noemen we y . Nu geldt $w(x_i) \geq w(y)$, want x_i werd boven y verkozen en y was een legitieme keuze geweest want $\{x_1, \dots, x_{i-1}, y\} \subseteq N$. Als

we nu het totaalgewicht $w(N)$ van $w(B)$ aftrekken, houden we $w(x_i) - w(y)$ over en dat is niet negatief. Dus $w(N) \leq w(B)$ en dus $w(B) = w(N)$, omdat $w(N)$ maximaal is. Maar dan heeft B ook een maximaal totaalgewicht en in $M \cap B$ zit één punt meer dan in $M \cap N$ (namelijk x_i); tegenspraak, dus toch $M = N$.

ALLEEN MATROÏDEN ZIJN GESCHIKT Stel nu eens dat $\mathcal{M}$ een familie deelverzamelingen van een verzameling X is die aan eis 1 voldoet en met de eigenschap dat, ongeacht $w : X \rightarrow [0, \infty)$, het gretige algoritme altijd een element van $\mathcal{M}$ van maximaal totaalgewicht oplevert.

We gaan eis 2 bewijzen. Neem dus $M, N \in \mathcal{M}$ met $|M| < |N|$. Om de gedachten te bepalen, nemen we aan dat M vijf elementen heeft en N acht. Dan heeft $N \setminus M$ drie elementen meer dan $M \setminus N$ (trek $|M \cap N|$ maar van 8 en 5 af). We kunnen dan twee getallen s en t met $s > t > 0$ vinden zó dat

$$s|M \setminus N| < t|N \setminus M|.$$

Opgave 5. Loop de mogelijkheden voor $|M \cap N|$ na en bepaal telkens geschikte s en t .

Nu definiëren we een functie $w : X \rightarrow [0, \infty)$ door

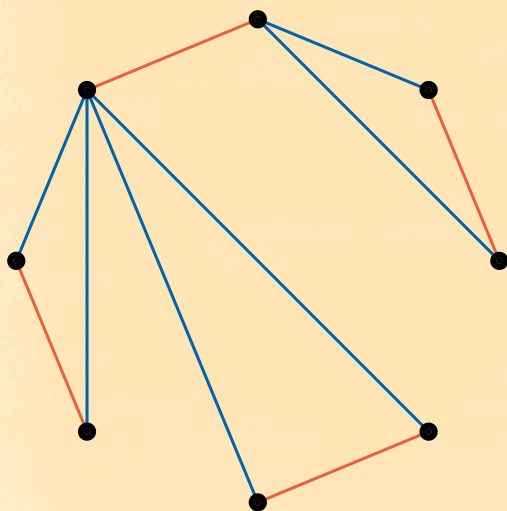
$$w(x) = \begin{cases} s & \text{als } x \in M \\ t & \text{als } x \in N \setminus M \\ 0 & \text{als } x \notin M \cup N \end{cases}$$

Opgave 6. Ga na dat $w(M) = s|M|$ en $w(N) = s|M \cap N| + t|N \setminus M|$ en dat $w(M) < w(N)$.

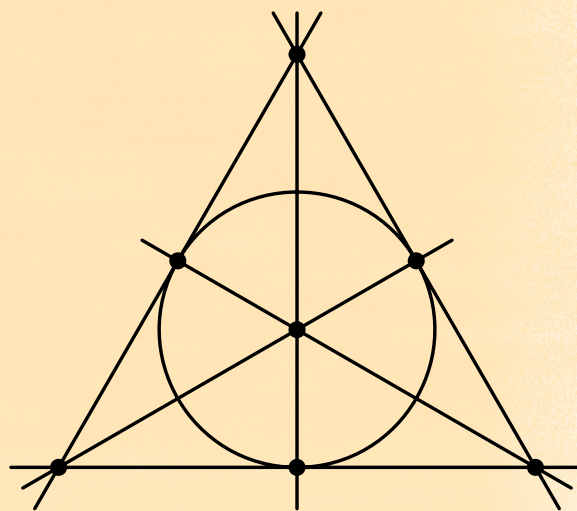
Het gretige algoritme kiest eerst alle elementen van M , maar omdat het totaalgewicht van M niet maximaal is, loopt het kennelijk door en de enige manier om een groter gewicht te kiezen is door een $x \in N \setminus M$ te nemen. Dan zit $M \cup \{x\}$ blijkbaar in $\mathcal{M}$.

OPSPANNENDE BOMEN Onze laatste taak is het volgende te laten zien: als (V, E) een graaf is, dan is $\mathcal{B} = \{M \subseteq E : M \text{ bevat geen circuit}\}$ een matroïd. Aan eis 1 is natuurlijk voldaan: als in M geen circuit zit, dan bevat een deel van M zeker geen circuit.

Nu eis 2 nog. We nemen twee verzamelingen lij-



Figuur 5



Figuur 6 Het Fanovlak

nen, M en N , die geen circuits bevatten en wel zo dat $|M| < |N|$. De verzamelingen eindpunten van die lijnen noemen we V_M en V_N . Als er een $v \in V_N \setminus V_M$ bestaat, zijn we klaar: neem een lijn $e \in N$ met v als eindpunt; dan zit e niet in M en $M \cup \{e\}$ bevat geen circuits, omdat e met zijn nieuwe eindpunt aan geen lijn uit M vast zit.

Blijft over het geval dat $V_N \subseteq V_M$, dus elk eindpunt van elke lijn in N is ook eindpunt van een lijn uit M . In figuur 5 zie je hoe zo'n situatie kan optreden. Er zijn vier rode lijnen en zes blauwe die dezelfde acht punten als eindpunten hebben.

Bekijk de blauwe lijnen: die vormen twee samenhangende stukken en $6 + 2 = 8$: het aantal lijnen plus het aantal stukken is gelijk aan het aantal punten.

Dat geldt ook voor de rode lijnen: vier lijnen en ook vier stukken, $4 + 4 = 8$.

Je ziet in figuur 5 veel paren rode lijnen die door een blauwe verbonden worden; neem een blauwe lijn die twee rode verbindt, die kun je zonder gevaar aan de rode verzameling toevoegen: één enkele brug tussen twee rode stukken kan geen circuit veroorzaken.

Opgave 7. Stel dat (V, E) een boom is, een samenhangende graaf zonder circuits dus. Bewijs dat $|V| = |E| + 1$. *Aanwijzing:* toon aan dat er een eindpunt is, een punt dat eindpunt van maar één lijn is. Als je dat punt en zijn lijn weglaat, hou je een boom over, waarin je weer een eindpunt kunt vinden...

Laat nu c_M het aantal samenhangende stukken (componenten) van M zijn en c_N dat van N . Pas opgave 7 toe om in te zien dat $|V_M| = |M| + c_M$ en $|V_N| = |N| + c_N$ (net als in de rode en blauwe voorbeelden). Uit $|M| < |N|$ en $V_N \subseteq V_M$ volgt nu dat $c_M > c_N$.

Nu volgt met een eenvoudig telargument dat er een component D van N is die aan twee (of meer) componenten van M vast zit: elke component van M zit aan een component van N vast en M heeft meer componenten dan N . Neem twee van die componenten, C_1 en C_2 , en punten v_1 en v_2 in respectievelijk $C_1 \cap D$ en $C_2 \cap D$. Er is een pad door D met lijnen uit N dat v_1 en v_2 verbindt. Bedenk nu zelf waarom een van die lijnen aan M kan worden toegevoegd zonder een circuit te maken.

EEN PAAR VOORBEELDEN Er zijn veel soorten matroïden. We geven een paar eenvoudige voorbeelden.

Figuur 6 heet het Fanovlak; het bestaat uit zeven punten en zeven lijnen (ook de cirkel telt als lijn) en het voldoet aan enkele meetkunde-axioma's, zoals: 'door elk tweetal punten gaat een lijn', maar ook aan 'elk tweetal lijnen snijdt elkaar'. Er is een heel deelgebied van de discrete wiskunde dat over dit soort *eindige* meetkunde gaat.

De familie van alle driepuntsverzamelingen die niet op één lijn liggen, bepalen een matroïd waarvan zij precies de bases zijn.

Als X een verzameling is en $A_1, A_2, \dots, A_k$ is een stel deelverzamelingen, dan heet $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ een *transversaal* voor de A_i als de x_i verschillend zijn en $x_i \in A_i$ voor elke i ; een *partiële transversaal* is een transversaal voor een deel van de A_i 's. De familie van alle (partiële) transversalen is een matroïd op X .

Opgave 8. Lees het artikel in de vorige *Pythagoras* over de Huwelijksstelling van Hall nog een keer en onderzoek hoe de transversalenmatroïd de vrouwen kan helpen het totale kapitaal van hun (aanstaande) echtgenoten te optimaliseren. ■

In het novembernummer lanceerden we de prijsvraag van deze jaargang, de *Pyth-actie*. De redactie heeft inmiddels al heel wat inzendingen ontvangen, maar de inzendtermijn loopt pas 1 april af. Ter inspiratie voor iedereen die nog aan de prijsvraag bezig is, presenteren we hier enkele onderzoeksresultaten van Matthijs Coster, de bedenker van de *Pyth-actie*.

■ door Matthijs Coster

DE REPETERENDE PYTH-ACTIE

De *Pyth-actie* op een getal bestaat uit het *uitschrijven* van dit getal in letters, en vervolgens het *tellen* van het aantal letters. Dus bijvoorbeeld $\mathcal{P}(1) = 3$, want het aantal letters van 'één' is 3. Voor de getallen 1 tot en met 10 staan de resultaten van de *Pyth-actie* in de volgende tabel.

n	$\mathcal{P}(n)$
1	3
2	4
3	4
4	4
5	3
6	3
7	5
8	4
9	5
10	4

We gaan nu kijken naar de opeenvolging van meerdere *Pyth-acties*. We proberen zo lang mogelijke ketens te construeren van verschillende getallen. Dan moet je dus niet met 4 beginnen, want $\mathcal{P}(4) = 4$. Maar als je begint met 2, 3, 8 of 10, dan ontstaat een keten van lengte 2. Bijvoorbeeld: $2 \rightarrow \mathcal{P}(2) = 4$.

Als je met 1 begint, krijg je een keten van lengte 3: $1 \rightarrow \mathcal{P}(1) = 3 \rightarrow \mathcal{P}(3) = 4$.

Voor de startwaarde 7 hebben we al een keten van lengte 4: $7 \rightarrow \mathcal{P}(7) = 5 \rightarrow \mathcal{P}(5) = 3 \rightarrow \mathcal{P}(3) = 4$.

Het blijkt, dat je vanaf elk willekeurig getal altijd na een eindig aantal stappen uitkomt op 4. Dit is eenvoudig in te zien: voor alle getallen groter dan 4 is de *Pyth-actie* een getal dat kleiner is dan het oorspronkelijke getal. Bij herhaaldelijk toepassen van de *Pyth-actie* kan het getal dan alleen maar steeds lager worden. Geen enkel getal bevat uitgeschreven slechts 1 of 2 letters. Wel kan na een aantal stappen de *Pyth-actie* uitkomen op 3, maar aangezien $\mathcal{P}(3) = 4$, geldt ook hier dat de keten eindigt met 4.

Hoe zit het met startwaarden groter dan 10? Het

getal 13 vormt een keten ter lengte 5, namelijk $13 \rightarrow 7 \rightarrow 5 \rightarrow 3 \rightarrow 4$. En 22 vormt een keten ter lengte 6, namelijk $22 \rightarrow 13 \rightarrow 7 \rightarrow 5 \rightarrow 3 \rightarrow 4$.

Het kleinste getal dat de startwaarde vormt van een keten met lengte 7 is 177, want $177 \rightarrow 22 \rightarrow 13 \rightarrow 7 \rightarrow 5 \rightarrow 3 \rightarrow 4$.

Nu is natuurlijk de vraag hoe het zit met de kleinste startwaarde van een keten van lengte 8. Het blijkt plotseling te gaan om een heel groot getal, een getal dat uitgeschreven 177 letters bevat. Dit getal is 13.777.777.777.777.777, uitgeschreven *dertien miljard zeventienhonderd zeventienzeventig miljoen zeventienhonderd zeventienzeventig miljard zeventienhonderd zeventienzeventig miljoen zeventienhonderd zeventienzeventig duizend zeventienhonderd zeventienzeventig*. Ik raad een ieder af om te zoeken naar de kleinste startwaarde van een keten van lengte 9. De benamingen van getallen lopen hiervoor niet ver genoeg.

Je kunt dus concluderen dat voor alle getallen die met onze prijsvraag mee mogen doen, na hooguit zes stappen de 4 is bereikt.

Ten slotte heb ik voor de getallen kleiner dan één biljoen uitgerekend hoeveel er zijn met ketenlengte 1, 2, enzovoorts. De resultaten staan in de onderstaande tabel.

lengte keten	aantal startwaarden < 1.000.000.000.000
1	1
2	4
3	36
4	168.766.393.221
5	408.060.660.358
6	136.966.864.416
7	286.206.081.963

Het artikel over de prijsvraag uit het novembernummer kun je vinden op onze website: www.pythagoras.nu. ■

In februari 2008 stond in *Pythagoras* een artikel over het opdelen van de twee- en driedimensionale ruimte met (onbegrensde) vlakken. Het artikel eindigde met de vraag hoe dat zat in hogere dimensies. Er blijkt een algemene formule te bestaan voor het aantal stukken waarin we de n -dimensionale ruimte kunnen verdelen met m 'vlakken'. Heel verrassend: dit heeft van alles te maken met de driehoek van Pascal.

■ door Marcel Roggeband

HOKJESGEEST IN HOGERE DIMENSIES



Een schuifpuzzel van beeldend kunstenaar Rinus Roelofs

Een jaar geleden schreef Nico Bakker het artikel 'Het opdelen van de ruimte' in dit tijdschrift. Je kunt het artikel (nog eens) lezen op www.pythagoras.nu (ga naar Archief, jaargang 47, februari 2008). Een vlak van één dimensie lager dan de ruimte waarin het zich bevindt, noemen we een *hypervlak*. In de 1-dimensionale ruimte (een lijn) is een hypervlak een punt. In de 2-dimensionale ruimte (een plat vlak) is een hypervlak een rechte lijn. En in de 3-dimensionale ruimte is een hypervlak een plat vlak. In de 4-dimensionale ruimte, waar we ons moeilijk een voorstelling van kunnen maken, is een hypervlak een 3-dimensionale ruimte. Bij hogere dimensies kunnen we ons geen voorstelling meer maken van hypervlakken, maar dat

weerhoudt wiskundigen er niet van om er toch over na te denken.

De oorspronkelijke formulering van het probleem over het opdelen van een hoger-dimensionale ruimte komt, voor zover bekend, van de Zwitserse wiskundige Ludwig Schläfli (1814-1895). Schläfli was degene die de formules van Euler over het verband tussen het aantal vlakken, ribben en hoekpunten van een veelvlak (het aantal hoekpunten plus het aantal vlakken van een veelvlak is gelijk aan het aantal ribben plus twee) generaliseerde naar hogere dimensies. Je kunt de algemene vraag over het opdelen van de ruimte als volgt formuleren:

Als m hypervlakken in n dimensies zo gerangschikt zijn dat elke n hypervlakken, maar geen $n + 1$ hypervlakken, een punt gemeen hebben, in hoeveel deelruimten wordt die ruimte dan verdeeld?

Schläfli noemde de deelruimten zelf overigens ‘gebieden’. Met de definitie van een gebied geeft een wiskundige namelijk al aan dat er sprake is van een samenhangend deel van de ruimte. Dit betekent dat twee punten in hetzelfde deel met elkaar te verbinden zijn met een aantal aansluitende lijnstukjes, die alle ook geheel binnen dit deel liggen.

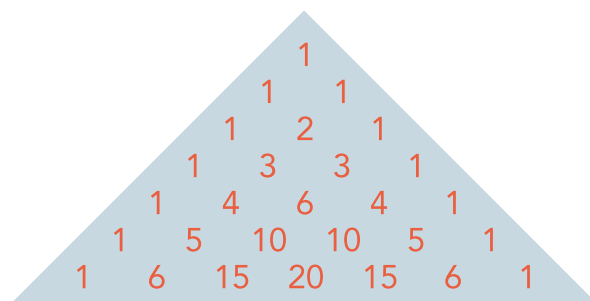
RECURRENTE BETREKKING Voor een algemene formule moet je bedenken dat de hypervlakken dimensie $n - 1$ hebben. We proberen nu een *recurrente betrekking* te vinden, dat wil zeggen: een formule waarin het aantal gebieden in een ruimte met dimensie n afhangt van het aantal gebieden in een ruimte met dimensie $n - 1$.

We noteren met $R(n, m)$ het aantal gebieden waarin $\mathbf{R}^n$ (een n -dimensionale ruimte) met m hypervlakken verdeeld kan worden. Wanneer aan een verdeling een nieuw hypervlak wordt toegevoegd, zal dit door de andere m hypervlakken in m hyperlijnen gesneden worden. Deze m hyperlijnen verdelen het extra hypervlak volgens de definitie in $R(n - 1, m)$ stukken. Elk van deze stukken deelt een van de $R(n, m)$ ruimtestukken in twee delen. Bij het totale aantal van $R(n, m)$ stukken ruimte wordt dus precies een aantal van $R(n - 1, m)$ toegevoegd. Het totale aantal deelruimten met een extra hypervlak (in totaal $m + 1$ hypervlakken) wordt dan

$$R(n, m + 1) = R(n, m) + R(n - 1, m).$$

$$\begin{aligned} R(n, m+1) &= R(n, m) + R(n-1, m) \\ &= R(n, m-1) + R(n-1, m-1) + R(n-1, m-1) + R(n-2, m-1) \\ &= 1 \times R(n, m-1) + 2 \times R(n-1, m-1) + 1 \times R(n-2, m-1) \\ &= R(n, m-2) + R(n-1, m-2) + 2(R(n-1, m-2) + R(n-2, m-2)) + R(n-2, m-2) + R(n-3, m-2) \\ &= 1 \times R(n, m-2) + 3 \times R(n-1, m-2) + 3 \times R(n-2, m-2) + 1 \times R(n-3, m-2) \\ &\text{enzovoorts} \end{aligned}$$

Figuur 2 De rode getallen vormen de driehoek van Pascal



Figuur 1 De eerste zeven rijen van de driehoek van Pascal

ENKELE BIJZONDERE GEVALLEN Het is logisch om te definiëren: $R(n, 0) = 1$ voor alle $n \geq 1$. Immers, als je geen hypervlak aanbrengt, blijft het aantal ruimtes 1. Ook nemen we: $R(0, 0) = 1$. Immers, een ruimte met dimensie 0 (een punt!) blijft ook 1 ruimte. Er zijn geen hypervlakken mogelijk. Ook moeten we even kijken naar $R(0, m)$. Volgens bovenstaande formule geldt:

$$R(1, m + 1) = R(1, m) + R(0, m),$$

ofwel $m + 2 = m + 1 + R(0, m)$. We moeten dus $R(0, m) = 1$ nemen.

Een stapje verder geldt volgens de formule

$$R(0, m + 1) = R(0, m) + R(-1, m),$$

ofwel $1 = 1 + R(-1, m)$. Dus we moeten $R(-1, m) = 0$ nemen om aan onze formule te blijven voldoen. En dus moeten we ook $R(n, m) = 0$ nemen voor willekeurige negatieve n .

DRIEHOEK VAN PASCAL De recurrente betrekking lijkt veel op een betrekking die je wellicht al kent, namelijk die van de *binomiaalcoëfficiënten* $\binom{n}{k}$: het aantal manieren om uit n elementen k elementen te kiezen. De *driehoek van Pascal*, zie figuur 1, bestaat uit deze getallen. In de driehoek van Pascal geldt de bijzondere eigenschap dat elk getal gelijk is aan de som van zijn twee bovenburen, in formulevorm:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

Probeer deze betrekking zelf eens te bewijzen.

TOEPASSING OP DE RECURRENTE

BETREKKING In figuur 2 is de recurrente betrekking een aantal malen uitgevoerd. De rode getallen zijn precies de getallen uit de driehoek van Pascal! Na in totaal m keer de recurrente betrekking op de formule los te laten, krijg je

12

$$\begin{aligned} R(n, m+1) &= \binom{m+1}{0} R(n, 0) + \\ &+ \binom{m+1}{1} R(n-1, 0) + \dots + \\ &+ \binom{m+1}{m+1} R(n-m-1, 0). \end{aligned}$$

Maar nu moeten we wel opletten! Het kan zijn dat ergens in een regel (doordat m groot is) een $R(N, p)$ met $N < 0$ voorkomt. Deze R is, zoals we hebben afgeleid, gelijk aan 0. Verder in de volgende regels blijven de waarden van N natuurlijk negatief (ze worden elke regel kleiner) en blijven al deze factoren 0.

TWEE GEVALLEN We kunnen de formule voor $R(n, m+1)$ schrijven als

$$R(n, m+1) = \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} R(n-k, 0).$$

We weten dat $R(n, 0) = 1$ als $n \geq 0$ en $R(n, 0) = 0$ als $n < 0$.

Geval 1: als $n \geq m+1$, dan is $R(n-k, 0) = 1$ voor alle k , omdat $n-m-1 \geq 0$. Dan volgt dus

$$R(n, m+1) = \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} = 2^{m+1}$$

Geval 2: als $n < m+1$, dan is $R(n-k, 0) = 0$ voor $k = n+1, \dots, m+1$ (en $R(n-k, 0) = 1$ voor $k \leq n$), dus vinden we in dit geval

$$R(n, m+1) = \sum_{k=0}^n \binom{m+1}{k}.$$

SPECIALE GEVALLEN Voor één lijn in $\mathbf{R}^2$ krijgen we $n = 2$ en $m = 0$ (geval 1): $R(2, 1) = 1 + 1 = 2$.

Voor m punten op een lijn hebben we te maken met een 1-dimensionale ruimte (de lijn) en dus $n = 1$. De formule geeft met geval 2 de gelijkheid $R(1, m) = 1 + m$. Dit is dan uiteraard het aantal delen waarin de oorspronkelijke lijn wordt opgedeeld, als er geen punten samenvallen.

Voor twee vlakken in $\mathbf{R}^3$ krijgen we $n = 3$ en $m = 1$ (geval 1): $R(3, 2) = 1 + 2 + 1 = 4$.

Voor vijf vlakken in $\mathbf{R}^3$ krijgen we $n = 3$ en $m = 4$ (geval 2): $R(3, 5) = 1 + 5 + 10 + 10 = 26$.

Voor het geval van m vlakken in de ruimte geldt dat $n = 3$ en de formule geeft je het antwoord in termen van m (geval 2 met $n = 3$):

$$\begin{aligned} R(3, m) &= \binom{m}{0} + \binom{m}{1} + \binom{m}{2} + \binom{m}{3} = \\ &= 1 + m + \frac{m!}{2! \cdot (m-2)!} + \frac{m!}{3! \cdot (m-3)!} = \\ &= \frac{1}{6}m^3 + \frac{5}{6}m + 1. \end{aligned}$$

TEN SLOTTE De kracht van de algemene formules is natuurlijk dat we wat kunnen zeggen over willekeurig hoge dimensies en een willekeurig aantal hypervlakken in deze ruimte. Uiteraard kunnen we dan niets meer visualiseren zoals in het platte vlak of de driedimensionale ruimte, maar soms is het handiger om een probleem toch te bekijken in hogere dimensies en dan de tweede en derde dimensie te zien als speciale gevallen. ■

JOURNAAL

■ door Alex van den Brandhof

Oplossingen voor industriële problemen

Van 26 tot en met 30 januari hielpen wiskundigen het bedrijfsleven een handje. Tijdens de tiende editie van de 'Studiegroep Wiskunde en Industrie' bogen zestig wiskundigen uit binnen- en buitenland zich over zes heel verschillende vragen.

Hoe kun je beurskoersen zó goed voorspellen dat je kunt voorkómen dat je geld verliest, of beter nog, dat je geld verdient? Beursanalisten gebruiken veelal het Black-Scholes model voor de koersberekeningen van opties, maar het model blijkt niet voor alle soorten opties de 'echte' markt te weerspiegelen. De Rabobank zocht naar een alternatief en diende de vraag in bij de Studiegroep.



Moderne containerschepen zijn heel lang en hoog geladen (foto: B. van der Meijden)

Het Marin wilde weten hoe het komt dat moderne, grote containerschepen in hoge golven zo extreem 'rollen', dat ze hun lading verliezen. En, nog belangrijker, hoe ontwerp je nieuwe schepen zó, dat ze niet gaan rollen?

Het KNMI zocht naar een wiskundig model om lokale 'extreme' weersomstandigheden nog beter te kunnen voorspellen. De wiskundigen van de Studiegroep maakten

een model om de daarvoor kenmerkende luchtstromingspatronen te identificeren.

Jaap Molenaar van Wageningen Universiteit en Researchcentrum, die de Studiegroep dit jaar organiseerde, in de krant *Stad Wageningen*: 'Eigenlijk is dit een knotsgek initiatief, maar toch blijkt het elke keer weer te werken. Je kunt het zien als een samenwerking tussen de industrie en de wetenschap.'

Escher op de middelbare school

'Escher in het Paleis' is de naam van het Eschermuseum in Den Haag. Dit museum biedt voor middelbare scholieren veel interessants.

Op de website van het Eschermuseum is sinds kort materiaal te vinden over de wiskunde die in het werk van Escher een rol speelt, zie www.escherinhetpaleis.nl/index.php?objectID=369.

Eschers werk heeft sterk onder invloed gestaan van wiskundigen. Omgekeerd hebben wiskundigen altijd een voorliefde gehad voor het werk van Escher. Zo heeft de vermaarde Leidse wiskundige Hendrik Lenstra enkele jaren geleden samen met een paar collega's op fraaie en interessante wijze het gat opgevuld in de prent *Pren-*

tentoonstelling, zie ook het artikel 'Escher exposeert Riemann' op pagina 16 van dit nummer. Merkwaardig is dat Escher op school erg slecht was in wiskunde. Hij gebruikte wiskunde op een intuïtieve manier.

Scholieren kunnen op de website van het Eschermuseum informatie vinden om te gebruiken bij bijvoorbeeld praktische opdrachten of profielwerkstukken. Op het ogenblik bevat de website een inleiding over wiskunde in het leven van Escher en paragrafen over vlakvullingen en metamorfosen. In de loop van dit schooljaar zullen er paragrafen volgen over o.a. ongebruikelijke perspectieven, ruimtelijke figuren (zoals de Möbiusband en platonische lichamen), onmogelijke

figuren, oneindigheid en zelfverwijzing. De website is een samenwerking tussen het Eschermuseum en de Universiteit Leiden en het materiaal wordt vervaardigd door Bart Zevenhek, docent wiskunde van het Barlaeusgymnasium.

Het museum organiseert tevens jaarlijks een prijsvraag 'wiskunde en Escher'. Dit jaar is het thema 'vlakvullingen'. Er zijn opgaven op vmbo-, havo- en vwo-niveau en in iedere categorie zijn prijzen te behalen, onder andere van 100 euro. Tot 1 juni 2009 kan werk ingestuurd worden. Voor de prijsvraag moet een vlakvulling worden bedacht die aan bepaalde symmetrievoorwaarden voldoet. Op de genoemde website van het museum is alle informatie te vinden.

13

Het Journaal van *Pythagoras* meldde in september 2008 dat *taxicab(6)* gevonden was. *Taxicab(n)* is per definitie het kleinste getal dat op n manieren kan worden geschreven als de som van twee derdemachten. Zo is $\text{taxicab}(2) = 1729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$. Voormalig docent statistiek Jaap Versluys leverde het idee voor dit artikel, waarin we een voorspelling doen voor de grootte van nog onbekende *taxicab*-getallen.

■ door Arnout Jaspers



HET TAXICAB-VERMOEDEN

14

De Engelse wiskundige Godfrey Harold Hardy (1877-1947) haalde in 1913 het Indiase genie Srinivasa Ramanujan (1887-1920) naar Engeland. Toen Hardy hem eens met een taxi opzocht in het ziekenhuis, merkte hij op dat het nummer van de taxi oninteressant was geweest: 1729. 'Nee, dat is juist een heel interessant getal,' moet Ramanujan toen hebben opgemerkt. 'Het is het kleinste getal dat op twee manieren kan worden uitgedrukt als een som van twee derdemachten. Het is de som van $1 \times 1 \times 1$ en $12 \times 12 \times 12$, en ook van $9 \times 9 \times 9$ en $10 \times 10 \times 10$.' De anekdote van Ramanujan en Hardy's taxinummer heeft de wiskunde een begrip rijker gemaakt: 'taxicab-getal'. *Taxicab(n)* is het kleinste getal dat op n manieren kan worden geschreven als de som van twee derdemachten.

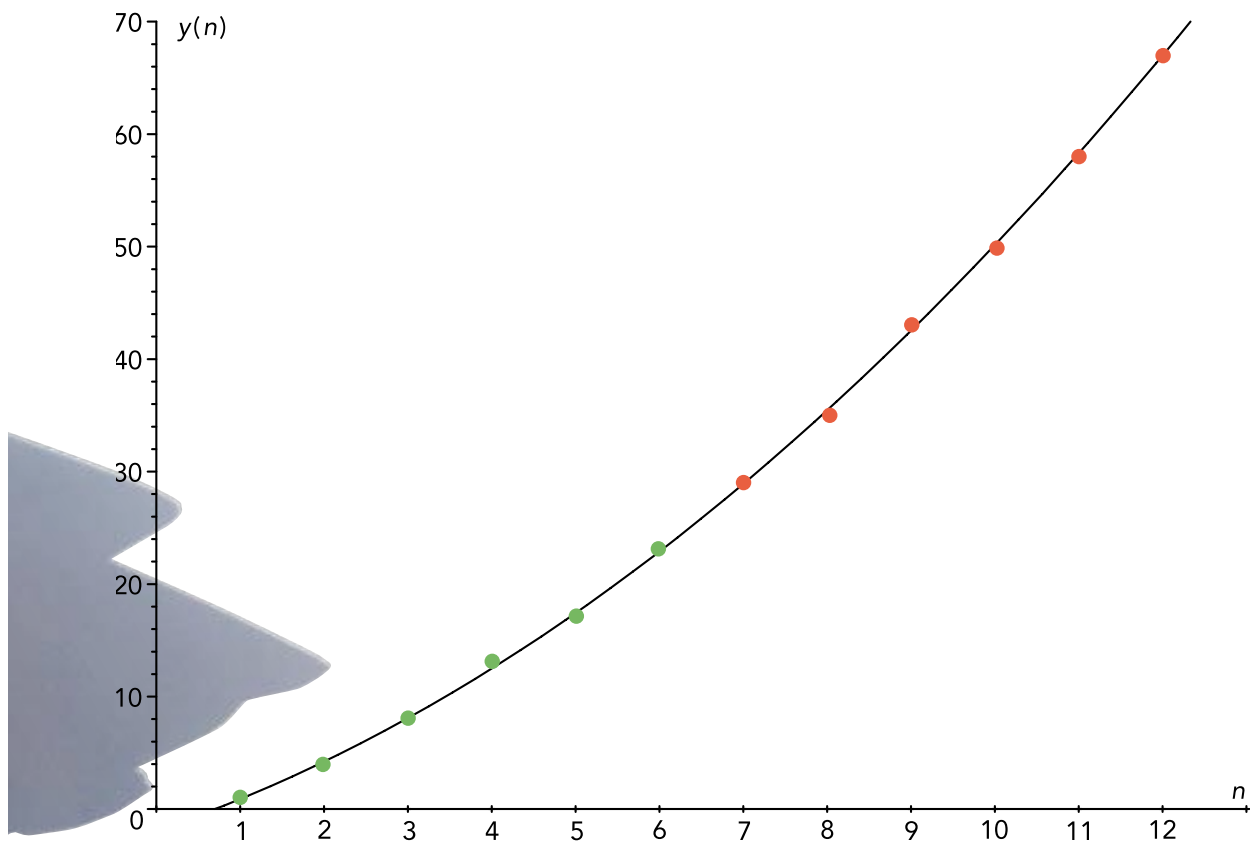
Taxicab-getallen groeien razendsnel, zoals blijkt uit tabel 1. Kunnen we die groei in een formule uitdrukken? Als dat lukt, kunnen we misschien iets zeggen over nog niet ontdekte *taxicab*-getallen. We gebruiken daarvoor de *kleinste-kwadratenmethode* van Gauss, zie het kader op pagina 25 van het septembernummer, om

de beste lijn door een stel punten in een grafiek te trekken.

Voor statistisch onderzoek naar een eventuele samenhang tussen twee variabelen geldt de regel: eerst tekenen, dan rekenen! Horizontaal in de grafiek zetten we het rangnummer n uit, verticaal $y(n)$, het aantal cijfers van *taxicab(n)*. De nu bekende *taxicab*-getallen leveren dan zes punten op (de groene punten in de figuur), die zo te zien op een licht gekromde lijn liggen.

<i>taxicab</i> (1) = 2	$y(1) = 1$
<i>taxicab</i> (2) = 1729	$y(2) = 4$
<i>taxicab</i> (3) = 87539319	$y(3) = 8$
<i>taxicab</i> (4) = 6963472309248	$y(4) = 13$
<i>taxicab</i> (5) = 48988659276962496	$y(5) = 17$
<i>taxicab</i> (6) = 24153319581254312065344	$y(6) = 23$

Tabel 1 De eerste zes *taxicab*-getallen en het aantal cijfers



De grafiek van $y(n) = 0,268n^2 + 2,525n - 1,900$; deze is vastgesteld op basis van de groene punten. De rode punten geven de voorspelde aantallen cijfers van taxicab(7) tot en met taxicab(12).

REGRESSIELIJN De simpelste gekromde lijn is de parabool, waarvan de algemene vergelijking is:

$$y(n) = an^2 + bn + c.$$

Uit de zes bekende punten $(n_1, y_1), \dots, (n_6, y_6)$ kunnen we met de kleinste-kwadratenmethode de optimale a , b en c bepalen. Dat omvangrijke rekenwerk slaan we hier over. De uitkomst voor de best passende parabool is:

$$y(n) = 0,268n^2 + 2,525n - 1,900.$$

Dit is de zogeheten 'regressielijn'.

$y(7)$	=	29
$y(8)$	=	35
$y(9)$	=	43
$y(10)$	=	50
$y(11)$	=	58
$y(12)$	=	67

Tabel 2 De voorspelde waarden van $y(7)$ tot en met $y(12)$

Deze methode garandeert niet dat een parabool goed op die punten past, maar wat blijkt: de verschillen tussen de berekende waarden en de werkelijke waarden zijn klein tot zeer klein. Hoe dicht die punten bij de regressielijn liggen, laat zich exact uitdrukken in de *correlatiecoëfficiënt*. Deze kan variëren tussen 0 (geen enkele samenhang tussen de punten en de lijn) en 1 (alle punten liggen precies op de lijn). Hier is de correlatiecoëfficiënt 0,9993. Een betere keuze voor een regressielijn dan de parabool zal er dus wel niet zijn.

De bijna perfecte samenhang geeft vertrouwen dat de parabool ook iets zegt over de grootte van taxicab(7) en hoger. Die voorspelde waarden staan in tabel 2 – met enig voorbehoud natuurlijk, want statistiek kan nooit een wiskundig bewijs leveren. Voor taxicab(7) is al wel een bovengrens bekend, want $24.885.189.317.885.898.975.235.988.544$ is op zeven manieren te schrijven als som van twee derdemachten. We weten nog niet zeker of dit ook het kleinst mogelijke getal met die eigenschap is, maar het heeft 29 cijfers, precies zoals hier voorspeld. Dat kan dus bijna niet mis! ■

ESCHER EXPOS

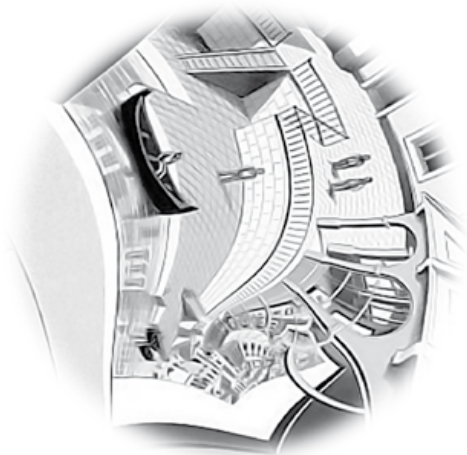
Soms bedenkt je als redactie net te laat, dat het schijnbaar abstracte werk van een beroemd wiskundige zich prima laat illustreren met iets heel bekends. Recent hadden we het in *Pythagoras* over Riemann, die als eerste het verband legde tussen functies van complexe getallen en hoekbehoudende vervormingen van een vlak. Mocht je niet meer weten hoe dit precies zat, het staat op pagina 30 van het novembernummer.

■ door Arnout Jaspers

De Leidse wiskundige Hendrik Lenstra zat begin deze eeuw in een vliegtuig in een tijdschrift te bladeren, toen zijn oog viel op Eschers *Pren-tententoonstelling* uit 1956, een prent die vooral zo beroemd werd, omdat zelfs Escher blijkbaar niet wist hoe hij het gat in het midden verder in moest vullen.

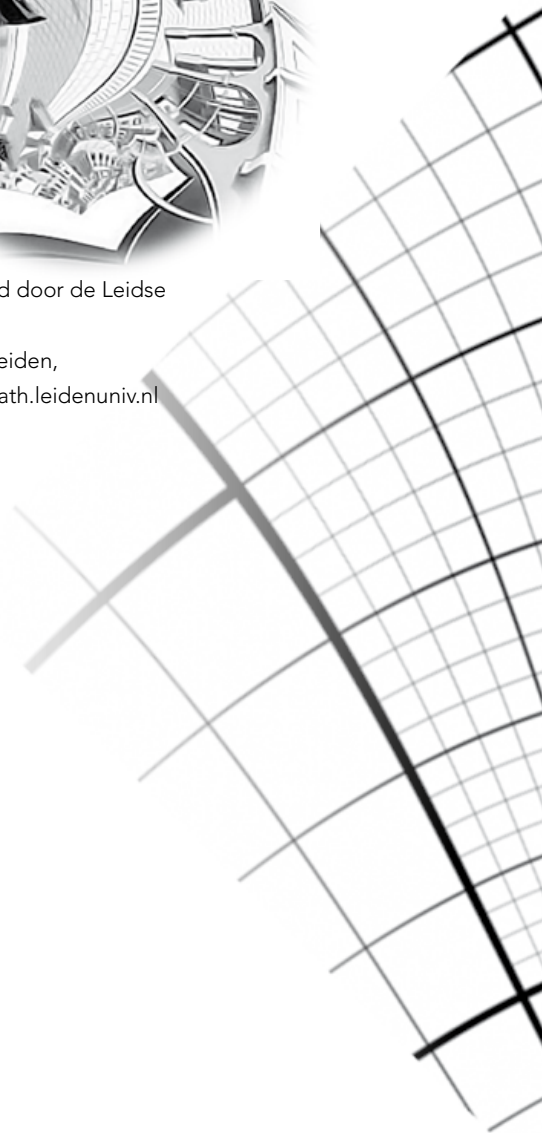
Lenstra wist dat wel, althans, hij beseftte plotse-ling dat de wiskunde voorhanden was om het gat te dichten. Escher bleek intuïtief nauwkeurig een ex-ponentiële vervorming van het complexe vlak ge-volgd te hebben. Dankzij grondlegger Riemann konden Lenstra en zijn collega's berekenen dat het gat een oneindige reeks kopieën van de hele prent moet bevatten, die naar het middelpunt toe telkens een factor 256 kleiner worden. Dat gaat heel hard: in de fysieke werkelijkheid zou de toeschouwer links al op de tweede kopie zo groot als een forse bacterie zijn, en op de vierde kopie uit minder dan één molecuul inkt bestaan... Hoe de Leidse wiskun-digen precies te werk gingen, vind je op de website <http://escherdroste.math.leidenuniv.nl>. Je kunt daar ook mooie filmpjes bekijken waarbij eindeloos op het gat wordt ingezoomd.

Je ziet hier Eschers prent, omlijst door het bere-kende *grid*, de best passende exponentiële vervor-ming van een stuk ruitjespapier. De invulling van het gat staat – uitvergroot – linksboven. Met behulp van het complete grid – te vinden op de genoemde website – zou je ook andere taferelen dan een pren-tententoonstelling kunnen 'ver-Escheren'. Probeer het maar eens! Als je experimenten een interessante plaat opleveren, publiceren we die graag in *Pytha-goras*. ■



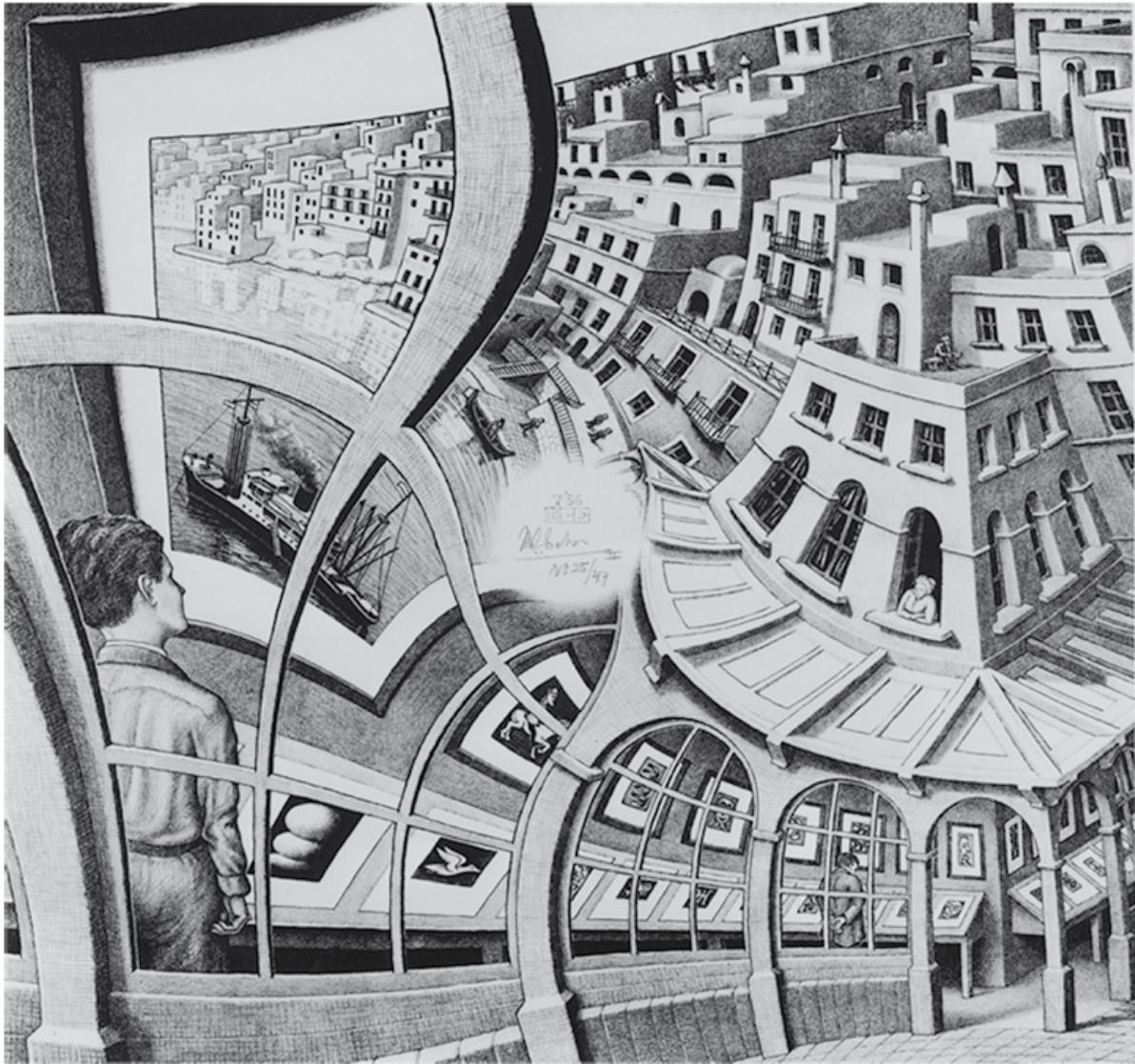
Het gat ingevuld door de Leidse wiskundigen.

© Universiteit Leiden,
escherdroste.math.leidenuniv.nl



ESCHERPRIJSVRAAG Ben je gefascineerd door het werk van Escher? Dan is de Escher Wiskunde Prijsvraag iets voor jou! Tot 1 juni kun je meedoen aan deze door 'Escher in het Paleis' uitgeschreven prijsvraag. Lees er meer over in het Journaal op pagina 13.

EERT RIEMANN

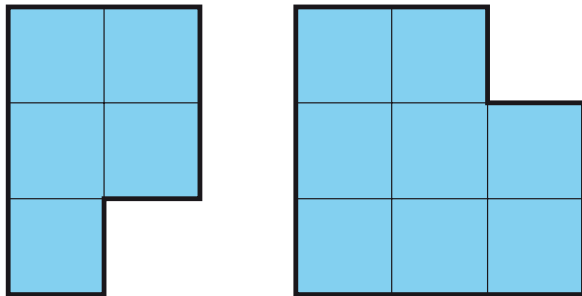


M.C. Eschers 'Prentententoonstelling' © 2008 The M.C. Escher Company - Baarn. Alle rechten voorbehouden. www.mcescher.nl

PROBLEMEN

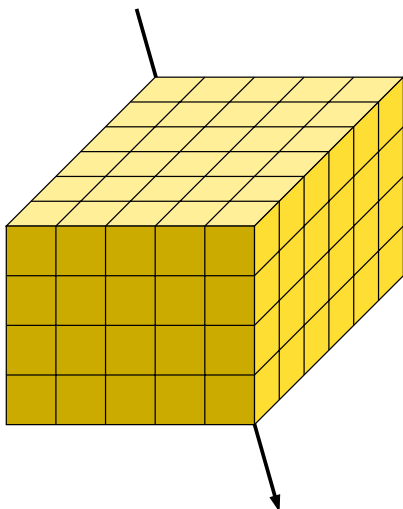
■ door Dion Gijswijt

KNIP EN PLAK Knip deze twee vormen elk in tweeën en vorm uit de vier stukken een vierkant.



KWADRATEN Van de getallen 1 tot en met 16 kun je de *even* getallen met de *oneven* getallen paren, zó dat elk paar tot een kwadraat optelt: $2 + 7$, $4 + 5$, $6 + 3$, $8 + 1$, $10 + 15$, $12 + 13$, $14 + 11$ en $16 + 9$. Doe dit nu met de getallen 1 tot en met 1000. Waarom kan het niet met de getallen 1 tot en met 100?

SATÉPRIKKER Een rechthoekig blok kaas is verdeeld in $4 \times 5 \times 6$ gelijke kaasblokjes. Een satéprikker prikt door het blok kaas via een lichaamsdiagonaal. Hoeveel kaasblokjes zitten aan de satéprikker vastgeprikt?



STREEPJESCODE Gegeven is een positief getal x . De computer produceert de veelvouden van x , maar dan naar beneden afgerond:

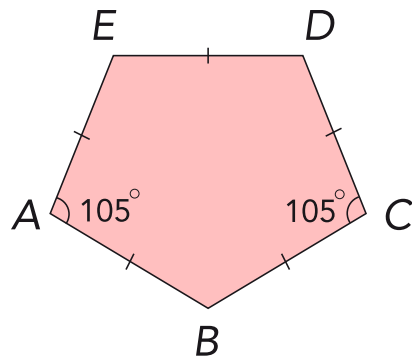
$$\lfloor x \rfloor, \lfloor 2x \rfloor, \lfloor 3x \rfloor, \lfloor 4x \rfloor, \dots$$

Dit is (een deel van) het resultaat:

$$\dots, 14, 15, 16, 18, 19, 21, 22, 24, \dots$$

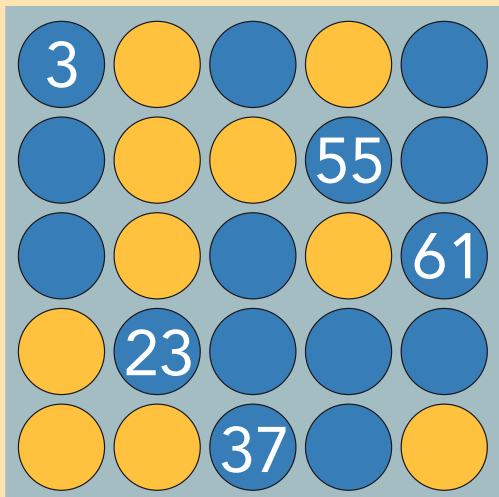
Hoeveel van de getallen 1, 2, ..., 100 worden geproduceerd?

VIJFHOEK Een convexe vijfhoek $ABCDE$ heeft vijf gelijke zijden. Hoek A en C zijn allebei 105° graden. Bereken de andere drie hoeken.



OPLOSSINGEN

LINGO



De nummers 3, 23, 37, 55 en 61 blokkeren samen elke rij, kolom en diagonaal. Als de kandidaten eerst de overige 10 ballen trekken, hebben ze nog steeds niet gewonnen. Als ze 11 ballen trekken, zijn er in totaal nog maar 4 nummers over, zodat er zeker een rij is waaruit alle getallen zijn weggestreept. Het kleinste aantal ballen waarvoor winst gegarandeerd is, is dus 11.

KNIKKERS In het januarinumnummer is helaas een fout geslopen in dit probleem. Gerhard Woeginger maakte ons hierop attent. Excuses aan degenen die hun hoofd hebben gebroken over dit onmogelijke probleem. Het probleem zou moeten luiden:

In een zak zitten witte, zwarte en gouden knikkers. Je pakt (zonder te kijken) een aantal knikkers. Als je 17 knikkers pakt, heb je zeker een gouden of een witte knikker gepakt. Als je 21 knikkers pakt, heb je ten minste een witte én een zwarte knikker. In beide gevallen lukt het niet altijd met minder knikkers. Hoeveel knikkers zitten in de zak als er meer witte dan zwarte knikkers zijn?

Oplossing. Geef het aantal witte, zwarte en gouden knikkers aan met w , z en g . We zien dat $z = 16$; immers, als we 16 knikkers pakken, kunnen ze allemaal zwart zijn, maar als we er 17 pakken niet meer. Omdat er meer witte dan zwarte knikkers zijn, vinden we $g + w = 20$. Dus het aantal knikkers is $16 + 20 = 36$.

NAALD Tel apart het aantal snijpunten met horizontale en verticale lijnen. Laat de naald eindpunten (x_1, y_1) en (x_2, y_2) hebben en noem $a := |x_2 - x_1|$ en $b := |y_2 - y_1|$. Het aantal doorsneden verticale roosterlijnen is het aantal gehele getallen in het interval $[x_1, x_2]$, dus hoogstens $1 + \lfloor a \rfloor$. Door de naald in horizontale richting te schuiven, kunnen we dit ook bereiken. Evenzo is het aantal doorsneden horizontale lijnen maximaal $1 + \lfloor b \rfloor$. Als we een snijpunt dat zowel op een horizontale als verticale lijn ligt maar éénmaal tellen, komen we voor lengte 5 uit op maximaal 8 en voor lengte 15 op maximaal 23 snijpunten.

VLEERMUIS Gegeven een driehoek ABC met D op het midden van zijde BC (zie figuur); dan geldt:

$$|AB|^2 + |AC|^2 = 2|BD|^2 + 2|AD|^2.$$

Dit volgt uit de stelling van Pythagoras: neem aan dat $|AB| \leq |AC|$, dan geldt

$$|AB|^2 = (|BD| - x)^2 + y^2$$

en

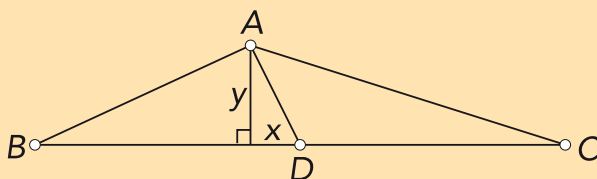
$$|AC|^2 = (|BD| + x)^2 + y^2.$$

Optellen en invullen van $x^2 + y^2 = |AD|^2$ geeft de gelijkheid.

In de opgave vormen de twee ingesloten witte driehoekjes samen een driehoek zoals in de figuur. De oppervlakte van een gelijkzijdige driehoek is evenredig met het kwadraat van z'n zijde. Als de gevraagde oppervlakte O is, volgt daarom

$$18 + 32 = 2 \times 2 + 2O.$$

Dus $O = 23$.



Een ellips is niet zomaar een willekeurige eivormige figuur. Een ellips is de verzameling van alle punten waarvoor de som van de afstanden tot twee vastgekozen punten (de zogeheten brandpunten van de ellips) een vaste waarde heeft. In dit artikel beschrijven we zes verschillende methodes om een ellips te maken.

■ door Jan Guichelaar

ELLIPSENPARADE



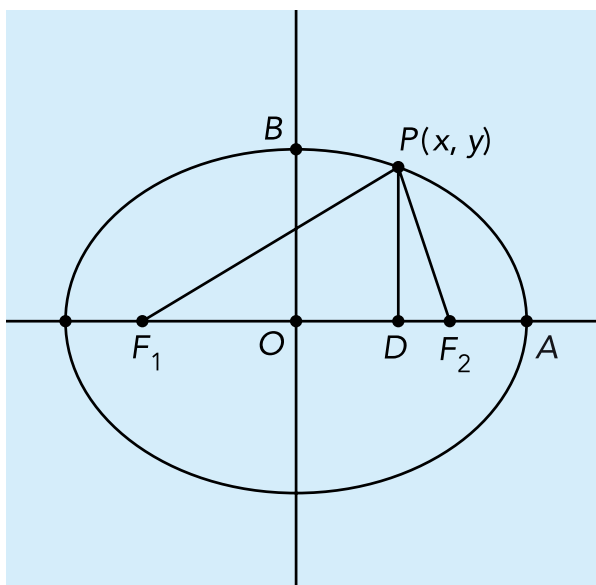
Een ellips met raaklijnen in het zand; de twee stenen stellen de brandpunten voor.
Bron: Siggraph Traveling Art Show, Santa Monica, 1999.

Reeds de oude Grieken, waaronder Euclides, bestudeerden de ellips; samen met de hyperbool en de parabool vatten ze die op als kegelsneden. Ze construeerden deze figuren namelijk door een kegel te doorsnijden met een vlak. De hoek tussen de as van de kegel en het vlak bepaalt welke van de drie kegelsneden je krijgt. Ook in de natuurkunde is de ellips een klassieker. Johannes Kepler ontdekte begin zeventiende eeuw dat planeten ellipsen om de zon beschrijven en Isaac Newton leidde hier vijftig jaar later de zwaartekrachtswet uit af die we nu nog steeds gebruiken. Er zijn echter 'vele wegen die naar Rome leiden', om nog maar een klassieker van stal te halen. Zo zijn er veel manieren om een ellips te maken. We geven hier zes heel verschillende methodes.

TUINMANMETHODE; FORMULE IN COÖRDINATEN

De methode die eigenlijk iedereen behoort te weten: zet twee spijkertjes in een plank en neem een touwtje waar je een knoop in legt. Leg het touwtje om de twee spijkertjes en trek met een potlood het touwtje strak. Dat geeft punt P . Beschrijf nu een kromme om de twee spijkertjes heen, waarbij het touwtje steeds strak blijft staan. Het potlood beschrijft nu op de plank een ellips. De plaatsen van de spijkertjes noemen we de brandpunten F_1 en F_2 .

Deze constructie, die in het artikel 'De tuinman en de glazenwasser' al eerder aan bod kwam in dit tijdschrift (september 2006), wordt wel de 'tuinmanmethode' genoemd: tuinmannen passen hem toe om ovale perkjes af te zetten.



Figuur 1 $a = OA$ en $b = OB$

In een rechthoekig coördinatenstelsel beschrijft de vergelijking

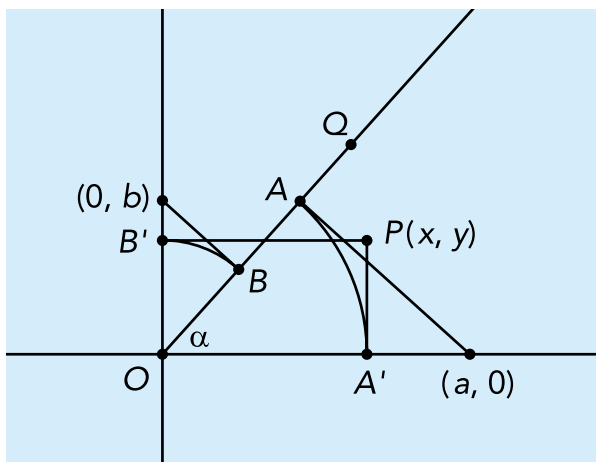
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

deze ellips. In figuur 1 is de som van de twee afstanden van P tot de brandpunten $F_1(-p, 0)$ en $F_2(p, 0)$ (p positief) gelijk aan

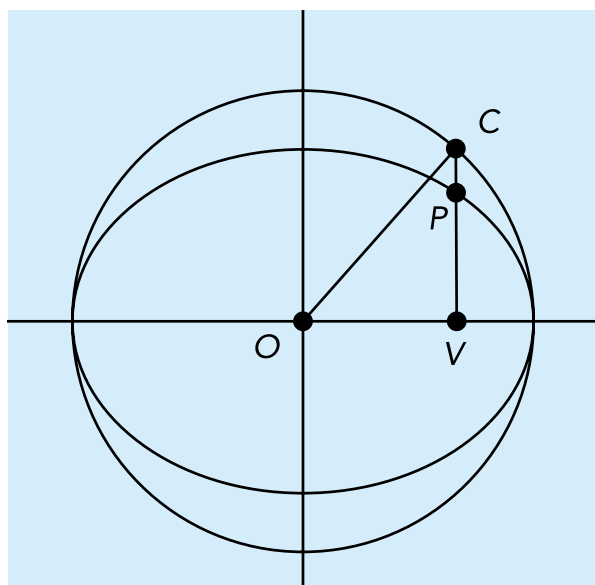
$$\sqrt{(x-p)^2 + y^2} + \sqrt{(x+p)^2 + y^2} = 2a.$$

Met wat rekenwerk kun je hieruit de vergelijking zelf afleiden.

DE AFGEPLATTE CIRKEL Een ellips is op het eerste gezicht een afgeplatte cirkel. En jawel: dat klopt. Neem de vergelijking van de cirkel met straal a : $x^2 + y^2 = a^2$. Ga nu binnen de cirkel op een punt V van de x -as 'staan' en verkort de y -coördinaten van de twee punten 'boven' en 'onder' met een factor k ($0 < k < 1$). Dan krijgen we een 'afgeplatte' cirkel,



Figuur 3



Figuur 2 $a = OC$, $k = \frac{PV}{CV}$ en $b = k \cdot a$

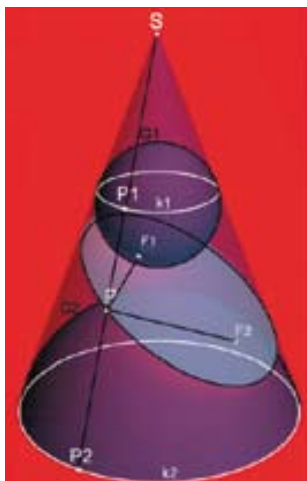
die een ellips is, zie figuur 2.

De punten P van de 'afgeplatte' cirkel hebben als coördinaten X en Y met $X = x$ en $Y = k \cdot y$. Invullen in de vergelijking van de cirkel geeft met $b = k \cdot a$ opnieuw de vergelijking die we bij de tuinmanmethode gaven.

EEN GEKKE MANIER Neem vier punten $(-a, 0)$, $(a, 0)$, $(0, -b)$ en $(0, b)$ (a en b positief). We nemen een halve rechte lijn OQ vanuit O in een willekeurige richting, voor het gemak in het eerste kwadrant. Laat nu vanuit $(a, 0)$ en $(0, b)$ loodlijnen neer op de lijn OQ . Noem de voetpunten respectievelijk A en B . Draai nu OA naar de x -as; dit geeft punt A' . Draai OB naar de y -as; dit geeft punt B' . Met $x = OA'$ en $y = OB'$ leggen we een punt $P(x, y)$ van de kromme vast. Deze kromme, die ontstaat door de lijn OQ te variëren, is een ellips, zie figuur 3. Het bewijs is niet moeilijk. De hoek tussen de x -as en de lijn OQ noemen we α . Er geldt dat $y = OB = b \cdot \cos(90^\circ - \alpha) = b \cdot \sin \alpha$ en $x = OA = a \cdot \cos \alpha$. Met $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ kun je dan de ellipsformule opnieuw afleiden.

DE BOLLEN VAN DANDELIN Echt bewijzen dat een ellips een kegelsnede is, vergt op de gangbare manier heel wat rekenwerk. De Franse wiskundige Germinal P. Dandelin (1794-1847), die onder Napoleon vocht en later Nederlander werd, gaf het volgende mooie bewijs dat de top van een schuin afgesneden kegel een ellips is.

Bekijk figuur 4. Er zijn twee bollen G_1 en G_2 , boven en onder de kegelsnede. De bovenste raakt in elk punt van de cirkel k_1 aan de kegelmantel en in punt F_1 aan het vlak van de kegelsnede. De on-



Figuur 4

derste bol raakt in elk punt van de cirkel k_2 aan de kegelmantel en in F_2 aan het vlak van de kegelsnede. F_1 en F_2 blijken dan de brandpunten van de ellips te zijn.

Neem een willekeurig punt P op de kegelsnede. Het lijnstuk PP_1 op PS , met S de top van de kegel, raakt in P_1 op cirkel k_1 aan de kleine bol. Het lijnstuk PF_1 raakt eveneens aan de kleine bol. Deze twee lijnstukken zijn dus even lang: $PP_1 = PF_1$. Net zo kunnen we inzien dat $PP_2 = PF_2$. Dus geldt voor de som van de afstanden van P tot de punten F_1 en F_2 : $PF_1 + PF_2 = P_1P + P_2P = P_1P_2$. Als P nu langs

de kegelsnede beweegt, draaien P_1 en P_2 op SP_1P_2 over de kegelmantel. Vanuit de symmetrie is direct in te zien dat de lengte van P_1P_2 daarbij niet verandert. Dus P beschrijft een ellips met F_1 en F_2 als brandpunten.

DEFINITIE VAN JOHAN DE WITT Johan de Witt (1625-1672) was raadspensionaris van Holland, een functie die je kunt vergelijken met wat tegenwoordig premier van Nederland is. Samen met zijn broer werd hij in het rampjaar 1672 door het volk in Den Haag vermoord. Hij was niet alleen een voornaam bestuurder, maar ook een briljant wiskundige. Van hem is de volgende definitie van een ellips afkomstig. Bekijk figuur 5.

Op een lijnstuk AP met vaste lengte a ligt een vast punt B met $BP = b$. Laat nu punt A over de y -as schuiven en punt B over de x -as. Punt P beschrijft dan een ellips. Voor het bewijs kunnen we uit de figuur de volgende twee formules afleiden:

$$\frac{-t}{a-b} = \frac{y}{b}$$

en

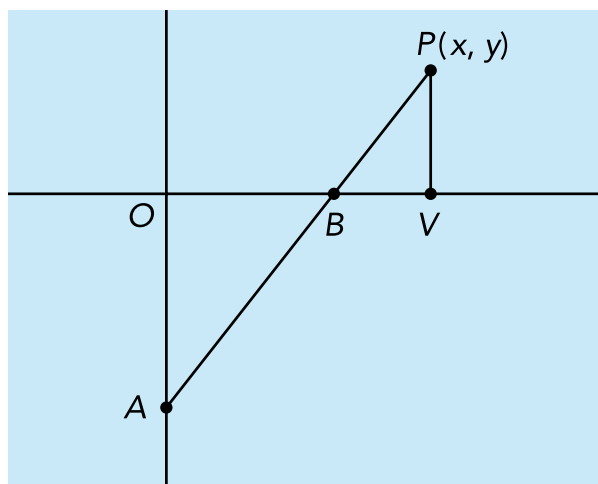
$$x^2 + (y-t)^2 = a^2.$$

Toon zelf aan (door de parameter t te elimineren) dat hieruit opnieuw de standaardformule voor de ellips volgt.

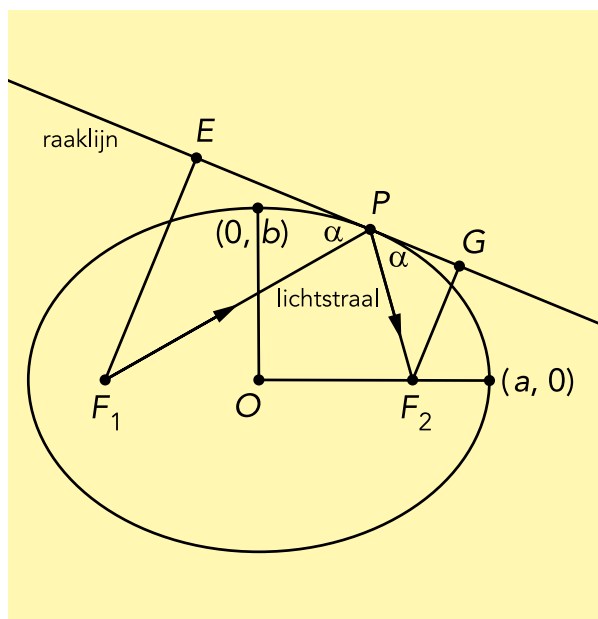
TWEE ELLIPSEN VAN GRAVES De ellips blijkt een hardnekkig verschijnsel: de touwtruc van de tuinman werkt ook om een ellips heen. Neem een lang genoeg touwtje en trek het met een potlood strak om de eerste ellips. Het potlood beschrijft dan opnieuw een ellips, met dezelfde brandpunten ('confocaal'). Dit is een gevolg van een stelling van bisschop Charles Graves (1812-1899).

Het bewijs van deze stelling is helaas nogal omslachtig; we geven hier slechts een schets, in drie delen.

1. Zie figuur 6. In elk punt P van een ellips maakt de raaklijn met de verbindingslijnstukken F_1P en F_2P met de brandpunten gelijke hoeken. Het is de bekende eigenschap dat een lichtstraal uit brand-



Figuur 5 $a = AP$, $b = BP$, $t = OA$, $y = VP$, $x = OV$

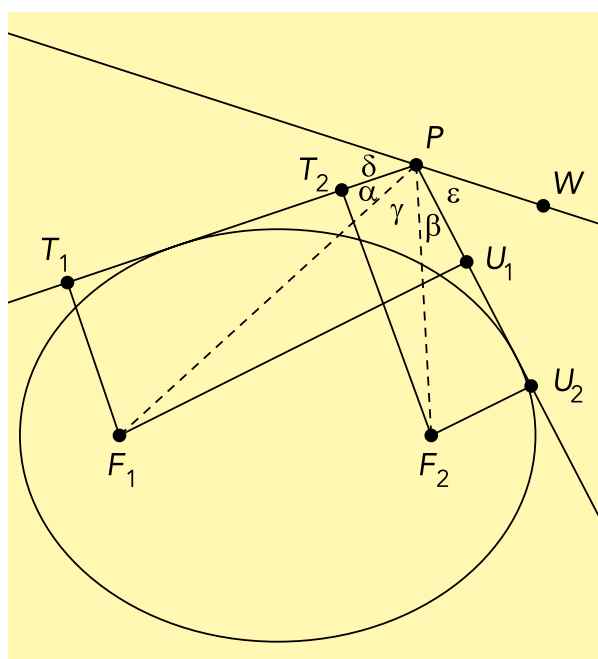


Figuur 6 $p = OF^2$

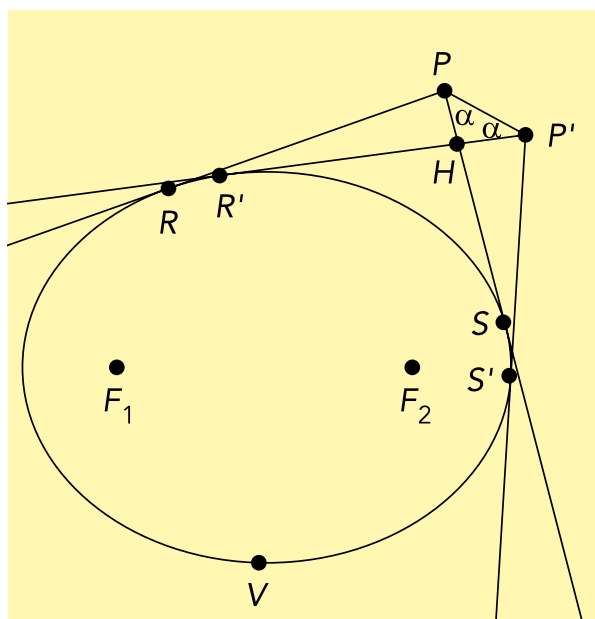
punt F_1 na terugkaatsing op de binnenkant van de ellips door brandpunt F_2 gaat.

Als je vanuit de brandpunten F_1 en F_2 loodlijnen F_1E en F_2G neerlaat op een raaklijn, geldt $F_1E \cdot F_2G = b^2$. Twee bijzondere gevallen zijn eenvoudig te controleren. Voor de horizontale raaklijn door $(0, b)$ geldt dat $F_1E = b$ en $F_2G = b$ en dus $F_1E \cdot F_2G = b^2$. Voor de verticale raaklijn door $(a, 0)$ geldt dat $E = G = (a, 0)$. Verder geldt dan dat $F_1E = a + p$ en $F_2G = a - p$ en dus $F_1E \cdot F_2G = a^2 - p^2 = b^2$.

2. Zie figuur 7. Neem een punt P buiten een ellips en trek daardoor de twee raaklijnen. Laat vanuit



Figuur 7



Figuur 8

de brandpunten de loodlijnen F_1T_1 , F_2T_2 , F_1U_1 en F_2U_2 op de raaklijnen neer. Dan geldt met het eerste deel van het bewijs: $F_1T_1 \cdot F_2T_2 = F_1U_1 \cdot F_2U_2 = b^2$. Hieruit kun je zelf afleiden dat $\alpha = \beta$.

Neem nu door P een tweede ellips met dezelfde brandpunten en door P de raaklijn PW . Dan weten we uit het eerste deel dat $\delta + \alpha = \epsilon + \beta$ en dus $\delta = \epsilon$.

3. Zie figuur 8. Nu de laatste stap. Neem op de buitenste ellips vlak bij elkaar de punten P en P' en teken de vier raaklijnen. De raaklijn aan de grote ellips gaat door P en P' (hoe dichterbij elkaar hoe beter de benadering). Uit het tweede deel van het bewijs volgt dan dat de hoeken bij P en P' gelijk zijn en dat dus $PH = P'H$.

Nu gaan we aantonen dat het gespannen touwtje door P en om de kleine ellips dezelfde lengte heeft als het touwtje door P' om de ellips. Als dat zo is, dan heeft het touwtje om elk punt van de grote ellips om de kleine ellips dus dezelfde lengte. Omgekeerd beschrijft dan een touwtje van vaste lengte een grote ellips. Het verschil van beide lengtes moet dan 0 zijn:

$$[PR + RVS + SP] - [P'R' + R'VS' + S'P'] =$$

$$[(P'R' - P'H + R'R) + (R'VS' - R'R + S'S) + (S'P' - S'S + PH)] - [P'R' + R'VS' + S'P'] =$$

$$-P'H + PH = 0.$$

Daarmee is de stelling van Graves bewezen. ■

Vorige maand deden een paar duizend leerlingen uit heel Nederland mee aan de eerste ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade: acht vijfkeuzevragen en vier open vragen. De besten uit de categorieën 'onderbouw', 'vierde klas' en 'vijfde klas' krijgen een prijs en worden bovendien uitgenodigd voor de tweede ronde in september op de Technische Universiteit Eindhoven.

■ door Julian Lyczak



NEGENS, NEGENS EN NOG MEER NEGENS

De eerste ronde van de Wiskunde Olympiade bestaat uit leuke puzzels waar je weinig schoolse wiskunde voor nodig hebt. Toch leek voor de tweede open vraag van dit jaar in eerste instantie wel heel veel rekenwerk nodig te zijn. Dit artikel gaat juist over die opgave en hoe je bij die opgave met wat creativiteit toch op de oplossing kunt komen binnen de beschikbare tijd.

Opgave B2. Het gehele getal N bestaat uit 2009 negens achter elkaar geschreven. Een computer berekent $N^3 = (99999 \dots 99999)^3$. Hoeveel negens bevat het uitgeschreven getal N^3 in totaal?

EEN VERMOEDEN KRIJGEN Bij de eerste ronde wordt alleen naar het antwoord gevraagd en niet naar een bewijs of redenering. Het is dus voldoende om in de beschikbare tijd, twee uur in totaal, op het antwoord te komen, zonder een volledig bewijs te hebben. De vraag is nu: hoe doe je dat? Het vervellende aan de opgave is, dat N een ongelooflijk groot

getal is en dat het daadwerkelijk uitrekenen van N^3 niet te doen is. Verder kun je je afvragen in hoeverre die 2009 nou echt iets met de opgave te maken heeft. Uiteraard is dat het jaar waarin we leven, maar zou de opgave echt lastiger worden als het getal niet uit 2009, maar uit duizend of vijf miljoen negens bestond? Dit kan je op het idee brengen om te gaan kijken hoeveel negens er in $(999 \dots 999)^3$ zitten, als het getal uit een bepaald aantal, zeg k , negens bestaat. Dit wordt wel het *principe van Pólya* genoemd, naar de Hongaarse wiskundige G. Pólya (1887-1985). Dit principe zegt: 'als je iets niet kunt bewijzen, bewijs dan iets wat algemener is.'

Hoe ver komen we met Pólya in het achterhoofd? We kunnen de oplossing niet vinden voor 2009 negens, dus dan gaan we kijken of we wel iets weten voor k negens. We beginnen makkelijk: $k = 1$. Het getal dat we moeten berekenen, is $9^3 = 729$ en dat bevat 1 negen. Voor $k = 2$ moeten we 99^3 berekenen. Dit is al een stuk meer werk; het gebruik van een rekenmachine bij de olympiade is

$$N = \underbrace{99999 \dots 99999}_{k \times}$$

$$N^3 = \underbrace{999 \dots 999}_{(k-1) \times} \underbrace{7000 \dots 000}_{(k-1) \times} \underbrace{2999 \dots 999}_{k \times}$$

immers verboden! Maar het is in ieder geval nog te doen, zeker als we 99 schrijven als $100 - 1$. We berekenen eerst

$$\begin{aligned} 99^2 &= 99 \cdot (100 - 1) = \\ &= 9900 - 99 = 9801 \end{aligned}$$

en vervolgens

$$\begin{aligned} 99^3 &= 99^2 \cdot 99 = \\ &= 9801 \cdot (100 - 1) = \\ &= 980100 - 9801 = 970299. \end{aligned}$$

We krijgen nu dus een getal waarin 3 negens zitten.

We hebben nu twee gevallen bekeken, maar dat is niet genoeg om een goed vermoeden op te baseren. Daarom berekenen we ook 999^3 . Met hetzelfde trucje berekenen we

$$\begin{aligned} 999^2 &= 999 \cdot (1000 - 1) = \\ &= 999000 - 999 = 998001 \end{aligned}$$

en daarna

$$\begin{aligned} 999^3 &= 999^2 \cdot 999 = \\ &= 998001 \cdot (1000 - 1) = \\ &= 998001000 - 998001 = \\ &= 997002999. \end{aligned}$$

Dus als we 999^3 uitschrijven, dan zitten er 5 negens in. Verder lijkt er een verband te zijn tussen 99^3 en 999^3 : het lijkt wel alsof er bij 970299 een negen aan het begin en een negen aan het eind zijn toegevoegd en een nul tussen de twee en de zeven is gezet. Hé, dat is eigenlijk ook hoe je van $9^3 = 729$ naar $99^3 = 970299$ gaat. Hierdoor zien we zelfs de manier waarop het aantal negens met twee toeneemt als k eentje groter wordt, namelijk met een negen aan het begin en één aan het eind. Zo raken we er steeds meer van overtuigd dat er $2k - 1$ negens in het getal zitten dat we krijgen als we het getal bestaande uit k negens tot de derde macht verheffen. Dus hoogstwaarschijnlijk geldt dat in N^3 (het geval met $k = 2009$) $2 \cdot 2009 - 1 = 4018 - 1 = 4017$ negens zitten. Dit is natuurlijk geen bewijs, maar dat wordt ook niet gevraagd. We vullen 4017 in en gaan snel door met de volgende opgave.

HET BEWIJS Wat nu als deze vraag bij de tweede ronde kwam? In tegenstelling tot de eerste ronde zou je dan wel een bewijs moeten geven. Hoe pakken we dat aan? Zoals we al opmerkten, lijkt niet alleen in het *aantal* negens een regelmaat te zitten, maar ook in de *vorm*: het lijkt wel alsof het eerst $k - 1$ negens zijn, dan 1 zeven, vervolgens $k - 1$ nullen, 1 twee en ten slotte k negens. Misschien kunnen we dat zelfs bewijzen.

Met n noteren we het getal dat uit k negens bestaat. Zouden we wat opschieten door n te schrijven als $10^k - 1$? Haakjes uitwerken van n^3 levert dan:

$$(10^k - 1)^3 = 10^{3k} - 3 \cdot 10^{2k} + 3 \cdot 10^k - 1.$$

Als we bedenken dat we willen bewijzen dat n^3 begint met $k - 1$ negens en eindigt op k negens, dan willen we graag de term $10^k - 1$, voor de k negens aan het eind, krijgen. Op dezelfde manier zou de term $10^{2k+1}(10^{k-1} - 1)$, voor de $k - 1$ negens aan het begin gevolgd door $2k + 1$ nullen, zorgen. Van de term $10^k - 1$ hebben we al de 'min één' en de 10^k kunnen we verkrijgen door $3 \cdot 10^k$ op te splitsen in 10^k en $2 \cdot 10^k$. Net zo hebben we van $10^{2k+1}(10^{k-1} - 1) = 10^{3k} - 10^{2k+1}$ al de 10^{3k} en maken we zelf een 10^{2k+1} door $-3 \cdot 10^{2k}$ te schrijven als $-10 \cdot 10^{2k} + 7 \cdot 10^{2k}$. Dan krijgen we:

$$n^3 = 10^{3k} - 10 \cdot 10^{2k} + 7 \cdot 10^{2k} + 2 \cdot 10^k + 10^k - 1.$$

Laten we eens gaan kijken of er staat wat we willen. Die $10^k - 1$ geeft precies de k negens aan het eind, de $2 \cdot 10^k$ geeft dat links van die negens een twee staat. Zo geeft de $7 \cdot 10^{2k}$ dat k plekken naar links een zeven staat, daartussen staan dus $k - 1$ nullen. Als laatste hebben we nog $10^{3k} - 10 \cdot 10^{2k}$, waar we voor hadden gezorgd, omdat het gelijk is aan $10^{2k+1}(10^{k-1} - 1)$, zodat er $k - 1$ negens precies voor die zeven komen.

We hebben nu bewezen: het getal bestaande uit k negens tot de derde macht, is het getal dat achter-eenvolgens bestaat uit $k - 1$ negens, 1 zeven, $k - 1$ nullen, 1 twee en aan het eind k negens. Het totale aantal negens is dus $2k - 1$; precies wat we vermoedden! ■

PYTHAGORAS OLYMPIADE

■ door Thijs Notenboom en Iris Smit

Uitdagende opgaven die je doorgaans niet in de schoolboeken tegenkomt: dat is de *Pythagoras Olympiade*. In elk nummer staan twee opgaven, en twee oplossingen van de opgaven uit twee afleveringen terug. Ga de uitdaging aan en stuur ons je oplossing! Onder de goede leerling-inzenders wordt per opgave een boekenbon van 20 euro verloot. Bovendien kun je je via de Pythagoras Olympiade plaatsen voor de tweede ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade, mocht het via de eerste ronde niet lukken.

Aan het eind van de jaargang wordt gekeken wie in totaal de meeste opgaven heeft opgelost. Deze persoon, die geen leerling hoeft te zijn, wint een boekenbon van 100 euro.



26

HOE IN TE ZENDEN?

Insturen kan per e-mail:
pytholym@pythagoras.nu
of op papier naar het volgende adres:

Pythagoras Olympiade
Korteweg-de Vries Instituut
Universiteit van Amsterdam
Plantage Muidersgracht 24
1018 TV Amsterdam

Voorzie het antwoord van een duidelijke toelichting (dat wil zeggen: een berekening of een bewijs). Vermeld behalve je naam, ook je adres, school en klas.

Je inzending moet bij ons binnen zijn vóór 15 april 2009.

OPGAVE 164

Bepaal alle reële getallen x die voldoen aan

$$x = \sqrt{x - \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}}.$$

OPGAVE 165

Binnen een parallellogram $ABCD$ ligt een punt O zo, dat $\angle AOB + \angle COD = 180^\circ$.

Bewijs dat $\angle OBC = \angle ODC$.

OPLOSSING 160

Bestaat er een getal n van drie cijfers (tientallig geschreven) met de eigenschap dat n gelijk is aan $s + 2m$, met s de som van de drie cijfers van n en m het getal dat je krijgt door de drie cijfers van n achterstevoren op te schrijven?

Oplossing. Zo'n getal bestaat niet. We bewijzen dit uit het ongerijmde. Stel dat er wél een dergelijk getal n bestaat. Noem de drie cijfers waaruit n bestaat (van links naar rechts) a , b en c , dus $n = 100a + 10b + c$. Natuurlijk geldt dat a , b en c geheel zijn met $1 \leq a \leq 9$, $0 \leq b \leq 9$ en $0 \leq c \leq 9$. Vanwege de genoemde eigenschappen waaraan n moet voldoen, geldt $100a + 10b + c = n = s + 2m = a + b + c + 2(100c + 10b + a)$, zodat $97a = 200c + 11b$. We kunnen zien dat de laatste twee cijfers van het getal rechts gelijk moeten zijn. Dit moet dan ook voor de

linkerkant gelden. We testen $97a$ voor $a = 1$ tot en met $a = 9$ en vinden dat alleen $a = 4$ zou kunnen: er geldt $97 \cdot 4 = 388$. Dan moet gelden dat $b = 8$. Er blijft over dat $300 = 200c$, dus c is niet geheel: een tegenspraak.

Deze opgave werd goed opgelost door **Leonie Broersen** van het Stedelijk Gymnasium te Haarlem, **P. Dekker** uit Krimpen aan de Lek, **Jeroen Huijben** van het Theresialyceum te Tilburg, **Stefan Klootwijk** van het Bonhoeffer College te Enschede, **Sander Konijnenberg** van RSG 't Rijks te Bergen op Zoom, **Marco Lin** van het Christelijk Gymnasium Sorghvliet te Den Haag, **Fred Schalekamp** uit Brakel, **Martijn Valk** van het Ichthus College te Veenendaal en **Bart Wiersma** van het Dalton Voorburg te Voorburg.
De boekenbon gaat naar Jeroen Huiben.

OPLOSSING 161

Gegeven is een geheel getal n dat geen macht van een priemgetal is. Laat zien dat er een n -hoek bestaat, waarvan alle hoeken gelijk zijn, en waarvan de zijden de lengtes 1 tot en met n hebben, in een of andere volgorde.

Oplossing. Omdat n geen macht van een priemgetal is, kunnen we schrijven $n = ab$ met $\text{ggd}(a, b) = 1$. We kunnen een n -hoek beschouwen als een optelling van vectoren, waarbij de zijden de vectoren voorstellen. Omdat de n -hoek gesloten is, worden al deze vectoren samen precies nul. We plaatsen deze vectoren nu allemaal met hun beginpunt op de oorsprong. Omdat de hoeken van de n -hoek allemaal even groot moeten zijn, hebben deze vectoren onderling steeds hoek $2\pi/n$. Neem nu eerst even allemaal vectoren van lengte 1, en nummer ze tegen de klok in v_1 tot en met v_n .

Omdat $n = ab$, vormen $v_m, v_{m+b}, \dots, v_{m+(a-1)b}$ de vectoren die horen bij een regelmatige a -hoek (voor $1 \leq m \leq b$). Dit betekent dat $\sum_{i=0}^{a-1} v_{m+ib} = 0$. Net zo vormen $v_m, v_{m+a}, \dots, v_{m+(b-1)a}$ de vectoren die horen bij een regelmatige b -hoek (voor $1 \leq m \leq a$). Dit geeft $\sum_{j=0}^{b-1} v_{k+ja} = 0$. Ten slotte kunnen we met behulp van de regelmatige n -hoek zien dat $\sum_{m=1}^n v_m = 0$.

Neem nu voor $1 \leq k \leq n$ de getallen i_k en j_k zodanig dat $0 \leq i_k < a$, $0 \leq j_k < b$ en $k - 1 \equiv i_k \pmod{a}$ en $k - 1 \equiv j_k \pmod{b}$. Definieer $l_k = 1 + i_k + a \cdot j_k$. Dan geldt $1 \leq l_k \leq 1 + a - 1 + a(b - 1) = ab$

$= n$. Neem nu voor de k -de zijde van de n -hoek de vector $l_k \cdot v_k$.

Stel nu dat twee zijden dezelfde lengte hebben gekregen. Dan geldt $l_{k_1} = l_{k_2}$, voor k_1 en k_2 verschillend. Dat kan alleen als $i_{k_1} = i_{k_2}$ en $j_{k_1} = j_{k_2}$, zeg $k_1 > k_2$. Dan geldt $k_1 - k_2 \equiv i_{k_1} - i_{k_2} \equiv 0 \pmod{a}$ en $k_1 - k_2 \equiv j_{k_1} - j_{k_2} \equiv 0 \pmod{b}$.

Nu is $k_1 - k_2$ dus een veelvoud van a en b en omdat $\text{ggd}(a, b) = 1$, moet het ook een veelvoud van $ab = n$ zijn. Omdat $0 \leq k_1 - k_2 < n$, geldt nu $k_1 - k_2 = 0$, dus $k_1 = k_2$. De zijden moeten nu wel lengtes 1 tot en met n hebben.

Met wat rekenwerk en handig herschrijfwerk vinden we dat $\sum_{k=1}^n l_k \cdot v_k = 0$.

Dit betekent dat we de gezochte n -hoek kunnen krijgen door deze vectoren als zijden aan elkaar te plakken.

Deze opgave werd goed opgelost door **Marcel Roggeband** uit Hoofddorp en **Fred Schalekamp** uit Brakel.

In het vorige nummer bleef **P. Dekker** uit Krimpen aan de Lek per abuis onvermeld als goede oplosster van de opgaven 158 en 159.

In Hilberts visie zou de hele wiskunde in de twintigste eeuw gevangen worden in een handvol axioma's, waaruit bijna machinaal alle ware stellingen zijn af te leiden. Hilberts visie, het formalisme, bleek een luchtkasteel. Toch twijfelt niemand aan Hilberts grootheid. Zijn ware fans houden zelfs vol dat hij, en niet Einstein, de Algemene Relativiteitstheorie ontdekte. Dat vond hij zelf trouwens niet. Een bijzonder liefdevol mens was hij niet; hij had een schizofrene zoon die hij verstootte, want het werk ging vóór.

■ door Arnout Jaspers

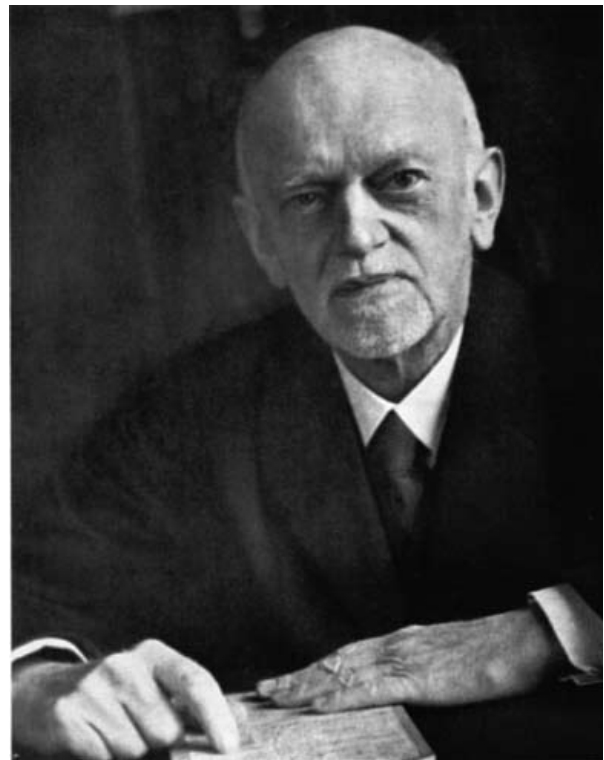
DAVID HILBERT (1862-1943):

DE PAUS VAN HET FORMALISME

Anders dan veel beroemd geworden wiskundigen, was David Hilbert geen wonderkind. Hij ging pas op z'n achtste voor het eerst naar school – misschien omdat hij thuis onderwijs kreeg van z'n moeder – maar ook in de jaren daarna en op het gymnasium in zijn geboortestad Königsberg viel hij niet op door bijzondere prestaties. Dat gymnasium, het Friedrichscollege, was ook voor die tijd behoorlijk ouderwets: je leerde er vooral Grieks en Latijn, een beetje wiskunde en verder eigenlijk niets. Hilbert ploegde zich door de klassieke talen heen, met tegenzin maar zonder in opstand te komen: 'Ik deed niet veel wiskunde op school,' zei hij in een terugblik op zijn leven, 'omdat ik wist dat ik dat later zou gaan doen.'

Inderdaad, vanaf het moment dat hij aan de universiteit van Königsberg (en later Heidelberg en Göttingen) wiskunde studeerde, was duidelijk dat hij zich door niets nog van z'n roeping zou laten afleiden. Toch was hij al 26 – een leeftijd waarop menige wiskundige z'n beste ideeën al achter zich heeft – toen hij zijn eerste belangrijke resultaat boekte: de oplossing van het Gordanprobleem. Dat was wel meteen voldoende om internationaal zijn reputatie te vestigen. Het Gordanprobleem gaat over nogal abstracte wiskunde, de theorie van algebraïsche invarianten, zie het kader op pagina 30. Bijna een eeuw lang was op dat gebied stukje bij beetje vooruitgang geboekt, maar het Gordanprobleem stelde de vraag of het mogelijk was de oneindig talrijke invarianten systematisch te ordenen en uit een eindig aantal bouwstenen op te bouwen.

Tot dan toe had iedereen geprobeerd dit te bewijzen door een voorbeeld van zo'n volledige set bouwstenen (een 'basis') te construeren. Hilbert bewees echter 'uit het ongerijmde' dat zo'n basis moest



Figuur 1 Hilbert op 75-jarige leeftijd

bestaan, door uit de aanname dat deze *niet* bestaat een tegenspraak af te leiden. Hij construeerde dus geen basis, maar leverde een 'existentiebewijs'. De wiskunde die hij daarvoor gebruikte is ruimschoots te moeilijk om hier te beschrijven. Gordan en veel collega's konden weliswaar Hilberts wiskundige methoden volgen, maar toch hadden ze er grote moeite mee: 'Dat is geen wiskunde, dat is theologie!' protesteerde Gordan. Later zag hij wel degelijk de waarde in van existentiebewijzen: 'Ik moet toegeven, dat ook theologie z'n verdiensten heeft.'

Hilberts 'theologie' loste in 1908 een ander famous probleem op, dat van Waring, zie het kader op pagina 32. De achttiende eeuwse Brit Edmund Waring stelde dat elk geheel getal te schrijven is als som van ten hoogste 4 kwadraten, of 9 derdemachten, of 19 vierdemachten, en zelfs als som van $g(k)$ k -de machten, waarbij $g(k)$ een of andere eindige waarde is. Waring had niet eens een bewijs voor $g(2) = 4$, laat staan voor de algemene bewering. Hilbert bewees dat $g(k)$ bestaat voor iedere k . Maar ook dit was een existentiebewijs, dat voor geen enkele k een concrete waarde $g(k)$ opleverde.

ZWAKTEBOD Terwijl veel wiskundigen existentiebewijzen nog beschouwden als een zwaktebod, vond Hilbert ze superieur aan constructieve bewijzen, juist omdat ze van geen enkel concreet voorbeeld afhankelijk waren. Een van zijn fanatiekste tegenstanders was de Nederlandse wiskundige L.E.J. Brouwer (niemand haalde het in z'n hoofd om hem bij z'n voornaam te noemen).

Volgens Brouwer mocht je nooit stellen dat een bewering ófwel waar, ófwel niet waar was. Bewijzen dat een uitspraak X waar is door een tegenspraak af te leiden uit de aanname dat niet- X waar is, is in diens 'intuitionistische wiskunde' verboden. Het bestaan van 'iets' is pas bewezen, als je een constructievoorschrift voor dat 'iets' kunt geven. Dat moest natuurlijk wel botsen met Hilberts 'formalistische' aanpak. Over de heftige controverses tussen Hilbert en Brouwer is al uitgebreid geschreven in een eerdere aflevering in deze serie (*Pythagoras*, november 2007).

Tussen het probleem van Gordan en Waring loste Hilbert nog een ander probleem op, namelijk dat een universitair docent toen geacht werd keurig een gezin te stichten. Hij deed dat in 1892 met Käthe Jerosch, afkomstig uit een familie waarmee zijn ouders al lang bevriend waren. Ze bleven inderdaad bij elkaar tot de dood hun scheidde, maar een familiemens was hij niet. Het bleef bij één kind, zoon Franz, waar hij volgens zijn biografie Constance Reid, 'dankzij hun grote huis' weinig last van had bij zijn werk.

Hilbert hield er overigens niet van om in zijn studeerkamer te zitten, het liefst maakte hij lange wandelingen met zijn meest vertrouwde col-

lega's om over z'n onderzoek te praten. In zijn tuin had hij onder een overkapping een zes meter lang schoolbord laten aanbrengen, zodat hij zelfs daar lopend kon werken.

Zoals veel geniale wetenschappers, kon hij voor de minder voortreffelijke aspecten van het leven weinig compassie opbrengen, zelfs niet als het zijn eigen zoon betrof. Franz blonk op school al niet uit, en hoorde vanaf z'n twintigste stemmen en kreeg waandenkbeelden. Dat leidde tot heftige botsingen met Hilbert, van het soort waarbij hij met z'n vuist op tafel sloeg en tegen Franz riep: 'Er bestaan geen geesten!', alsof dat iemand in een psychose zal kalmeren. Franz werd na een heftige crisis in een kliniek opgenomen. 'Vanaf nu moet ik er van uitgaan dat ik geen zoon heb,' vertrouwde hij zijn collega Courant toe. Toen Käthe later weer thuis voor hun zoon wilde gaan zorgen, betekende dat bijna het einde van het huwelijk.

GOUDEN TIJDPERK Hilbert liet niets tussen hem en zijn wiskunde komen. Met briljante collega's als Herman Minkowski, Max Born, Ricard Courant, Emmy Noether en Herman Weyl was in Göttingen sprake van een gouden tijdperk, waar Hilbert niets van wilde missen. In Göttingen was men er niet slechts van overtuigd dat wiskunde een bijna objectief vast te stellen schoonheid bezat; sommigen geloofden ook, dat 'schoonheid' aan wiskundige wetten voldeed.

Hilbert herinnerde zich over zijn leermeester Felix Klein, waarvoor hij een bijna religieus ontzag koesterde: 'De parabolische krommen zijn door F. Klein gebruikt voor een merkwaardig onderzoek. Hij nam aan, dat de artistieke schoonheid van een gezicht geworteld was in bepaalde wiskundige relaties en liet daarom op de Apollo van Belvedere, waarvan de gelaatstrekken een bijzonder hoge mate van klassieke schoonheid weergeven, zoveel mogelijk parabolische krommen intekenen. Deze krommen hadden echter geen bijzonder eenvoudige formule, noch viel er een algemene wet te ontdekken waaraan ze voldeden.'

Er bestaat nog een vage foto van het door Klein bewerkte Apollob beeldje. Het beeld doet denken aan wat je te zien krijgt als je in een fotobewerkingsprogramma het filter 'contour' toepast met een heel



Figuur 2 Hilberts leermeester Felix Klein probeerde de schoonheid van de Apollo van Belvedere te vatten in wiskundige wetmatigheden door contouren op het gelaat te tekenen. Onbedoeld was hij dus een voorloper van moderne fotobewerkingsprogramma's.

grove detaillering, zie figuur 2. Dat is niet toevallig: het soort analyse dat Klein probeerde, speelt tegenwoordig een rol bij het maken van computergraphics. Het doel is niet een wiskundige formule voor 'schoonheid', maar een zo suggestief mogelijke manier om met een paar lijnen, beschreven door relatief simpele formules, een levensechte figuur te tekenen.

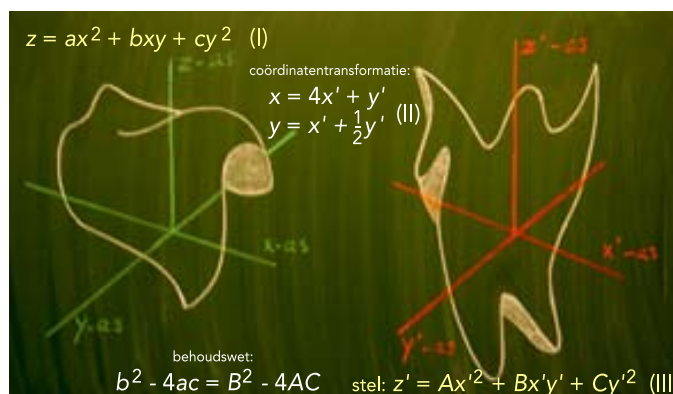
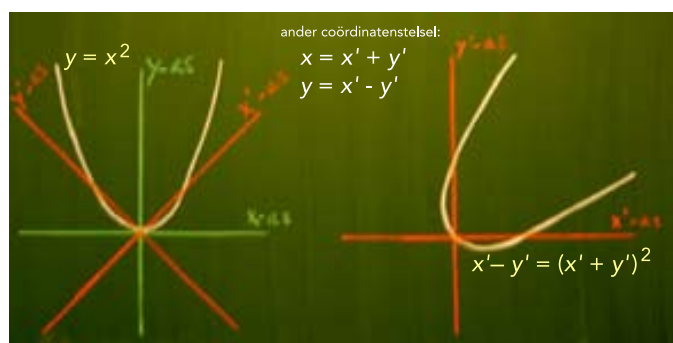
VOLTOOID In zijn lange carrière leverde Hilbert belangrijke bijdragen aan allerlei takken van wiskunde. Hij leek soms zelfs van mening dat hij een bepaald vakgebied, bijvoorbeeld de algebraïsche invarianten, in wezen voltooid had, op wat details na. Daarna keek hij er ook nooit meer naar om en pakte iets heel anders aan. Die ambitie zie je ook terug in zijn programma om de wiskunde te axiomatiseren.

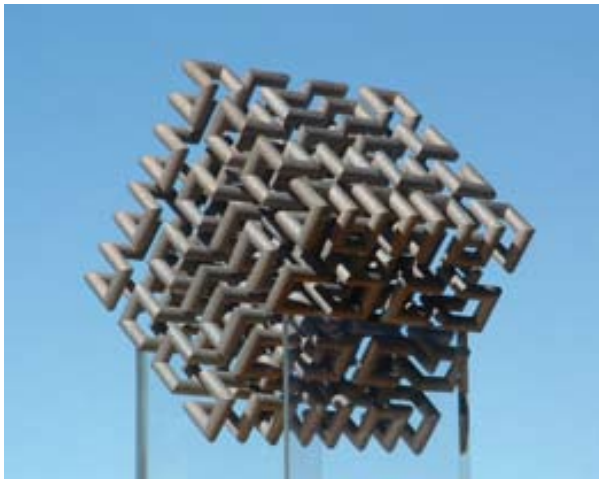
30

ALGEBRAÏSCHE INVARIANTEN

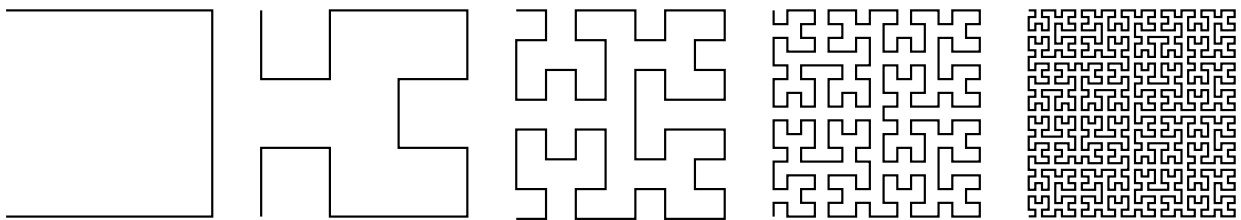
Op school ben je gewend aan grafieken in het platte vlak. Er is dan maar één onafhankelijke variabele, x , die bepaalt welke waarde y krijgt, bijvoorbeeld volgens $y = x^2$. De grafiek is dan een parabool. Maar je kunt ook twee onafhankelijke variabelen nemen, x en y , die bepalen welke waarde z krijgt, bijvoorbeeld volgens $z = x^2 \cdot y$. De grafiek van z is dan een (in het algemeen gekromd) oppervlak in de ruimte. De theorie van algebraïsche invarianten onderzoekt welke eigenschappen van zulke oppervlakken behouden blijven als je de ruimte waar ze in liggen draait, uitrekt of verwringt.

Bekijk de parabool op de bovenste foto. De formule $y = x^2$ voor deze kromme klopt natuurlijk alleen voor de groene x - en y -as. Je kunt ook een ander assenstelsel kiezen (rood) en van elk punt de x - en y -coördinaat omrekenen naar de x' - en y' -coördinaat. In dit geval komt het er op neer dat





Figuur 3 Een befaamde creatie van Hilbert waren krommen die een vlak vullen. De plaatjes hieronder laten zien hoe zo'n kromme stap voor stap wordt opgebouwd, tot in de limiet waarbij elk punt in het vlak van de kromme ligt. Het is zo ook mogelijk een volume op te vullen. Wiskundige en beeldend kunstenaar Carlo H. Sequin, van de universiteit van Californië, ontwierp op de computer deze sculptuur van een ruimtevullende Hilbertkromme, die vervolgens met een 3D-printer is gemaakt.



ren. Hij verwachtte dat binnen afzienbare tijd de hele wiskunde te vangen zou zijn in een handvol axioma's ('grondbeginselen'), waaruit bijna machinaal, volgens formele redeneerregels, alle ware stellingen zijn af te leiden. Het moest dan ook te *bewijzen* zijn dat uit die axioma's nooit een tegenspraak is af te leiden ('consistentie'), en dat elke ware bewering uit die axioma's volgt ('volledigheid'). In dat kader lanceerde hij in

1900 zijn befaamde motto, dat ook op zijn grafsteen staat: *Wir müssen wissen, wir werden wissen* (Wij moeten weten, wij zullen weten).

In Hilberts formalistische aanpak was wiskunde niet meer dan een formeel spel, waarbij de verbinding met de dagelijkse werkelijkheid onbelangrijk was. Zelf formuleerde hij dat zo: 'Je moet altijd kunnen zeggen – in plaats van punten, rechte lij-

je de parabool 45 graden naar rechts kantelt. De formule voor de gekantelde parabool is nu heel wat ingewikkelder, hoewel zijn vorm hetzelfde gebleven is.

Ook een oppervlak zoals op de onderste foto kun je aan allerlei transformaties onderwerpen, waardoor het bijna onherkenbaar vervormd kan raken. Maar als je de transformatieformules (II) invult in I, en het resultaat weer in de vorm III schrijft (A , B en C bestaan dan elk uit combinaties van a , b en c), geldt altijd een 'behoudswet': $b^2 - 4ac = B^2 - 4AC$. Reken maar na; dit is niet moeilijk, als je maar goed oppast voor rekenfouten. Overigens is de vorm van het gekromde oppervlak en zijn getransformeerde in het voorbeeld louter symbolisch bedoeld. Het is heel wonderlijk dat die behoudswet geldt, ongeacht welke (lineaire) coördinatentransformatie je kiest. Blijkbaar zegt de invariant $b^2 - 4ac$ iets wezenlijks over het oppervlak z , hoe je het ook vervormt of kantelt.

In de negentiende eeuw bleek dat ook voor formules met drie, vier of nog meer variabelen en met

derde, vierde en hogere machten zulke invarianten bestaan. De connectie met het vervormen van oppervlakken in de ruimte raakt dan steeds verder uit beeld, maar daar zaten de algebraïci niet mee. Zo ontdekte Arthur Cayley rond 1850 dat voor $z = ax^4 + 4bx^3 \cdot y + 6cx^2 \cdot y^2 + 4dx \cdot y^3 + ey^4$ geldt dat $ae - bd + 3c^2$ invariant is.

Hilbert slaagde erin om algemene eigenschappen van *alle* invarianten te bewijzen, ongeacht het aantal variabelen en de macht waartoe die verheven werden. Zo bleken alle invarianten op te bouwen uit een eindig aantal kleinere invarianten, ongeveer zoals de ontelbare chemische en biologische moleculen allemaal zijn opgebouwd uit slechts een stuk of honderd verschillende atomen. Dit was de oplossing van het fameuze Gordanprobleem. Vreemd genoeg hielp Hilberts bewijs helemaal niet om die elementaire invarianten ook te vinden. Het stelt alleen maar dat het onmogelijk is dat ze niet bestaan.

MACHTEN SOMMEREN MET WARING

In 1770 stelde de Brit Edmund Waring, waarschijnlijk na veel uitproberen, maar zonder bewijs, dat ieder positief geheel getal geschreven kan worden als de som van ten hoogste 4 kwadraten, of als de som van 9 derdemachten, of van 19 vierdemachten. Hij gokte dat dit ook werkte met vijfde, zesde en k -de machten: je kunt elk getal maken met ten hoogste $g(k)$ k -de machten.

De Fransman Lagrange bewees nog dat jaar dat $g(2) = 4$, dus dat elk getal te schrijven is als de som van vier kwadraten. In de eeuw daarna werd bewezen dat $g(3) = 9$, $g(4) = 19$, $g(5) = 37$ en $g(6) = 73$. Leonhard Euler had al in 1772 bewezen dat $g(k)$ op z'n minst $\left[\left(\frac{3}{2}\right)^k\right] + 2^k - 2$ moet zijn (de vierkan-

te haken betekenen dat je naar beneden afrondt). Dat laat echter de mogelijkheid open dat $g(k)$ groter is of zelfs niet bestaat: misschien zijn er steeds meer 17de of 136ste machten nodig om steeds grotere getallen te maken, zonder maximum.

Pas in 1909 bewees Hilbert dat er wel degelijk een $g(k)$ bestaat voor iedere k , maar zijn bewijs was niet-constructief: het leverde voor geen enkele $g(k)$ een waarde op. Inmiddels weten we dat Eulers formule inderdaad de juiste waarde van $g(k)$ levert voor 'bijna alle' k . Dit betekent dat er misschien eindig veel waarden van k zijn waarvoor de formule niet geldt, maar er is geen voorbeeld van bekend.

nen, vlakken – tafels, bierpullen, stoelen.' Of vergelijk het met het schaakspel: natuurlijk hebben de begrippen 'toren' of 'paard' op zich geen betekenis, alleen de regels voor hoe deze stukken mogen bewegen en elkaar slaan zijn van belang.

De aandacht voor axiomatisering heeft de wiskunde op een steviger fundament gezet, maar Hilberts visioen van een bewijsbaar consistent en volledig axiomasysteem bleek in 1930 een luchtkasteel. Toen bewees Kurt Gödel namelijk dat zoiets niet bestaat. Een van de volgende afleveringen in deze serie zal helemaal aan Gödels verbluffende werk gewijd zijn.

RELATIVITEIT Anders dan de meeste wiskundigen, interesseerde Hilbert zich ook voor natuurkunde. Omdat hij nooit natuurkunde gestudeerd had, liet hij zich door persoonlijke assistenten bijspijkeren over het onderdeel waaraan hij wilde werken. Hoewel hij hier veel tijd in stak, vonden ook zijn beste vrienden achteraf dat hij hier niet echt talent voor had. Zijn formalistische aanpak paste slecht bij de houtje-touwtje-manier van wiskunde bedrijven waarmee natuurkundigen nieuwe resultaten boeken.

Natuurkundigen in het begin van de twintigste eeuw gebruikten wel, om de toen gloednieuwe kwantummechanica verder te ontwikkelen, wiskunde die Hilbert eerder ontwikkeld had. Natuurkundestudenten maken tegenwoordig vaak al in hun eerste jaar kennis met de Hilbertruimte, een ruimte met oneindig veel dimensies die als het ware het toneel is waarop de kwantummechanica zich afspeelt.

Eén keer heeft Hilbert wel aan het front van de natuurkunde gestaan, in 1915, toen Albert Einstein

naarstig op zoek was naar de juiste wiskundige vergelijkingen voor zijn Algemene Relativiteitstheorie. Toevallig vonden Einstein en Hilbert vrijwel gelijktijdig de juiste veldvergelijkingen, die beschrijven hoe de zwaartekracht de ruimte-tijd vervormt.

Sommige historici en fans hebben achteraf geprobeerd aan te tonen dat Hilbert dus de eer voor de Relativiteitstheorie toekwam. Maar de juiste vorm van de veldvergelijkingen was niet meer dan het sluitstuk van de door Einstein bedachte theorie. Dat gaf Hilbert zelf ook grif toe: 'Elk straatjochie in Göttingen begrijpt meer van vierdimensionale meetkunde dan Einstein. Maar toch heeft Einstein al het werk gedaan, niet de wiskundigen.'

Hilbert stierf in 1943, midden in de Tweede Wereldoorlog, triest en vereenzaamd. Politiek interesseerde hem totaal niet, maar hij verafschuwde de nazi's en hun anti-semitisme, en liet dat merken ook. Vijf jaar eerder waren alle joodse wiskundigen uit Göttingen verjaagd, waarmee het gouden tijdperk voorgoed voorbij was.

Anders dan je misschien zou verwachten van iemand die als de beste wiskundige van zijn tijd geldt, leek Hilbert niet buitengewoon slim, integendeel, sommige van zijn naaste medewerkers vonden hem juist eerder traag van begrip. Hilbert gaf dat zelf ook toe: 'Dat ik ooit iets gepresteerd heb in de wiskunde,' zei hij eens tegen zijn Deense collega Harald Bohr, 'komt in feite doordat ik het altijd zo moeilijk gevonden heb.' ■

GEBRUIKTE LITERATUUR

Constance Reid, *Hilbert*, Springer-Verlag, 1970; Ben Yandell, *The Honors Class*, A.K. Peters, 2002; Dirk van Dalen, *L.E.J. Brouwer, een biografie*, Bert Bakker, 2002.

OPLOSSINGEN KLEINE NOOTJES NR. 3

NIEUWJAAR

De kortste manier om 2009 te schrijven
als som van Fibonacci-getallen is
 $1 + 34 + 377 + 1597$.

HAZENSPRONG

Het kan op $7 \times 7 + 1 \times 8 = 57$ manieren.

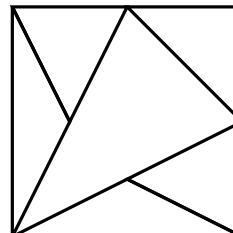
BLAUWE KNIKKERS

Noem de aantallen rode, witte en blauwe
knikkers achtereenvolgens r , w en b .

Er zijn $(15 \times 14)/2$ grepen mogelijk, en $r \times w$
tweetallen rood en wit. Dan moet $(2 \times r \times w)/(15 \times 14)$
gelijk zijn aan $1/3$. Dan is $r \times w = 35$, dus $r = 5$ en $w = 7$,
of $r = 7$ en $w = 5$.

Er zijn dus 3 blauwe knikkers.

VERKNIPT VIERKANT



SOMMEN VAN KWADRATEN

$$50 = 1^2 + 7^2 = 5^2 + 5^2.$$

**PYTHA
GORAS**

48ste jaargang nummer 4
februari 2009
ISSN 0033 4766

Pythagoras wordt uitgegeven onder
auspiciën van de Nederlandse On-
derwijscommissie voor Wiskunde en
richt zich tot alle leerlingen van vwo
en havo. *Pythagoras* stelt zich ten
doel jongeren kennis te laten maken
met de leuke en uitdagende kanten
van wiskunde.

Internet www.pythagoras.nu

Hoofredacteur Arnout Jaspers

Eindredacteur Alex van den Brandhof

Redactie Matthijs Coster, Jeanine
Daems, Dion Gijswilt, Jan Guichelaar,
Klaas Pieter Hart, Willem van
Ravenstein

Bladmanager Tilman Grünewald

Vormgeving Grafisch Team, Zoeter-
meer

Druk Giethoorn Ten Brink, Meppel

Uitgever Koninklijk Wiskundig
Genootschap

Verantwoordelijk uitgever Chris Zaal

Redactiesecretariaat Chris Zaal,
Korteweg-de Vries Instituut voor
Wiskunde,
Plantage Muidergracht 24,
1018 TV Amsterdam.

Lezersreacties en kopij Bij voorkeur
per e-mail; lezersreacties naar Jan
Guichelaar, jan@pythagoras.nu en
kopij naar Arnout Jaspers, arnout@pythagoras.nu. Eventueel per post
naar Jan Guichelaar, Pedro de Medi-
nalaan 162, 1086 XR Amsterdam.

Abonnementen, bestellingen en mutaties

Mirjam Worst, Drukkerij Giethoorn
Ten Brink, Postbus 41,
7940 AA Meppel.
Telefoon 0522 855 175,
fax 0522 855 176.

Abonnementsprijs

(6 nummers per jaargang)
€ 22,00 (Nederland),
€ 24,00 (België),
€ 28,00 (overig buitenland),
€ 18,00 (leerlingabonnement
Nederland),
€ 20,00 (leerlingabonnement België),
€ 12,00 (bulkabbonement Nederland),
€ 14,00 (bulkabbonement België).
Zie www.pythagoras.nu voor toelich-
tingen.

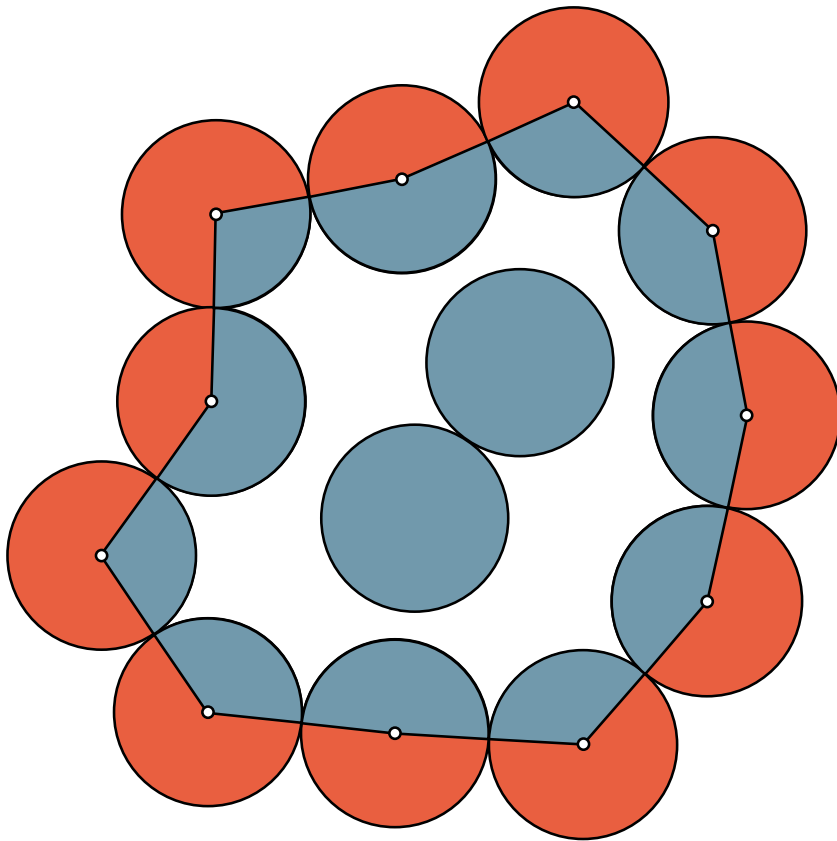
Aan dit nummer werkten mee

ir. D. Beekman, auteur van diverse
breinbrekerboeken (dh.beekman@hetnet.nl),
drs. A.J. van den
Brandhof, docent wiskunde
op het Vossiusgymnasium te
Amsterdam (alex@pythagoras.nu),
dr. M.J. Coster, wetenschappelijk
onderzoeker bij het Ministerie van
Defensie (matthijs@pythagoras.nu),
dr. D.C. Gijswilt, postdoc
combinatorische optimalisering aan
de UvA (dion@pythagoras.nu),
dr. J.
Guichelaar, voormalig directeur van
Interconfessionele Scholengroep
Amsterdam (jan@pythagoras.nu),
dr. K.P. Hart, docent topologie aan de
TU Delft (kp@pythagoras.nu),
drs. A. Jaspers, wetenschapsjournalist
(arnout@pythagoras.nu), J. Lyczak,
student wiskunde en natuur- en
sterrenkunde aan de UU,
drs. T. Notenboom, voormalig
docent wiskunde op de Hogeschool
van Utrecht (thijs@pythagoras.nu),
drs. M. Roggeband, hoofd afdeling
rekenregels bij Achmea Pensioenen
(m.roggeband@orange.nl), I.M. Smit,
student wiskunde aan de UvA
(iris@pythagoras.nu)

Sponsors *Pythagoras* wordt mede mo-
gelijk gemaakt door de bijdragen van
de volgende instituten en instellingen:



SANGAKU



Een Sangaku beeldt zonder woorden een stelling uit. De kunst is om uit het diagram af te leiden welke stelling dat is en die te bewijzen.