PYTHAGORAS

WISKUNDETIJDSCHRIFT VOOR JONGEREN

Postbodes en grafen

Onmogelijk: π.zip

Uitslag Pyth-actie: oneindige oplossingen

48ste JAARGANG - NUMMER 6 - JUNI 2009

NIEUW: SANGAKUPOSTER

Een poster in A1-formaat met zes kleurrijke sangaku's uit recente nummers van Pythagoras. Bestel deze poster voor maar € 3,50*. Kijk op de webshop op www.pythagoras.nu of bel 0522-855175 om de poster te bestellen.

* Exclusief verzendkosten à 8 euro in een stevige koker (maximaal drie posters per koker).
De verzendkosten worden na plaatsing van de bestelling berekend en via een acceptgirokaart in rekening gebracht.

INHOUD

POSTBODES, HANDELSREIZIGERS EN KORTSTE PADEN

Hoe doorloopt een postbode alle straten uit zijn wijk op zo'n manier dat hij niet meer loopt dan strikt noodzakelijk? Het *Chinese Postbode Probleem* uit de grafentheorie is het onderwerp van het laatste artikel van het thema 'discrete wiskunde'.

GEHAAKTE SCHEMERLAMP

In Thailand zie je ze tegenwoordig overal hangen: lampen die zijn samengesteld uit een heleboel stukjes die allemaal dezelfde vorm hebben.

EMMY NOETHER (1882-1935): MOEDER VAN DE MODERNE ALGEBRA

Vrouwen en wiskunde wordt meestal gezien als een bijzondere combinatie. Dit heeft onder meer te maken met het feit dat het vrouwen jarenlang zeer moeilijk is gemaakt wiskunde te bedrijven, laat staan dat ze een leidende rol konden spelen in de wiskunde. Ook de Duitse Emmy Noether werd het niet makkelijk gemaakt. Toch heeft zij een grote invloed gehad op de ontwikkeling van de abstracte algebra aan het begin van de twintigste eeuw.

EN VERDER

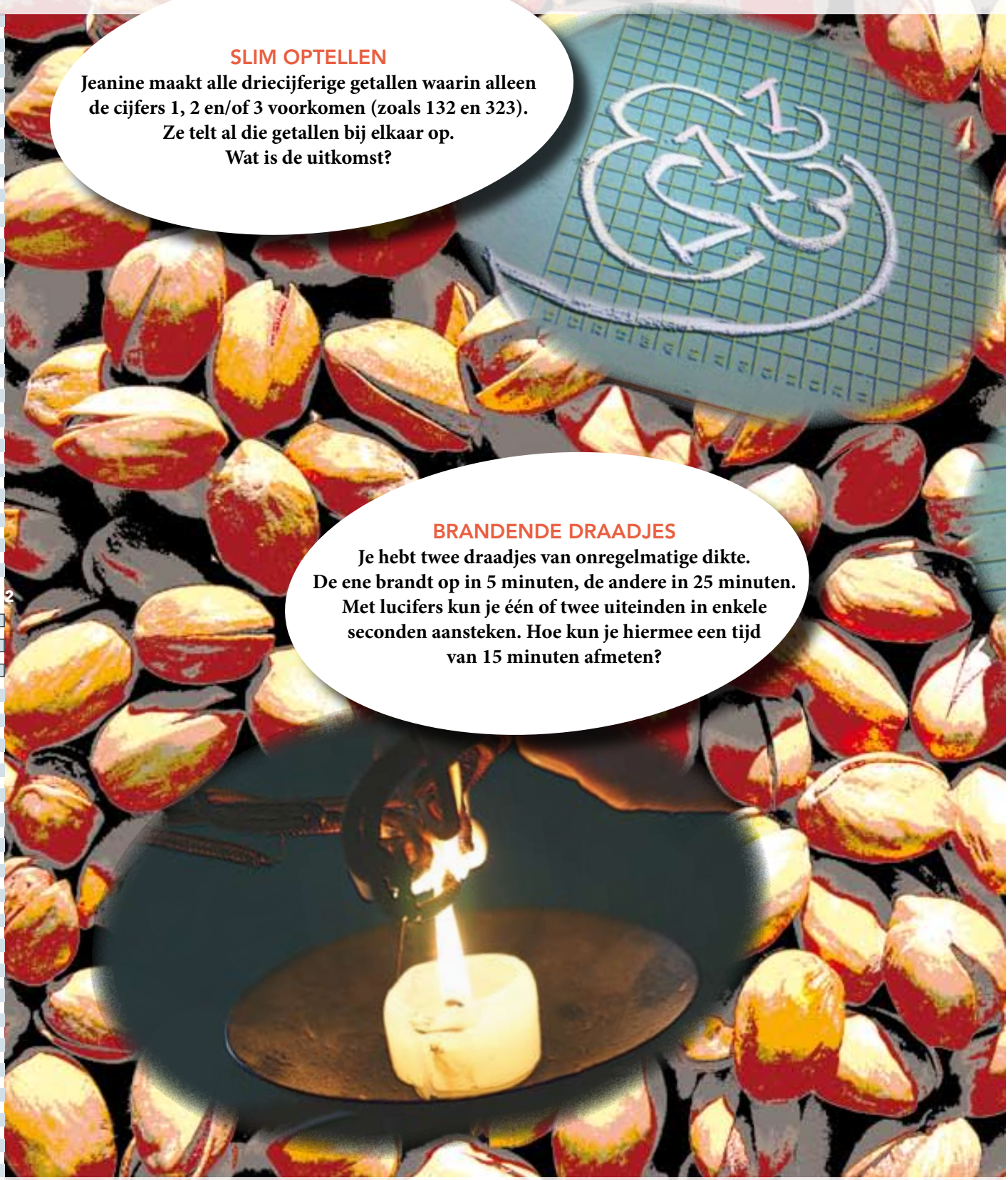
2 Kleine nootjes
4 Pyth-actie: de uitslag
12 Journaal
13 Standvastige kwadraten
14 Problemen - Oplossingen
18 Het zippen van pi
22 De IQ-formule *light*
23 Steeds meer scholieren gaan de uitdaging aan
24 Pythagoras Olympiade
32 De midhoogtestelling en de pseudostelling van Pythagoras
33 Oplossingen Kleine nootjes nr. 5

NIVEAUBALKJES Pagina's met één of meer zwarte balkjes (onder de paginanummering) geven de moeilijkheidsgraad aan. Eén balkje: lastig. Twee balkjes: vereist wiskundekennis uit de vijfde of zesde klas. Drie balkjes: net iets moeilijker.

KLEINE NOOTJES

Kleine nootjes zijn eenvoudige opgaven die weinig of geen wiskundige voorkennis vereisen om opgelost te kunnen worden.
De antwoorden vind je in het volgende nummer van *Pythagoras*.

▪ door Dick Beekman en Jan Guichelaar

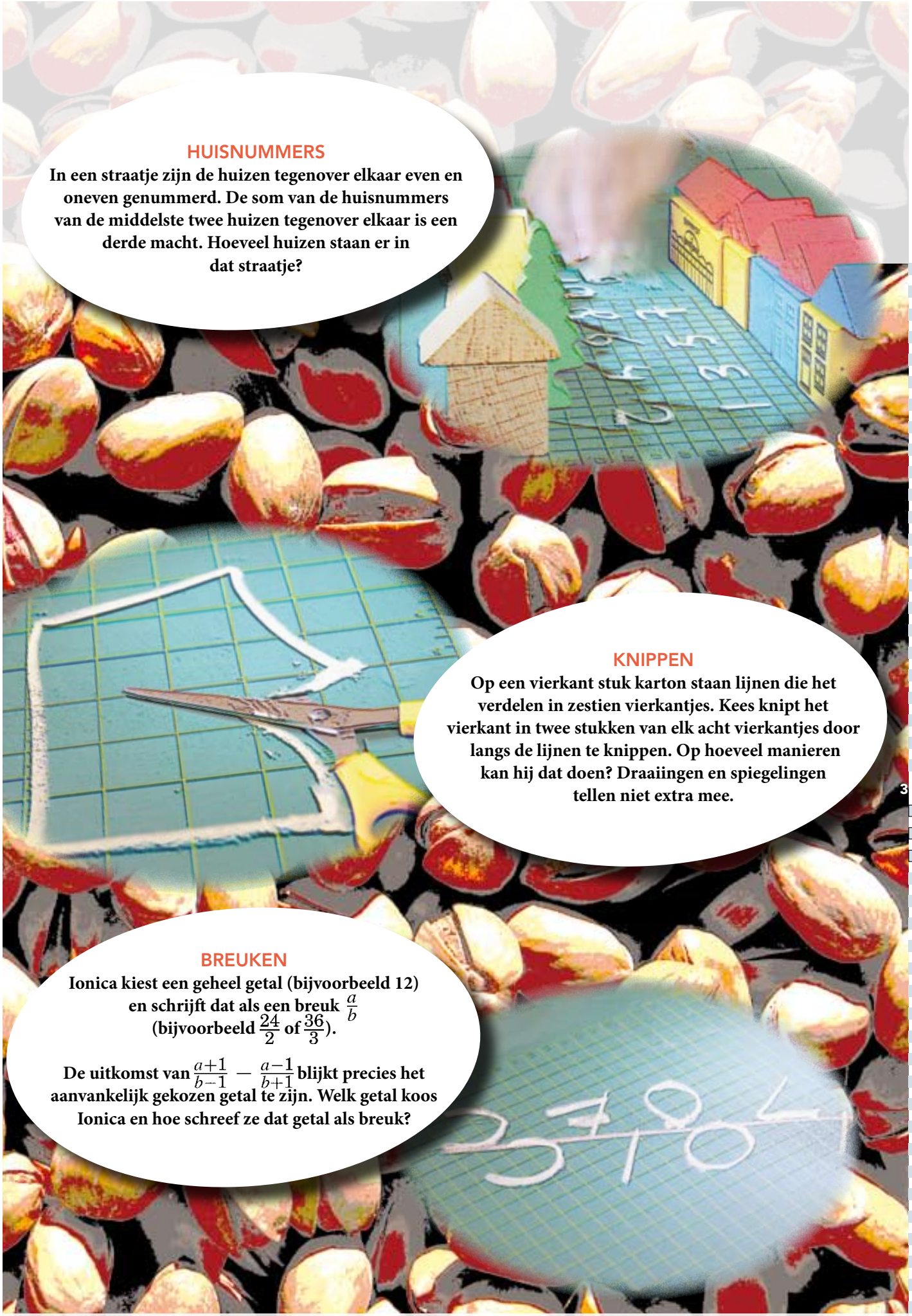


SLIM OPTELLEN

Jeanine maakt alle driecijferige getallen waarin alleen de cijfers 1, 2 en/of 3 voorkomen (zoals 132 en 323). Ze telt al die getallen bij elkaar op. Wat is de uitkomst?

BRANDENDE DRAADJES

Je hebt twee draadjes van onregelmatige dikte. De ene brandt op in 5 minuten, de andere in 25 minuten. Met lucifers kun je één of twee uiteinden in enkele seconden aansteken. Hoe kun je hiermee een tijd van 15 minuten afmeten?



HUISNUMMERS

In een straatje zijn de huizen tegenover elkaar even en oneven genummerd. De som van de huisnummers van de middelste twee huizen tegenover elkaar is een derde macht. Hoeveel huizen staan er in dat straatje?

KNIPPEN

Op een vierkant stuk karton staan lijnen die het verdelen in zestien vierkantjes. Kees knipt het vierkant in twee stukken van elk acht vierkantjes door langs de lijnen te knippen. Op hoeveel manieren kan hij dat doen? Draaiingen en spiegelingen tellen niet extra mee.

BREUKEN

Ionica kiest een geheel getal (bijvoorbeeld 12) en schrijft dat als een breuk $\frac{a}{b}$ (bijvoorbeeld $\frac{24}{2}$ of $\frac{36}{3}$).

De uitkomst van $\frac{a+1}{b-1} - \frac{a-1}{b+1}$ blijkt precies het aanvankelijk gekozen getal te zijn. Welk getal koos Ionica en hoe schreef ze dat getal als breuk?

Voor de prijsvraag van dit jaar moest je getallen uitschrijven in letters. De kunst was om vergelijkingen te vinden die zowel voor de getallen als voor het aantal letters van de uitgeschreven getallen klopten. Een simpel voorbeeld – in het Nederlands – is: 13 + 16 = 29, want dertien heeft 7 letters, zestien ook 7, en negenentwintig heeft er 14. We noemen het tellen van de letters van een getal de Pyth-actie en noteren dit als $\mathcal{P}(13) + \mathcal{P}(16) = \mathcal{P}(29)$.
■ door Matthijs Coster en Jan Guichelaar

PYTH-ACTIE: DE UITSLAG

De Pyth-actie was een lastige prijsvraag, wat ook bleek uit het beperkte aantal inzendingen. Niettemin waren er inzenders die bijzonder fraaie oplossingen bedachten.

Als je een groot aantal vergelijkingen opschrijft van de vorm $a + b - c = 0$, $a \times b - c = 0$, $\frac{a}{b} - c = 0$, dan kun je aan elk van deze vergelijkingen de Pyth-actie toekennen. Dat gaat als volgt:
$\mathcal{P}(\{a + b - c = 0\}) = \mathcal{P}(a) + \mathcal{P}(b) - \mathcal{P}(c)$,
$\mathcal{P}(\{a \times b - c = 0\}) = \mathcal{P}(a) \times \mathcal{P}(b) - \mathcal{P}(c)$,
$\mathcal{P}(\{\frac{a}{b} - c = 0\}) = \frac{\mathcal{P}(a)}{\mathcal{P}(b)} - \mathcal{P}(c)$.

We leggen vervolgens een lijst aan van vergelijkingen en de bijbehorende Pyth-actie-waarden. Op een gegeven ogenblik hebben twee vergelijkingen dezelfde Pyth-actie-waarde. Stel bijvoorbeeld dat $\mathcal{P}(\{a + b - c = 0\}) = \mathcal{P}(\{d \times e - f = 0\})$, dan is de vergelijking $a + b - c = d \times e - f$ een vergelijking die aan alle voorwaarden voldoet.

Bekijk de volgende tabel:

vergelijking	Pyth-actie-waarde
$1 + 2 - 3 = 0$	3
$4 + 7 - 11 = 0$	6
$\mathbf{7 + 14 - 21 = 0}$	**1**
$3 \times 4 - 12 = 0$	10
$5 \times 7 - 35 = 0$	4
$7 \times 9 - 63 = 0$	13
$27 \times 37 - 999 = 0$	129
$11 \times 91 - 1001 = 0$	29
$\mathbf{9 - \frac{45}{5} = 0}$	**1**

We hebben nu twee vergelijkingen met dezelfde Pyth-actie-waarde 1. Dus $7 + 14 - 21 = 9 - \frac{45}{5}$ is een oplossing.

MOOISTE INZENDINGEN Vanwege het kleine aantal inzendingen heeft de jury besloten niet alle prijzen uit te reiken. De hoofdprijs, een fractale boom van Koos Verhoeff, gaat naar Helmut Postl uit Wenen (Oostenrijk). Hij heeft een epistel ingestuurd van 24 pagina's, vol met vergelijkingen. Hij koos voor zijn eigen taal (Duits). De jury heeft een aantal juweeltjes aangetroffen in zijn werk. Zo creëert Helmut bijvoorbeeld een oneindig lange formule. Iets soortgelijks kun je ook in het Nederlands doen, zoals je in het kader op de rechterpagina kunt zien.

In een andere vergelijking, in hetzelfde kader te zien, maakt Helmut slim gebruik van het feit dat in het Duits de Pyth-acties van 5, 6, 7 een opklimmende serie vormen (fünf (4), sechs (5), sieben (6)). Helmut verkrijgt met dit principe een lange reeks herhaalde Pyth-acties. Het Nederlands kent dit verschijnsel alleen voor 12, 13 en 14 (twaalf (6), dertien (7), veertien (8)). Zijn inzending kan worden vertaald tot $\sqrt{\frac{14!}{12!} - 13} = 13$.

Een gedeelde tweede en derde plaats zijn voor Odette De Meulemeester en haar leerlingen uit Ronse (België) en Frank Tinkelenberg uit Oegstgeest. Zij ontvangen een Loop-12-object van Koos Verhoeff. Odette De Meulemeester stuurde heel wat vergelijkingen in, waarvan je er hiernaast een paar ziet, net als de inzending van Frank Tinkelenberg. Raf Vercammen en Jan Verbakel krijgen de vouwpuzzel Decathlon voor hun inzending.

Ook de bekende publicist en taalkunstenaar Hugo Brandt Corstius stuurde een oplossing in, die de categorieën 'Herhaalde actie' en 'Combinatie van talen' combineerde. Voor zijn Noors-Nederlandse oplossing (het Noorse woord voor 99 is *nittini*, wat 7 letters heeft) moest hij de spelregels wel wat oprekken: in zijn Pythagorasvergelijking wordt links eenmaal en rechts tweemaal de Pyth-actie uitgevoerd. ■

De winnende inzending is van Helmut Postl:

$$\sqrt{12+\sqrt{12+\sqrt{13+\sqrt[4]{73+\sqrt[3]{512}}}}} = \sqrt{21-5}$$

Pas op bovenstaande vergelijking de Pyth-actie toe, dan krijg je:

$$\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{7+\sqrt[4]{14+\sqrt[4]{16}}}}} = \sqrt{12-3}$$

Je kunt $\sqrt{12+\dots}$ er onbeperkt voor zetten!

Een andere mooie reeks herhaalde Pyth-acties in het Duits:

$$\sqrt{\frac{1777777772277777777!}{1777777772277777775!}} - 1777777772277777776 =$$
$$= 1777777772277777777$$

Nadat je de Pyth-actie in het Duits hebt toegepast, krijg je:

$$\sqrt{\frac{227!}{225!}} - 226 = 226$$

De Pyth-actie kan nogmaals worden toegepast: $\sqrt{\frac{27!}{25!}} - 26 = 26$

En ten slotte nog een keer: $\sqrt{\frac{16!}{14!}} - 15 = 15$

Pas de Pyth-actie toe op de volgende nieuwjaarsvergelijking:

$$9 \times 2009 = 2009 + 14818 + 1254$$

of op deze:

$$2009 = (50-9) \times (45+4)$$

KSO Glorieux, Ronse (België)

Odette De Meulemeester

In het Frans zijn dit twee Pythagorasvergelijkingen:

$$1 + 13 = 14 \quad \text{en} \quad 5 + 9 = 14$$

In het Italiaans zijn dit drie voorbeelden:

$$3 \times 8 = 24, \quad 6 \times 6 = 36 \quad \text{en} \quad \sqrt{36} + 29 = 35$$

Pas de Pyth-actie toe op deze nieuwjaarsvergelijking:

$$2009 = 3 \times 6! - 5! - 40 + 9$$

dan krijg je:

$$16 = 4 \times 3! - 3! - 7 + 5$$

Jan Verbakel

In de categorie Herhaalde actie:

$$(2009-111)^{14-12} + 513 = 3602917$$
$$(16-10)^{8-6} + 17 = 53$$
$$(7-4)^{4-3} + 9 = 12$$
$$(5-4)^{4-4} + 5 = 6$$

en voor Nieuwjaar: $1970 \times 2009 = 96530 \times 41$

Frank Tinkelenberg

Hugo Brandt Corstius stuurde iets in het Noors:

$$99 = 99$$
$$\mathcal{P}_{\text{Noors}}(99) = \mathcal{P}(\mathcal{P}(99))$$

Er geldt namelijk dat $\mathcal{P}(99) = 15$,

$$\mathcal{P}(15) = 7 \text{ en } \mathcal{P}_{\text{Noors}}(99) = 7$$

In de categorie Herhaalde actie:

Raf Vercammen

$$2 \times (7+6) = (11+1) \times 2 + 2 \times 7 - 2 \times 6$$
$$4 \times (5+3) = (3+3) \times 4 + 4 \times 5 - 4 \times 3$$

In deze laatste aflevering van het thema 'discrete wiskunde' behandelen we een bekend optimalisatieprobleem: het *Chinese Postbode Probleem*. Dit probleem werd voor het eerst geformuleerd door de Engelse wiskundige Henry Dudeney, die vooral bekend werd met zijn logische puzzels en wiskundige spelletjes. In 1962 werd het probleem opgelost door de Chinese wiskundige Mei-Ko Kwan. Een essentieel onderdeel van dit probleem is het vinden van het kortste pad tussen twee punten in een graaf. Hiermee verwierf de Nederlander Edsger Dijkstra wereldfaam. Tot slot maken we een kort uitstapje naar het Handelsreizigersprobleem, een probleem dat simpel lijkt, maar waarvoor tot op de dag van vandaag geen bevredigende oplossing is gevonden.

■ door Alex van den Brandhof

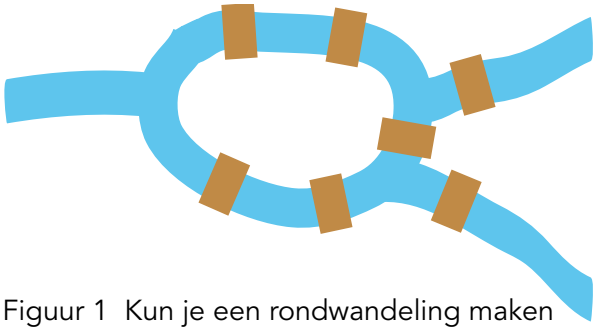
POSTBODES, HANDELSREIZIGERS EN KORTSTE PADEN

Door de Russische stad Kaliningrad (vroeger Koningsbergen) stroomt de rivier de Pregel. In de achttiende eeuw werden verschillende oevers via zeven bruggen met elkaar verbonden, zoals op het plattegrondje in figuur 1. De wiskundige Leonhard Euler (1707-1783), die een deel van zijn leven in Sint Petersburg woonde en werkte, werd geconfronteerd met het volgende probleem: kun je een rondwandeling maken door de stad waarbij elke brug precies eenmaal wordt overgestoken? In 1736 bewees Euler dat zo'n wandeling onmogelijk is en dat was het begin van de grafentheorie, al duurde het nog lang voordat het begrip 'graaf' werd geïntroduceerd: dat deed J.J. Sylvester in 1878.

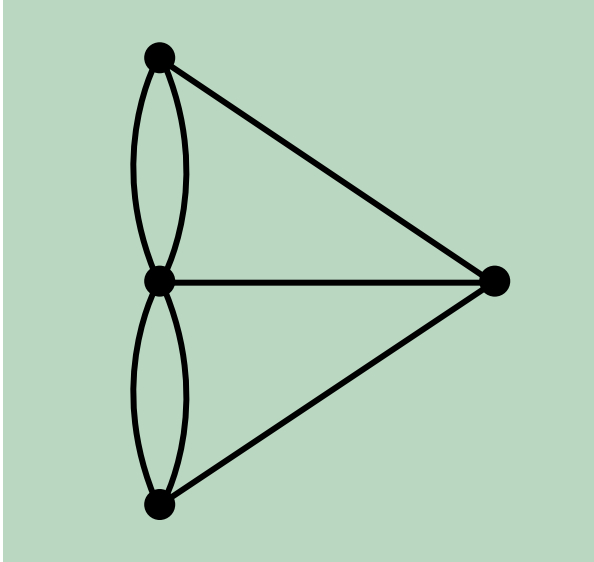
Waarom bestaat zo'n rondwandeling niet? Maak van figuur 1 een graaf, zie figuur 2. De *punten* (of *knopen*) stellen de stadsdelen voor, de *lijnen* (of *takken*, of *wegen*) zijn de bruggen. Het aantal lijnen dat in een punt samenkomt, noemen we de *graad* van dat punt. In deze graaf zijn dus drie punten met graad 3 en één punt met graad 5. De vraag is of je een wandeling kunt maken waarbij elke lijn precies één keer wordt doorlopen. Als begin- en eindpunt hetzelfde zijn, spreken we van een *Eulercircuit*, anders van een *Eulerwandeling*.

Eulers redenering kwam hierop neer. Kom je tijdens de wandeling in een punt aan, dan moet je dat punt ook weer verlaten. Afhankelijk van het aantal keren dat je een punt aandoet, heb je dus 2, 4, 6, ... lijnen nodig dat in zo'n punt samenkomt. Een Eu-

lercircuit bestaat dus alleen als élk punt een even graad heeft. Voor een Eulerwandeling moet gelden dat er precies twee punten zijn met een oneven graad. De graaf in figuur 2 bestaat uit alleen maar punten van oneven graad. Een Eulercircuit noch -wandeling kan dus gemaakt worden! Over de precieze redenering van Euler schreven we uitgebreid in *Pythagoras* van september 2007.



Figuur 1 Kun je een rondwandeling maken waarbij elke brug precies eenmaal wordt overgestoken?



Figuur 2 De graaf die hoort bij de plattegrond van figuur 1

HET ALGORITME VAN FLEURY We weten nu hoe je kunt nagaan of er al dan niet een Eulercircuit of -wandeling in een graaf bestaat, maar daarmee hebben we nog geen systematische methode om zo'n wandeling daadwerkelijk te vinden. De Franse wiskundige M. Fleury publiceerde in 1883 het volgende algoritme dat tot een Eulercircuit – mits zo'n circuit bestaat – leidt.

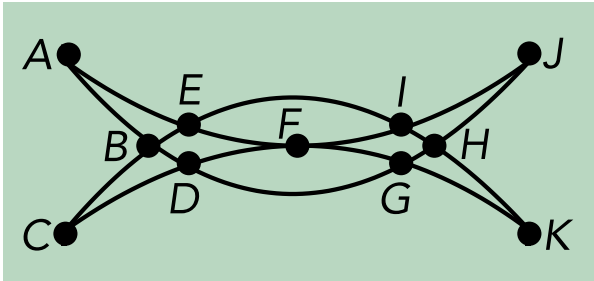
Stap 1. Neem een willekeurig punt als startpunt.
Stap 2. Kies vanuit het punt waar je bent een nog niet gebruikte lijn, met inachtneming van de regel dat je niet een *brug* kiest in de *gereduceerde deelgraaf* (zie hieronder voor de betekenis van deze begrippen).
Stap 3. Doorloop de gekozen lijn naar een volgend punt.
Stap 4. Herhaal de stappen 2 en 3 totdat alle lijnen zijn doorlopen en je weer terug bent in het startpunt.

De *gereduceerde deelgraaf* is de graaf waaruit de reeds doorlopen lijnen en geïsoleerd geraakte punten zijn weggelaten. Een *brug* is een lijn die bij weglating de deelgraaf in twee losse stukken doet uiteenvallen. Als je Fleury's algoritme met de hand uitvoert, gum dan een doorlopen lijn meteen weg, waardoor de gereduceerde deelgraaf en de bruggen visueel direct duidelijk zijn.

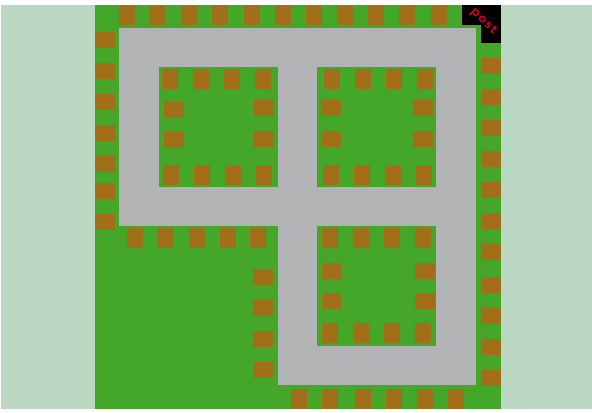
Opgave 1. Gebruik het algoritme van Fleury om een Eulercircuit in de graaf van figuur 3 te vinden. Begin in punt *A*.
(Antwoord: *ABDGHJIHKGFDCBEIFEA*.)

POSTBODES EN GRAFEN In de theorie van netwerken kan het probleem van Euler worden uitgebreid naar tal van andere problemen, die vaak grote praktische waarde hebben. Een van die problemen, voor het eerste geformuleerd door Henry Dudeney in 1917, bespreken we in de rest van dit artikel. Het kan makkelijk worden beschreven in termen van een postbode die alle straten van een stad minimaal één keer moet doorlopen. Het staat bekend als het Chinese Postbode Probleem. Chinees, omdat het probleem werd opgelost door de Chinese wiskundige Mei-Ko Kwan in 1962.

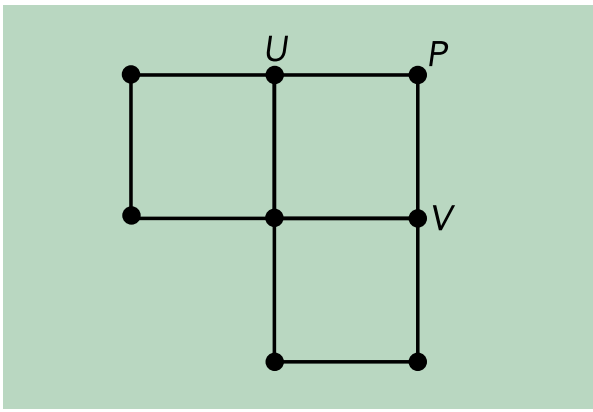
In een minidorpje waarvan je de plattegrond ziet in figuur 4 moet de postbode elke straat ten minste één keer doorlopen. Hij begint in het postkantoor en wil zó lopen, dat de totale afgelegde afstand zo klein mogelijk is. Net als bij het probleem van Euler, ontdoen we de plattegrond eerst van franje, zodat we de graaf krijgen van figuur 5. De postbode heeft geluk als alle punten een even graad hebben, of als er twee punten, waaronder *P* (het postkantoor, waar de route begint), zijn met een oneven graad. In dat geval bestaat er een Eulercircuit res-



Figuur 3 Vind een Eulercircuit



Figuur 4 Een eenvoudig stratenplan



Figuur 5 De graaf die hoort bij de plattegrond van figuur 4

pectievelijk Eulerwandeling en kan de postbode een route uitstippelen waarbij hij geen enkele straat meer dan één keer hoeft te doorlopen. Zo'n optimale route bestaat in de graaf van figuur 5 echter niet: er bestaat weliswaar een Eulerwandeling met *U* en *V* als begin- en eindpunt, maar met *P* als beginpunt zijn er straten die meer dan eens moeten worden doorlopen.

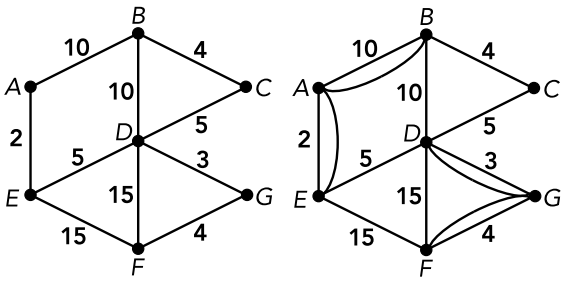
We weten dat een Eulercircuit bestaat in een graaf waarvan de graad van elk punt even is. In de graaf van figuur 5 zijn twee punten met oneven graad: *U* en *V*. Wat we doen is deze twee punten met elkaar verbinden. Niet rechtstreeks, omdat er geen lijn tussen *U* en *V* is, maar via een ander punt, zoals in figuur 6. Nu heeft elk punt een even graad en dus bestaat er een Eulercircuit. Beginnend en eindigend in *P*, kan de postbode lopen volgens de nummering die bij de lijnen staat in figuur 6. Deze route is optimaal voor de postbode.

VERSCHILLENDE LENGTES Het simpele stratenpatroon van figuur 4 is niet erg realistisch: behalve dat het een minidorpje is, is elke straat precies even lang. Een uitdagender probleem krijgen we als niet elke straat gelijke lengte heeft. Bekijk de graaf van figuur 7. Een graaf is slechts een schematisch plaatje; in figuur 7 zijn de lijnen even lang getekend, de getallen bij de lijnen stellen de werkelijke lengtes voor. Veronderstel dat de postbode in punt *A* wil beginnen en eindigen en wel zo, dat de totale afgelegde afstand minimaal is. De graaf heeft vier punten met oneven graad: *A*, *B*, *C* en *D*. Hoe vindt de postbode in dit netwerk zijn optimale route? Voordat we dit probleem oplossen, doen we wat voorbereidend werk. Bekijk alle grafen die in dit artikel getekend zijn. Tel bij elke graaf de graden van

HET CHINESE POSTBODE PROBLEEM TOEGEPAST In de linkergraaf heeft niet elk punt een even graad; een Eulercircuit bestaat dus niet. De punten met oneven graad zijn *B*, *D*, *E* en *F*. Eerst bepalen we de kortste paden tussen elk tweetal punten met oneven graad.

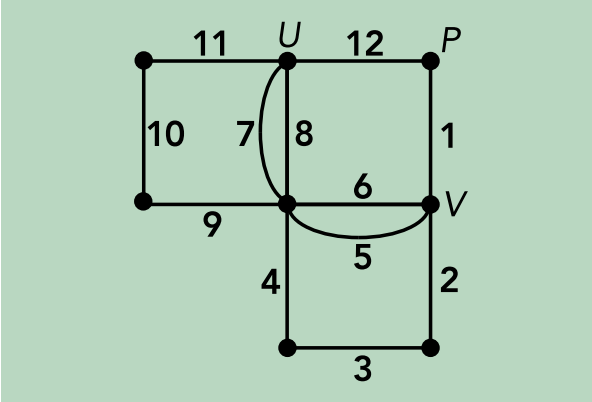
Tussen *B* en *D*: *BCD*, lengte 9.
Tussen *E* en *F*: *EDGF*, lengte 12.
Tussen *B* en *E*: *BAE*, lengte 12.
Tussen *D* en *F*: *DGF*, lengte 7.
Tussen *B* en *F*: *BCDGF*, lengte 16.
Tussen *D* en *E*: *DE*, lengte 5.

We kunnen de punten met oneven graad op drie manieren paarsgewijs koppelen. Nemen we de paren (*B*, *D*) en (*E*, *F*), dan is de totale lengte van *B* naar *D* en van *E* naar *F* gelijk aan 9 + 12 = 21.

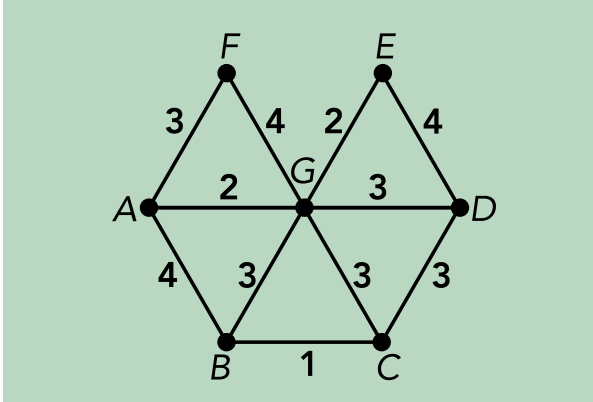


Met de paren (*B*, *E*) en (*D*, *F*) vinden we 12 + 7 = 19 en met (*B*, *F*) en (*D*, *E*) vinden we 16 + 5 = 21.

De optimale koppeling is dus de koppeling (*B*, *E*), (*D*, *F*), met bijbehorende kortste paden *BAE* en *DGF*. In de rechterfiguur is de uitgebreide graaf getekend. Met het algoritme van Fleury kunnen we hierin een Eulercircuit vinden, bijvoorbeeld *ABCDGFDEABDGFEA*. De totale afstand die met dit circuit wordt doorlopen, is 92.



Figuur 6 De graaf van figuur 5 uitgebreid; volg de nummertjes voor een Eulercircuit



Figuur 7 Vind de optimale route in dit netwerk

alle punten bij elkaar op. Bij de graaf van figuur 2 krijg je dan 3 + 3 + 3 + 5 = 14, bij figuur 3 krijg je 36, bij figuur 5 krijg je 20. Doe de berekening voor de andere grafen zelf. Wat opvalt, is dat de uitkomst altijd een even getal is. Tel ook in elke graaf het aantal punten met oneven graad en kijk wat je opvalt.

Opgave 2. Verklaar dat de som van de graden in een graaf altijd even is.
Opgave 3. Verklaar dat uit opgave 2 volgt dat in een graaf het aantal punten met oneven graad, altijd even is.

We staan nu in de startblokken om het Chinese Postbode Probleem te kraken. We laten zien hoe je de oplossing vindt aan de hand van de graaf in figuur 7.

De eerste stap is om de punten met oneven graad paarsgewijs te koppelen: we maken een verdeling in groepjes van twee punten. Dat dit altijd kan, volgt uit opgave 3: het aantal punten met oneven graad is altijd even, dus je houdt nooit een enkel punt van oneven graad over. We nemen bijvoorbeeld de paren (A, B) en (C, D). Teken een extra lijn tussen A en B, en een extra lijn tussen C en D. Dit kan rechtstreeks, omdat A en B met elkaar verbonden zijn en C en D ook. Op deze manier ontstaat een graaf waarvan elk punt even graad heeft. Er bestaat dus een Eulercircuit waarvan de totale lengte gelijk is aan de som van de lengtes van alle lijnen, plus nog eens de lengtes AB en CD; dit geeft
32 + 4 + 3 = 39.

Is dit de optimale oplossing? Niet noodzakelijk; we kunnen de punten met oneven graad ook anders groeperen en misschien leidt dat wel tot een betere oplossing. Neem de paren (A, C) en (B, D). We moeten nu A met C verbinden en B met D. Dit gaat niet rechtstreeks; het kortste pad tussen A en C heeft lengte 5 (via B of G), het kortste pad tussen B en D heeft lengte 4 (via C). Door deze extra lijnen toe te voegen, ontstaat er een graaf waarin een Eulercircuit bestaat met een totale lengte van
32 + 5 + 4 = 41: slechter dan de vorige oplossing!

Ten slotte berekenen we de totale lengte als we kiezen voor de paren (A, D) en (B, C). In dat geval moeten de lijnen AG, GD en BC worden toegevoegd en vinden we een totale lengte van
32 + 5 + 1 = 38: de beste oplossing!

Hiermee is de oplossing voor het Chinese Postbode probleem, voor de graaf van figuur 7, gevonden: we voegen de lijnen AG, GD en BC toe en tekenen een Eulercircuit in de dan ontstane graaf, bijvoorbeeld: $ABCDEGFAGDGCBGA$. In het kader op pagina 8 vind je nog een voorbeeld van het Chinese Postbode Probleem.

Een essentiële stap in de oplossing van het Chinese Postbode Probleem, is het vinden van het kortste pad tussen elk tweetal punten met oneven graad. In de voorbeelden die we hebben besproken, hebben we niet moeilijk gedaan over *hoe* je dat kortste pad vindt. Dat gaf niet: de grafen waren klein genoeg, zodat we al gauw zagen welk pad het kortste is. Maar hoe zit dat met grote grafen, die er helemaal niet zo overzichtelijk uitzien? Om *alle* paden tussen twee punten na te gaan, is een tijdrovend klusje, zelfs voor een computer. De Nederlander Edsger Dijkstra heeft in 1956 een efficiënt algoritme ontwikkeld om het kortste pad tussen twee punten te vinden, zie het kader op pagina 10.

Het Chinese Postbode Probleem kent vele praktische toepassingen. De context van een postbode is eigenlijk niet de beste: vaak *moet* een postbode een straat twee keer doorlopen, omdat er aan beide kanten huizen staan. Een vuilnisman die met zijn vuilniswagen het vuil moet ophalen, of een sneeuwruimer die met zijn veegwagen de straten

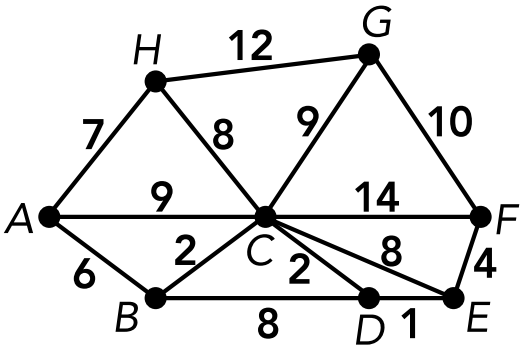
HET ALGORITME VAN DIJKSTRA In 1956 publiceerde Edsger Dijkstra (1930-2002) zijn *kortste pad-algoritme*. Dijkstra was een van de eerste programmeurs in Nederland. Toen hij in 1957 trouwde, bleek hoezeer Dijkstra zich in de voorhoede bewoog: het beroep dat hij opgaf – computerprogrammeur – werd door de burgerlijke stand niet erkend. Omdat hij natuurkunde had gestudeerd, gaf hij toen maar 'theoretisch natuurkundige' op. Hij werd wereldberoemd met onder andere zijn efficiënte algoritme voor het vinden van het kortste pad tussen twee punten in een graaf. Dit is een zogeheten 'gretig algoritme', het onderwerp van het thema-artikel uit het februarinummer.

Stel dat we in de graaf hiernaast het kortste pad willen weten tussen A en F. Het idee is dat we elk punt een label geven; in eerste instantie een tijdelijk label, dat voor elk punt ∞ (oneindig) is. Een uitzondering is het beginpunt: dat krijgt meteen een permanent label, te weten 0. In de stappen van Dijkstra's algoritme wordt steeds de waarde van een label verlaagd; zodra het eindpunt (F) zijn permanente label heeft, stopt het algoritme. In Dijkstra's algoritme noteren we voor een punt U in de graaf met $l(U)$ het (huidige) label van dat punt. Voor een lijn e in de graaf noteren we met $w(e)$ de lengte van die lijn (w van het Engelse woord 'weight').

Het algoritme gaat als volgt.

Stap 1. Geef het beginpunt label 0 en alle overige punten label ∞.
Stap 2. Neem het punt U dat als laatste een permanent label heeft gekregen. Kijk naar alle punten V die met U zijn verbonden en die nog geen permanent label hebben. Als $l(U) + w(e) < l(V)$, waarbij e de lijn tussen U en V is, verander het tijdelijke label van V dan in de (kleinere) waarde $l(U) + w(e)$.
Stap 3. Neem van alle punten die nog een tijdelijk label hebben het punt met het kleinste label en maak dat label permanent (als er meerdere punten zijn die daaraan voldoen, kies er dan één willekeurig).
Stap 4. Herhaal de stappen 2 en 3 net zolang totdat het punt dat je wilt bereiken zijn permanente label heeft.

We voeren het algoritme uit voor de graaf die je hier ziet. We willen weten wat het kortste pad is van A naar F. Pak er voor jezelf een kladblaadje bij. We geven A het label 0, de overige punten label ∞. De punten die met A zijn verbonden, zijn B, C en H. Er geldt: $l(A) + w(AB) = 6$, $l(A) + w(AC) = 9$ en $l(A) + w(AH) = 7$; dit worden de nieuwe tijdelijke labels van achtereenvolgens B, C en H. Omdat 6 het kleinste getal is van die drie, maken we het label van B permanent.



Nu kijken we naar de punten die met B verbonden zijn, voor zover ze geen permanent label hebben. Dat zijn C en D. Er geldt: $l(B) + w(BC) = 8$ en $l(B) + w(BD) = 14$. Het label van C was 9 en omdat 8 kleiner is, veranderen we het label van C in 8. Het label van D wordt 14. Het minimum van deze twee getallen is 8; we maken het label van C dus permanent.

Zo gaan we verder. We kijken nu welke punten zonder permanent label met C zijn verbonden; dat zijn D, E, F, G en H. De labels van deze punten worden respectievelijk 10, 16, 22, 17 en 16. Omdat 10 het minimum is, wordt het label van D permanent.

Punt F heeft nu weliswaar een label gekregen dat kleiner is dan ∞, maar dit label is nog tijdelijk. We moeten dus nog verder gaan met het algoritme en vinden uiteindelijk als kortste pad: $ABCDEF$, met een lengte van $6 + 2 + 2 + 1 + 4 = 15$.

Als je op een kladblaadje hebt meegetekend, heb je gemerkt dat het algoritme zo eenvoudig is, dat je je afvraagt waarom je het niet zelf hebt bedacht. Dijkstra vond het zelf ook een beetje gek dat zijn naam en faam voor een groot deel gebaseerd waren op een algoritme dat hij bedacht als demonstratie voor een computer. Hij bedacht zijn kortste pad-algoritme zonder pen of papier op een zonnig terras terwijl hij met zijn vrouw een kopje koffie dronk.

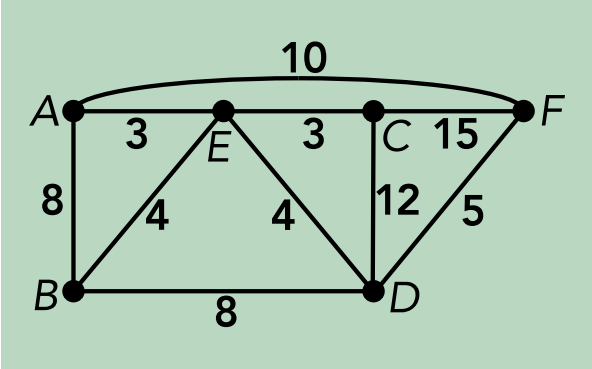
Dijkstra's algoritme is niet het enige kortste pad-algoritme. Twee andere kortste pad-algoritmen zijn het algoritme van Bellman-Ford en het algoritme van Floyd-Warshall. Elk algoritme heeft zo zijn voor- en nadelen. Dijkstra's algoritme leidt ten opzichte van andere algoritmen erg snel tot de oplossing, maar het heeft de beperking dat bij ongerichte grafen (geen eenrichtingsverkeer) lijnen geen negatieve lengtes mogen hebben.

Alle manuscripten van Dijkstra zijn te vinden in het 'E.W. Dijkstra Archief', dat op internet staat: www.cs.utexas.edu/users/EWD.

van sneeuw moet ontdoen, zijn betere voorbeelden. Maar nog veel vaker gaat het om economische contexten en stellen de getallen bij de lijnen geen fysieke afstanden voor, maar kosten. Ook zijn er optimalisatieproblemen – praktisch of zuiver wiskundig – waarbij de getallen bij de lijnen negatief kunnen zijn. De essentie van het probleem verandert daardoor echter niet.

Opgave 4. Los het Chinese Postbode Probleem op voor de graaf in figuur 8. Punt *A* is het postkantoor. (Antwoord: *ABDEBEAFDCECFA*.)

Opgave 5. Bepaal voor het Koningsbergen-bruggenprobleem, waar het artikel mee begon, een rondwandeling waarbij elke brug ten minste één keer wordt aangedaan en het totale aantal keren dat een brug wordt overgestoken, minimaal is. (Antwoord: er moet negen keer worden overgestoken.)



Figuur 8 Vind de optimale route in dit netwerk

Voor dit artikel is onder andere gebruik gemaakt van de wiskunde-d-module Optimalisatie in Netwerken *van Henk Tijms, het boek* Opgelost *van Bennie Mols en het boek* Nets, Puzzles and Postmen *van Peter Higgins.* ■

HET HANDELSREIZIGERSPROBLEEM Een probleem dat nauw verwant is aan het Chinese Postbode Probleem is het *Handelsreizigersprobleem*. Een handelsreiziger moet een bepaald aantal steden bezoeken en aan het eind weer terugkeren bij zijn vertrekpunt. Hij wil dat zo doen, dat elke stad precies één keer aan bod komt en bovendien moet de totaal af te leggen afstand zo klein mogelijk zijn.

In termen van grafen komt het hierop neer. Alle te bezoeken steden vormen de punten van de graaf; steden waartussen een weg loopt, worden in de graaf met lijnen (voorzien van een lengte) weergegeven. Wat is nu een circuit waarbij elk *punt* precies eenmaal wordt aangedaan en waarbij de totale lengte zo klein mogelijk is? Het algoritme van Fleury kunnen we hier niet gebruiken: dat leidt tot een circuit waarbij elke *lijn* precies eenmaal wordt aangedaan; een punt kan vaker worden gepasseerd.

Deze twee zo op elkaar lijkende problemen liggen in hun oplossing mijlenver uit elkaar. Zo eenvoudig als Fleury's algoritme is, zo ingewikkeld is het Handelsreizigersprobleem. Tot op heden is er geen ideale oplossingsmethode voor het Handelsreizigersprobleem gevonden. De handelsreiziger zou natuurlijk alle mogelijke circuits kunnen uitproberen, maar dat zijn er ongelofelijk veel. Als er n steden zijn, zijn er $(n-1)!/2$ mogelijke circuits. Als $n = 30$, komt dit neer op 4.420.880.996.869.850.977.271.808.000.000 mogelijkheden! De waarden van $(n-1)!/2$ groeien zo ontzettend snel, dat het probleem in praktische zin (de tijd die nodig is voor de oplossing) de krachtigste computer al snel de baas wordt, tenminste als de computer alle oplossingen één voor één nagaat. Voor $n = 50$ bestaan er al meer dan 3×10^{62} mogelijke circuits. Dit betekent dat als een triljoen (een miljoen maal een miljoen maal een miljoen, ofwel 10^{18}) computers elk een triljoen circuits per seconde zouden kunnen nagaan (iets wat natuurkundig buiten bereik is), dan zou dat nog steeds meer dan een triljoen jaar duren, veel langer dan de huidige leeftijd van het heelal: 13,7 miljard jaar.

Het doorrekenen van alle mogelijke routes van de handelsreiziger kost dus te veel tijd. Daarom zijn er handige rekentrucs verzonnen waarbij niet alle mogelijkheden hoeven worden nagegaan. Met zo'n truc kon men in 1954 de kortste rondreis berekenen langs de toen nog 48 staatshoofdsteden in de VS. In 1980 berekende men een handelsreis langs 120 West-Duitse steden, inclusief Berlijn, en in 1987 een wereldreis langs 666 plaatsen verspreid over alle continenten, inclusief de Noord- en Zuidpool. Het huidige rekenrecord (uit 2004) voor het Handelsreizigersprobleem staat op 24.978 plaatsen, verdeeld over heel Zweden. De totale lengte daarbij is zo'n 72.500 kilometer en men heeft bewezen dat een korter circuit niet bestaat. De lijntekening op de achtergrond is het circuit; de rode puntjes zijn de 24.978 plaatsen.

Meer informatie over deze Zwedenreis kun je vinden op www.tsp.gatech.edu/sweden.

JOURNAAL

■ door Alex van den Brandhof

Oude stelling, nieuw bewijs

Er zijn verschillende manieren om te bewijzen dat er oneindig veel priemgetallen bestaan. De Canadees Idris Mercer publiceerde onlangs een nieuw bewijs.

De Griek Euclides, die 300 jaar voor Christus leefde, bewees al de stelling dat er oneindig veel priemgetallen bestaan. Naast het bewijs van Euclides bestaan er nog diverse andere bewijzen van deze stelling. Aan de lijst van alternatieve bewijzen is er nog één toegevoegd: in het aprilnummer van het tijdschrift *American Mathematical Monthly* verscheen het artikel 'On Furstenberg's Proof of the Infinitude of Primes' van Idris Mercer. Met deze titel verwijst hij naar een bewijs van de Israelische wiskundige Harry Fürstenberg, die in 1955 met een verrassend bewijs van Euclides' stelling kwam. Hij gebruikte de topologie, een tak van de wiskunde die je niet als vanzelfsprekend in verband brengt met de getaltheorie, om de stelling van Euclides te bewijzen. Mercer is erin geslaagd om dit topologische bewijs zodanig om te werken dat je niet meer van een topologisch bewijs kunt spreken. Doordat topologische taal wordt vermeden, is het goed te snappen. Je kunt het bewijs vinden op www.kennislink.nl (zoek op 'mercer').

Topologisch raadsel opgelost

Een team van drie wiskundigen uit de Verenigde Staten heeft het 'Kervaire Invariant Probleem', een 45 jaar oud wiskundig probleem, opgelost.

'Dit probleem is een van de belangrijkste vraagstukken uit de algebraïsche een geometrische topologie.' 'De meeste wiskundigen dachten dat het probleem niet zou worden opgelost in de tijd dat ze nog leven.' 'De oplossing van dit probleem leidt tot nieuwe, diepe inzichten en legt verbanden tussen topologie enerzijds en algebra en getaltheorie anderzijds.' Dit zijn drie uitspraken over het Kervaire Invariant Probleem, een uiterst complex probleem dat in de jaren 1960 werd geformuleerd door de Franse wiskundige Michel Kervaire en dat in wiskundige taal abracadabra is voor niet alleen het gewone volk, maar ook voor veel beroepswiskundigen: 'voor welke waarden van n bestaan er n-dimensionale differentieerbare variëteiten waarvan de Kervaire-invariant gelijk is aan 1?'

Wiskundigen bestuderen abstracte vormen: krommen, oppervlakken, 10-dimensionale ruimten of zelfs oneindig-dimensionale ruimten. Al deze objecten tezamen heten variëteiten. Ze worden geclassificeerd volgens bepaalde 'invariante eigenschappen'; een invariant is een 'onveranderd blijvende grootheid'. Elke variëteit heeft een zogeheten Kervaire-invariant. Michel Kervaire gebruikte zijn invariant om bepaalde varieteiten te construeren. De Kervaire-invariant is een getal, voor de meeste variëteiten gelijk aan 0. Sommige variëteiten hebben echter een dusdanige vorm dat de Kervaire-invariant gelijk is aan 1. Het betreft dan variëteiten met dimensies 2, 6, 14, 30 en 62. In deze rij zit een regelmaat: het zijn allemaal getallen van de vorm $2^n - 2$ (zo is 14 gelijk aan $2^4 - 2$ en 30 gelijk aan $2^5 - 2$). In 1969 bewees William Browder dat er geen variëteiten bestaan waarvan de Kervaire-invariant ongelijk is aan 0, buiten deze speciale gevallen. Maar de vraag hoe het met die speciale gevallen zit – de rij 2, 6, 14, 30, 62 kan oneindig lang worden voortgezet: 126, 254, 510, 1022, … – bleef onbeantwoord.

Hopkins en zijn collega's hebben nu aangetoond dat voor elke variëteit met dimensie groter dan 126 ($= 2^7 - 2$), dus ook de speciale gevallen 254 ($= 2^8 - 2$), 510 ($= 2^9 - 2$), etcetera, gelijk is aan 0. Het geval van een 126-dimensionale variëteit is hardnekkig: dit ene geval moet nog worden uitgezocht.

Als je een willekeurig getal kwadrateert, verschijnen er meestal totaal andere cijfers, daar is eigenlijk geen peil op te trekken. Maar kwadrateer nu eens 9376 of 90625. Zie je hier iets bijzonders aan?

■ door Arnout Jaspers

STANDVASTIGE KWADRATEN

$$9376^2 = 87909376$$

Als je het kwadraat van 9376 of 90625 berekent, valt je hopelijk snel op dat het kwadraat op dezelfde cijfers eindigt als dat getal zelf: $9376^2 = 87909376$ en $90625^2 = 8212890625$.

Zouden er meer van deze *standvastige kwadraten* bestaan? Eerst proberen we maar eens alle getallen van één cijfer: $0^2 = 0$, $1^2 = 1$, $2^2 = 4$, $3^2 = 9$, $4^2 = 16$, $5^2 = 25$, $6^2 = 36$, $7^2 = 49$, $8^2 = 64$, $9^2 = 81$.

De getallen 0 en 1 zijn erg flauw, omdat het kwadraat hetzelfde is als het getal zelf, dus die laten we niet meedoen. Maar 5 en 6 zijn wel echt standvastige kwadraten.

Grotere standvastige kwadraten zijn, zoals we zagen, 9376 (vier cijfers) en 90625 (vijf cijfers). Als we toestaan dat een getal ook met het cijfer 0 mag beginnen, is het vijfcijferige getal 09376 ook een standvastig kwadraat. Maar 090625 is geen zescijferig standvastig kwadraat; de 0 waarmee dit getal begint, komt niet op de juiste plek terug in het kwadraat. We spreken af dat het is toegestaan om een getal met 0 te laten beginnen; het aantal getallen met n cijfers is dus gelijk aan 10^n (en niet $9 \cdot 10^{n-1}$). De reden hiervoor is dat we met deze afspraak zodadelijk een mooie stelling kunnen formuleren.

SYSTEMATISCH ZOEKEN Zijn er standvastige kwadraten van twee cijfers? Blind proberen wordt hier al behoorlijk saai, dus gebruiken we liever onze hersens: wat zou het laatste cijfer van zo'n getal kunnen zijn? Juist: 5 of 6, want anders blijft het laatste cijfer van het kwadraat al niet hetzelfde. Je hoeft dus alleen maar alle kwadraten van _5 en _6 uit te proberen, in totaal 20 mogelijkheden.

Zijn er standvastige kwadraten van drie cijfers? Je hebt nu wel door hoe je die snel kunt vinden, net als de standvastige kwadraten van vier, vijf en nog meer cijfers. Als je dat doet, en je maakt er een overzichtelijke tabel van, dan doemt een heel opmerkelijke wet op uit de cijferbrij:

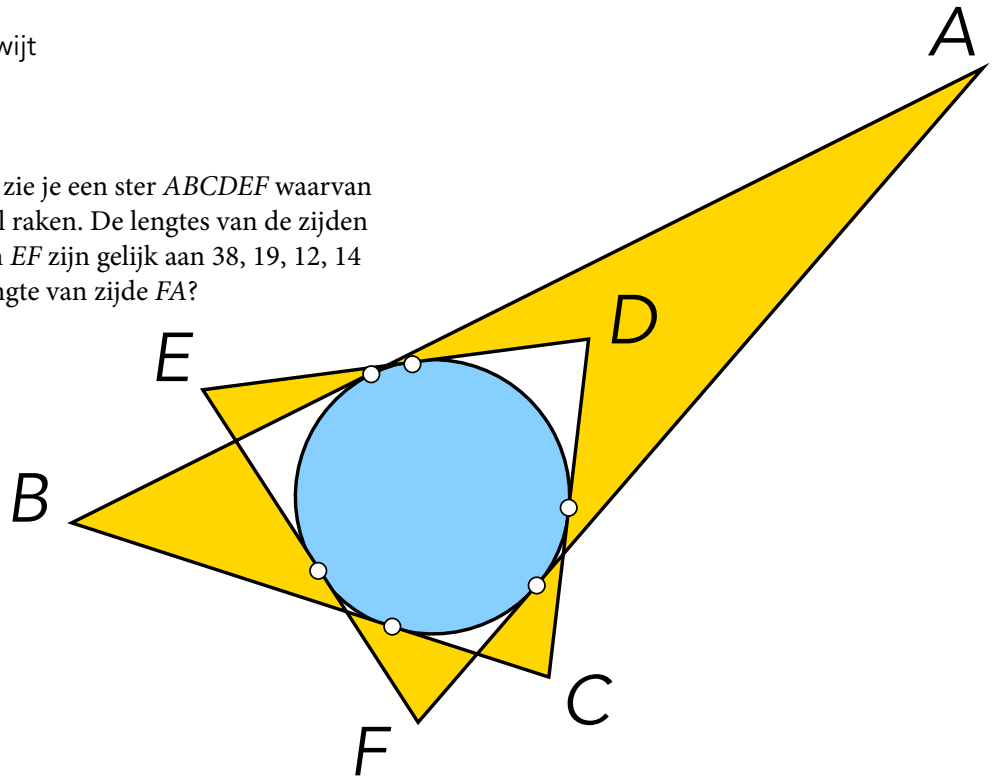
Stelling. De som van de standvastige kwadraten van n cijfers is $10^n + 1$.

Voor $n = 1$ kun je al zien dat het klopt: $5 + 6 = 11$. Probeer maar eens alle standvastige kwadraten te vinden die nog op je rekenmachine passen, of zelfs nog grotere, en verifieer bovengenoemde stelling. Als je echt diepzinnig aan de slag wilt, ga je de stelling bewijzen. In het volgende nummer laten we zien hoe dat kan. ■

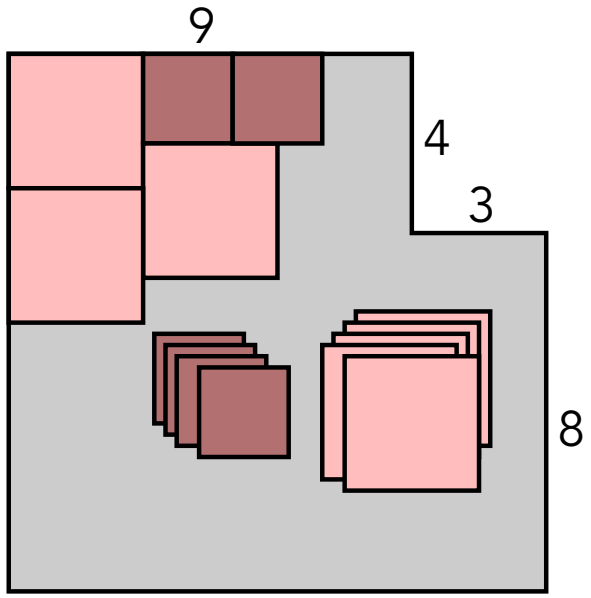
PROBLEMEN

■ door Dion Gijswijt

STER In de figuur zie je een ster *ABCDEF* waarvan de zijden een cirkel raken. De lengtes van de zijden *AB*, *BC*, *CD*, *DE* en *EF* zijn gelijk aan 38, 19, 12, 14 en 15. Wat is de lengte van zijde *FA*?



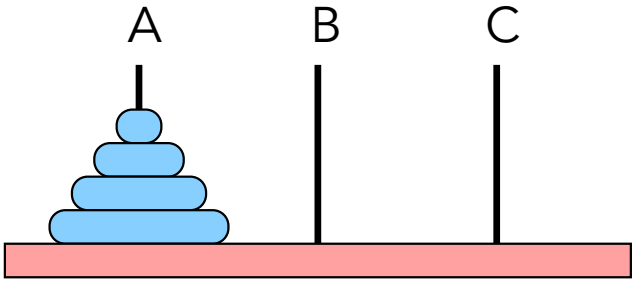
TUINTEGELS Ik heb twee verschillende maten tegels: 2×2 en 3×3. Kan ik hiermee mijn tuin betegelen?



VIERKANTEN IN VIERKANTEN Ik heb een grote voorraad vierkante tegels van drie verschillende afmetingen: 2×2, 3×3 en 5×5.
Betegel hiermee een 13×13 vierkant.
Laat zien dat je een 7×7 vierkant *niet* kunt betegelen. Voor welke waarden van n kun je een $n \times n$ vierkant betegelen?

TORENS VAN HANOI Dit is een variatie op het beroemde spel 'Torens van Hanoi'. Er zijn vier schijven met een diameter van 1, 2, 3 en 4. De schijven zijn verdeeld over drie stokjes waar ze op kunnen worden geschoven. Een zet in dit spel bestaat eruit de bovenste schijf van een stokje te nemen en die op een ander stokje te schuiven.

Er mag echter nooit een schijf bovenop een kleinere schijf worden geplaatst! Bovendien mag een schijf in een zet niet direct van *A* naar *C* of van *C* naar *A* worden verplaatst. In hoeveel zetten kun je alle schijven van *A* naar *C* verplaatsen?

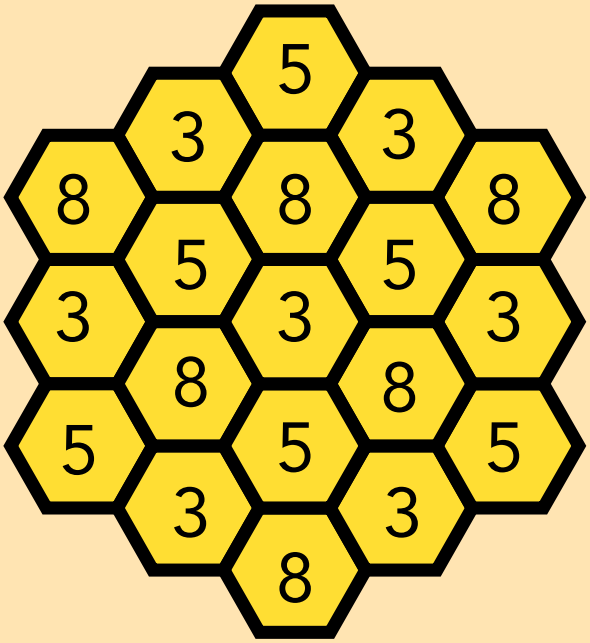


In 1996 begon Dion Gijswijt als student wiskunde met de rubriek 'Problemen - Oplossingen'. Hij studeerde af, promoveerde, werkte een jaar op een universiteit in Hongarije, keerde terug naar de UvA, deed wiskundig onderzoek op hoog niveau en bedacht tussendoor nog altijd problemen voor *Pythagoras*. Sinds kort werkt hij op de Universiteit Leiden en het CWI. Aan Dions Pythagorastijdperk komt een eind: in dit nummer staan zijn laatste problemen. In de volgende *Pythagoras* zullen natuurlijk nog wel de oplossingen verschijnen. Het gezicht achter de problemen zie je op het omslag van dit nummer.

OPLOSSINGEN

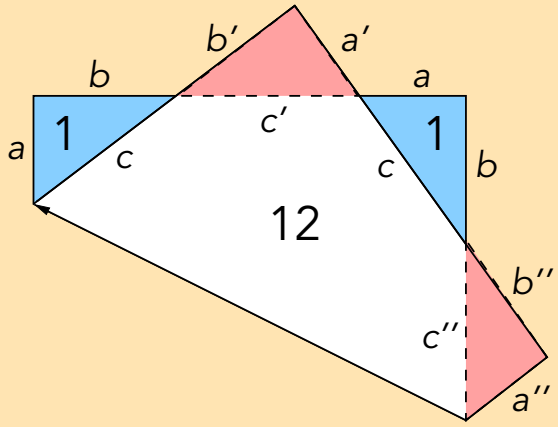
MIKADO Hoewel de snijpunten zelf niet te zien zijn, kun je van een lijnstuk wel zien door welke lijnstukken (met hoger nummer) het gesneden wordt. Lijnstuk 1 wordt gesneden door 2, 3, 4, 5, 6, lijnstuk 2 door 4, 6, 7, 8, lijnstuk 3 door 4, 6, 7, 8, lijnstuk 4 door 6, 7, 8, lijnstuk 5 door 6, 7, 8, lijnstuk 6 door 8 en lijnstuk 7 door 8. In totaal zijn er 5 + 4 + 4 + 3 + 3 + 1 + 1 = 21 snijpunten.

GELIJKE SOMMEN Twee zeshoekjes met twee gemeenschappelijke buurvakjes moeten hetzelfde getal hebben. Er is dus maar één oplossing, zie de figuur hieronder.



ELEMENTAIRE OPERATIE Als x in S zit, dan ook x^2. Voor $x \neq 1, -1$ volgt dit omdat $1/(1/(x+1) - 1/(x-1)) = \frac{1}{2}(1-x^2)$ in S zit, en dus ook $x^2 = (1 - \frac{1}{2}(1-x^2)) - \frac{1}{2}(1-x^2)$.

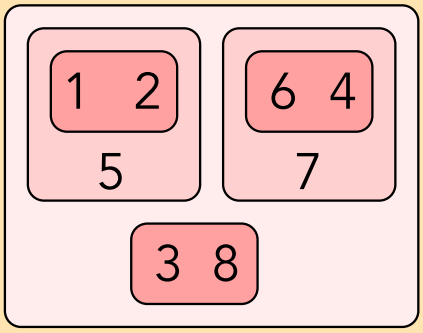
Voor x, y in S ongelijk aan 0 zitten dus ook $(x+y)^2$ en $(x-y)^2$ in S en daarmee ook $(x+y)^2 - (x-y)^2 = 4xy$. Ten slotte zit dan ook $xy = 1/(\frac{1}{4}xy + \frac{1}{4}xy + \frac{1}{4}xy + \frac{1}{4}xy)$ in S.



VOUWEN De vier uitstekende driehoekjes zijn gelijkvormig en de twee blauwe driehoekjes zijn even groot. Het rode driehoekje heeft zijden $a' = t \cdot a$, $b' = t \cdot b$ en $c' = t \cdot c$ voor zekere schalingsfactor t. Omdat het vouwblaadje gelijke zijden heeft, geldt $a + b' + c = a + b + c'$, dus $t(b - c) = b' - c' = b - c$, zodat $t = 1$. Alle vier de driehoekjes zijn even groot.

De oppervlakte van het vouwblaadje is dus $2 \cdot 12 = 24$. We berekenen nu a, b en c. Er geldt: $(a + b + c)^2 = 24$. Omdat $a^2 + b^2 = c^2$ en $2ab = 4$, volgt na wegwerken van de haakjes dat $\sqrt{24}c = 10$, dus $c = \frac{10}{\sqrt{24}}$. Er volgt dat $a = \frac{6}{\sqrt{24}}$ en $b = \frac{8}{\sqrt{24}}$. De lengte van de vouw is dus $\sqrt{(b + c - a)^2 + 24} = \sqrt{30}$.

DOOSJES IN DOOSJES Voor twee doosjes A en B zijn er drie mogelijkheden:
(i) alles dat in A zit, zit ook in B;
(ii) alles dat in B zit, zit ook in A;
(iii) niets zit in zowel A als B.
Er is een doosje A waar 1 en 2 in zitten, maar 5 niet, en een doosje B waar 1 en 5 in zitten, maar 6 niet. Dus moet **(i)** gelden. Verder puzzelen levert de volgende situatie.



Er is dus *geen* doosje waar 5 en 8 in zitten, maar 4 niet.

GEHAAKTE SCHEMERL

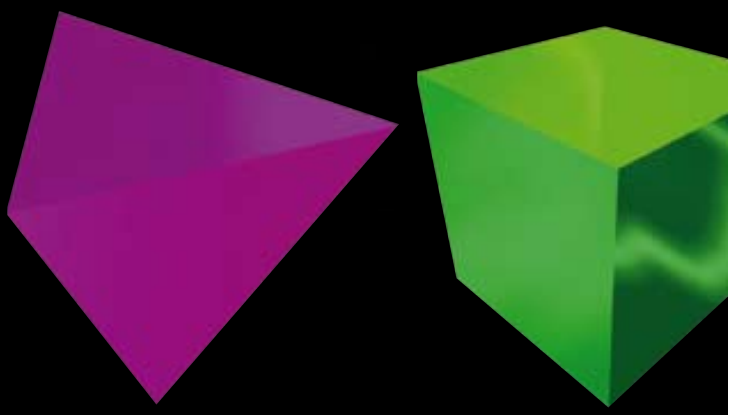
■ door Arnout Jaspers

Als je onlangs op vakantie bent geweest in Thailand, herken je dit mysterieuze object waarschijnlijk wel: daar heeft zowat elke strandtent zulke schemerlampen boven z'n terras hangen. Ze zijn er in vele vormen en maten, maar ze worden allemaal samengesteld uit 'puzzelstukjes' van één en dezelfde vorm (zie het plaatje hierboven). Wonderlijk is, dat er geen lijm of plakband aan te pas komt. Elk plastic stukje staat onder spanning omdat het krom gebogen wordt door z'n naaste buren. Alle stukjes houden elkaar met hun haakjes in de houdgreep, zodat een vrijdragende structuur ontstaat.

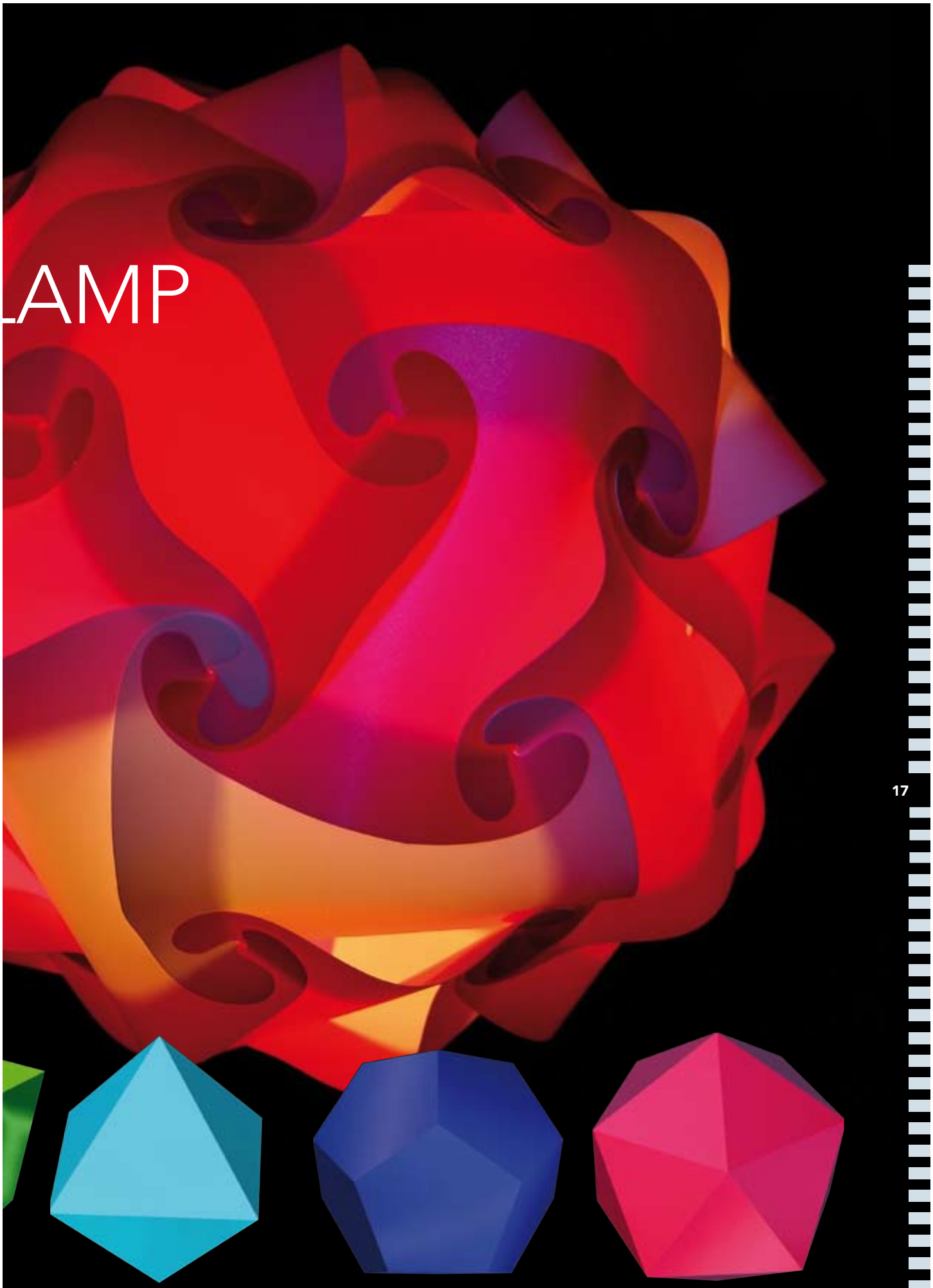
Deze bol bestaat uit 30 stukjes. Op de foto is te zien dat telkens vijf of drie stukjes in een rozet in elkaar gehaakt zitten. Een rozet van vijf wordt altijd omringd door vijf rozetten van drie. Als je wel eens van de platonische lichamen gehoord hebt, vraag je je misschien af hoe dit kan. Immers, er is bewezen dat er maar vijf driedimensionale objecten bestaan die zijn samengesteld uit identieke regelmatige veelhoeken. Dat zijn de tetraëder (4 driehoeken), de hexaëder of kubus (6 vierkanten), de octaëder (8 driehoeken), de dodecaëder (12 vijfhoeken) en de icosaëder (20 driehoeken).

Het puzzelstuk is, als je de haakjes even wegdenkt, een scheefgedrukte rechthoek, ofwel een parallellogram. Blijkbaar is het mogelijk een bolvorm te benaderen met 30 parallellogrammen. Of is de vorm van deze lamp geen echte bol?

Voor platonische lichamen geldt nog een eis: in elk hoekpunt moeten evenveel ribben samenkomen. De lamp voldoet duidelijk niet aan deze eis. Toch is er een hecht verband tussen deze lamp en één van de platonische lichamen. Kun je zien met welke van de vijf, en wat dat verband is? ■



De vijf platonische lichamen: tetraëder (viervlak), hexaëder (ku

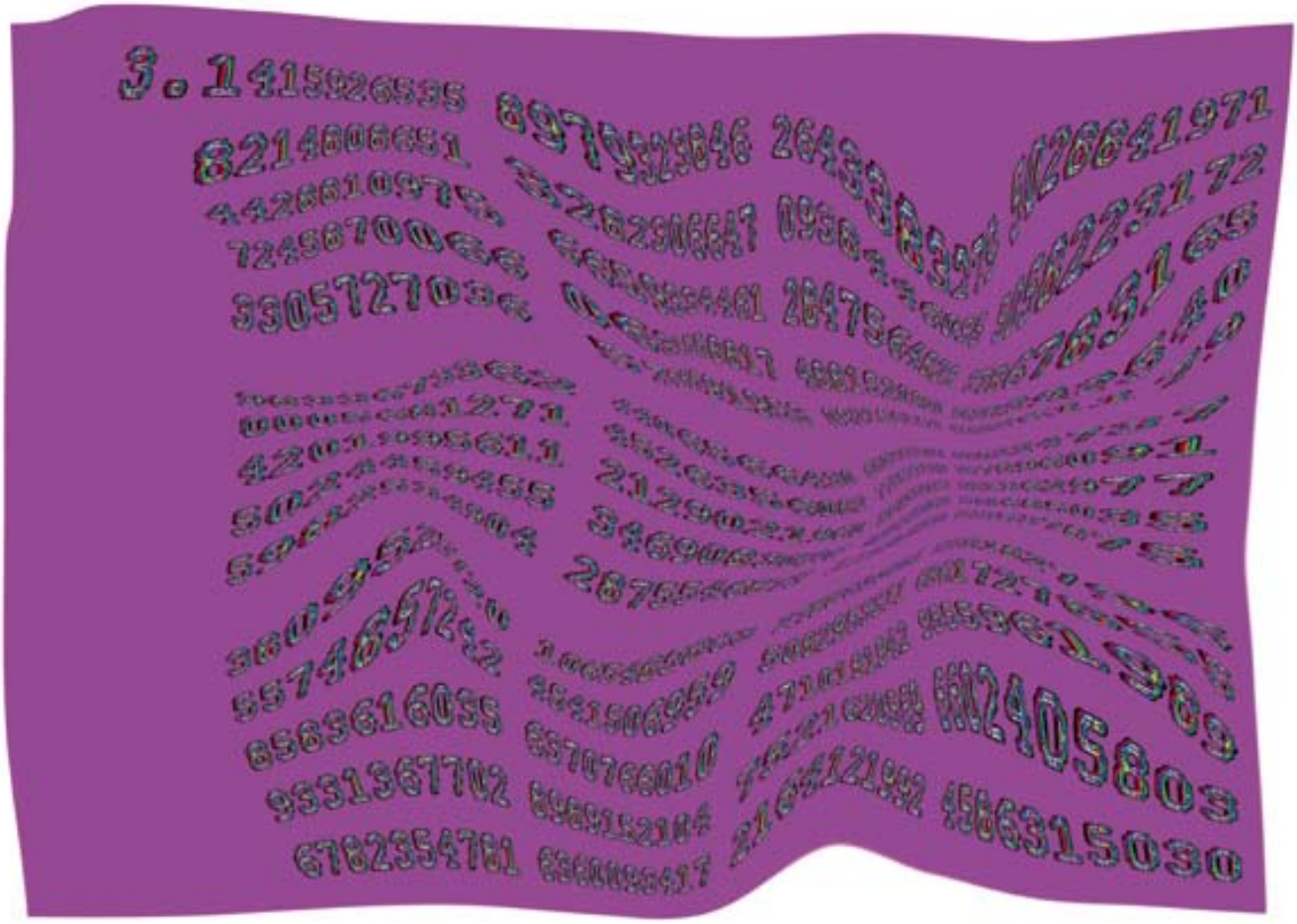


bus), octaëder (achtvlak), dodecaëder (twaalfvlak) en icosaëder (twintigvlak). *Afbeeldingen: www.platonicsolids.info*

In het vorige nummer behandelden we in het artikel 'De IQ-formule' de Lagrange-veelterm, waarmee je elke getallenrij in een IQ-test logisch kunt voortzetten (zie ook 'De IQ-formule *light*' op pagina 22 van dit nummer). Jammer genoeg geeft die formule meestal niet de oplossing waarmee je punten verdient. In dit vervolgartikel gaan we nader in op simpele en complexe getallenrijen. Kun je deze begrippen wiskundig precies maken?

■ door Jos Groot

HET ZIPPEN VAN PI



De IQ-formule begon met een aantal getallenrijen die je voort moest zetten. Eén daarvan was:

3 - 1 - 4 - 1 - 5 - ?

Deze kon op (ten minste) drie verschillende manieren min of meer intelligent worden voortgezet. Met 1, omdat 3/1 = 3, 1 + 3 = 4, 4/4 = 1, 1 + 4 = 5, 5/5 = 1. Of met 9, omdat dat de zesde decimaal van π is. Of met 53, omdat $3 - 5 \cdot 1 + 10 \cdot 4 - 10 \cdot 1 + 5 \cdot 5 = 53$ (Lagrange-veelterm in simpele vorm).

Toch is volgens de makers van de test maar één antwoord goed. Er zijn diverse redenen waarom het simpelste verband tussen de cijfers als het goede antwoord beschouwd wordt. Het wordt bijvoorbeeld als het mooist ervaren, en het is het snelste uit te rekenen. Dat laatste is handig, omdat je maar beperkte tijd hebt. Er is een filosofisch principe, Ockhams Scheermes geheten, dat aanraadt niet meer aannamen te doen dan nodig. In de wetenschappen blijkt dit principe vaak verrassend goed te werken: de simpelste verklaring is meestal de beste. Maar wat is 'simpel'? Valt daar iets objectiefs over te zeggen? Daarvoor gaan we eerst kijken naar rijen cijfers waarin een verschillende mate van verband, of regelmaat, zit.

VERBAND IN GETALLENRIJEN We nemen lange reeksen cijfers, zeg een miljoen lang. Ter herinnering: een cijfer is 0, 1, 2, ..., 9. Een paar voorbeelden, vooral met nullen en enen om het overzichtelijk te houden:

a. 00000000000000000000...
b. 01010101010101010101...
c. 31415926535897932385...
d. 11010111011001111111...
e. 00110100010101101001...

De ... betekenen dat de rij doorgaat tot de rij een miljoen cijfers heeft. Een omschrijving van de rijen is (de verklaring van de getallen tussen de rechte haken volgt verderop in het artikel):

a. een miljoen nullen [18]
b. vijfhonderdduizend paren 01 [27]
c. de eerste miljoen cijfers van π [1000]
d. een miljoen toevalsgetallen met ongeveer vier keer zoveel enen als nullen [800000]
e. een miljoen toevalsgetallen met evenveel enen als nullen [1000000]

Op het eerste gezicht lijkt de regelmaat in de rijen van boven naar beneden af te nemen (de π-reeks is een speciaal geval, hierover later meer). Anders gezegd: de complexiteit van de rijen neemt van boven naar beneden toe. De Russische wiskundige Kolmogorov heeft rond 1960 de volgende definitie van complexiteit gegeven.

De algoritmische complexiteit van een reeks getallen is de lengte van het kortste algoritme dat deze getallen produceert.

Een algoritme is een recept om iets uit te rekenen. Je kunt er ook 'computerprogramma' voor lezen. In de bovenstaande omschrijvingen geeft het getal tussen rechte haken een schatting van de lengte van het kortste computerprogramma dat deze rij kan reproduceren. Voor deze schattingen nemen we aan dat we een tamelijk slimme computer hebben, waarin we direct de omschrijvingen *a* en *b* als programma kunnen invoeren, met als resultaat de rijen *a* en *b*. De complexiteit is in deze gevallen dus gewoon de lengte van de zinnetjes bij *a* en *b*: 18 en 27 karakters. Voor *c* ligt dat anders. De computer heeft geen idee waar hij de eerste miljoen decimalen van π vandaan moet halen. Maar wiskundigen weten dat er in de schijnbaar willekeurige rij cijfers een verborgen verband zit. Er geldt bijvoorbeeld:

$$\pi = 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} - \tfrac{1}{11} + \cdots$$

Er is duidelijk niet veel intelligentie nodig om deze reeks voort te zetten! Algoritmes die decimalen van π uitrekenen, gebruiken soortgelijke reeksen. Je kunt je wel voorstellen dat zo'n computerprogramma vrij kort opgeschreven kan worden; we schatten de lengte op 1000 karakters.

Dan nu rij *e*. Van deze rij weet je eigenlijk niets. Er zit niets anders op dan hem te beschrijven met zichzelf: een miljoen enen en nullen op die en die plaats. Van rij *d* weet je wel weer iets, namelijk dat er veel meer enen dan nullen in voorkomen. Dus komen er ook vaker langere rijen enen in voor. Verderop zal blijken dat je daar gebruik van kunt maken. Voor nu schatten we de lengte gelijk aan het aantal enen: 800.000.

De complexiteit zal tot op zekere hoogte afhangen van de taal waarin je het computerprogramma schrijft. Datzelfde heb je bij 'gewone' talen. In het Engels is *a* bijvoorbeeld 'A million zeros', wat 15 karakters bevat, minder dan de 18 van de Nederlandse omschrijving. Dit soort verschillen maakt voor lange reeksen niet veel uit, en sowieso is complexiteit niet precies uit te rekenen. Het gaat erom hoe groot de complexiteit ongeveer is, en of die voor de ene rij groter is dan voor de andere.

DE COMPLEXITEIT VAN π Als je een getal kunt uitrekenen op een simpele manier (dat wil zeggen: met een kort algoritme), dan zegt dat iets over hoe 'ingewikkeld' dat getal is. Interessant is, dat als je een echt willekeurig reëel getal kon uitkiezen, de complexiteit bijna altijd oneindig is, omdat het een oneindig aantal decimalen heeft zonder verband ertussen. Overigens is dit pure theorie: een getal 'uitkiezen' houdt in de praktijk in, dat je het volledig opschrijft (en dan heeft het geen oneindig aantal decimalen) of een recept geeft om het getal te vinden (bijvoorbeeld: 'de oplossing van de verge-

lijking $x^{13} + x^4 - 23 = 0$') en dan is de complexiteit van x per definitie gelijk aan die van de vergelijking.

Dit betekent dat bekende getallen zoals π en $\sqrt{2}$ met hun relatief kleine complexiteit grote uitzonderingen zijn. Dit geeft een link met intelligentietests. Mensen hebben de neiging om verbanden of structuren te zoeken en te vinden. Daarom kom je zo vaak 'getallen met structuur' zoals π en $\sqrt{2}$ tegen in de wiskunde. Wiskunde wordt dan ook wel de 'studie van structuren' genoemd. En daarom zitten er ook af te maken rijen in intelligentietests. Er wordt namelijk aangenomen dat je intelligenter bent naarmate je beter structuren kunt herkennen, ofwel: beter dit soort rijen kunt voortzetten.

Een ander gevolg van structuren zien is dat je (belangrijke) informatie kunt comprimeren. Denk bijvoorbeeld aan het samenvatten van een boek. Het boek is misschien tweehonderd bladzijden lang, je samenvatting slechts twee. Maar in die samenvatting staat wel het belangrijkste. Leren heeft te maken met het comprimeren van informatie. Over comprimeren gaat de volgende paragraaf. Er zal een zeker verband blijken te bestaan tussen hoeveel informatie je kunt comprimeren en de complexiteit van die informatie.

DATACOMPRESSIE Met de komst van de computer is de aandacht voor datacompressie toegenomen, dat wil zeggen, voor het compacter maken van gegevens. Mp3- en zipbestanden zijn er voorbeelden van. Er is een belangrijk verschil tussen de twee. Mp3's bevatten niet exact dezelfde informatie als de oorspronkelijke bestanden (net als samenvattingen!). Er is een deel weggelaten dat je (bijna) niet hoort. Dat kan doordat je gehoor niet perfect is. Maar een bestand uit een zipbestand is wel gelijk aan het origineel. Dat moet bijvoorbeeld zo zijn voor tekstbestanden. We hebben het hier over deze tweede vorm, ook wel 'verliesloze compressie' geheten.

Er zijn allerlei manieren om verliesloos te comprimeren. Een hele simpele is de volgende, genaamd 'run-length encoding' (RLE). Een voorbeeld:

Ongecomprimeerd: 0011100001100000100
(19 cijfers)
Gecomprimeerd: 20314021501120 (14 cijfers)

Zie je wat er is gebeurd? Je vervangt een rijtje nullen of enen door de lengte van dat rijtje en een 0 of 1 daarachter. De gecomprimeerde rij moet je zo lezen:

(2 nullen) (3 enen) (4 nullen) (2 enen) (5 nullen) (1 één) (twee nullen)

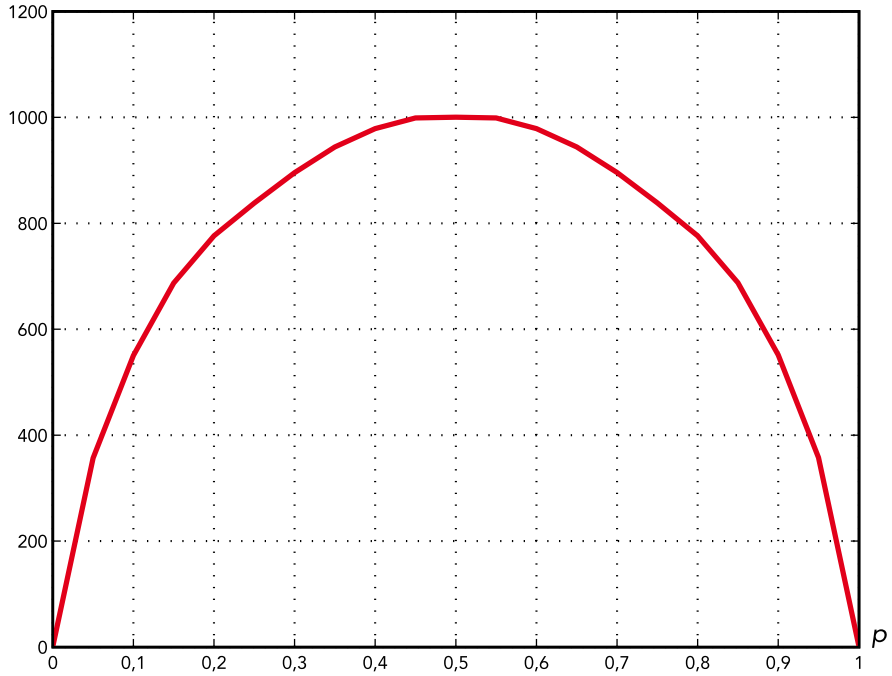
Dit geeft precies de ongecomprimeerde rij. De rij van 19 cijfers is teruggebracht tot 14 cijfers, dus er is inderdaad iets gewonnen. Herhaling is een vorm van verband, en daar wordt gebruik van gemaakt. Ga zelf eens na wat je denkt dat een methode als deze oplevert voor de reeksen a tot en met e uit het begin. Reeks b levert bijvoorbeeld geen enkele winst op. Sterker nog, na dit type compressie is de reeks twee keer zo lang geworden!

Nu gaan we een zipprogramma voor ons laten werken. Het compressiealgoritme daarin vindt en gebruikt herhaalde rijtjes getallen in een bestand, en werkt beter dan RLE. Als voorbeeld nemen we een bestand van een miljoen bytes. Eén byte bestaat uit acht bits. Elke bit maken we 1 met een kans p en 0 met een kans $1 - p$. Het aantal 1-bits in de file is dus ongeveer $8.000.000p$. Het zipprogramma laten we werken op dit bestand. De grafiek in figuur 1 geeft de grootte van het resulterende zipbestand, afhankelijk van p.

Als p bijna 0 is, bestaat het bestand uit bijna alleen maar nullen. Er zullen dan ook heel wat lange rijtjes nullen voorkomen zonder één enkele 1 erin. Zoals we net al zagen bij RLE, zijn zulke rijtjes heel efficiënt te comprimeren, dus is ook het bestand als geheel goed comprimeerbaar. Maar als $p = 0{,}5$, kan iedere bit net zo goed een 0 of een 1 zijn. Het bestand bestaat dan uit een toevallige opeenvolging van enen en nullen, zonder enige regelmaat. Welk recept je vooraf ook verzint om rijtjes bits korter op te schrijven, je kunt wiskundig bewijzen dat dan de winst nihil zal zijn. Vandaar dat de grafiek voor $p = 0{,}5$ een maximum heeft bij 1000 kilobyte, precies dezelfde omvang als het oorspronkelijke bestand. Snap je trouwens waarom de grafiek symmetrisch is rond $p = 0{,}5$?

Als we de rijen a tot en met e uit het begin zippen, krijgen we het volgende.

Omvang van een gezipt bestand dat oorspronkelijk 1000 kilobyte was



Figuur 1 Hoge compressie als *p* dichtbij 0 of 1, lage compressie als *p* dichtbij 0,5

a. 985 [18]
b. 986 [27]
c. 470444 [1000]
d. 776262 [800000]
e. 1000310 [1000000]

De getallen tussen de rechte haken zijn de schattingen uit het begin. In ieder geval komt de volgorde goed overeen. Sommige schattingen zijn zelfs aardig goed (*d* en *e*). De grote afwijking voor *a* en *b* is ook niet verrassend: het zipprogramma heeft voor de boekhouding nogal wat ruimte nodig, een kleine 1000 bytes, ongeacht hoe comprimeerbaar de rij is.

Verrassend is wel het bijna halve miljoen van *c*. De verklaring is echter niet moeilijk. De cijfers van π werden elk namelijk opgeslagen in één byte. Maar voor het opslaan van een decimaal heb je maximaal vier bits nodig, want 9 is binair '1001'. Vier bits is maar een halve byte en zodoende is het resultaat niet de oorspronkelijke miljoen, maar ongeveer de helft. De rest is als het ware loze ruimte, die tot bijna lengte 0 te comprimeren is.

CONCLUSIE Naarmate de complexiteit toeneemt, is een rij slechter te comprimeren met een zipprogramma. Een compressieprogramma geeft een soort bovengrens van de complexiteit. Voor π is die schatting veel te hoog; dat komt doordat een zipprogramma lang niet slim genoeg is om zelf een algoritme te vinden dat de cijfers van π berekent. Tot slot: eigenlijk geldt voor de rijen *d* en *e* hetzelfde. Immers, we noemden ze wel toevalsgetallen, maar in de praktijk worden zulke enorme rijen altijd door een computer gemaakt. En die gebruikt daarvoor een algoritme dat uiteraard veel korter is dan een miljoen bytes, anders zou het zo traag werken dat het volkomen nutteloos was. Daarom spreken wiskundigen meestal van 'pseudo-toevalsgetallen'. Het is overigens een hele kunst om een algoritme te ontwerpen dat 'goede' pseudo-toevalsgetallen maakt. 'Goed' betekent hier, dat niemand anders uit de geproduceerde rijen getallen het algoritme kan afleiden of het vervolg van de rij kan voorspellen. Dat is van groot belang bij onder meer het maken van geheimschriften.

Een voorbeeld van een (niet al te beste) pseudo-randomgenerator is:

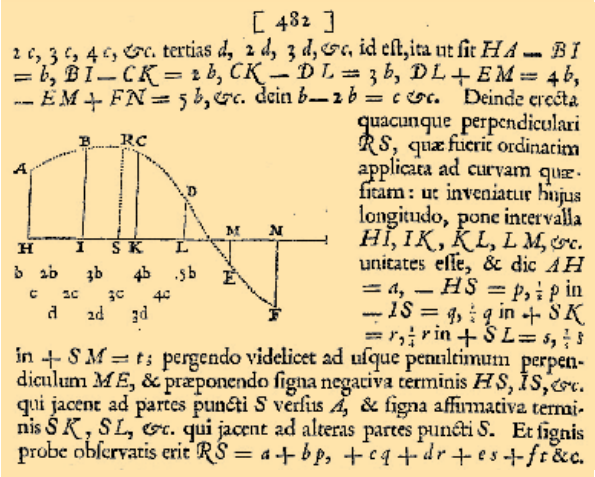
1. kies een begingetal;
2. kwadrateer dit;
3. neem de middelste cijfers van dit getal als nieuw getal;
4. herhaal de stappen 2 en 3.

Het zipprogramma kan net als bij de decimalen van π het verborgen verband tussen deze getallen niet vinden. Anders waren de zipcompressies van de rijen *d* en *e* maar ongeveer duizend bytes geweest. ■

In het artikel 'De IQ-formule' in het vorige nummer van *Pythagoras* beschreef Jos Groot een methode om met de Lagrange-veelterm een rij getallen logisch voort te zetten. Paul Levrie weet te melden dat het ook eenvoudiger kan, met een methode die al door Newton beschreven is.

■ door Paul Levrie

DE IQ-FORMULE *LIGHT*



[482]

2 c, 3 c, 4 c, &c. tertias d, 2 d, 3 d, &c. id eſt, ita ut ſit $HA - BI = b$, $BI - CK = 2b$, $CK - DL = 3b$, $DL + EM = 4b$, $- EM + FN = 5b$, &c. dein $b - 2b = c$ &c. Deinde erecta quacunque perpendiculari RS, quæ fuerit ordinatim applicata ad curvam quæſitam: ut inveniatur hujus longitudo, pone intervalla HI, IK, KL, LM, &c. unitates eſſe, & dic $AH = a$, $- HS = p$, $\frac{1}{2}p$ in $- IS = q$, $\frac{1}{3}q$ in $+ SK = r$, $\frac{1}{4}r$ in $+ SL = s$, $\frac{1}{5}s$ in $+ SM = t$; pergendo videlicet ad uſque penultimum perpendiculum ME, & præponendo ſigna negativa terminis HS, IS, &c. qui jacent ad partes puncti S verſus A, & ſigna affirmativa terminis SK, SL, &c. qui jacent ad alteras partes puncti S. Et ſignis probe obſervatis erit $RS = a + bp, + cq + dr + es + ft$ &c.

Figuur 1 Lemma V uit de *Principia Mathematica*

Isaac Newton (1643-1727) vond de *voorwaartse differenties* uit. Daarmee kunnen we op een heel eenvoudige manier de Lagrange-veelterm construeren. Je vindt dit onder andere terug in de *Principia Mathematica* uit 1687 (Boek III, Lemma V, zie figuur 1), en hij had het er al over in zijn *Methodus Differentialis* uit 1676.

Hoe werkt het? We vertrekken van een differentietabel van de gegeven getallenrij. We laten zien hoe dit gaat voor de π-rij. Bekijk figuur 2. In de eerste rij staan de termen van onze π-rij. In de volgende rij vind je telkens het verschil van de twee getallen die erboven staan. En zo ga je door tot je nog maar één getal overhoudt. Het resultaat is een soort omgekeerde driehoek van Pascal, die je in figuur 3 ziet.

Die driehoek van Pascal hebben we ook nodig voor het vervolg: we vermenigvuldigen de getallen die meest links staan in de tabel achtereenvolgens met de elementen van de n-de rij (waarbij n start vanaf 0) in de driehoek van Pascal:

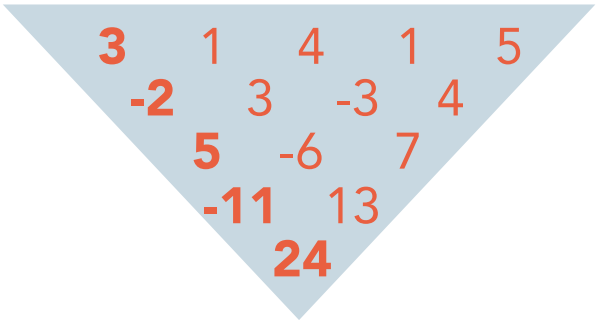
$$3 \cdot \binom{n}{0} + (-2) \cdot \binom{n}{1} + 5 \cdot \binom{n}{2} + (-11) \cdot \binom{n}{3} + 24 \cdot \binom{n}{4}$$

Dit is niets anders dan de Lagrange-veelterm. Wil je bijvoorbeeld de zesde term van de π-rij, dan vul je $n = 5$ in:

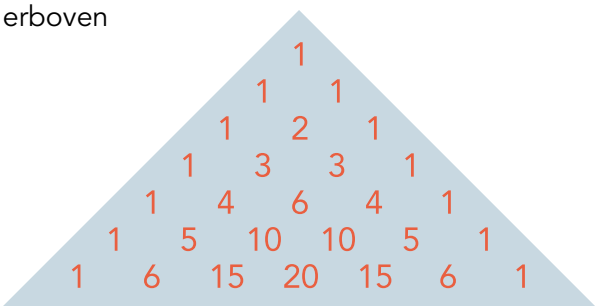
$$3 - 2 \cdot 5 + 5 \cdot 10 - 11 \cdot 10 + 24 \cdot 5 = 53.$$

Als de gegeven rij echt het resultaat is van de evaluatie van een veelterm in n van graad k voor opeenvolgende waarden van n, dan zal rij $k + 1$ van de differentietabel (we beginnen ook hier te tellen vanaf $k = 0$) allemaal nullen bevatten, en alle volgende rijen natuurlijk ook. Hieraan kan je dus zien of je te maken hebt met een 'veelterm-rij'. Maar dat weten we natuurlijk nooit zeker als we enkel de eerste vijf termen voor ons hebben...

Je vindt hier meer over in *Analysis by Its History* van E. Hairer en G. Wanner (Spinger-Verlag New York, 1996) en *The Book of Numbers* van J. Conway en R. Guy (Springer-Verlag New York, 1998). ■



Figuur 2 Boven de π-rij, elk getal op een volgende rij is het verschil van de twee getallen erboven



Figuur 3 De driehoek van Pascal

In januari werd op 230 scholen de eerste ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade georganiseerd. Steeds meer scholen doen mee, en het aantal deelnemers is in de laatste drie jaar bijna verdubbeld.

■ door Melanie Steentjes

STEEDS MEER SCHOLIEREN GAAN DE UITDAGING AAN

Waren we vorig jaar blij dat het aantal deelnemers aan de eerste ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade sinds jaren weer de grens van 3000 had doorbroken, dit jaar deden er maar liefst 4379 leerlingen mee, een toename van zo'n 45 procent!

Op vrijdagmiddag 30 januari bogen al deze leerlingen zich over de acht vijfkeuzevragen en vier open vragen. Voor de opgaven was weinig voorkennis nodig, maar wel veel creativiteit en doorzettingsvermogen; ze zijn te vinden op www.wiskundeolympiade.nl. Een van de open vragen (B2) is in het februarinummer van *Pythagoras* uitgebreid besproken door Julian Lyczak.

CESUUR Net als vorig jaar was ook dit jaar de cesuur afhankelijk van de klas waarin je zat. Leerlingen uit de lagere klassen maken hierdoor meer kans om door te stromen naar de tweede ronde. In de tabel staat de verdeling van de deelnemers over klassen en schooltypen van verschillende jaren. Daaruit blijkt dat er een behoorlijke toename is van leerlingen uit de onderbouw die meedoen aan de eerste ronde. Verder kun je zien dat het totaal aantal deelnemers in drie jaar tijd is verdubbeld!

In totaal konden er voor de twaalf opgaven 36 punten gehaald worden. Er waren 7 leerlingen met de maximale score (6 uit 5-vwo en 1 uit 4-vwo). Leerlingen uit de onderbouw met 20 punten of meer mogen door naar de tweede ronde. In klas 4 moet je ten minste 23 punten gehaald hebben en in klas 5 minimaal 26 punten. Uiteindelijk gaan 59 leerlingen uit 5-vwo, 2 leerlingen uit 5-havo, 54 leerlingen uit 4-vwo, 14 leerlingen uit klas 3 en 4 leerlingen uit klas 2 door naar de tweede ronde, die op 18 september op de Technische Universiteit Eindhoven wordt georganiseerd. Ook enkele leerlingen die goed gescoord hebben bij de Kangoeroewedstrijd of de Pythagoras Olympiade worden uitgenodigd. Net als vorig jaar kunnen de leerlingen die door zijn naar de tweede ronde een training volgen op een universiteit bij hen in de buurt. Deze training bestaat uit drie trainingsdagen en was vorig jaar een groot succes.

SCHOLENPRIJS Op 12 mei werd de scholenprijs tijdens een feestelijke bijeenkomst overhandigd aan de olympiade-deelnemers en hun wedstrijdleider van het Stedelijk Gymnasium Nijmegen. De scholenprijs gaat naar de school met de hoogste somscore van de beste vijf leerlingen. Het maximale aantal te behalen punten is 180; het Stedelijk Gymnasium Nijmegen behaalde er 146. ■

jaar	aantal scholen	aantal leerlingen	klas 1	klas 2	klas 3	4-havo	4-vwo	5-havo	5-vwo
2006	171	2192	*	*	268	129	604	75	1116
2007	185	2742	*	*	344	190	859	105	1244
2008	201	3005	16	49	320	135	1038	109	1338
2009	230	4379	36	114	472	216	1497	120	1924

Verdeling van de deelnemers over klassen en schooltypen van de laatste vier jaar. (* In het verleden werden de aantallen leerlingen van eerste, tweede en derde klas bij elkaar opgeteld; deze aantallen staan dan bij klas 3.)

PYTHAGORAS OLYMPIADE

■ door Matthijs Coster, Alexander van Hoorn, Eddie Nijholt en Tijmen Veltman

Uitdagende opgaven die je doorgaans niet in de schoolboeken tegenkomt: dat is de *Pythagoras Olympiade*. In elk nummer staan twee opgaven, en twee oplossingen van de opgaven uit twee afleveringen terug. Ga de uitdaging aan en stuur ons je oplossing! Onder de goede leerling-inzenders wordt per opgave een boekenbon van 20 euro verloot. Bovendien kun je je via de Pythagoras Olympiade plaatsen voor de tweede ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade, mocht het via de eerste ronde niet lukken.
Aan het eind van de jaargang wordt gekeken wie in totaal de meeste opgaven heeft opgelost. Deze persoon, die geen leerling hoeft te zijn, wint een boekenbon van 100 euro.

HOE IN TE ZENDEN?
Insturen kan per e-mail:
pytholym@pythagoras.nu
of op papier naar het volgende adres:

Pythagoras Olympiade
Korteweg-de Vries Instituut
Universiteit van Amsterdam
Postbus 94248
1090 GE Amsterdam

Voorzie het antwoord van een duidelijke toelichting (dat wil zeggen: een berekening of een bewijs). Vermeld behalve je naam, ook je adres, school en klas.

Je inzending moet bij ons binnen zijn vóór 15 september 2009.

OPGAVE 168

Schrijf de volgende som zo eenvoudig mogelijk:

$$1 \cdot n + 2 \cdot (n-1) + 2^2 \cdot (n-2) + 2^3 \cdot (n-3) + \cdots + 2^{n-2} \cdot 2 + 2^{n-1}$$

OPGAVE 169

Vind alle positieve gehele getallen waarvan het eerste cijfer een 6 is en die de eigenschap hebben dat het getal 25 keer zo klein wordt door die eerste 6 weg te halen.

Laat ook zien dat er geen positieve gehele getallen zijn die 35 keer zo klein worden door het eerste cijfer (wat dat ook is) weg te halen.

OPLOSSING 164

Bepaal alle reële getallen x die voldoen aan

$$x = \sqrt{x - \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}}.$$

Oplossing. Omdat x de som van twee wortels is, kan x niet negatief zijn. Als we de eerste wortel naar links halen en de vergelijking kwadrateren, krijgen we

$$x^2 + x - \frac{1}{x} - 2x\sqrt{x - \frac{1}{x}} = 1 - \frac{1}{x},$$

ofwel

$$x^2 + x - 1 = 2x\sqrt{x - \frac{1}{x}}.$$

Nogmaals kwadrateren geeft

$$x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 4x^3 - 4x.$$

Dit is te schrijven als

$$(x^2 - x - 1)^2 = 0.$$

Deze vergelijking heeft twee oplossingen, maar alleen de oplossing $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ voldoet.

Deze opgave werd goed opgelost door **Mark Boersma** uit Vlissingen, **Elias C. Buissant des Amorie** uit Castricum, **Anthon van Dijk** uit Hoofddorp, **Aziz El Mallouki** uit Amersfoort, **Tunnis Oosterhoff** uit Groningen, **Michiel Renson**, **Marcel Roggeband** uit Hoofddorp, **H. den Rooijen** uit Delft, **Fred Schalekamp** uit Brakel, **Massimiliano Ungheretti** van het Dr. Mollercollege te Waalwijk, **Simon Vandevelde** uit Oostakker, **Jan Verbakel** uit Eindhoven, **H. Verdonk** uit Den Haag en **Yvonne de Wijn** van het Driestar College te Alphen aan den Rijn.
De boekenbon gaat naar Massimiliano Ungheretti.

OPLOSSING 165

Binnen een parallellogram $ABCD$ ligt een punt O zo, dat $\angle AOB + \angle COD = 180°$.
Bewijs dat $\angle OBC = \angle ODC$.

Oplossing. Definieer E als het punt O, verschoven over de vector $\overrightarrow{AD}$, zodat $|OE| = |AD|$ en $OE \parallel AD$. Nu zijn $AOED$ en $BCEO$ parallellogrammen, en de driehoeken DCE en ABO zijn congruent. Dus geldt: $\angle CED + \angle COD = \angle AOB + \angle COD = 180°$, waaruit volgt dat $DOCE$ een koordenvierhoek is. Nu zijn de omtrekshoeken $\angle OEC$ en $\angle ODC$ even groot. Omdat $BCEO$ een parallellogram is, is $\angle OBC = \angle OEC = \angle ODC$.

Deze opgave werd goed opgelost door **Mark Boersma** uit Vlissingen, **Elias C. Buissant des Amorie** uit Castricum, **Clarize de Korne** van het Calvijn College te Goes, **Arie van der Kraan** uit Nuth, **Marcel Roggeband** uit Hoofddorp, **Simon Vandevelde** van Edugo Campus De Toren te Oostakker, **Jan Verbakel** uit Eindhoven en **H. Verdonk** uit Den Haag.
De boekenbon gaat naar Simon Vandevelde.

Er zijn maar weinig beroemde vrouwelijke wiskundigen, maar Emmy Noether is er één van. Het was zeer ongebruikelijk voor vrouwen in haar tijd om wetenschapper te zijn, maar ze werd wereldwijd gewaardeerd om haar wiskundige werk. Ze had grote invloed op de ontwikkeling van de moderne algebra in de jaren twintig van de twintigste eeuw.

■ door Jeanine Daems

EMMY NOETHER (1882-1935): MOEDER VAN DE MODERNE ALGEBRA

Amalie Emmy Noether werd op 23 maart 1882 geboren in Erlangen, in Duitsland. Haar vader was de wiskundige Max Noether, haar moeder heette Ida Amalia Kaufmann. Emmy was de oudste van vier kinderen, ze had drie jongere broers. Broer Fritz werd ook bekend om zijn academische prestaties: hij legde zich toe op de toegepaste wiskunde. Als kind was Emmy slim en vriendelijk, maar ze blonk niet uit. Ze leerde koken en schoonmaken, zoals alle meisjes in die tijd, en ze kreeg pianoles. Bovendien hield ze erg van dansen op de feestjes waar ze de kinderen van haar vaders collega's tegenkwam.

Al vroeg had ze interesse in talen; ze was goed in Frans en Engels. In 1900 deed ze het lerarenexamen in die vakken en kreeg ze de bevoegdheid om die talen te doceren op meisjesscholen. Maar op dat moment maakte ze een ongebruikelijke keus: ze koos ervoor om verder te studeren aan de universiteit van Erlangen. Vrouwen mochten eigenlijk niet studeren; ze moest aan elke afzonderlijke docent toestemming vragen om de colleges te mogen volgen. Ze kreeg die toestemming en volgde al colleges tussen 1900 en 1902. In 1903 slaagde ze ook voor haar Abitur, het eindexamen van het gymnasium, en daarna vertrok ze naar Göttingen. Daar volgde ze colleges bij onder anderen David Hilbert (over hem verscheen ook een aflevering in deze serie, zie *Pythagoras* februari 2009) en Felix Klein.

Noether keerde in 1904 terug naar Erlangen en legde zich helemaal toe op de wiskunde. Vanaf 1903 mochten vrouwen namelijk in Beieren wel officieel studeren. Ze schreef een dissertatie bij Paul Gordan, die ook een goede bekende van haar vader was, en ze promoveerde in 1907. De volgende zeven jaar gaf ze college, maar zonder daarvoor betaald te worden! Soms viel ze ook in voor haar vader, als hij te ziek was. Gordan stopte in 1911 met lesgeven en stierf in 1912. Zijn tweede opvolger, Ernst Fischer, had ook een belangrijke invloed op Noether. Hij bracht haar in contact met het onderzoek van Hilbert. Bovendien deelden ze een grote belangstelling voor de wiskunde die tot levendige discussies leidden.

Emmy Noether met haar drie broers Robert, Fritz en Alfred.

GÖTTINGEN In 1915 werd Noether door Klein en Hilbert uitgenodigd om weer naar Göttingen te komen. Ze hoopten te kunnen profiteren van haar

De Universitätstraße van Erlangen, waar Emmy Noether opgroeide, op een oude ansichtkaart.

kennis van de invariantentheorie. Dat was het onderwerp waar ze bij Gordan aan gewerkt had. (In het artikel over Hilbert in *Pythagoras* van februari 2009 staat een kader met uitleg over invariantentheorie.) Hilbert en Klein werkten op dat moment aan Einsteins relativiteitstheorie, en daar konden ze haar wel bij gebruiken. En terecht: al snel nadat ze in Göttingen werkte, bewees ze een stelling die nu de *stelling van Noether* heet. Die stelling heeft te maken met natuurkunde: er wordt een verband uitgedrukt tussen behoudswetten en de symmetrieën in een fysisch systeem, zie het kader op pagina 31.

Helaas konden Hilbert en Klein haar ook geen aanstelling bieden. In de eerste jaren in Göttingen leefde ze dan ook op kosten van haar vader. Vrouwen konden geen *Habilitation* doen, het hoogste academische examen in Duitsland, en dat was een voorwaarde om de bevoegdheid te krijgen om colleges te geven en om een aanstelling als privaatdocent te krijgen. De wiskundigen in Göttingen wilden deze regels niet veranderen, maar ze wilden wel een uitzondering laten maken voor Noether. Op bezwaren vanuit andere vakgebieden schijnt Hilbert geantwoord te hebben: 'Ik zie niet waarom het geslacht van een kandidaat een argument is tegen het toelaten als privaatdocent. Het is hier tenslotte een universiteit en geen badhuis.' De aanvraag werd ingediend en er werd lovend over haar geschreven, maar het lukte niet. Gedurende deze eerste jaren in Göttingen gaf ze overigens wel colleges, maar die werden dan vaak aangekondigd onder de naam van Hilbert, met Noether als 'assistent'.

De volgende wetenschapper die zich inzette voor Noethers Habilitation was Albert Einstein, die onder de indruk was van haar werk. In juli 1918 werd het werk dat ze indiende voor haar Habilitation goedgekeurd en in 1919 werd ze dan eindelijk als privaatdocent aangesteld in Göttingen, al kreeg ze nog steeds geen salaris. In 1920 kregen vrouwen pas het recht om het Habilitationsexamen te doen.

In 1922 werd Noether benoemd tot niet-aangesteld buitengewoon professor, wat nog steeds een onbetaalde positie was met weinig rechten en functies. De aanstelling was zeker een erkenning van haar werk, maar het duurde nog een jaar voor ze ook betaald werd voor haar colleges, en dat was nog steeds niet veel. Ze leefde van de erfenis van haar vader, die in 1921 overleden was. Haar moeder was al eerder overleden, in 1915.

In die tijd was Göttingen voor wiskundigen *the place to be*. Onder anderen Hilbert, Minkowski, Klein en zeker ook Noether hadden een grote aantrekkingskracht op wiskundigen uit de hele wereld. Het was een zeer belangrijke plek voor wis- en natuurkundig onderzoek. In 1924 ging Bartel van der Waerden, een Nederlandse wiskundige, ook naar Göttingen. Hij ging direct met Noether werken, en later zei hij dat haar originaliteit met niets te vergelijken was. In 1930 publiceerde Van der Waerden een belangrijk boek, *Moderne Algebra*, dat voor een deel gebaseerd was op colleges en werk van Emmy Noether.

Hoewel Noether een van de productiefste wiskundigen in Göttingen was, kreeg ze nergens in

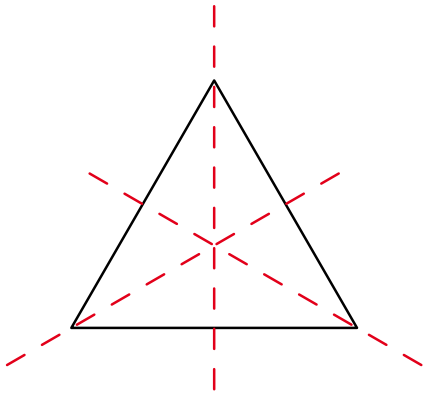
MODERNE ALGEBRA

In de moderne algebra worden bepaalde abstracte structuren bestudeerd. Voorbeelden van structuren die behandeld worden in de algebra zijn groepen en ringen. Een *groep* is een verzameling 'dingen' met een operatie: als je die operatie uitvoert op twee 'dingen', krijg je een derde 'ding', en deze operatie voldoet aan een paar eisen. Een voorbeeld van een groep is de verzameling van de gehele getallen, met als operatie optelling. Als je twee gehele getallen bij elkaar optelt, krijg je weer een geheel getal. Bovendien hebben we het getal 0, dat de eigenschap heeft dat $0 + n = n$ voor alle gehele getallen n. Ook is er voor ieder geheel getal m een ander geheel getal, zodat de samenstelling van die twee getallen 0 oplevert, namelijk $-m$. Het getal 0 heet nu het *eenheidselement* en het getal $-m$ heet de *inverse* van m. Ten slotte geldt dat het niet uitmaakt hoe je haakjes neerzet: $a + (b + c) = (a + b) + c$. Deze eigenschap heet *associativiteit*. Al deze eigenschappen (het bestaan van een operatie, het bestaan van een eenheidselement in de verzameling, een inverse voor elk element en de associativiteit) zijn precies de eisen die gelden voor een groep.

De gehele getallen met als operatie vermenigvuldiging vormen *geen* groep: het eenheidselement voor de vermenigvuldiging is 1 (want $1 \cdot n = n$ voor alle gehele getallen n), dus het getal 2 bijvoorbeeld heeft geen geheel getal als inverse, want voor geen enkel geheel getal n geldt dat $2n = 1$.

De verzameling van breuken *zonder* de 0 (let op: gehele getallen zijn ook breuken!) is *wel* een groep onder vermenigvuldiging: als je twee dergelijke breuken vermenigvuldigt, krijg je weer een breuk ongelijk aan 0; het getal 1 is het eenheidselement want $1 \cdot n = n$ voor alle breuken n; iedere breuk a/b heeft als inverse de breuk b/a; en het maakt niet uit hoe je haakjes zet: $a(bc) = (ab)c$. De verzameling breuken zonder 0 is *geen* groep onder optelling, want er is geen eenheidselement.

De verzameling breuken *met* 0 is geen groep onder vermenigvuldiging, want 0 heeft geen inverse, maar het is wel weer een groep onder optelling.
Er zijn ook heel andere verzamelingen dan verzamelingen van getallen die een groep vormen. De transformaties (rotaties, spiegelingen, translaties of glijspiegelingen) die een bepaalde figuur op zichzelf afbeelden, vormen een groep met als operatie samenstelling. Neem als figuur bijvoorbeeld een gelijkzijdige driehoek. Samenstellen van afbeeldingen betekent gewoon dat je ze na elkaar uitvoert. Als je een rotatie om 120° bijvoorbeeld samenstelt met nog een rotatie om 120° dezelfde kant op, dan krijg je als resultaat een rotatie om 240° (en dat is eigenlijk dezelfde



transformatie als een rotatie van 120° de andere kant op). Deze transformaties die de regelmatige driehoek op zichzelf afbeelden, heten *symmetrieën* van de regelmatige driehoek en daarvan zijn er zes: de rotatie om 120°, de rotatie om 240° dezelfde kant op, de drie spiegelingen in de getekende lijnen en de identiteit. De identiteit is de afbeelding die eigenlijk niets doet: elk punt wordt op zichzelf afgebeeld. Maar de identiteit is wel echt een symmetrie, en hij is ook handig, want de identiteit is het eenheidselement van de groep. Ga maar na: als je de identiteit eerst toepast en daarna een rotatie of spiegeling, dan is de resulterende afbeelding gewoon die rotatie of spiegeling. Dat lijkt op optellen bij 0 of vermenigvuldigen met 1: er gebeurt eigenlijk gewoon niets.

De groepentheorie is in de loop van de negentiende eeuw een belangrijk onderdeel van de wiskunde geworden. Er zijn veel stellingen bewezen over groepen. Een voordeel van deze abstracte zienswijze is dat als je nu van een wiskundig object bewijst dat het een groep is, je dan meteen een heleboel extra's weet over het object, zonder dat je dat voor elk object opnieuw hoeft te bewijzen.

Een *ring* is een bijzonder soort van groep: het is een groep, maar behalve de groepsoperatie (bijvoorbeeld optelling) is er nog een operatie (bijvoorbeeld vermenigvuldiging). Voor die tweede operatie gelden eisen die een klein beetje anders zijn dan die voor de eerste operatie: er is wel weer een eenheidselement (1 in het geval van vermenigvuldiging), het maakt niet uit hoe de haakjes staan (dus $a(bc) = (ab)c$ voor alle a, b en c in de ring) en de twee operaties werken op een handige manier samen: voor alle a, b en c in de ring geldt dat $a(b + c) = ab + ac$ en ook $(a + b)c = ac + bc$. Je ziet dat de gehele getallen een ring vormen met als operaties optelling en vermenigvuldiging, net als de breuken en de reële getallen.

Emmy Noether heeft belangrijke bijdragen geleverd aan de theorie van ringen. Bovendien speelde ze een grote rol in de verspreiding van de ideeën uit de moderne algebra.

Emmy Noether gebruikte soms postkaarten om met collega's over algebra te discussiëren. Deze kaart, aan Ernst Fischer, is uit 1915.

Duitsland een echte aanstelling, werd ze niet benoemd tot lid van de Göttinger Academie van Wetenschappen en werd ze zelfs nooit echt lid van de redactie van het beroemde wiskundetijdschrift *Mathematische Annalen*, terwijl ze daarin niet alleen veel eigen werk publiceerde, maar ook veel werk van anderen voor redigeerde. Behalve vrouw was ze ook joods en had ze linkse opvattingen, wat haar natuurlijk nog meer een uitzonderingspositie gaf. Maar binnen de internationale wiskundige gemeenschap werd ze hoog geacht.

COLLEGES EN STUDENTEN Noether heeft een heleboel studenten begeleid. Behalve om haar grote wiskundige inzicht, stond ze bekend om haar behulpzaamheid. Hoewel ze soms onbeleefd kon reageren als iemand het niet met haar eens was, kreeg ze een reputatie van geduldige begeleiding. Ze was kritisch en wiskundig heel precies. Ze was niet op zichzelf gericht en helemaal niet ijdel. Ze vroeg dan ook geen erkenning voor zichzelf en promootte het werk van haar studenten. Veel van haar onderzoek werd onder de naam van haar studenten en collega's gepubliceerd. Ze leefde zuinig en ook toen ze eenmaal geld verdiende, bleef ze bescheiden leven. Op het eind van haar leven spaarde ze zelfs de helft van haar inkomen voor haar neef.

Noether gaf op een bijzondere manier college: ze volgde geen van tevoren uitgewerkt plan. Dat frustreerde sommige studenten. Ze gebruikte haar colleges als tijd om spontaan met de studenten te discussiëren, verder te denken en open wiskundige problemen te bespreken. Veel collegereeksen leidden dan ook tot belangrijke publicaties. Ze praatte snel en eiste grote concentratie van de studenten. Studenten die zich bij haar stijl niet thuis voelden, voelden zich buitengesloten en hielden het bij haar colleges niet meer dan een half uur vol. Maar haar toegewijde studenten genoten van het enthousiasme waarmee ze de wiskunde benaderde.

Er ontstond een hechte kring van collega's en studenten die op dezelfde manier over wiskunde dachten. Ook buiten de wiskunde deden ze veel samen. Noether was daarin een opvallende persoon: ze was bepaald niet slank, had een luide stem en hechtte niet aan tafelmanieren. Maar ze was bijzonder toegewijd aan haar vak en haar studenten, ze was sociaal en stimuleerde veel andere wiskundigen.

Noether werd steeds bekender en kreeg ook steeds meer erkenning voor haar werk. In 1932 kreeg ze samen met Emil Artin, met wie ze veel samenwerkte, de Ackermann-Teubner Memorial Award voor hun bijdragen aan de wiskunde. In datzelfde jaar werd haar vijftigste verjaardag gevierd door haar collega's, die artikelen aan haar opdroegen. Bovendien mocht ze in 1932 als eerste vrouw ooit een plenaire voordracht geven op het International Congress of Mathematicians in Zürich. Dat is het grootste wiskundecongres ter wereld, het wordt elke vier jaar gehouden.

Inmiddels wonnen de nazi's aan invloed en toen Hitler in 1933 aan de macht kwam, was een van de eerste dingen die hij deed het ontslaan van alle joodse ambtenaren. Hoewel Noether nooit een echte professor geworden was, werd ze toch ontslagen. Ze schijnt het bericht kalm opgenomen te hebben; ze maakte zich meer zorgen om haar mannelijke collega's die opeens hun kostwinning kwijt waren dan om zichzelf.

Al snel kwamen er uitnodigingen uit Engeland en de Verenigde Staten. Noether accepteerde een aanstelling aan Bryn Mawr College, een universiteit voor alleen vrouwen in Pennsylvania. Ze had daar een aangename tijd. Ze gaf ook college aan het Institute of Advanced Study in Princeton. In de zo-

Emmy Noether op het station van Göttingen in 1933, voor haar emigratie naar Amerika.

mer van 1934 keerde ze voor korte tijd terug naar Göttingen om Emil Artin te ontmoeten en ook haar broer Fritz te zien, die op het punt stond om naar Tomsk in Rusland te vertrekken waar hij een baan gevonden had. Ze wilde opnieuw terugkeren in 1935, maar zover kwam het niet. In april 1935 werd een tumor in haar baarmoeder geconstateerd. Ze werd daaraan geopereerd en in de eerste dagen leek het herstel goed te verlopen. Op 14 april ging het plotseling slechter en stierf ze, op 53-jarige leeftijd. De wiskundige wereld reageerde geschrokken. In het jaar na haar dood verschenen verscheidene 'in memoriams' van grote wetenschappers, waaronder Einstein, Weyl en Van der Waerden.

WISKUNDE EN WISKUNDIGE STIJL Het wiskundige werk van Emmy Noether wordt meestal in drie periodes opgedeeld. In de eerste periode, van 1908 tot 1919, was ze vooral bezig met *invariantentheorie*. Ze kwam in dat onderwerp terecht door Paul Gordan, bij wie ze haar dissertatie schreef. Later, toen ze kennismaakte met Hilberts werk op dit gebied, werd haar werk steeds algemener en steeds abstracter. Na haar vertrek naar Göttingen bewees ze haar natuurkundige stellingen.

De tweede periode, van 1920 tot 1926, ontwikkelde Noether de theorie van *ringen*. Een ring is een abstract wiskundig begrip, dat een belangrijke rol speelt in de algebra. In het kader op pagina 28 kun je meer lezen over dit vakgebied.

In de derde periode, van 1927 tot haar dood in 1935, hield ze zich bezig met abstracte onderwerpen als *niet-commutatieve algebra*, *lineaire transformaties* en *getallenlichamen*. Deze onderwerpen zijn te ingewikkeld om hier te behandelen.

In de honderd jaar voor 1935 is er erg veel gebeurd in de wiskunde. In het bijzonder is het hele vakgebied van de algebra opgekomen en ontwikkeld. Noethers grootste bijdragen vonden plaats in de ontwikkeling van dit vakgebied. In zijn in memoriam beschreef Van der Waerden haar stijl van wiskunde bedrijven: 'De stelregel waardoor Emmy Noether zich altijd heeft laten leiden, kan men als volgt formuleren: alle relaties tussen getallen, functies en operaties worden pas dan doorzichtig, generaliseerbaar en werkelijk vruchtbaar, als ze van hun bijzondere objecten losgemaakt en op algemene begrippelijke samenhangen teruggevoerd zijn. (...) Ze kon alleen in begrippen denken, niet in formules, en precies daarin lag haar kracht.' Oftewel: de belangrijke eigenschappen in de wiskunde zijn de relaties tussen de wiskundige objecten, en die moet je zo abstract mogelijk onderzoeken. Noether begon niet met specifieke voorbeelden die ze daarna ging generaliseren; ze dacht na over abstracte definities van wiskundige objecten en probeerde daaruit zoveel mogelijk eigenschappen van die objecten af te leiden.

Deze abstracte, begripsmatige methode die Emmy Noether voorstond, is inmiddels zo gebruikelijk dat ze nu vaak als *de* manier gezien wordt om algebra te bedrijven. Een abstract argument wordt vaak als beter en inzichtelijker beschouwd dan een berekening. Zelf schreef ze een keer aan een collega: 'Mijn methodes zijn werk- en opvattingsmethodes, en dus zijn ze overal anoniem binnengedrongen.' Vanuit dit oogpunt is Noethers dissertatie, die veel expliciete voorbeelden en berekeningen bevatte, precies een voorbeeld van wat ze later afkeurde, en dat zei ze later zelf ook.

Na haar dood is Emmy Noether niet vergeten. Het feit dat ze vrouw was, was tijdens haar leven

soms nadelig, maar na haar dood heeft dat haar juist veel belangstelling opgeleverd. De Association for Women in Mathematics laat bijvoorbeeld elk jaar een vrouwelijke wiskundige een speciale lezing geven over haar eigen onderzoek. Deze lezingen heten de *Noether Lectures* en ze zijn bedoeld om vrouwen die fundamentele bijdragen aan de wiskunde geleverd hebben, te eren. ■

Voor dit artikel is gebruik gemaakt van het boek Emmy Noether 1882-1935 *door Auguste Dick (Birkhäuser Verlag, Basel, 1970), 'Die Mutter der modernen Algebra - Emmy Noether (1882-1935)', een voordracht van Cordula Tollmien en de artikelen over Noether in de Nederlandse en de Engelse Wikipedia.*

SYMMETRIE EN BEHOUDSWETTEN: EEN TWEE-EENHEID

■ door Arnout Jaspers

Emmy Noether bewees in 1915 een heel algemeen verband tussen de symmetrieën van wiskundige formules en behoudswetten in de natuurkunde. Dit principe is nog steeds een leidraad om nieuwe natuurwetten te vinden – of te verwerpen, als uit experimenten blijkt dat een bepaalde behoudswet niet geldt.

Natuurkundigen proberen hun systemen (een planeet die om de zon draait, een elektron tussen twee magneetpolen, enzovoort) altijd wiskundig te beschrijven met een zogeheten *Lagrangiaan*. Voor situaties die je al uit de natuurkunde op school kent – zoals een kanonskogel ('puntmassa') die recht omlaag valt – is de Lagrangiaan simpelweg de kinetische energie min de potentiële energie: $L = \frac{1}{2}mv^2 - mgh$. Er bestaat dan een relatief simpel recept om precies uit te rekenen wat er zal gaan gebeuren (de kanonskogel zal naar beneden vallen met een snelheid $v(t) = gt$).

Merk op dat L in dit geval niet expliciet van de tijd afhangt: de snelheid v en de hoogte h van de kanonskogel veranderen wel in de tijd als die valt, maar L zelf, de formule, hangt niet van de tijd t af. Dat zou bijvoorbeeld wel zo zijn als de massa m van de kanonskogel in de tijd varieerde, bijvoorbeeld doordat er halverwege een stel muggen aan bleef plakken.

Daar houden we nu geen rekening mee, dus is L tijdsonafhankelijk. Je kunt dan zeggen dat L *symmetrisch is met betrekking tot tijdstranslatie*: er verandert niets aan L als je die voor een willekeurige tijd vroeger of later opschrijft. Vergelijk dit met de rotatiesymmetrie van een cirkel: er verandert niets aan de figuur als je die over een willekeurige hoek draait. Andere gevallen zijn minder triviaal: in de atoomfysica kan L eigenschappen vertonen die doen denken aan spiegelsymmetrie, of aan de rotatiesymmetrieën van een kubus.

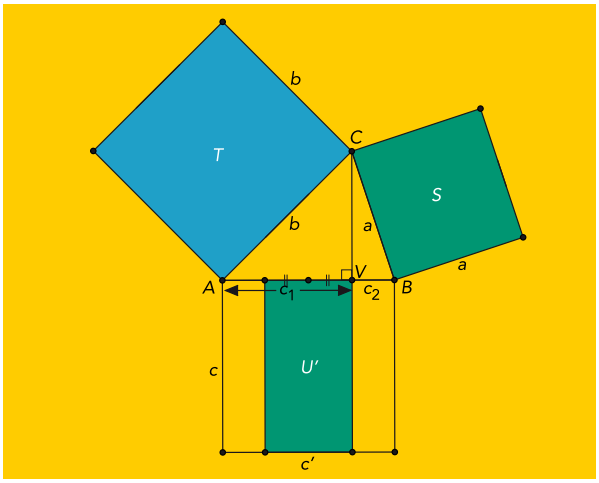
Noether bewees dat voor elke symmetrie een behouden grootheid uit L af te leiden is. In het geval van de tijdsonafhankelijkheid is die grootheid $E = \mathrm{d}L/\mathrm{d}v \cdot v - L$. Je kunt zelf controleren wat hier uitkomt: $E = \frac{1}{2}mv^2 + mgh$. Hier staat iets wat je wel herkent, namelijk de kinetische plus de potentiële energie van de kanonskogel, ofwel de totale energie, die dus constant is. Dit lijkt een flauw voorbeeld, omdat we dit al lang wisten, en de formule voor E lijkt ook erg op die voor L. Maar het verband tussen tijdsymmetrie van L en de wet van behoud van energie geldt algemeen, ook als L heel gecompliceerd is. Ook is L in de praktijk vaak symmetrisch voor ruimtetranslatie en voor rotatie. Via Noethers stelling volgen hier de wetten van behoud van impuls en van impulsmoment uit.

Maar Noethers stelling geldt ook in de relativiteitstheorie en de kwantummechanica, waar L geweldig ingewikkeld (of onbekend) kan zijn en waar nog niet bekend is welke behoudswetten gelden. Natuurkundigen gokken dan soms welke behoudswetten gelden en leiden hier via 'Noether' uit af wat ongeveer de formule voor L moet zijn, of omgekeerd, gokken ze wat de formule voor L is en kijken dan of dit klopt met de behoudswetten die uit experimenten worden afgeleid.

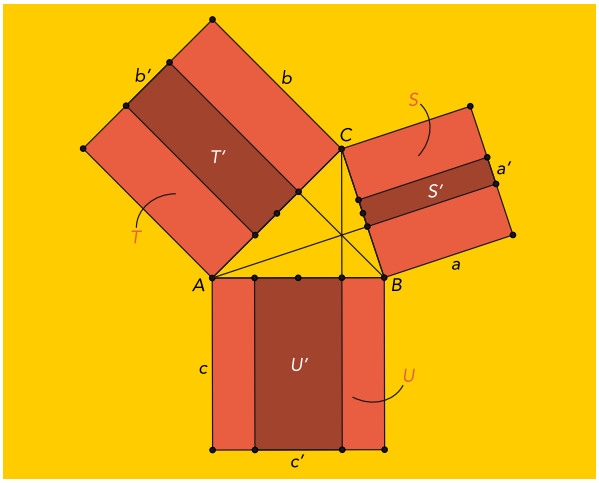
De stelling van Pythagoras blijft na drieduizend jaar nog steeds inspireren. Bruno Vander Stichele ontdekte zijn eigen varianten.

■ door Bruno Vander Stichele

DE MIDHOOGTESTELLING EN DE PSEUDOSTELLING VAN PYTHAGORAS



Figuur 1 De twee groene stukken zijn samen even groot als het blauwe stuk



Figuur 2 $S + U' = T$, $U = S + T'$ en $T = U + S'$, waaruit volgt: $U' = T' + S'$

Teken een scherphoekige driehoek ABC, zie figuur 1. De zijden tegenover de punten A, B en C hebben achtereenvolgens lengte a, b en c. Op de drie zijden van de driehoek tekenen we vierkanten. Vanuit punt C tekenen we de hoogtelijn; deze verdeelt de zijde AB in twee stukken: AV (met lengte c_1) en VB (met lengte c_2). Verder is het midden van AB aangegeven in figuur 1.

Er geldt: $|CV|^2 = a^2 - c_2^2 = b^2 - c_1^2$ of $b^2 - a^2 = c_1^2 - c_2^2 = (c_1 + c_2)(c_1 - c_2) = c \cdot c'$. Dit komt neer op het volgende: de som van de oppervlaktes van het vierkant op BC (a^2) en de rechthoek op een deel van AB ($c \cdot c'$) is gelijk aan de oppervlakte van het vierkant op AC (b^2), ofwel:

Midhoogtestelling: $S + U' = T$.

De stelling geven we de naam 'midhoogtestelling' omdat U' rechts begrensd wordt door de hoogtelijn op AB en in gelijke delen gedeeld wordt door de middelloodlijn op AB. Als je punt C recht boven B kiest, wordt hoek B recht en krijg je de stelling van Pythagoras $S + U = T$, omdat de rechthoek op AB dan een vierkant wordt.

Opgave 1. Dit is niet zo als je C recht boven A kiest. Zie je waarom?
Opgave 2. Zoek uit wat er gebeurt als een van de hoeken groter is dan 90°.

Uit de midhoogtestelling kun je onmiddellijk een bekende regel afleiden: omdat $b^2 - a^2 = c(c_1 - c_2) = c(c - 2c_2) = c^2 - 2ac \cos\angle B$, geldt:

Cosinusregel: $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos\angle B$.

Je kunt de midhoogtestelling drie keer toepassen. In figuur 2 zijn alle drie de hoogtelijnen getekend en de bijzondere rechthoek op de drie zijden. Dat levert:

$S + U' = T$; $U = S + T'$; $T = U + S'$.

Opgave 3. Leid ook de twee andere midhoogtestellingen af.

Optellen van de drie vergelijkingen levert de volgende stelling:

Pseudostelling van Pythagoras: $U' = T' + S'$.

Opgave 4. Hoe komt het nu dat niet geldt: $T' = U' + S'$ en $S' = U' + T'$?
Opgave 5. Maak hoek C nu eens 90° en maak AC gelijk aan BC (schuif het hoogtepunt dus naar C). Dan lijkt de stelling te worden: $U' = T + S$. Maar U' wordt 0, omdat C recht boven het midden van AB ligt. Kun je verklaren hoe dit zit? ■

OPLOSSINGEN KLEINE NOOTJES NR. 5

LANGE RIJ

Het startgetal is 614. De rij wordt dan: 614, 618, 626, 632, 634, 638, 646, 652, 654, 658, 666.

TRAMS

Er zijn twee trams nodig. Ze vertrekken gelijktijdig van begin- en eindpunt.

NUMMERBORDEN

Er zijn $10 \times 10 \times 26 \times 26 \times 26 \times 10 =$ 17.576.000 mogelijke nummerborden.

LETTERS, CIJFERS EN VEELVLAKKEN

Een viervlak heeft 6 ribben. Een kubus heeft 6 zijvlakken. Een achtvlak heeft 12 ribben. Een twaalfvlak heeft 20 hoekpunten.

TAFEL DEKKEN

De kans dat Peter eerst een mes pakt en vervolgens een vork, is $\frac{6}{12} \cdot \frac{6}{11} = \frac{3}{11}$. De kans dat hij eerst een vork pakt en daarna een mes, is ook $\frac{3}{11}$. De kans dat hij een mes en een vork pakt (ongeacht de volgorde) is dus $\frac{6}{11}$. De kans dat ze goed worden neergelegd (mes rechts en vork links) is $\frac{6}{11} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{11}$.

PYTHAGORAS
48ste jaargang nummer 6
juni 2009
ISSN 0033 4766

***Pythagoras* wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde en richt zich tot alle leerlingen van vwo en havo. *Pythagoras* stelt zich ten doel jongeren kennis te laten maken met de leuke en uitdagende kanten van wiskunde.**

Internet www.pythagoras.nu

Hoofdredacteur Arnout Jaspers

Eindredacteur Alex van den Brandhof

Redactie Matthijs Coster, Jeanine Daems, Dion Gijswijt, Jan Guichelaar, Klaas Pieter Hart

Bladmanager Tilman Grünewald

Vormgeving Grafisch Team Digipage BV, Zoetermeer

Druk Giethoorn Ten Brink, Meppel

Uitgever Koninklijk Wiskundig Genootschap

Verantwoordelijk uitgever Chris Zaal

Redactiesecretariaat Chris Zaal, Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde, Plantage Muidergracht 24, 1018 TV Amsterdam.

Lezersreacties en kopij Bij voorkeur per e-mail; lezersreacties naar Jan Guichelaar, jan@pythagoras.nu en kopij naar Arnout Jaspers, arnout@pythagoras.nu. Eventueel per post naar Jan Guichelaar, Pedro de Medinalaan 162, 1086 XR Amsterdam.

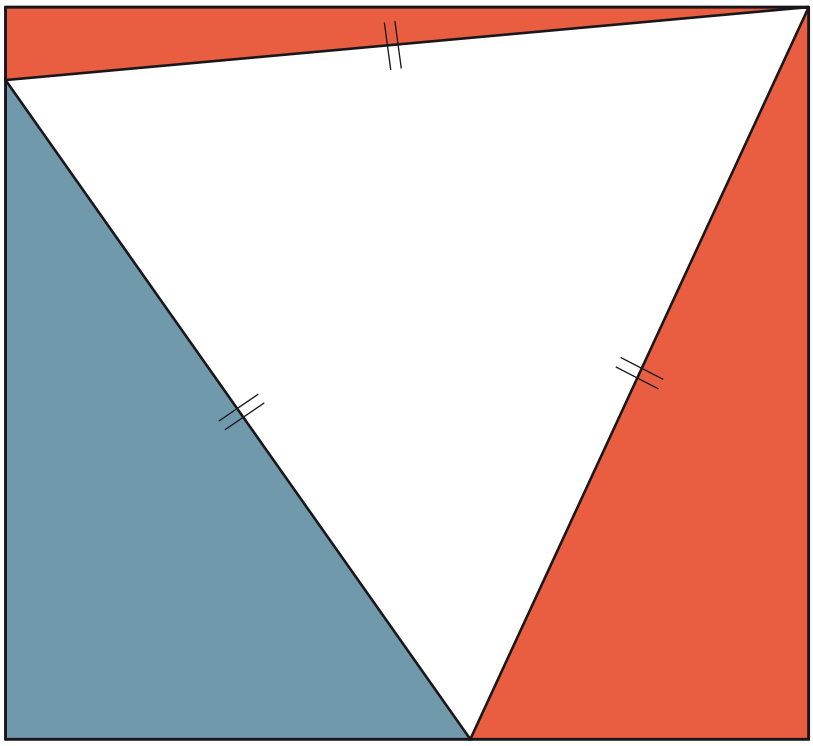
Abonnementen, bestellingen en mutaties
Mirjam Worst, Drukkerij Giethoorn Ten Brink, Postbus 41, 7940 AA Meppel. Telefoon 0522 855 175, fax 0522 855 176.

Abonnementsprijs
(6 nummers per jaargang)
€ 22,00 (Nederland),
€ 24,00 (België),
€ 28,00 (overig buitenland),
€ 18,00 (leerlingabonnement Nederland),
€ 20,00 (leerlingabonnement België),
€ 12,00 (bulkabonnement Nederland),
€ 14,00 (bulkabonnement België).
Zie www.pythagoras.nu voor toelichtingen.

Aan dit nummer werkten mee
ir. D. Beekman, auteur van diverse breinbrekerboeken (dh.beekman@hetnet.nl), drs. A.J. van den Brandhof, docent wiskunde op het Vossiusgymnasium te Amsterdam (alex@pythagoras.nu), dr. M.J. Coster, wetenschappelijk onderzoeker bij het Ministerie van Defensie (matthijs@pythagoras.nu), drs. J. Daems, aio wiskunde aan de UL (jeanine@pythagoras.nu), dr. D.C. Gijswijt, postdoc combinatorische optimalisering aan de UL en het CWI (dion@pythagoras.nu), drs. J.S. Groot, wetenschappelijk medewerker bij TNO te Den Haag (jos.groot@casema.nl), dr. J. Guichelaar, voormalig docent en schoolleider (jan@pythagoras.nu), dr. K.P. Hart, distinguished visiting professor aan Miami University (kp@pythagoras.nu), A. van Hoorn, student wiskunde aan de UvA (pytholym@pythagoras.nu), drs. A. Jaspers, wetenschapsjournalist (arnout@pythagoras.nu), P. Levrie, docent wiskunde aan de Karel de Grote-Hogeschool te Antwerpen (paul.levrie@kdg.be), E. Nijholt, student wiskunde aan de UvA (pytholym@pythagoras.nu), drs. M. Steentjes, medewerker bij het Cito te Arnhem (melanie.steentjes@cito.nl), B.P.G. Vander Stichele, consultant (bvanderstichele@gmail.com), T. Veltman, student wiskunde aan de UvA (pytholym@pythagoras.nu)

Sponsors *Pythagoras* wordt mede mogelijk gemaakt door de bijdragen van de volgende instituten en instellingen:

SANGAKU



Een Sangaku beeldt zonder woorden een stelling uit.
De kunst is om uit het diagram af te leiden welke stelling dat is en die te bewijzen.

Deze sangaku is ontworpen door
Odette De Meulemeester.