

PYTHA GORAS



WISKUNDETIJDSCHRIFT VOOR JONGEREN

Het beroep:

Biomedisch informaticus

Geomagische vierkanten

Onvolledigheid volgens Gödel

49ste JAARGANG - NUMMER 1 - SEPTEMBER 2009

PYTHAGORAS KUN JE OOK GRATIS KRIJGEN



... MET EEN GROEPSABONNEMENT

Heb je een jaarabonnement op *Pythagoras*? Neem in plaats daarvan een groepsabonnement en ontvang je eigen exemplaar geheel gratis!

Pythagoras laat graag zoveel mogelijk mensen kennis maken met de leuke en uitdagende kanten van wiskunde. Daarom geven wij iedereen die voor ten minste vijf leerlingen, vrienden of kennissen een groepsabonnement aanvraagt zijn eigen abonnement cadeau. De anderen in de groep betalen maar 12 euro (14 euro in België) voor een hele jaargang.

Tot en met 30 oktober kun je een jaarabonnement laten overzetten naar een groepsabonnement. Bel daarvoor met Mirjam Worst, Drukkerij Ten Brink, tel. 0031 (0)522 855 175, of stuur een e-mail naar abonneeadministratie@pythagoras.nu. Vermeld daarbij je adres, het aantal groepsleden (exclusief jezelf) en dat je een jaarabonnement wenst over te zetten.

De abonnementsvoorwaarden voor het groepsabonnement kun je bekijken op www.pythagoras.nu/pyth/voorwaarden.php.

INHOUD

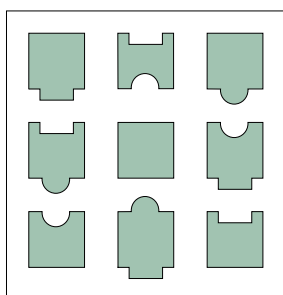
4



DE BIOMEDISCH INFORMATICUS: 'SOMS IS HET ECHT EEN BEETJE PRUTSEN'

Het thema van de 49ste jaargang van *Pythagoras* is 'beroepen'. Waar komt een wiskundige zoal terecht? Het cliché dat je alleen maar wiskundeleraar kunt worden, of onderzoeker op een universiteit, is onjuist. In elk nummer passeert een wiskundige de revue die elders een baan heeft. In aflevering 1 is dat Natasha Maurits. Zij werkt op de afdeling Neurologie van het Universitair Medisch Centrum Groningen. 'Ik pas heel breed mijn wiskunde toe, en moet ook van heel veel dingen wat afweten. Maar dat maakt het juist heel leuk.'

12



GEOMAGISCHE VIERKANTEN

Lee Sallows creëerde een heel nieuw genre wiskundige objecten op basis van de eeuwenoude magische vierkanten. Hij noemt zijn objecten 'geomagische vierkanten'.

26

KURT GÖDEL (1906-1978): DE ONGEWISKUNDIGE



De Oostenrijks/Amerikaanse wiskundige, logicus en filosoof heeft een enorme invloed gehad op het wetenschappelijke en filosofische denken van de twintigste eeuw. Hij bewees dat elk gangbaar axioma-systeem onbewijsbare stellingen in zich heeft.

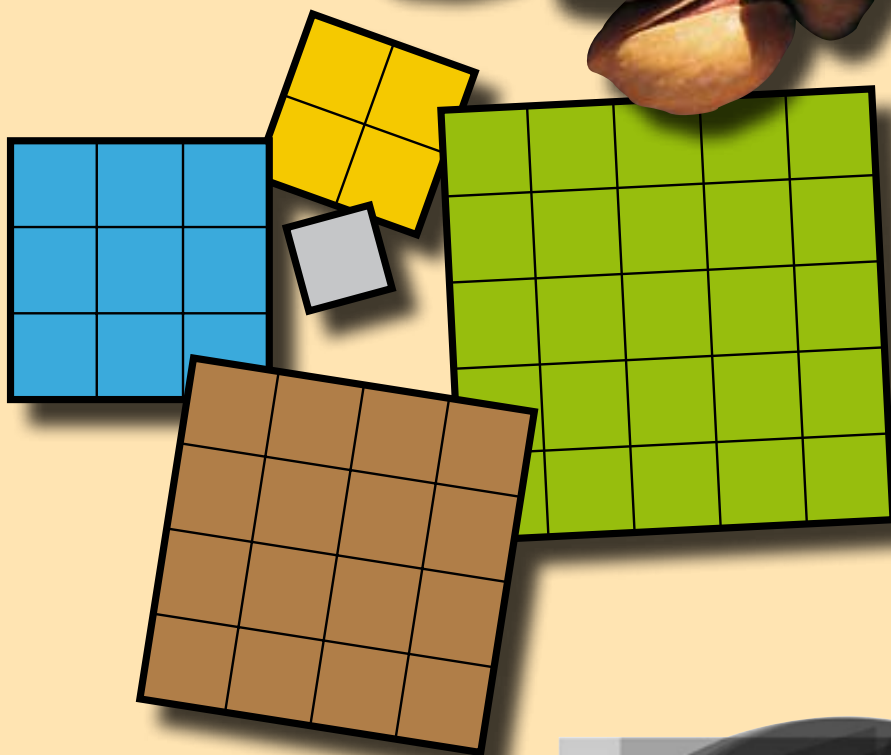
EN VERDER

- 2 Kleine nootjes
- 8 Sangaku, de oplossingen van 2008-2009
- 11 Journaal
- 16 De toren van Babel - een dubbele helix
- 18 Pythagoras Olympiade
- 21 Oplossingen
- 22 Modulorekenen bij de IMO
- 32 De Stelling van Standvastige Kwadraten
- 33 Oplossingen Kleine nootjes nr. 6

■ **NIVEAUBALKJES** Pagina's met één of meer zwarte balkjes (onder de paginanummering) geven de moeilijkheidsgraad aan. Eén balkje: lastig. Twee balkjes: vereist wiskundekennis uit de vijfde of zesde klas. Drie balkjes: net iets moeilijker.

KLEINE NOOTJES

■ door Dick Beekman en Jan Guichelaar

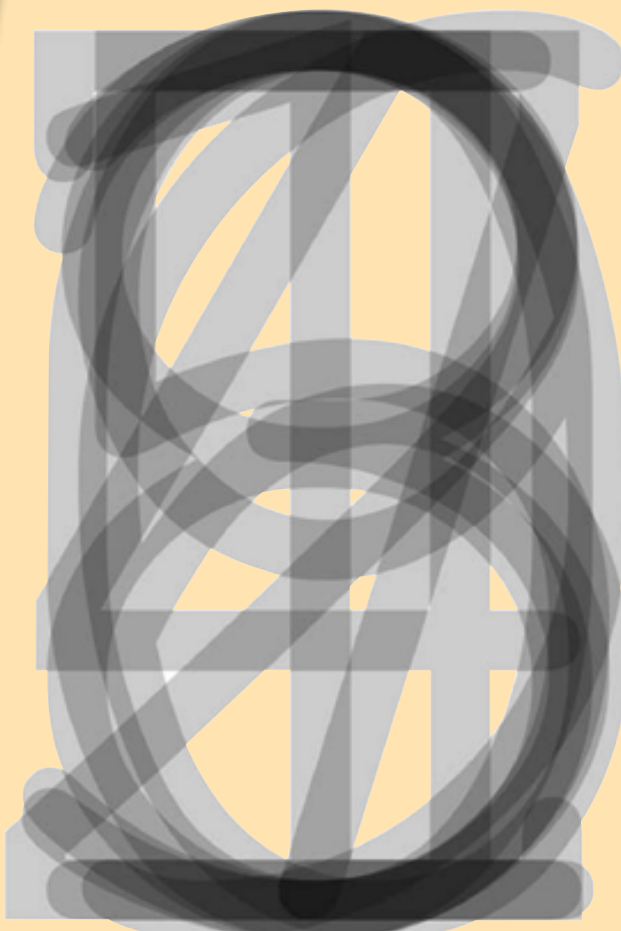


GREEP VAN VIERKANTJES

Barbara heeft een bak vol vierkantjes in vijf maten: 1×1 , 2×2 , 3×3 , 4×4 en 5×5 . Van elke soort heeft zij er heel erg veel. Zij doet een greep uit de bak en ontdekt dat zij met alle stukjes in haar hand een vierkant van 5×5 kan leggen. Met hoeveel verschillende grepen kan dit?

DELEN

Nelson schrijft drie opvolgende gehele getallen op, niet alle drie met hetzelfde begincijfer (bijvoorbeeld 19, 20, 21). Eén blijkt een viervoud te zijn, één een vijfvoud en één een zevenvoud. Welk drietal is dit?



Kleine nootjes zijn eenvoudige opgaven die weinig of geen wiskundige voorkennis vereisen om opgelost te kunnen worden. De antwoorden vind je in het volgende nummer van Pythagoras.



OP ZIJN KOP

Het getal 81 is een kwadraat, want $81 = 9^2$. Als je 81 op zijn kop leest, lees je 18 en dat is geen kwadraat.

Welk kwadraat van drie cijfers is ook een kwadraat, als je het op zijn kop leest?

GELDTOREN VAN HANOI

Leg van groot naar klein alle acht euromuntjes op een stapeltje, boor een gaatje door de middens en zet ze op één van drie pilaartjes. Plaats telkens één muntje naar een ander pilaartje, waarbij je nooit een groter muntje op een kleiner zet. Eindig met alle muntjes op een ander pilaartje. Welk bedrag is minimaal door je vingers gegaan (elk muntje telt steeds weer mee)?



3



KNIKKERDOOS

Neem een grote doos met knikkers, schud goed en vul tot de rand. Vervang vervolgens de knikkers door kleinere met de halve doorsnede en doe er weer zoveel mogelijk in. Hoe verandert het aantal knikkers? En hoe verandert het gewicht?

Het is een hardnekkig misverstand, dat je na een studie wiskunde eigenlijk alleen maar leraar kunt worden. In onze nieuwe themaserie laten we telkens iemand aan het woord die afgestudeerd is in de wiskunde en die kennis nu toepast in een heel ander vak.

■ door Charlotte Vlek

DE BIOMEDISCH INFORMATICUS: 'SOMS IS HET ECHT EEN BEETJE PRUTSEN'



Wie?	Prof. dr. ir. Natasha Maurits (3 mei 1971, Voorburg)
Wat?	Biomedisch informaticus, adjunct hoogleraar biomedische signaalanalyse
Waar?	Universitair Medisch Centrum Groningen
Welke wiskunde?	Signaalanalyse, Fourieranalyse, numerieke wiskunde
Opleiding:	Rijksuniversiteit Groningen, numerieke wiskunde & technische mechanica
Middelbare school:	Dr. Nassaucollege, Assen

Natasha Maurits werkt op de afdeling Neurologie van het Universitair Medisch Centrum Groningen (UMCG). 'Daar komen mensen die ziektes hebben aan zenuwen, hersenen en spieren. We hebben daar allerlei meet- en scantechnieken. Wat ik probeer, is nieuwe technieken toepasbaar maken voor de patiëntenzorg. Ik pas heel breed mijn wiskunde toe, en moet ook van heel veel dingen wat afweten. Dat maakt het juist heel leuk.

In mijn onderzoek willen we gegevens uit verschillende meettechnieken gebruiken om beter onderscheid te maken tussen verschillende ziektebeelden, of om beter te voorspellen hoe een ziekte zich zal ontwikkelen. Op het moment bestuderen we bijvoorbeeld patiënten met onvrijwillige beenbewegingen tijdens de slaap. Op onze afdeling hebben we nu nieuwe technieken tot onze beschikking, waarmee we tegelijk kunnen meten in

welk slaapstadium mensen zijn wanneer ze die beenbewegingen hebben, en hoe ernstig ze zijn. Omdat we die mensen in een MRI-scanner leggen, kunnen we ook nog meten waar in de hersenen dan iets gebeurt. De studie die ik nu doe, is om te kijken of het lukt om dat allemaal tegelijkertijd te meten.'

Een MRI-scanner kan met behulp van magneetvelden en radiogolven een beeld maken van activiteit in de hersenen. Maurits: 'De zenuwen en de hersenen genereren elektriciteit, die kun je meten. Maar je wilt dat in het sterke magneetveld van de MRI-scanner doen. Elektriciteit en magnetisme gaan moeilijk samen. Om te zorgen dat het tegelijk gemeten kan worden, moet je het signaal bewerken. En daar kijken wij dan weer naar: hoe

maak je dat signaal bruikbaar voor wat je wilt weten. Dat is soms echt een beetje prutsen.'

EEN GOEDE BASIS Maurits had nooit gepland om in deze baan terecht te komen. Maar toch: 'Vroeger wilde ik lange tijd dokter worden, maar ik vond geneeskunde zo'n lange studie. Uiteindelijk heb ik ongeveer in de vijfde klas besloten dat ik wiskunde zou gaan doen: daarmee had ik tenminste een goede basis, en dan kon ik daarna als nog kiezen. En ik was er goed in.

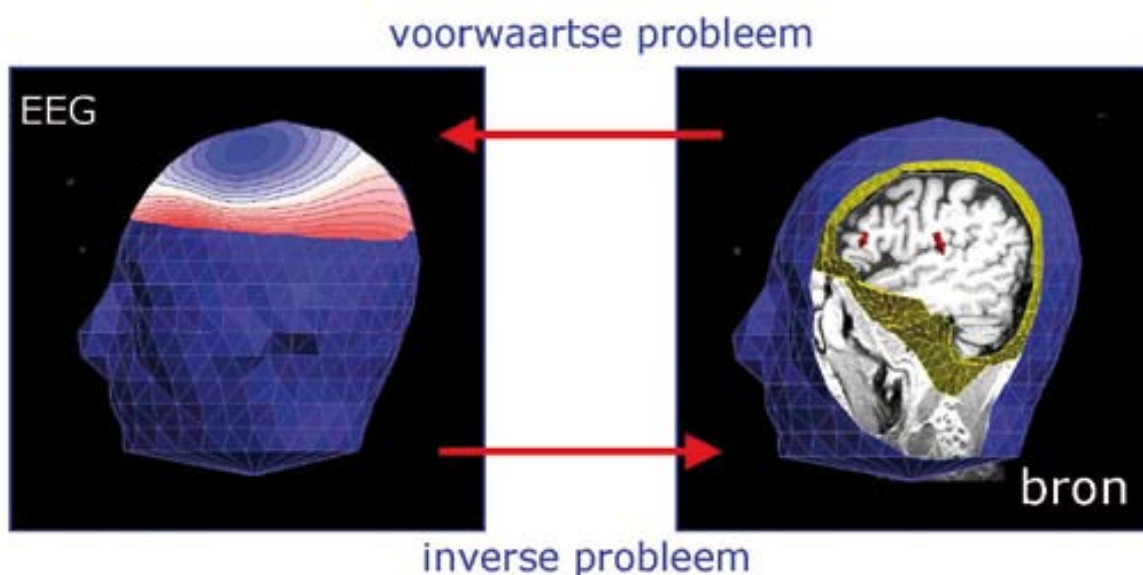
Wiskunde studeren vond ik leuk omdat je dan tussen mensen zit die hetzelfde leuk vinden als jij. Tegenwoordig heb je allerlei studies als Biomedische Technologie. Als ik nu opnieuw kon kiezen, zou ik misschien wel iets in die richting hebben

EEG Een signaal uit een MRI-scan of ander meetapparaat omzetten in een bruikbaar beeld is een klus waar ingewikkelde wiskunde aan te pas komt. Als voorbeeld nemen we hier het ElektroEncefaloGram (EEG). De hersenen functioneren doordat tussen hersencellen minuscule elektrische stroompjes lopen. Al deze stroompjes samen wekken een potentiaalveld op in de hersenen, dat tot buiten de schedel doorloopt. Je kunt het vergelijken met het magneetveld dat ontstaat als je stroom laat lopen door een elektromagneet.

Bij het maken van een EEG wordt het hoofd beplakt met 10 tot 50 paren elektroden. Door de draad tussen twee elektroden gaat een meetbaar stroompje lopen op het moment dat de veldsterkte op beide punten verschilt. Als sterkte en

plaats van de stroombronnen binnen de schedel bekend zijn, hebben we formules om exact uit te rekenen wat het potentiaalveld op de schedel zal worden; dit is het voorwaartse probleem.

Maar het maken van een EEG behelst juist het omgekeerde (inverse) probleem: uit het potentiaalveld de plaats van de bronnen afleiden. Hiermee kan een arts bijvoorbeeld bepalen waar de bron van epileptische aanvallen bij een patiënt zit. Dit probleem is veel moeilijker en heeft soms ook geen unieke oplossing: bronnen op verschillende plaatsen kunnen samen toch hetzelfde veld op de schedel opleveren. Wiskundige technieken om uit een EEG zo nauwkeurig mogelijk de stroomverdeling in de hersenen te bepalen zijn daarom nog steeds in ontwikkeling.



gekozen. Maar ik heb geen spijt. Het voordeel van wiskunde is dat je daarna nog makkelijk andere kanten op kunt.'

WETEN WAARVOOR JE HET KUNT

6 **GEBRUIKEN** Tijdens haar studie had Maurits vooral veel belangstelling voor vakken als analyse (functies, differentiëren, integreren) en stromingsleer (de beweging van lucht en vloeistof). Toch ging ze steeds meer de praktische kant op: 'Op een gegeven moment wilde ik ook weten waar je het allemaal voor kunt gebruiken.' Uiteindelijk studeerde ze af in de numerieke wiskunde (het bouwen van wiskundige modellen die met computers door te rekenen zijn) én de technische mechanica. Haar afstudeeronderzoek, bij het Nationaal Lucht- en Ruimtevaart Laboratorium, ging over de stroming van lucht rond vliegtuigvleugels. Eenmaal doctorandus, wilde Maurits 'nog wel een paar jaar de diepte in'. Het was dus een logische stap om nog vier jaar onderzoek aan de universiteit te doen. Zo behaalde ze bij de faculteit scheikunde de doctorstitel: 'Daar probeerde ik modellen te verbeteren voor mengsels van polymeren: de bouwstoffen van verf, plastic en noem maar op. Het idee was dan dat je door zo'n model te gebruiken van tevoren stoffeigenschappen zou kunnen voorspellen. Normaal maken ze in het lab nieuwe producten door allerlei experimenten te doen, maar deze modellen kunnen je helpen eerder de juiste beslissing te nemen. Je kunt dan hopelijk een aantal experimenten overslaan. Dat maakt het goedkoper om nieuwe producten te ontwikkelen.'

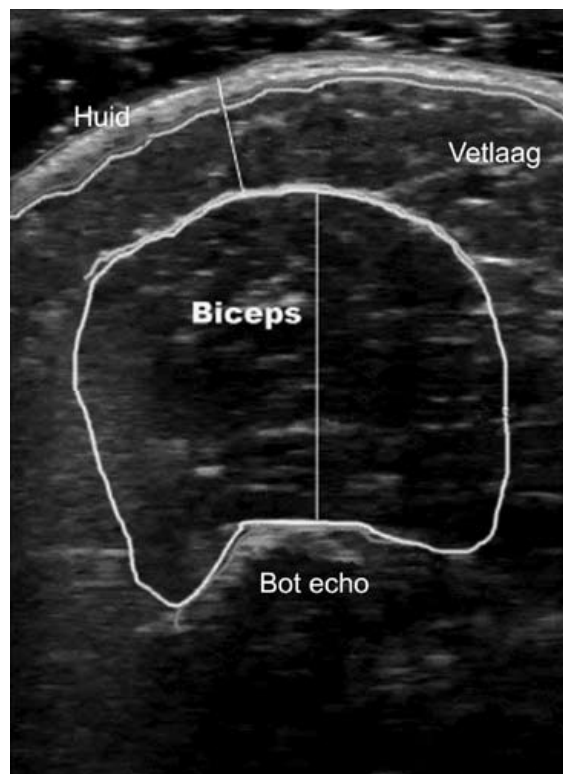
Na haar promotie heeft Maurits kort een eigen bedrijfje gehad, dat gespecialiseerd was in het maken en gebruiken van zulke modellen. Uiteindelijk wilde ze toch weer het onderzoek in: 'Zo ben ik hier terecht gekomen. De nodige medische kennis heb ik mezelf vooral op de werkvloer aangeleerd.'

KENNIS OVERDRAGEN 'In een deel van mijn baan krijg ik ook met patiënten te maken. Aan het eind van het onderzoek wil je laten zien dat het goed werkt, en daarvoor moet je dat natuurlijk ook toepassen op patiënten. We doen dan metingen met kleine groepjes proefpersonen. Verder begeleid ik regelmatig studenten. Dat vind ik het leukst aan mijn werk: kennis overdragen en zorgen dat andere mensen wetenschap ook leuk vinden.'

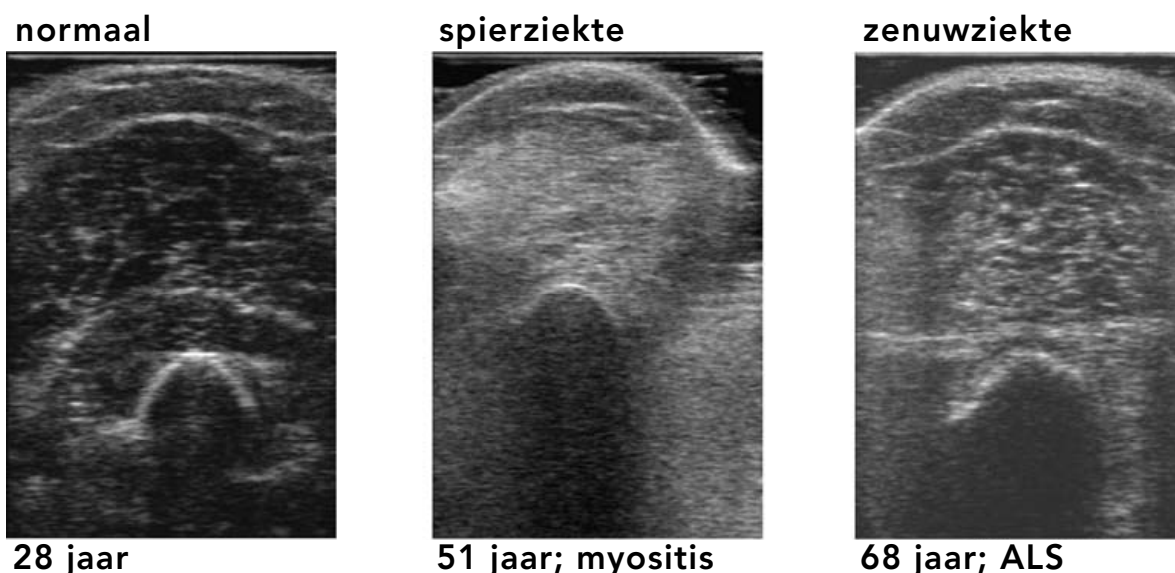
Op Maurits' werkkamer hangt een aantal schilderijen, gemaakt door haarzelf. In haar vrije tijd doet ze niet veel meer met wiskunde, al moet ze wel vakbladen lezen om in haar specialisme goed op te hoogte te blijven. 'Omdat je in je werk met

veel andere dingen bezig bent en weinig vergelijkingen of formules meer afleidt, denk je soms dat je geen echte wiskundige meer bent. Maar echte wiskunde is niet alleen het manipuleren van formules. Het is veel meer dan dat.' ■

SPIERECHOGRAFIE Een echo maakt door middel van geluid met een heel hoge frequentie een beeld van iets binnen in het lichaam. Het bekendste voorbeeld is de echo bij zwangere vrouwen, om een beeld van de ongeborene baby te krijgen. In dit voorbeeld gaat het erom de opbouw van de spieren in beeld te brengen. Op een echo van de bovenarm (dwars genomen) zie je van boven naar beneden de huid, de onderhuidse vetlaag, de bicepsspier en het bovenarmbot, zie figuur 1. Normaal is de spier vrij donker gekleurd. Het bot is dan goed te zien, zie figuur 2 (links). Bij een spier- of zenuwziekte is dit anders: een typische spierziekte veroorzaakt een helemaal witte spier, zodat het bot niet goed meer zichtbaar is, zie figuur 2 (midden). Een zenuwziekte geeft juist vlekkerigheid, met meer en grotere vlekken dan normaal, zie figuur 2 (rechts).



Figuur 1 Spierechografie: dwarsdoorsnede van bicepsspier. V.b.n.b.: huid, onderhuidse vetlaag, spier, bot.



Figuur 2 Spierechografie: bicepsspier bij een gezonde persoon, bij een patiënt met een spierziekte en bij een patiënt met een zenuwziekte.

De vraag is nu of zulke echo's ook objectiever beoordeeld kunnen worden dan de arts met het blote oog kan zien. Daarvoor is het nodig de kenmerken (witheid, vlekkerigheid) om te zetten naar een meetbare schaal. Dat gebeurt met drie maten: de zwartheid van de spier, de vlekkerigheid en de homogeniteit: de regelmaat waarmee de afwijkingen verdeeld zijn.

Om de waarden van de drie maten te bepalen, wordt het beeld eerst genormaliseerd: de verschillen in kleur die veroorzaakt worden door dat apparatuur net iets anders is afgesteld, worden gecompenseerd. Daarna wordt op de echo een rechthoekig stukje van de spier geselecteerd. Voor de zwartheid van dit stukje kunnen de waarden van de pixels gebruikt worden: een zwarte pixel heeft doorgaans waarde 0, een witte waarde 255. Het gemiddelde van alle waarden geeft een goede maat voor de zwartheid. Om de vlekkerigheid te meten, worden alle pixels met waarde groter dan 170 (deze grenswaarde is experimenteel vastgesteld) geteld; dit geeft het aantal 'witte' pixels. Met speciale software wordt het aantal vastgelegd en vergeleken met

het totale aantal pixels. Ten slotte wordt het aantal witte gebiedjes geteld en gedeeld op het totale oppervlak. Dit geeft een goede maat voor de homogeniteit.

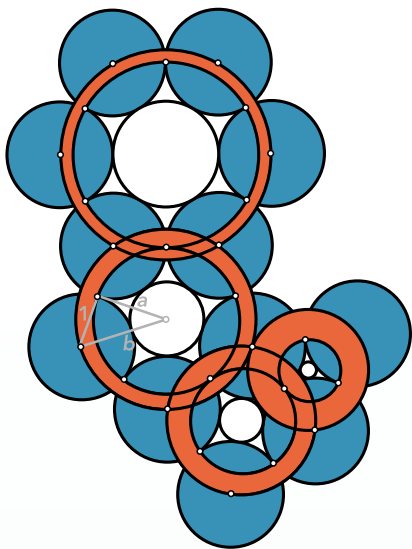
Deze methode is uiteindelijk getest op gezonde en zieke proefpersonen. De gezonde proefpersonen hadden bij alledrie de maten in 93 à 94 procent van de gevallen een normale waarde. De proefpersonen met een spierziekte hadden in 94 procent van de gevallen een afwijkende zwartheidswaarde, en de personen met een zenuwziekte juist helemaal niet. Dit is precies wat verwacht werd op basis van de symptomen van de ziektes. Ook de andere waarden gaven een goede karakterisering van het echobeeld van de proefpersonen. Uiteindelijk kon bevestigd worden dat deze methode betrouwbaar is, en voor een arts zeer bruikbaar.

Bron: Maurits, N., 2007. 'Patiënten in getallen: echte wiskunde in het ziekenhuis', *Euclides* 82(8), pp. 309-313.

De achterkanten van *Pythagoras* werden de laatste twee jaargangen verfraaid door een *sangaku*, een diagram dat zonder woorden een stelling uitbeeldt. De kunst is om de stelling te vinden en die te bewijzen. We sluiten de serie af met de oplossingen van jaargang 48.

■ door Aad Goddijn en Alex van den Brandhof

SANGAKU DE OPLOSS

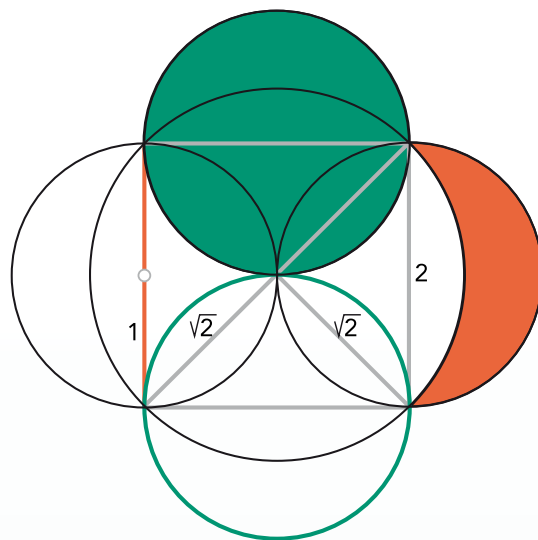


SEPTEMBER 2008

8

Te bewijzen: Alle rode cirkelbanen hebben gelijke oppervlakte, en bovendien is de oppervlakte van een rode cirkelbaan gelijk aan de oppervlakte van een blauwe cirkel.

Bewijs: Stel de straal van een blauwe cirkel op 1. Teken een rechthoekige driehoek met als hoekpunten: het middelpunt van een witte cirkel, het middelpunt van een blauwe cirkel en het raakpunt tussen twee blauwe cirkels. Deze driehoek heeft zijden 1 en de stralen van de binnen- en de buitencirkel van de rode baan. Noem die a en b . Er geldt nu (stelling van Pythagoras): $b^2 - a^2 = 1$. De oppervlakte van de rode baan is het verschil tussen de oppervlaktes van buiten- en binnencirkel: $\pi b^2 - \pi a^2 = \pi(b^2 - a^2) = \pi \cdot 1 = \pi$. De oppervlakte van een rode cirkelbaan is dus onafhankelijk van de straal van de witte cirkel, en is in alle gevallen gelijk aan de oppervlakte van een cirkel met straal 1, de blauwe cirkel.



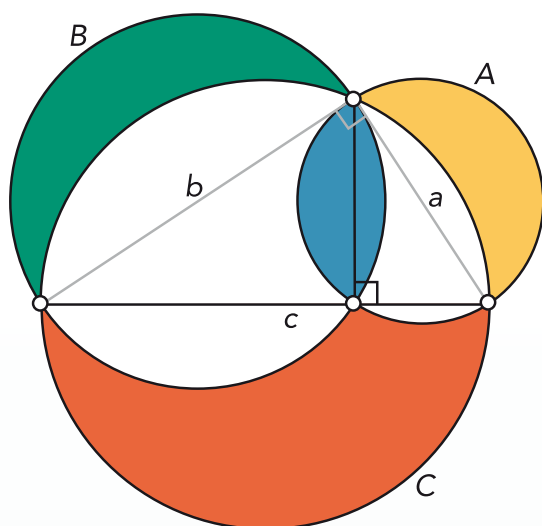
NOVEMBER 2008

Te bewijzen: De verhouding tussen het groene en rode oppervlak is gelijk aan die tussen de groene en de rode lijn, dus gelijk aan π .

Bewijs: Wegens de symmetrie van de figuur vormen de snijpunten van de kleine cirkels met de grote cirkel een vierkant. Stel de straal van een kleine cirkel gelijk aan 1. Dan hebben die cirkels (waaronder de groene) oppervlakte π . De zijde van het vierkant is dan 2. De straal van de grote cirkel is de halve diagonaal van het vierkant, dus $\sqrt{2}$, dus zijn oppervlakte is $\pi(\sqrt{2})^2 = 2\pi$. We berekenen nu de oppervlakte van het rode maantje (het 'maantje van Hippocrates') uit de combinatie van drie segmenten:

- (1) een kwart van de grote cirkel (oppervlakte $\pi/2$);
 - (2) een rechthoekige, gelijkzijdige driehoek met rechthoekszijden $\sqrt{2}$ (oppervlakte 1);
 - (3) een halve kleine cirkel (oppervlakte $\pi/2$).
- De oppervlakte van het rode maantje is (3) - (1) + (2) = $\pi/2 - \pi/2 + 1 = 1$. Dus de verhouding tussen het groene en rode oppervlak is $\pi/1 = \pi$.

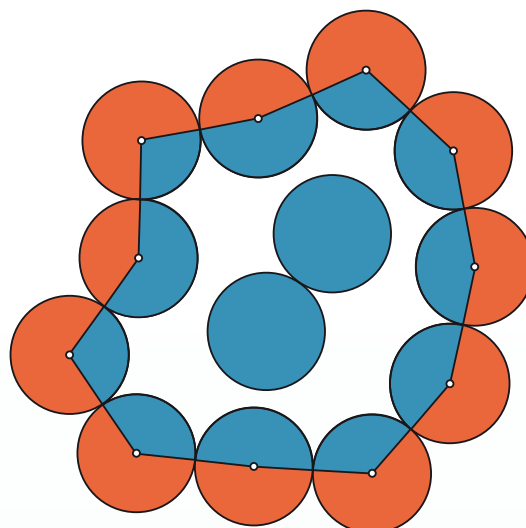
INGEN VAN 2008-2009



JANUARI 2009

Te bewijzen: De som van het groene, gele en blauwe oppervlak is gelijk aan het rode oppervlak.

Bewijs: Teken twee hulplijnen, van de top van de loodlijn naar de uiteinden van de diameter van de grootste cirkel. Nu ontstaat een rechthoekige driehoek (stelling van Thales). Noem de zijden (in oplopende grootte) a , b en c . Dit zijn ook de diameters van de drie cirkels A, B en C. Wegens Pythagoras geldt $a^2 + b^2 = c^2$, dus $\pi a^2 + \pi b^2 = \pi c^2$, dus $\text{opp}(A) + \text{opp}(B) = \text{opp}(C)$. Noem de oppervlakte van het witte gebied in de in de A-cirkel W_A en dat in de B-cirkel W_B . Verder schrijven we kortweg de kleurnaam als we de oppervlakte van dat gebied bedoelen. Er geldt:
 $\text{opp}(A) = \text{geel} + W_A + \text{blauw}$;
 $\text{opp}(B) = \text{groen} + W_B + \text{blauw}$;
 $\text{opp}(C) = \text{rood} + W_A + W_B + \text{blauw}$.
 Omdat $\text{opp}(A) + \text{opp}(B) = \text{opp}(C)$, volgt:
 $\text{geel} + W_A + \text{blauw} + \text{groen} + W_B + \text{blauw} = \text{rood} + W_A + W_B + \text{blauw}$.
 Dus: geel + groen + blauw = rood.



FEBRUARI 2009

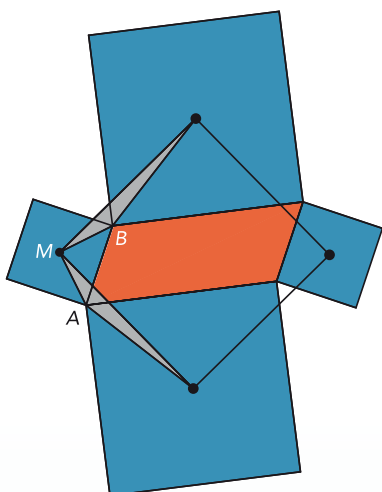
Te bewijzen: De totale rode en de totale blauwe oppervlaktes zijn gelijk.

Bewijs: Stel dat er n punten zijn. Dan is de som van de *binnenhoeken* (blauw) van de n -hoek gelijk aan $(n - 2) \cdot 180^\circ = (180n - 360)^\circ$ (dat is een bekende stelling; probeer hem zelf eens te bewijzen).

De totale hoek (dus van rood + blauw) is gelijk aan $360n^\circ$.

Dus de som van de *buitenhoeken* (rood) is $360n^\circ - (180n - 360)^\circ = (180n + 360)^\circ$.

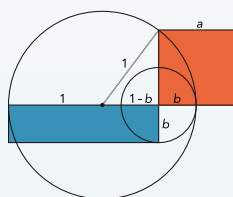
De som van de buitenhoeken (rood) is dus 720° (ofwel twee hele cirkels) groter dan de som van de binnenhoeken (blauw). Omdat in de veelhoek nog twee losse blauwe cirkels staan, geldt inderdaad dat de totale rode en blauwe oppervlaktes gelijk zijn.



APRIL 2009

Te bewijzen: Als je vierkanten zet op de vier zijden van een willekeurig parallellogram, vormen de middelpunten daarvan de hoekpunten van een vierkant.

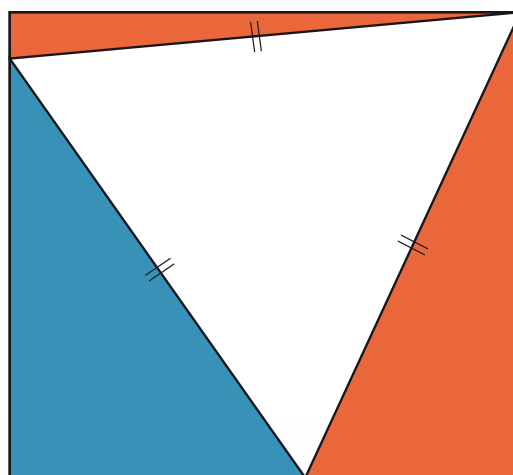
Bewijs: Noem het midden van het meest linkse vierkant M en teken de twee aangegeven grijze driehoeken. Deze driehoeken zijn congruent (congruentiegeval ZHZ; gebruik dat $\angle A$ en $\angle B$ samen 180° zijn). Omdat de korte zijden bij M loodrecht op elkaar staan ($\angle AMB = 90^\circ$), staan ook de lange zijden loodrecht op elkaar. Hetzelfde argument geldt als je uitgaat van het midden van een ander vierkant.



In het Journaal van het aprilnummer stond ook een sangaku.

Te bewijzen: De oppervlaktes van het rode vierkant en de blauwe rechthoek zijn gelijk.

Bewijs: Trek een hulplijn van het middelpunt van de cirkel naar de linkerbovenhoek van het rode vierkant. Stel de straal van de cirkel op 1, noem de zijde van het vierkant a en de korte zijde van de rechthoek b . Dan is de oppervlakte van het rode vierkant a^2 en de oppervlakte van de blauwe rechthoek is $b(2 - b) = 2b - b^2$, maar wegens Pythagoras geldt ook: $(1 - b)^2 + a^2 = 1$, dus $a^2 = 2b - b^2$.

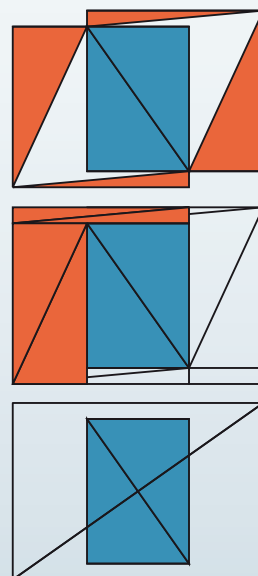


JUNI 2009

Te bewijzen: De totale rode oppervlakte is gelijk aan de blauwe oppervlakte.

Bewijs: Deze sangaku kun je oplossen met flink wat goniometrie, maar in het boekje *Mijn Mooiste Mathe...* geeft Leon van den Broek een zeer inzichtelijke redenering. Verdubbel eerst de figuur zoals in het bovenste plaatje. Herschik de stukken zoals in het middelste plaatje. De rode en de witte oppervlaktes zijn nu gelijk. In het onderste plaatje is de buitenste, witte rechthoek gelijkvormig met de blauwe. Dat komt doordat de overeenkomstige zijden en een diagonaal loodrecht op elkaar staan. De lengtes van beide diagonalen verhouden zich als $1 : \sqrt{3}$. Immers, de 'blauwe' diagonaal is de zijde van een gelijkzijdige driehoek en als we die op 1 stellen, is de hoogte van deze driehoek (de halve 'witte' diagonaal) $\frac{1}{2}\sqrt{3}$. De oppervlakte van de buitenste rechthoek is dus $(\sqrt{3})^2 = 3$ keer zo groot als de oppervlakte van de blauwe rechthoek.

We hadden al gezien dat het witte gebied in het middelste plaatje twee keer het rode gebied is, dus is het rode gebied even groot als het blauwe. ■



JOURNAAL

■ door Arnout Jaspers

Stapelen met veelvlakken

Iedere marktkoopman weet dat je de meeste sinaasappels in een kist krijgt door ze netjes te stapelen op de manier waarop je er ook een piramide van bouwt. Twee wiskundigen uit Princeton hebben nu hetzelfde probleem onderzocht voor *regelmatige veelvlakken*. Ook volgens hen is *netjes stapelen meestal optimaal*.

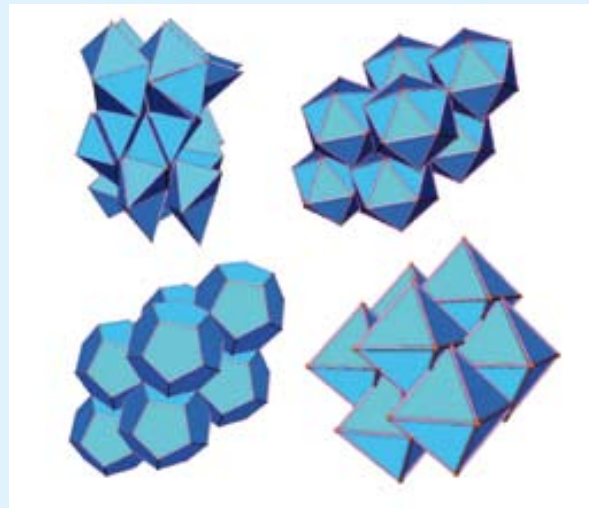
Het is niet heel moeilijk om te bewijzen dat de 'marktstapeling' van sinaasappels (bollen) van alle *regelmatige* stapelingen de beste is. Maar het was veel moeilijker om uit te sluiten dat een of andere onregelmatige stapeling toch nog iets beter was. Dit is het fameuze 'vermoeden van Kepler', en men heeft er eeuwen over gedaan om het bewijs te leveren.

De wiskundigen S. Torquato en Y. Jiao hebben geen echte bewijzen geleverd, maar door middel van computersimulaties naar optimale stapelingen gezocht van de vijf Platonische en dertien Archimedische lichamen.

Platonische lichamen bestaan uit identieke veelhoeken. Er zijn maar vijf mogelijkheden: tetraëder (regelmatig viervlak), hexaëder (kubus), octaëder (regelmatig achthoek), dodecaëder (regelmatig twaalfvlak) en icoosaëder (regelmatig twintigvlak). Archimedische lichamen bestaan uit twee of meer soorten veelhoeken, maar de hoekpunten moeten er allemaal hetzelfde uitzien.

De *dichtheid* van een stapeling is gedefinieerd als de fractie van de totale ruimte die de gestapelde lichamen innemen (in een kist die zo groot is, dat het niet uitmaakt of je met stapelen toevallig goed uitkomt). Voor de kubus en een van de Archimedische lichamen is het probleem triviaal, aangezien die een ruimte naadloos kunnen opvullen: de dichtheid is dan 1.

Over de optimale stapeling van alle andere lichamen was nog weinig bekend. De simulaties begonnen met 20 tot ruim 300 lichamen met veel tussenruimte, die de computer telkens ietsje dichter op elkaar probeerde te brengen door deeltjes willekeurige kleine draaiingen en verplaatsingen te laten maken – virtueel schudden zou je het kunnen noemen. Als je de computer maar lang genoeg laat



Dichtste pakkingen volgens de simulaties van Torquato en Jiao van (vanaf linksboven met de klok mee) tetraëders, icoosaëders, octaëders en dodecaëders. In de drie laatste gevallen blijkt de beste stapeling vrijwel identiek aan de beste *regelmatige* stapeling, alleen de beste tetraëderstapeling is veel onregelmatiger.

schudden, treedt uiteindelijk geen verbetering meer op, en geldt dit als de best mogelijke stapeling. Voor de ico-, dode- en octaëders leverde dat een dichtheid op van respectievelijk 0,836315..., 0,904002... en 0,947003... Opmerkelijke waarden, aangezien die nauwelijks afwijken van de best bekende regelmatige stapelingen, met dichtheden 0,836357..., 0,904508... en 0,947368...

Alleen de beste stapeling van de tetraëders is behoorlijk onregelmatig, maar met een dichtheid van 0,782021... compacter dan de best bekende regelmatige stapeling.

Torquato en Jiao denken dat dit komt doordat alleen de tetraëder niet centraal symmetrisch is (het centrum ligt dan niet, vanuit elke richting bekeken, halverwege het lichaam). Zij stellen daarentegen, dat een uitbreiding van het vermoeden van Kepler best eens waar zou kunnen zijn voor alle centraal symmetrische lichamen.

Deze jaargang zal op de achterpagina steeds een *geomagisch vierkant* staan, ontworpen door Lee Sallows. Deze in Nederland wonende en werkende Brit noemt zichzelf 'amateur-wiskundige', maar hij creëerde een heel nieuw genre wiskundige objecten die de eeuwenoude magische vierkanten in de schaduw stellen. Hij beschreef zijn vinding in een ongepubliceerd manuscript, waarvan hieronder het (vertaalde en bewerkte) begin staat.

■ door Lee Sallows

GEOMAGISCHE VIERKANTEN

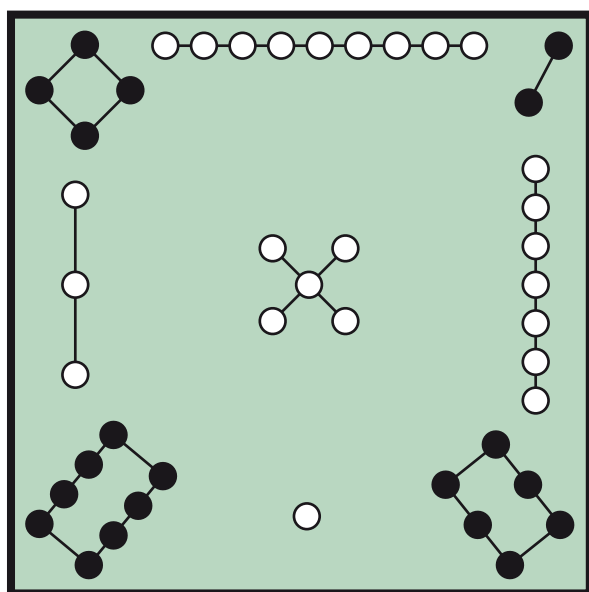
De meeste lezers zullen het traditionele magische vierkant wel kennen: een schaakbordachtig vakjespatroon waarin getallen staan – meestal, maar niet altijd opeenvolgend – zodanig dat de totalen in elke rij, elke kolom en langs beide diagonalen hetzelfde zijn. Figuur 1 toont het klassieke voorbeeld van het kleinste mogelijke, 3×3 magisch vierkant van Chinese origine, de *Lo shu*. De som van elke drie hokjes in een rechte lijn is 15.

Magische vierkanten kennen een eerbiedwaardige historie, die teruggaat tot de vierde eeuw voor Christus. Een groot deel van de uitgebreide wiskundige literatuur over magische vierkanten is geschreven door leken die er aan 'verslaafd' raakten.

Ik geef toe, ik ben zelf ook zo'n leek, een amateurwiskundige met een irrationele voorliefde voor de kristallijne kwaliteit van deze getallenprisma's. Maar na dit verplicht vertoon van nederigheid,

moet gezegd dat mijn doel in dit essay in feite een stuk minder bescheiden is.

VERKEERD BEGREPEN Mijn stelling is, dat het magische vierkant altijd *verkeerd begrepen* is geweest. Ondanks z'n lange geschiedenis en de bergeren aan literatuur erover, is het nooit herkend als het wezenlijk *niet-numerieke* object dat het in feite is. Net zoals je een cilinder voor een cirkel kunt aanzien als je hem van die ene kant bekijkt, kan een welbekend object in iets volledig onverwachts veranderen als je van standpunt verandert. Op een vergelijkbare manier stel ik, dat je de getallen in magische vierkanten beter kunt opvatten als symbolen voor *geometrische figuren*. Zoals we zullen zien, is het traditionele magische vierkant niet meer dan een speciaal geval van een veel bredere klasse van geometrische magische vierkanten, waarin toevallig



4	9	2
3	5	7
8	1	6

Figuur 1 Lo shu, het kleinste mogelijke magische vierkant



Figuur 2 Een segment van lengte 15 onderverdeeld in segmenten van lengte 8, 1 en 6

de inhoud van de vakjes ééndimensionaal is.

Vandaar het voorvoegsel *geometrisch* om het meer algemene soort magisch vierkant aan te duiden, waarvan de traditionele soort slechts een onderdeel zal blijken. Zodra we ingewijd zijn in vierkanten met tweedimensionale inhoud, vallen ons de schellen van de ogen en stappen we een wijdere, veel opwindender wereld binnen waarin de gewone magische vierkanten maar een nederige plek innemen.

GEOMAGISCH Stel je een grafische weergave voor van de Lo shu waarin rechte lijnsegmenten van lengte 1, 2, 3, ... de overeenkomstige getallen in de hokjes vervangen. De richting waarin die segmenten liggen doet er niet toe, die kan horizontaal, verticaal of scheef zijn. De constante som 15, zoals

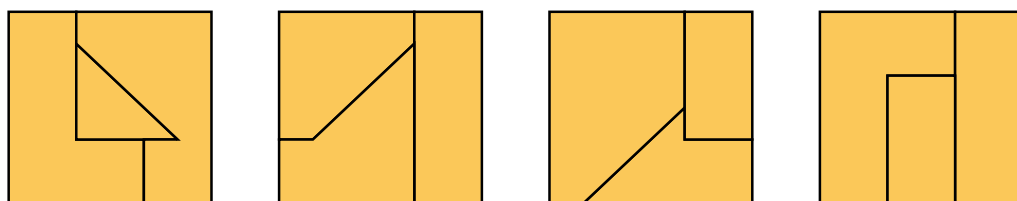
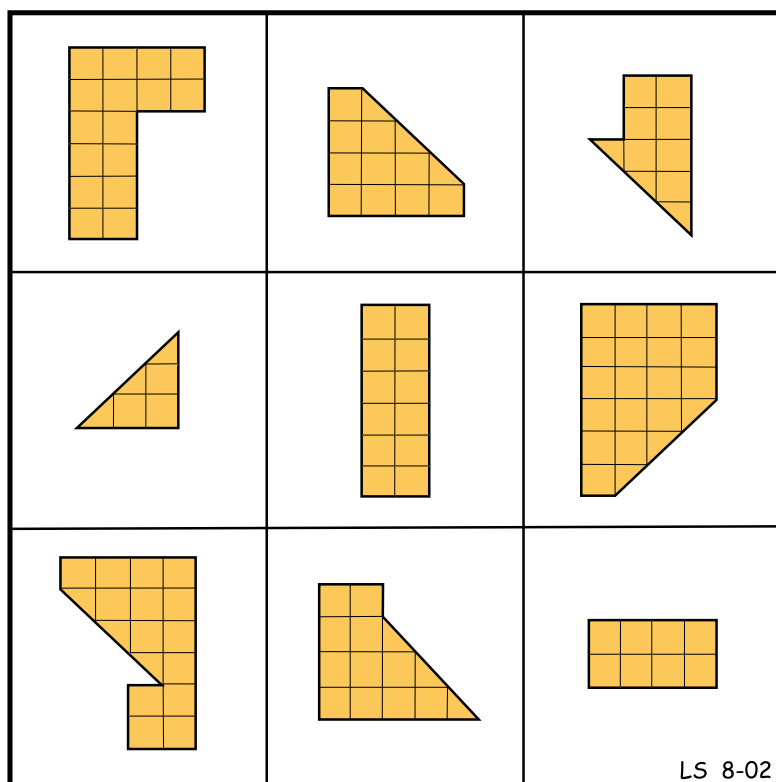
bijvoorbeeld van de onderste rij, $8 + 1 + 6$, wordt dan weergegeven door drie lijnsegmenten met lengte 8, 1 en 6 die we kop-staart aan elkaar leggen zodat een segment van lengte 15 ontstaat, zoals in figuur 2.

Merk op dat de richting er weer niet toe doet, net zo min als de volgorde van de drie deelsegmenten. Hetzelfde geldt natuurlijk voor de overige zeven 'magische lijnen' in de Lo shu.

Meer in het algemeen:

(1) de getallen in magische vierkanten zijn te be-

32	23	17
9	24	39
31	25	16



Figuur 3 Een 3 x 3 tweedimensionaal geomagisch vierkant: met de drie stukjes op een rechte lijn (horizontaal, verticaal of diagonaal) kun je een vierkant leggen

$c + a$	$c - a - b$	$c + b$
$c - a + b$	c	$c + a - b$
$c - b$	$c + a + b$	$c - a$

Figuur 4 Lucas' formule voor een 3 x 3 magisch vierkant

schouwen als lijnsegmenten van overeenkomstige lengte;

(2) getallen optellen om op de constante som uit te komen, is dan op te vatten als het opdelen of 'betegelen' van een (ééndimensionale) ruimte met zulke lijnsegmenten.

Het voordeel van dit gezichtspunt is meteen duidelijk. Net zoals je met lijnsegmenten een langere rechte lijn kunt leggen (één dimensie), kun je met tegels een oppervlakte bedekken (twee dimensies), kun je met geschikte voorwerpen een ruimte opvullen (drie dimensies), en zo verder voor nog hogere dimensies.

14

'Geometrisch' of, minder formeel, 'geomagisch' is de term die ik gebruik voor magische vierkanten waarin geometrische vormen van een hogere dimensie dan één in de hokjes kunnen voorkomen, in plaats van getallen. De oriëntatie van die vormen is niet relevant. Zo'n vierkant van $N \times N$ geometrische vormen is 'magisch' als je met de N vormen in elke rij, elke kolom en in beide hoofddiagonalen als de stukken van een legpuzzel telkens *dezelfde vorm* kunt leggen. Bij het leggen van deze constante vorm – wat ik het *doel* noem – mag je losse puzzelstukken 'oppakken en omdraaien'.

Net als bij de numerieke ofwel 'numagische' vierkanten noemen we een geomagisch vierkant waarin hetzelfde puzzelstuk meermalen voorkomt *triviaal* of *gedegenereerd*. Alle gedraaide en/of gespiegelde versies van een geomagisch vierkant beschouwen we als identiek, net als draaiingen of spiegelingen van het doel. Een $N \times N$ vierkant heeft de *orde* N . We zeggen dat een geomagisch vierkant van *dimensie* d is, wanneer het d -dimensionale stukken bevat.

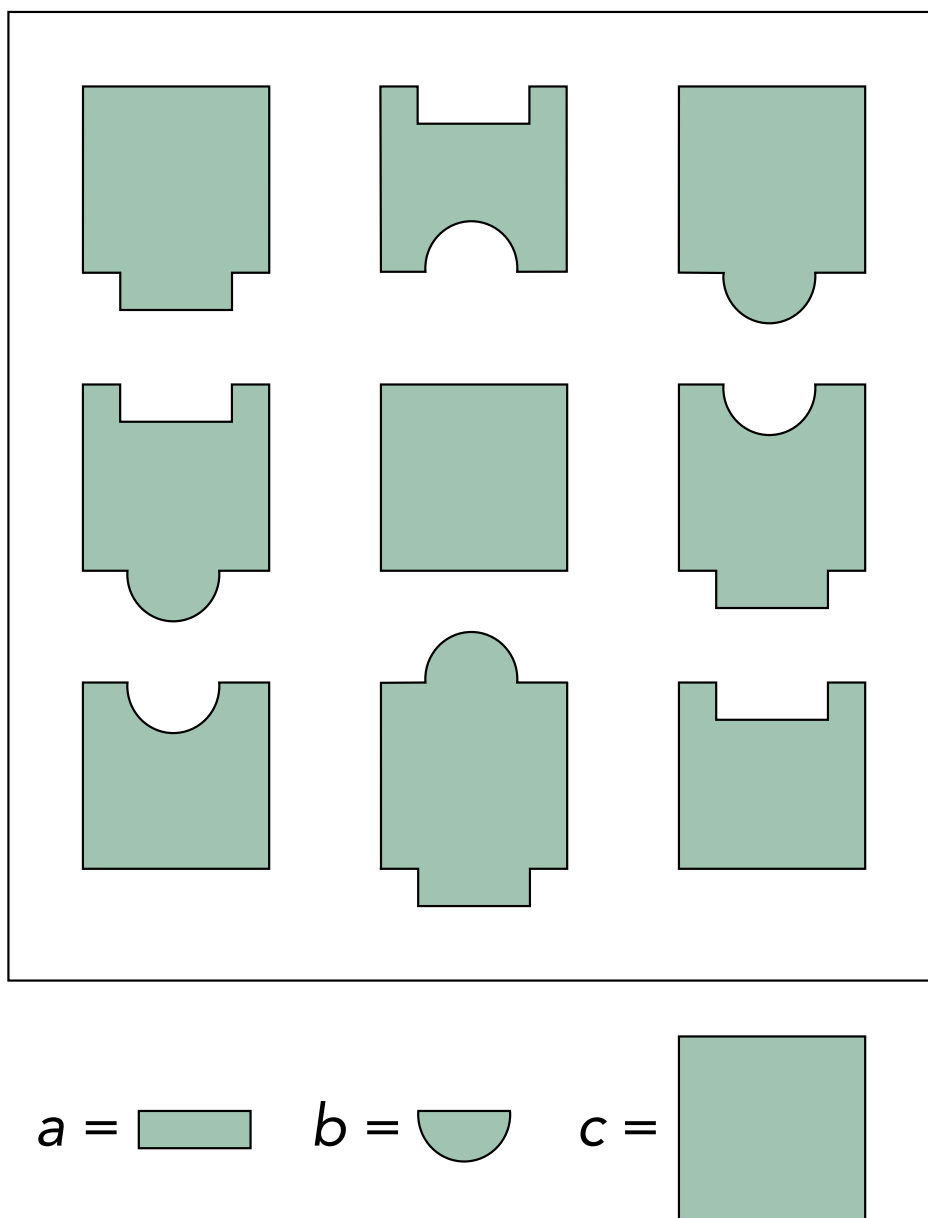
Figuur 3 toont een tweedimensionaal geomagisch vierkant van orde 3 waarvan het doel zelf een

vierkant is. De manier om het doel te leggen staat naast elke rij, kolom en diagonaal. Soms is het nodig om stukken te spiegelen en/of te draaien om de diverse doelen te leggen. Links van de figuur zie je een klein vierkant met getallen die overeenkomen met de oppervlaktes van de corresponderende stukken (uitgedrukt in eenheden van halve vierkantjes). Gezien het feit dat steeds de drie stukken in een rechte lijn hetzelfde doel betegelen, moet de som van hun oppervlaktes steeds hetzelfde zijn. Dit numerieke vierkant is dus een gewoon numagisch vierkant met een constante som die gelijk is aan de oppervlakte van het doel.

Soortgelijke numagische vierkanten afkomstig van geomagische vierkanten zijn vaak triviaal, omdat stukjes met een verschillende vorm dezelfde oppervlakte kunnen hebben. Op de achterkaft van dit nummer staat bijvoorbeeld een geomagisch vierkant waarvan alle stukjes dezelfde oppervlakte 6 hebben.

ALGEBRA Het idee voor geomagische vierkanten kwam voort uit de wens om een visuele weergave te maken van het algebraïsche vierkant in figuur 4. Deze formule, afkomstig van de negentiende eeuwse Franse wiskundige Édouard Lucas, beschrijft de structuur van alle mogelijke 3×3 magische vierkanten. Voor de Lo shu, bijvoorbeeld, moeten in de formule worden ingevuld $a = 3$, $b = 1$ en $c = 5$.

Het achterliggende idee van de visuele weergave is als volgt. Stel dat de drie variabelen a , b en c in de formule elk worden voorgesteld door een verschillende vorm in het platte vlak. Dan komt bijvoorbeeld $c + a$ overeen met vorm c samengevoegd met vorm a , terwijl $c - a$ overeenkomt met vorm c waar vorm a uitgesneden is. Een eerste poging leidde tot figuur 5, waarin a een rechthoek is, b een halve cir-



Figuur 5 Lucas' formule gerealiseerd in geometrische vormen

kel en c een (relatief groter) vierkant, drie in wezen willekeurige keuzes.

Dit resultaat was effectiever dan verwacht; de pasvorm tussen uitsteeksels en inhammen maakt het makkelijk om je de stukken aan elkaar geschaakeld voor te stellen, waardoor duidelijk is dat de totale oppervlakte van drie stukken in elke rechte lijn gelijk is aan een 1×3 rechthoek, ofwel drie keer de oppervlakte van het middelste stuk, in overeenstemming met de formule. Echter, het feit dat de drie stukken in de middelste rij en de middelste kolom niet in elkaar te passen waren tot een rechthoek, en de andere rijen en kolommen wel, kwam nu als een ernstig defect naar voren. De drang om een soortgelijk vierkant te vinden zonder dit defect was onvermijdelijk, en zo is het idee van de geomagische vierkanten geboren.

Opgave. Kun jij met deze zelfde basisvormen (a een rechthoek, b een halve cirkel en c een vierkant, niet noodzakelijk van precies dezelfde maten) een 3×3 vierkant volgens de formule van figuur 4 vinden, zodanig dat je wél uit alle rijen, kolommen en de twee diagonalen gevallen hetzelfde doel kunt vormen? Oplossingen geven we in het volgende nummer van *Pythagoras*.

Overigens bleek het verband met gewone magische vierkanten pas later. Want de term 'geometrisch magisch vierkant', die we hierboven hebben geïntroduceerd, suggereert wel een speciaal soort magisch vierkant, maar het is juist andersom. In feite blijken gewone magische vierkanten een speciaal soort geometrische magische vierkanten te zijn, het soort dat ééndimensionale stukken gebruikt. ■

Het beroemde schilderij *De toren van Babel* van Pieter Bruegel is al door vele generaties bewonderaars en kunstkenners bestudeerd. Geoloog Leo Minnigh merkte als eerste op dat er iets vreemds aan de hand is met de spiraalvorm van de toren. Hij heeft daarover een heel eigen theorie.
■ door Leo Minnigh

DE TOREN VAN BABEL

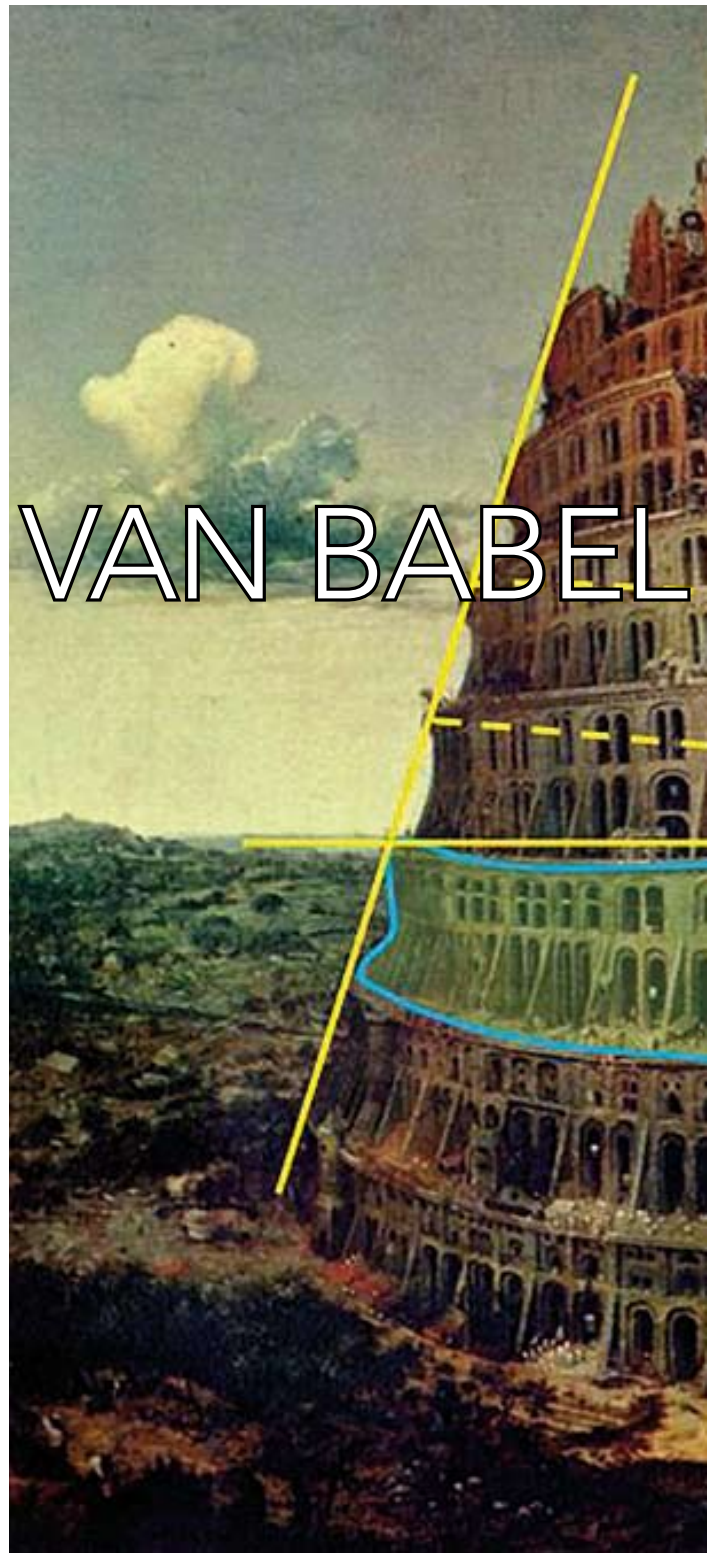


Figuur 1 Detail waaruit de schaal van het bouwwerk is af te leiden.

De toren en dit verhaal hebben tot de verbeelding gesproken. Wij hebben er nog ons woord 'babbelen' aan overgehouden. Pieter Bruegel de Oude heeft in 1563 minstens twee schilderijen van de toren gemaakt. Een ervan hangt in het museum Boymans-Van Beuningen in Rotterdam en dat schilderij wordt hier nader bekeken.

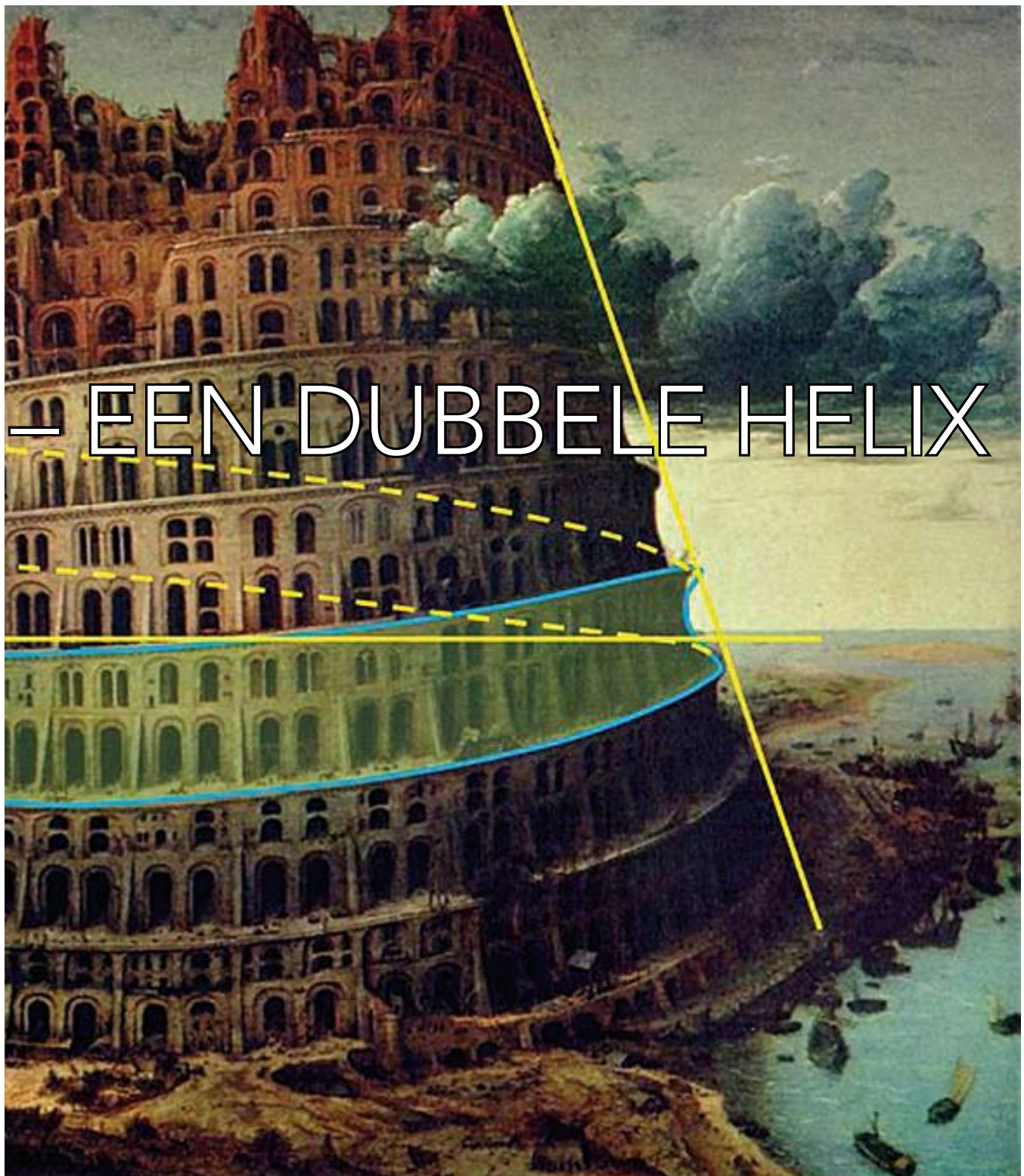
VERBEELDING Hoe heeft Bruegel dit beroemde verhaal verbeeld? De hoogte van de hemel is

Het verhaal van de toren van Babel is bekend: de nakomelingen van Noach zouden een toren tot in de hemel bouwen als toevlucht voor een nieuwe zondvloed. Bovendien zou de toren als markante oriëntatie en baken van eenheid in het land komen te staan. Maar deze hoogmoedige gedachten werden bestraft (zie de Bijbel, Genesis 9): de toren kwam nooit af en de eenheid werd verbroken door de Spraakverwarring: door goddelijk ingrijpen gingen mensen plotseling vele verschillende talen spreken en verstonden ze elkaar niet meer.



Figuur 2 De horizon als referentiepunt maakt duidelijk

gemakkelijk te berekenen, als we een idee van de schaal van dit schilderij kennen. Het schilderij is in werkelijkheid 60 bij 74,5 centimeter. Er zijn menselijke figuurtjes te herkennen, zie figuur 1. Nu moeten we een aanname doen over de gemiddelde lengte van een volwassen man ten tijde van het schilderij. Als die 150 cm is (mensen waren in de middeleeuwen een stuk kleiner dan nu), dan is de hoogte van een omloopverdieping ongeveer 20 meter. Als de toren af zou zijn geweest, zou die ongeveer 15 verdiepingen hebben geteld. Hiermee komt de hoogte van de hemel op 300 meter. Ik denk dat we de he-



dat een verdieping bij een halve omloop precies één verdieping stijgt. De toren is een dubbele helix.

mel hoger hadden ingeschat. Maar voor een gebouw in die tijd is 300 meter een fantastische hoogte.

Hoe zit het met de spraakverwarring? Als je daarover nadenkt, lijkt het onmogelijk dit verschijnsel in een schilderij vast te leggen. Bruegel is het gelukt met een briljante vondst: de *dubbele spiraal* of *dubbele helix*. Twee aparte werelden die in elkaar zijn gedraaid. Pas in de hemel zouden die twee werelden bij elkaar zijn gekomen. Je moet goed kijken en ruimtelijk inzicht hebben. Het schilderij laat slechts één kant van de toren zien, de ach-

terkant is onzichtbaar. De schilder heeft gelukkig de horizon goed afgebeeld als referentielijn. En dan zie je dat ten opzichte van die horizontale lijn de zichtbare helft van een omloop precies met één verdieping stijgt, zie figuur 2. Dus stijgt zo'n omloop *twee* verdiepingen bij een volledige omgang. Als je de omlopen aan de voorkant van beneden naar boven nummert, liggen de even en oneven omlopen los van elkaar; het zijn twee losse, in elkaar gedraaide spiralen. Bruegel heeft op een slimme manier verbeeld hoe mensen letterlijk langs elkaar heen kunnen praten. ■

PYTHAGORAS OLYMPIADE

■ door Matthijs Coster, Alexander van Hoorn, Eddie Nijholt en Tijmen Veltman

18

De *Pythagoras Olympiade* is vernieuwd! Elke aflevering bevat vier opgaven. De eerste twee zijn wat eenvoudiger; onder de goede inzendingen van leerlingen uit de klassen 1, 2 en 3 wordt een boekenbon van 20 euro verloot. De laatste twee zijn echte breinbrekers; onder de goede inzendingen van leerlingen (tot en met klas 6) wordt een boekenbon van 20 euro verloot. Bovendien kun je je via deze breinbrekers plaatsen voor de tweede ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade, mocht het via de eerste ronde niet lukken. Niet-leerlingen kunnen met de Pythagoras Olympiade meedoen voor de eer.



HOE IN TE ZENDEN?

Inzendingen ontvangen we bij voorkeur per e-mail (getypt of een scan van een handgeschreven oplossing): pytholym@pythagoras.nu.

Eventueel kun je je oplossing sturen naar Pythagoras Olympiade, Korteweg-de Vries Instituut, Universiteit van Amsterdam, Postbus 94248, 1090 GE Amsterdam.

Voorzie het antwoord van een duidelijke toelichting (dat wil zeggen: een berekening of een bewijs). Vermeld je naam en adres; leerlingen moeten ook hun klas en de naam van hun school vermelden.

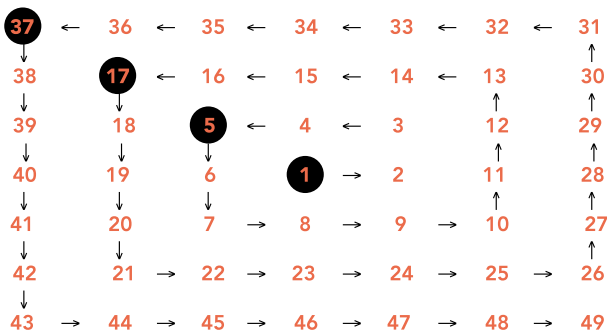
Je inzending moet bij ons binnen zijn vóór 31 oktober 2009.

OPGAVE 170

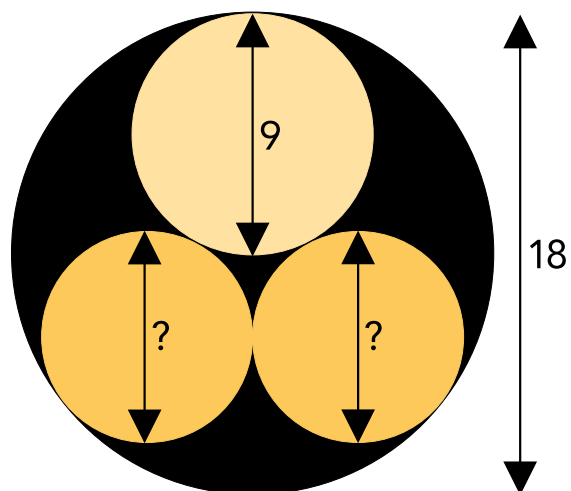
Gegeven zijn twee gehele, positieve getallen a en b . Het aantal cijfers van de negen getallen $a, ab, ab^2, ab^3, ab^4, \dots, ab^8$ is achtereenvolgens 1, 2, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Wat zijn de waarden van a en b ?

OPGAVE 171

We kunnen in gedachte de 1 op een vel papier schrijven, met rechts daarvan de 2, daarboven de 3 en zo tegen de klok in uitspiraliserend alle natuurlijke getallen. Het begin van deze spiraal zie je hieronder. Bekijk de 'halve' diagonaal die vanaf 1 naar linksboven voert. Het tweede getal op die diagonaal is 5, het derde getal is 17, het vierde getal is 37, enzovoorts. Wat is het 100ste getal op deze diagonaal?



OPGAVE 172



In een koekenpan met een diameter van 18 cm worden *drie in de pan* gebakken, dat zijn drie cirkelvormige pannenkoeken die elkaar en de rand van de pan raken. De eerste pannenkoek heeft een diameter van 9 cm. Vervolgens wordt in dezelfde pan nog het beslag gedaan voor twee exact even grote pannenkoeken. Wat is de diameter van deze pannenkoeken?

OPGAVE 173

Bewijs dat voor alle reële a en b het volgende geldt:

$$(a + b)^2 - (a^4 + b^4) \leq 2.$$

OPLOSSING

166

Bewijs dat bij elk geheel getal n met $n \geq 1$ een geheel getal m te vinden is zodat geldt:
 $(\sqrt{2} - 1)^n = \sqrt{m} - \sqrt{m-1}$.

Oplossing. We definiëren $A_n = (\sqrt{2} - 1)^n$ en $B_n = (\sqrt{2} + 1)^n$. Uit het binomium van Newton volgt:

$$A_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sqrt{2}^k \cdot (-1)^{n-k},$$

$$B_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sqrt{2}^k.$$

Dus

$$A_n + B_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sqrt{2}^k ((-1)^{n-k} + 1^{n-k}).$$

Als $n - k$ oneven is, is $(-1)^{n-k} + 1^{n-k} = 0$.

Als $n - k$ even is, is $(-1)^{n-k} + 1^{n-k} = 2$.

Eenvoudig is na te gaan dat $A_n + B_n = 2a$ als n even is, en $A_n + B_n = 2a\sqrt{2}$ als n oneven is. In beide gevallen is het mogelijk dit te schrijven als $A_n + B_n = 2\sqrt{m}$, voor een natuurlijk getal m .

Verder is

$$\begin{aligned} A_n B_n &= (\sqrt{2} - 1)^n (\sqrt{2} + 1)^n \\ &= ((\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1))^n = 1^n = 1. \end{aligned}$$

Omdat $A_n < B_n$, is A_n het kleinste nulpunt van het polynoom $p_n(x) = (x - A_n)(x - B_n)$.

Maar ook geldt

$$\begin{aligned} p_n(x) &= x^2 - (A_n + B_n)x + A_n B_n \\ &= x^2 - 2\sqrt{m}x + 1. \end{aligned}$$

Het kleinste nulpunt van dit polynoom is gelijk aan

$$\frac{1}{2}(2\sqrt{m} - \sqrt{(-2\sqrt{m})^2 - 4}) = \sqrt{m} - \sqrt{m-1}$$

De goede inzenders

166: Mark Boersma, Vlissingen; Elias C. Buissant des Amorie, Castricum; Linda Laumen, Deurne; Aziz El Mallouki, Amersfoort; Marcel Roggeband, Hoofddorp; Fred Schalekamp, Brakel; Simon Vandeveld, Oostakker (Gent), België.

167: Mark Boersma, Vlissingen; Elias C. Buissant des Amorie, Castricum; Jeroen Huijben, Theresialyceum (klas 2), Tilburg; Stefan Klootwijk, Bonhoeffer College (klas 4), Enschede; Arie van der Kraan, Nuth; Aziz El

OPLOSSING

167

Gegeven is een scherphoekige driehoek ABC . V is het voetpunt van de hoogtelijn vanuit A , M is het midden van AB en L is het snijpunt van CA met de bissectrice van $\angle B$. Gegeven is dat AV , BL en MC door één punt gaan en dat ML evenwijdig is met BC . Bewijs dat driehoek ABC gelijkzijdig is.

Oplossing. Omdat $ML \parallel BC$, is $\triangle AML \sim \triangle ABC$,

$$\text{dus } \frac{|AL|}{|AC|} = \frac{|AM|}{|AB|} = \frac{1}{2},$$

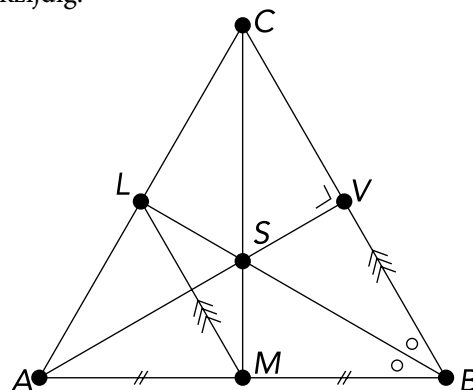
dus $|AL| = |LC|$. Hieruit volgt dat BL een zwaartelijn is. Omdat AV door het snijpunt van twee zwaartelijnen gaat, is deze zelf ook een zwaartelijn, waaruit volgt dat $|BV| = |VC|$. Samen met $AV \perp BC$ levert dit $\triangle AVB \cong \triangle AVC$ (ZHZ), dus $|AB| = |AC|$.

Omdat BL de bissectrice van $\angle CBA$ is, volgt uit de bissectricestelling dat

$$\frac{|BA|}{|AL|} = \frac{|BC|}{|CL|},$$

$$\text{waaruit volgt dat } |BC| = \frac{|CL|}{|AL|} |BA| = 1 \cdot |BA|.$$

Nu hebben we $|AB| = |BC| = |CA|$, dus $\triangle ABC$ is gelijkzijdig.



Mallouki, Amersfoort; Erzsébet Nándorfi; Marcel Roggeband, Hoofddorp; Fred Schalekamp, Brakel; Ian Vandelacluze, Ruiselede, België; Simon Vandeveld, Oostakker (Gent), België.

De boekenbon gaat naar Stefan Klootwijk.

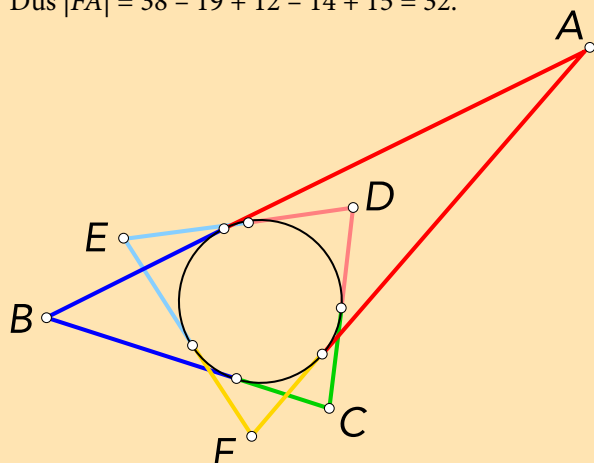
In het vorige nummer zijn bij opgave 164 de volgende oplosers per abuis onvermeld gebleven: Anton van Dijk, Hoofddorp; Aziz el Mallouki, Amersfoort.

OPLOSSINGEN

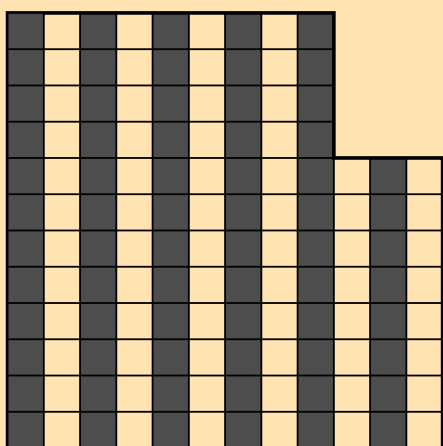
In het vorige nummer van *Pythagoras* verschenen de laatste problemen van Dion Gijswijt. De oplossingen staan hieronder.

■ door Dion Gijswijt

STER De afstanden van een punt tot de twee raakpunten aan een cirkel zijn gelijk. Zodoende is $|AB| - |BC| + |CD| - |DE| + |EF| - |FA|$ gelijk aan 0. Dus $|FA| = 38 - 19 + 12 - 14 + 15 = 32$.

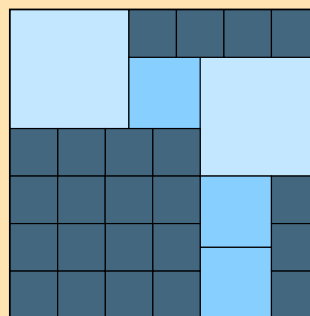


TUINTEGELS Deel de tuin op in velden van 1×1 en kleur ze zoals in onderstaande figuur. Er zijn vier zwarte velden meer dan witte. Elke 2×2 tegel bedekt even veel witte als zwarte velden en voor elke 3×3 tegel is het verschil in bedekte zwarte en witte vierkanten gelijk aan 3. Omdat 4 geen veelvoud is van 3, kan de tuin niet betegeld worden.

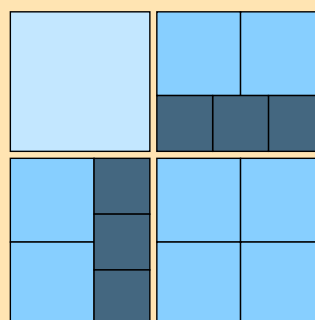


VIERKANTEN IN VIERKANTEN Met een kleuring als in de vorige opgave, zie je dat iedere betegeling van een 7×7 vierkant een 5×5 en een 3×3 tegel moet gebruiken. De resterende $49 - 25 - 9 = 15$ velden kunnen nu niet bedekt worden, want 15 en $15 - 9 = 6$ zijn geen viervoud.

Een van de (vele) betegelingen van een 13×13 vierkant zie je hieronder.



Een 6×2 en een 6×3 rechthoek kun je betegelen, en daarmee ook elke $6 \times n$ rechthoek ($n > 1$). Kun je een $n \times n$ vierkant betegelen, dan leidt dat nu ook tot een betegeling van een $(n + 6) \times (n + 6)$ vierkant, zoals hieronder voor $n = 5$.



Omdat voor $n = 8, \dots, 13$ een betegeling bestaat, geeft dit een betegeling voor alle $n \geq 8$. Enkel voor $n = 7$ (en $n = 1$) is geen betegeling mogelijk!

TORENS VAN HANOI Noem het aantal stappen dat nodig is in het geval van n schijven $a(n)$. Dus $a(1) = 2$ en we moeten $a(4)$ bepalen. Er geldt dat $a(n + 1) = 3a(n) + 2$ voor alle $n \geq 1$. Immers, als er $n + 1$ schijven zijn, bekijk dan de onderste schijf, nummer $n + 1$. Deze moet van A naar B worden verplaatst (1 zet), maar eerst moeten de overige n schijven naar C verhuizen ($a(n)$ stappen). Daarna moeten de n schijven weer terug naar A verhuizen ($a(n)$ stappen), zodat schijf $n + 1$ naar C kan (1 stap). Ten slotte moeten de n schijven ook naar C ($a(n)$ stappen). We vinden: $a(2) = 8$, $a(3) = 26$ en $a(4) = 80$.

Deze zomer bogen 565 getalenteerde scholieren uit 104 verschillende landen zich twee dagen over in totaal zes heel pittige wiskundeopgaven. De leerlingen en hun begeleiders waren voor anderhalve week naar Bremen gekomen voor de jubileumeditie van de Internationale Wiskunde Olympiade. Twee ochtenden hiervan waren gereserveerd voor de wed-

■ door Birgit van Dalen en Quintijn Puite

MODULOREKENEN BIJ DE IMO

22



Het Nederlandse team, v.l.n.r.: Wouter Berkelmans, Raymond van Bommel, Merlijn Staps, Maarten Roelofsma, Saskia Chambille, Harm Campmans, David Kok.

strijd; de rest van de tijd konden de scholieren kennismaken met leeftijdsgenoten van over de hele wereld. Ze leerden elkaar kaartspelletjes, vormden samen voetbalteams en gingen op excursie naar onder andere het prachtige waddeneiland Wangeroege.



Het Nederlandse team voor de vijftigste editie van de Internationale Wiskunde Olympiade (IMO) bestond uit Wouter Berkelmans, Raymond van Bommel, Harm Campmans, Saskia Chambille, David Kok en Maarten Roelofsma. Merlijn Staps ging mee als aanstormend talent. Direct voorafgaand aan de IMO heeft het team nog een trainingskamp gehad samen met het team van Nieuw-Zeeland. Het team is 47ste geworden in het officieuze landenklassement. In de afgelopen tien jaar heeft Nederland het slechts één keer beter gedaan. In dit artikel gaan we nader in op opgave 1 van deze IMO, die door het Nederlandse team erg goed is gemaakt.

MODULOREKENEN Een van de mogelijke oplossingen van opgave 1 maakt gebruik van de techniek van het *modulorekenen*. Hoe gaat dat in zijn werk? Iedereen die kan klokkijken, gebruikt deze techniek ongemerkt dagelijks. Als het nu 22 uur is, hoe laat is het dan over 5 uur? Precies, 3 uur. We zeggen dat $22 + 5$ congruent is aan 3, althans, als je modulo 24 rekent. Notatie: $22 + 5 \equiv 3 \pmod{24}$. Zo geldt ook dat $4 - 10 \equiv 18 \pmod{24}$, want 10 uur vóór 4 uur was het 18 uur. Anders gezegd: $27 \equiv 3 \pmod{24}$ en $-6 \equiv 18 \pmod{24}$. Er hoeft niet per se maar één keer 24 verschil tussen de twee getallen links en rechts van het congruentieteken ($\equiv$) te zitten: er geldt ook dat $-23 \equiv 25 \pmod{24}$, want 23 uur voor middernacht is het even laat als 25 uur na middernacht. In het algemeen noemen we twee getallen congruent aan elkaar modulo 24 als ze op veelvoud van 24 na gelijk zijn. Dat wil zeggen: als het verschil een veelvoud is van 24, oftewel deelbaar is door 24 (met rest 0). Het hoeft niet zo te zijn dat een van die getallen altijd tussen de 0 en de 23 ligt. Dat doen we bij klokkijken meestal wel; daar rekenen we meestal alles terug naar uren tussen de 0 en de 23. Maar met modulorekenen hoeft dat niet, zoals het laatste voorbeeldje al liet zien.

We kunnen op dezelfde manier ook modulo andere getallen dan 24 rekenen. Zo geldt $28 \equiv 2 \pmod{13}$, want het verschil tussen 28 en 2 is deelbaar door 13. En $-12 \equiv 18 \pmod{10}$, want het verschil tussen -12 en 18 is deelbaar door 10. We kunnen nu een algemene definitie geven voor rekenen mo-

dulo n , waarbij n een positief geheel getal is.

Definitie. Voor gehele getallen a en b en een geheel getal $n \geq 1$ zeggen we dat a congruent is aan b modulo n als $b - a$ een n -voud is, dus als $b - a = k \cdot n$ voor zekere gehele k . We noteren dit als volgt: $a \equiv b \pmod{n}$. Hierbij noemen we n de *modulus*.

Stel nu eens dat twee getallen a en b gegeven zijn waarvan je weet dat $a \equiv 6 \pmod{24}$ (a is bijvoorbeeld 30) en dat $b \equiv 2 \pmod{24}$ (b is bijvoorbeeld 50). Wat weet je dan van $a \cdot b$ modulo 24? Als we het gewoon uitrekenen, komen we in dit voorbeeld uit op $a \cdot b = 30 \cdot 50 = 1500$. Als we dat delen-met-rest door 24, krijg je $1500 = 62 \cdot 24 + 12$, dus $a \cdot b \equiv 12 \pmod{24}$. Hadden we dit antwoord nou kunnen voorspellen? Die 12 is precies $6 \cdot 2$, dus het lijkt erop dat je de twee getallen in een product (hier a en b) mag vervangen door de getallen waar ze congruent aan zijn (hier respectievelijk 6 en 2) als je toch alleen maar geïnteresseerd bent in de waarde van dit product modulo 24.

Werkt dat echt? Stel $a = 99$ en $b = 102$. Wat is dan $a \cdot b$ als we modulo 10 gaan rekenen? Door eerst het product te berekenen, vinden we dat $a \cdot b = 10098$ en dat is congruent aan 8 als je het modulo 10 bekijkt. Anderzijds weten we dat $a \equiv 9 \pmod{10}$ en $b \equiv 2 \pmod{10}$, en inderdaad $9 \cdot 2 = 18 \equiv 8 \pmod{10}$. Of we bekijken het zelfs nog anders: $a \equiv -1 \pmod{10}$ en $b \equiv 2 \pmod{10}$, en inderdaad $-1 \cdot 2 = -2 \equiv 8 \pmod{10}$. Het maakt wederom niet uit of we eerst de waardes modulo 10 nemen en dan het product, of juist andersom!

Deze eigenschap is inderdaad algemeen geldig. Voor het nemen van de som of het verschil geldt bovendien net zoiets. We zetten deze rekenregels en de bewijzen ervan even op een rij:

REKENREGELS

- Als $a \equiv b \pmod{n}$ en $a' \equiv b' \pmod{n}$, dan is $a + a' \equiv b + b' \pmod{n}$.
- Als $a \equiv b \pmod{n}$ en $a' \equiv b' \pmod{n}$, dan is $a - a' \equiv b - b' \pmod{n}$.
- Als $a \equiv b \pmod{n}$ en $a' \equiv b' \pmod{n}$, dan is $a \cdot a' \equiv b \cdot b' \pmod{n}$.

Eerst geven we het bewijs van de eerste regel. Stel dat $a \equiv b \pmod{n}$ en $a' \equiv b' \pmod{n}$. Dat betekent dus dat $b - a$ en $b' - a'$ beide n -vouden zijn. Het is duidelijk dat de som $(b - a) + (b' - a')$ dan ook een n -voud is. Maar dat is niets anders dan $(b + b') - (a + a')$. Omdat dit een n -voud is, geldt nu volgens de definitie dat $a + a' \equiv b + b' \pmod{n}$. En dat is precies wat we moesten bewijzen.

Voor de tweede rekenregel geldt net zo'n argument, maar dan met het verschil in plaats van de som. Voordat we naar de derde rekenregel gaan, bewijzen we eerst dit bijzondere geval:

- Als $a \equiv b \pmod{n}$ en c is een geheel getal, dan is $a \cdot c \equiv b \cdot c \pmod{n}$.

En hier het bewijs: stel dat $a \equiv b \pmod{n}$, dan is $b - a$ een n -voud. Dus dan is ook $c(b - a)$ een n -voud. Oftewel: $bc - ac$ is een n -voud en we concluderen dat $a \cdot c \equiv b \cdot c \pmod{n}$.

Nu passen we deze hulpregel toe om de derde rekenregel te bewijzen. Stel $a \equiv b \pmod{n}$ en $a' \equiv b' \pmod{n}$, dan geldt ook dat $a \cdot a' \equiv b \cdot a' \pmod{n}$ (beide zijden van de eerste congruentie maal a') en $b \cdot a' \equiv b \cdot b' \pmod{n}$ (beide zijden van de tweede congruentie maal b). We concluderen dat $a \cdot a' \equiv b \cdot a' \equiv b \cdot b' \pmod{n}$, dus $a \cdot a' \equiv b \cdot b' \pmod{n}$.

Nu we kunnen vermenigvuldigen modulo n , kunnen we natuurlijk ook machtsverheffen, als we de exponenten maar hetzelfde nemen.

- Als $a \equiv b \pmod{n}$ en k is een positief geheel getal, dan is $a^k \equiv b^k \pmod{n}$.

Dat komt omdat machtsverheffen niets anders is dan herhaald vermenigvuldigen, dus je kunt $k - 1$ keer de vermenigvuldigregel toepassen.

Delen gaat echter niet in het algemeen goed. We weten bijvoorbeeld dat $4 \equiv 28 \pmod{24}$, maar $2 \equiv 14 \pmod{24}$ gaat modulo 24 niet meer op. In dit geval zou je de modulus kunnen meedelen; dan klopt het wel: $2 \equiv 14 \pmod{12}$. Maar dat wil je soms niet en dat lukt ook niet altijd. Bijvoorbeeld $20 \equiv 140 \pmod{24}$ en delen door 10 gaat weer verkeerd (want het

is niet zo dat $2 \equiv 14 \pmod{24}$). Bovendien is dat nu niet meer op te lossen door 24 dan ook maar te delen door 10.

Opgave 1. Verklaar de volgende 'rekenregels' door modulo 2 te werken:

- even + oneven = oneven;
- oneven + oneven = even;
- even · oneven = even;
- oneven · oneven = oneven.

Opgave 2. Bewijs dat $26^k - 2^k$ deelbaar is door 24 voor alle positieve gehele k .

Opgave 3. Op welk cijfer eindigt 3^{100} ?

Opgave 4. Bewijs dat er geen gehele getallen m en n zijn zodanig dat $m^2 + n^2 = 10000003$.

DE IMO-OPGAVE Nu we weten wat modulorekenen inhoudt, kunnen we het proberen toe te passen bij IMO2009-1. De opgave luidt als volgt:

IMO2009-1. We bekijken verschillende gehele getallen $a_1, a_2, \dots, a_k$ die allemaal tussen 1 en n zitten (waarbij 1 en n ook mee mogen doen). Gegeven is dat voor elke i van 1 tot en met $k - 1$ het getal $a_i(a_{i+1} - 1)$ deelbaar is door n . Bewijs dat het getal $a_k(a_1 - 1)$ niet deelbaar is door n .

Laten we eerst eens een voorbeeld bekijken om een beetje feeling met de opgave te krijgen. Neem bijvoorbeeld $n = 24$ en $k = 5$ en bekijk de vijf getallen 24, 8, 16, 4 en 13 (in die volgorde). Inderdaad is $24 \cdot 7$ deelbaar door 24, en hetzelfde geldt voor $8 \cdot 15$, $16 \cdot 3$ en $4 \cdot 12$. Volgens de opgave zou nu moeten gelden dat $13 \cdot 23$ niet deelbaar is door 24. Dat is inderdaad waar.

In de opgave is gegeven dat $a_i(a_{i+1} - 1) = a_i a_{i+1} - a_i$ deelbaar is door n voor i van 1 tot en met $k - 1$. Volgens de definitie van het modulorekenen staat hier niets anders dan dat $a_i \equiv a_i a_{i+1} \pmod{n}$ voor $i = 1, \dots, k - 1$. (Voor het gemak laten we de indicatie '(mod n)' vanaf nu steeds weg; we rekenen steeds modulo n .) Dus $a_1 \equiv a_1 a_2$. Op zijn beurt

geldt weer dat $a_2 \equiv a_2 a_3$. Als we dat links en rechts met a_1 vermenigvuldigen, krijgen we dat $a_1 a_2 \equiv a_1 a_2 a_3$, wat gecombineerd met de eerste observatie leidt tot $a_1 \equiv a_1 a_2 a_3$. We kunnen vervolgens de a_3 vervangen door $a_3 a_4$ en het is duidelijk dat we zo nog wel even kunnen doorgaan. De laatste stap die we toepassen is voor $i = k - 1$: dat $a_{k-1} \equiv a_{k-1} a_k$. Uiteindelijk vinden we hiermee: $a_1 \equiv a_1 a_2 a_3 \dots a_k$.

We moeten laten zien dat $a_k(a_1 - 1) = a_k a_1 - a_k$ niet deelbaar is door n . Dat betekent dus dat we moeten laten zien dat $a_k \not\equiv a_k a_1$. Delen door a_k is helaas verboden. Maar als we de rechterkant uitrekenen met hetzelfde trucje als net, komt er: $a_k a_1 \equiv a_k a_1 a_2 \equiv \dots \equiv a_k a_1 a_2 \dots a_{k-1}$. Hier staat in feite dat $a_k a_1 \equiv a_1 a_2 a_3 \dots a_k$. Van deze rechter uitdrukking hadden we hierboven al gezien dat hij congruent is aan a_1 . Conclusie: $a_k a_1 \equiv a_1$, terwijl we juist moeten bewijzen dat $a_k a_1 \not\equiv a_k$. We zijn dus ook klaar als we kunnen bewijzen dat $a_1 \not\equiv a_k$. En deze laatste uitspraak is overduidelijk waar. Immers, twee verschillende getallen tussen 1 en n kunnen nooit congruent zijn modulo n , want ze verschillen hooguit $n - 1$.

BRONS EN ZILVER Met de techniek van modulekenen lijkt dit plotseling een vrij eenvoudige opgave. Niets is minder waar. Deze oplossing is zeker elegant, maar je moet er maar net opkomen. Er zijn vele wegen in te slaan en als je eenmaal op een ander spoor zit, is het soms moeilijk daar weer van af te stappen.

Wouter en David hebben in Bremen deze aanpak gekozen en daarmee de opgave volledig opgelost. De vier andere Nederlandse teamleden daarentegen maakten in hun oplossingsstrategie gebruik van de priemfactorontbinding van n en van de grootste gemene deler van n met elk van de a_i 'tjes. Raymond en Harm losten de opgave hiermee ook volledig op. Uiteindelijk hebben Harm en David hiervoor een eervolle vermelding ontvangen; Raymond en Wouter hebben wegens hun oplossingen voor andere opgaven zelfs een bronzen respectievelijk zilveren medaille gewonnen!

MEER INFORMATIE

www.wiskundeolympiade.nl: site van de Nederlandse Wiskunde Olympiade; op 30 januari is weer de eerstvolgende eerste ronde op je school.

www.imo2009.de: site van de 50ste Internationale Wiskunde Olympiade in Bremen, afgelopen zomer.

www.imo-official.org: site met daarop alle IMO-opgaven en resultaten over alle jaren. ■

1. $0 + 1 = 1$; $1 + 1 = 2 \equiv 0 \pmod{2}$;
 $0 \cdot 1 = 0$; $1 \cdot 1 = 1$.
 2. We rekenen modulo 24. Er geldt dat $26 \equiv 2 \pmod{24}$, dus geldt ook $26^k \equiv 2^k \pmod{24}$.
 3. Omdat we alleen maar geïnteresseerd zijn in het laatste cijfer, rekenen we modulo 10. Als we de eerste machten van 3 uitrekenen, zien we al snel dat $3^4 = 81 \equiv 1 \pmod{10}$. Dat kunnen we goed gebruiken:
 $3^{100} = (3^4)^{25} \equiv 1^{25} \equiv 1 \pmod{10}$.
 Het eindigt dus op een 1.
 4. Stel dat zulke getallen m en n er wel waren, dan zou modulo 4 gelden dat $m^2 + n^2 \equiv 3$. Een kwadraat is echter altijd 0 of 1 modulo 4: $0^2 = 0$; $1^2 = 1$; $2^2 = 4 \equiv 0$ en $3^2 = 9 \equiv 1$. De som van twee kwadraten is dus 0 of 1 plus 0 of 1, en daar kan alleen maar 0, 1 of 2 uitkomen modulo 4; niet 3.

ANTWOORDEN

Over geen enkele wiskundige is door filosofen zoveel geschreven als over Kurt Gödel. Hij bewees namelijk dat elk gangbaar axiomasysteem onbewijsbare stellingen in zich heeft waarvan elk logisch denkend mens toch inziet dat ze waar zijn. Volgens sommigen is dit precies het verschil tussen een mens en een computer, en zal die laatste daarom nooit echt kunnen denken.

■ door Arnout Jaspers

KURT GÖDEL (1906-1978): DE ONGEWISKUNDIGE

Over de betekenis van Gödels *onvolledigheidsstelling* is ontzaglijk veel geschreven, maar bij niet-wiskundigen kreeg hij voor het eerst bredere bekendheid door het boek *Gödel, Escher, Bach: An Eternal Golden Braid* (GEB) uit 1977 van Douglas Hofstadter. Het is een soort bijbel van 777 pagina's, vol met allerlei soorten verhalen, dialogen, woordgrappen en puzzels over zelfverwijzende systemen. Een in Nederland klassiek voorbeeld van een tekening die naar zichzelf verwijst, is het Droste-plaatje, maar in GEB komen ook beroemde tekeningen van Escher voor, zoals de twee handen met een potlood die elkaar al tekenend aan het voortbrengen zijn.

Volgens Hofstadter bestaat er een onverbreekelijk verband tussen zelfverwijzing en bewustzijn: een mens (of dier, of computer) kan alleen bewust-zijn als hij intern over een beeld van zichzelf beschikt. Toch ligt hier al een paradox op de loer, want dat 'beeld-van-zichzelf' zou niet compleet zijn als dit zelf niet ook een 'beeld-van-zichzelf' bevatte. Dat leidt tot het naïeve Droste-model van het bewustzijn: het mannetje/vrouwtje in je hoofd dat door jouw ogen naar buiten kijkt en jouw gedachten denkt, maar dat zelf ook weer een nog kleiner mannetje/vrouwtje in het hoofd moet hebben, enzovoort tot in het oneindige.

GEDACHTESPRONG Het is een hele sprong van het paradoxale mannetje in je hoofd naar de onvolledigheidsstelling, maar daarom had Hofstadter er ook 777 pagina's voor nodig om dit voor een breder publiek begrijpelijk te maken.

Kurt Gödel, in 1906 geboren uit een welvarende familie in Oostenrijk-Hongarije, had al jong een uitgesproken talent voor logica en wiskunde. Als student in Wenen had hij contacten met de Wiener Kreis, een kring van filosofen die het logisch positivisme aanhingen. Logisch positivisten dachten dat



je alle filosofische problemen (Is er een god? Wat is waarheid? Hoe kan ik er zeker van zijn dat morgen de zon weer opkomt?) kon laten verdwijnen door een niets ontziend onderzoek van de spraakverwaringen in de taal. Ware kennis, zo vonden ze, verkreeg je slechts uit de strengste logica en onbevooroordeelde zintuiglijke waarnemingen.

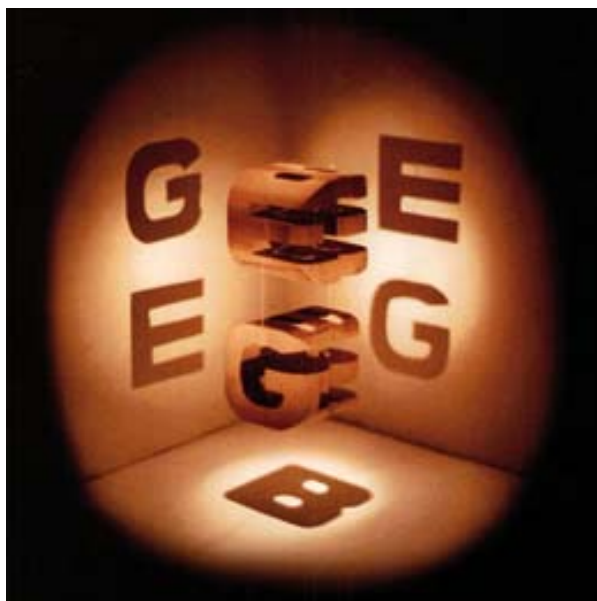
Deze kale opvatting van de werkelijkheid paste goed bij de destijds heersende opvattingen over wiskunde. Tot 1930, toen Gödel lezingen begon te

houden over zijn onvolledigheidsstelling, dacht iedereen dat de wiskunde zo'n puur logisch systeem was dat er nooit paradoxen in kunnen optreden. Ook zou je van elke bewering die je in wiskundige symbolen kunt opschrijven, met absolute zekerheid moeten kunnen bepalen of die waar, dan wel onwaar is.

Zeker voor het deel van de wiskunde dat zich beperkt tot de natuurlijke getallen (positieve, gehele getallen) leek dit een waarheid als een koe. Het gaat dan om sommetjes als $21 \times 3 = 59$ ('onwaar'), formules als $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ ('waar'), maar ook om uitdrukkingen waar logische symbolen in voorkomen. Bijvoorbeeld: $\neg \exists x : x > x + 1$. Deze bewering is waar, want er staat: *niet - er is een - x - zodanig dat - x > x + 1*, ofwel: geen enkel getal x is groter dan $x + 1$.

De kampioen van deze opvatting was David Hilbert, waarover we in februari 2009 schreven in deze serie over grote wiskundigen. Volgens hem was de wiskunde in wezen een spel met symbolen, zoals het schaakspel een spel met stukken is die zich volgens ondubbelzinnige spelregels over een bord met een voorgeschreven vorm bewegen.

Een stelling is 'waar' als die volgens de spelregels



De coverillustratie van Gödel, Escher, Bach: *An Eternal Golden Braid*. Hofstadter ontwierp een object waarvan de schaduw een G, E of B is, al naar gelang de belichtingsrichting.

uit de axioma's (de 'beginstellingen') is afgeleid, en anders 'onwaar'. Wiskundige axioma's kun je interpreteren als beweringen die zo vanzelfsprekend zijn dat ze zelf geen bewijs behoeven, al is bij moderne takken van wiskunde de volgende interpretatie beter: axioma's zijn regels die een 'gewenst gedrag' beschrijven. Voorbeelden zijn: 'twee punten kunnen verbonden worden door een rechte lijn' (een axioma uit de meetkunde van Euclides) en: 'elk natuurlijk getal heeft een opvolger' (een axioma uit de rekenkunde van Peano), met andere woorden: als je een natuurlijk getal n hebt, heb je ook het natuurlijk getal $n + 1$. Wie zou daar aan twijfelen?

De spelregels heten in de wiskunde 'afleidingsregels', waarmee je van de ene naar de andere stelling komt. Bijvoorbeeld: in een formule mag je altijd een dubbele ontkenning ($\neg\neg$) wegstrepen, want 'niet niet' is hetzelfde als 'wel'.

Volgens de school van Hilbert is 'waarheid' in de wiskunde niet meer dan 'volgens de regels afgeleid uit de axioma's'. Anders gezegd: 'waar' is hetzelfde als 'bewijsbaar'. Ook hier gaat de vergelijking met het schaakspel op: een 'ware' schaakstelling kun je met geldige zetten vanuit de beginstelling bereiken, alle andere combinaties van stukken op het bord zijn geen echte schaakstelling. Zo is elke stelling waarin beide lopers van een speler op velden van gelijke kleur staan 'onwaar', net als elke stelling waarin de koning schaak staat door twee torens tegelijk. Het lijkt overduidelijk, dat je in principe van elke stelling kunt bepalen of die bewijsbaar is, dat wil zeggen met legale zetten vanuit de beginstelling bereikbaar. Je kunt daarvoor een lijst maken met alle stellingen die je na 1 zet uit de beginstelling bereikt, en vervolgens die met 2, 3, 4, 5, ... zetten. Zo kun je volgens Hilbert op machinale wijze achtereenvolgens alle ware stellingen ontdekken, en blijft er voor de mens niets te ontdekken over.

Dit is een heel radicale gedachte. Neem bijvoorbeeld het vermoeden van Goldbach, dat luidt: elk even getal groter dan 2 is de som van twee priemgetallen. Een tegenvoorbeeld is nog nooit gevonden, maar toch zoekt men ook al eeuwen vergeefs naar een bewijs. Als je de hypothetische 'Hilbert-machine' maar lang genoeg laat draaien, moet hij vroeg of laat ofwel het bewijs voor het vermoeden van Goldbach leveren, of een tegenvoorbeeld.

ONBESLISBAAR Toen slaagde Gödel er in, een bewering te construeren die voor een logisch denkend mens overduidelijk waar is, maar waarvan hij bewees dat deze niet volgens de regels uit de axioma's af te leiden is. Een ware, maar onbewijsbare bewering dus. Omdat de bewering waar is, is zijn ontkenning ook niet bewijsbaar; dat maakt de bewering *onbeslisbaar*. Het was dus geen kwestie van wachten op een nog slimmere wiskundige die het wel zou lukken om die bewering te bewijzen.

In mensentaal luidt Gödels onbeslisbare stelling, die we *G* noemen:

G: 'Deze bewering is niet een bewijsbare stelling.'

Is *G* waar of onwaar? Stel, *G* is *onwaar*. Dan is *G* *niet* niet een bewijsbare stelling, dus *wel* een bewijsbare stelling. Nu zitten we met een onware stelling die volgens eigen zeggen bewijsbaar is, een onacceptabele tegenspraak. Stel daarom: *G* is waar. Dan is *G* *geen* bewijsbare stelling. Nu zitten we met een ware stelling die volgens eigen zeggen niet bewijsbaar is.

28

Tot zover lijkt dit een nogal flauw woordspelletje, dat ook al door de Oude Grieken was bedacht toen ze Epimenides de Kretenzer lieten zeggen: 'Alle Kretenzers zijn leugenaars.' Als je onder een leugenaar iemand verstaat die nooit de waarheid spreekt, liegt Epimenides als hij de waarheid spreekt en omgekeerd, een onoplosbare tegenspraak.

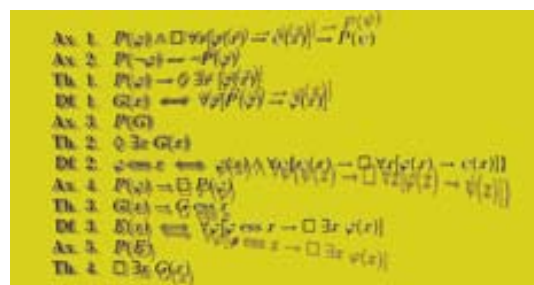
Maar met *G* is er wel een uitweg, omdat 'waar' hier slechts de beperktere betekenis heeft van 'bewijsbaar': een ware stelling is volgens de school van Hilbert alleen maar een stelling die volgens de regels van het spel uit de beginstelling is afgeleid.

We vermijden het probleem als we aannemen dat *G* wel waar is, maar niet volgens de regels van het spel afleidbaar is, precies dus wat we hierboven een onbeslisbare stelling genoemd hebben. *G* is dan onbeslisbaar binnen het gekozen systeem (schaken, rekenen, etcetera), maar wij zien desondanks in dat *G* waar is, door als het ware 'buiten het systeem' te gaan staan.

Toch lijkt dit nog steeds niet meer dan een woordspelletje. Hoe kan een schakstelling of een stelling die over gehele getallen gaat, iets over zich-

zelf beweren? Het moeilijkste deel van Gödels onvolledigheidsstelling is dat hij inderdaad een manier presenteerde om zulke zelfverwijzende beweringen van mensentaal om te zetten naar formules met gehele getallen. In dit artikel gaan we zijn methode niet in detail uitleggen, maar we geven een paar voorbeelden die je een indruk geven van hoe zoiets mogelijk is.

NOODZAKELIJK BESTAAN



In de middeleeuwen probeerden theologen met zuiver logische argumenten het bestaan van god te bewijzen. Een van de bekendste kwam van St. Anselm: 'God is per definitie het meest grootse wat er bestaat. We kunnen ons voorstellen dat Hij bestaat. Hij zou echter nog grootser zijn, als hij behalve in onze verbeelding, ook in het echt bestaat. Dus bestaat Hij.'

Gödel voelde zich aangetrokken door dit soort spitsvondige redeneringen, die in de verte gelijkenis vertonen met de manier waarop hij tot zijn onvolledigheidsstelling kwam. Zelf bedacht hij ook een puur logisch godsbewijs. In de afbeelding zie je dat hij uitgaat van twee axioma's (Ax), drie definities (Df) geeft en zo vier stellingen (Th, theorema's) afleidt, waarvan de laatste ongeveer luidt: 'er is een god'.

Dit bewijs dook op in Gödels nagelaten papieren. Hij wilde het niet publiceren, omdat het voor hem slechts een logisch spel was, geen serieuze poging om atheïsten te overtuigen. Of Gödel zelf in god geloofde, daarover waren de meningen verdeeld, misschien zelfs die van hemzelf.

Een simpel voorbeeld van rijen getallen die over zichzelf praten stond in *Pythagoras* van september 2007. We introduceerden daar de *inventaris* van een rij: als je bijvoorbeeld begint met een rijtje als A : 4, 2, 6, 1, 1, 4, dan bevat A 2 keer het getal 1, 1 keer het getal 2, 2 keer het getal 4 en 1 keer het getal 6. Kortom, de inventaris $I(A)$ van A is: 2, 1, 1, 2, 2, 4, 1, 6. Een voor de hand liggende vraag in dit verband is: bestaan er rijen die hun eigen inventaris zijn, ofwel, bestaan er A 's waarvoor geldt dat $I(A) = A$? Het blijkt inderdaad te kunnen. Zo is 2, 1, 3, 2, 2, 3, 1, 4 gelijk aan z'n eigen inventaris. Hij somt zijn eigen inhoud op, en praat in dat opzicht over zichzelf.

PARADOX VAN BERRY Problemen levert dit soort zelfverwijzing niet op. Anders is dat met de paradox van Berry. Bekijk eens de uitdrukking:

'Het kleinste positieve gehele getal dat niet in minder dan zestien woorden te definiëren is.'

Aangezien er maar een eindig aantal verschillende woorden is, is er ook maar een eindig aantal zinnen van minder dan zestien woorden. Dus kunnen er ook maar eindig veel positieve gehele getallen worden gedefinieerd met zinnen van minder dan zestien woorden. Voorbeelden van zulke zinnen zijn: 'het aantal graden in een cirkel', 'het aantal mogelijke volgordes van een volledig kaartspel' of 'het getal gevormd uit de eerste zestien decimalen van π '.

Omdat er maar eindig veel getallen kunnen worden aangewezen in minder dan zestien woorden, blijven er oneindig veel getallen over waarvoor dat niet mogelijk is. Maar omdat die allemaal groter dan 0 zijn, moet er ook een *kleinste* positief geheel getal M bestaan dat *niet* met minder dan zestien woorden is te definiëren.

Maar als we nu terugkijken naar het begin, staat daar een definitie van M die maar vijftien woorden lang is! De vraag of M nu wel of niet bestaat, is onoplosbaar. Van deze paradox uit de jaren twintig van de vorige eeuw lagen Hilbert en zijn volgelingen niet lang wakker. De reden zit hem in de vaagheid van het begrip 'definieerbaar'. Taal is, anders dan wiskunde, zo'n *fuzzy* en flexibel instrument, dat je nooit voor alle gevallen een ondubbelzinnig on-

derscheid kunt maken tussen een zin die wel, en een zin die geen getal definieert. Geheel in stijl zou je kunnen zeggen: 'niet-definieerbaar' is niet definieerbaar.

PARADOX VAN RICHARD Een verwante paradox was al in 1905 bedacht door de wiskundige Jules Richard. Hij heeft niet alleen gehele getallen nodig, maar *alle* reële getallen (dus ook getallen als $\frac{1}{2}$, $\sqrt{2}$ en π). Richard begint met te stellen dat er teksten zijn die ondubbelzinnig één getal definiëren en andere die dat niet doen. Een voorbeeld van de eerste categorie: 'het getal met vóór de komma 1, op de oneven plaatsen na de komma een 7 en op de even plaatsen na de komma een 0'. Daarentegen wijst 'Rotterdam ligt in Nederland' duidelijk geen getal aan.

Stel je nu een lijst voor van *alle mogelijke* Nederlandse teksten die een reëel getal definiëren, eerst op lengte en dan op alfabet geordend. Aan de lengte van de tekst is nu geen grens gesteld, dus zijn het er oneindig veel. Met die lijst correspondeert een oneindige lijst van reële getallen $r_1, r_2, r_3, \dots$

Definieer nu een nieuw reëel getal r als volgt: 'het cijfer voor de komma is 0, het n -de cijfer achter de komma is 1 als het n -de cijfer achter de komma van r_n geen 1 is, het n -de cijfer achter de komma is 2 als het n -de cijfer achter de komma van r_n 1 is.'

Je ziet nu makkelijk in dat r met alle r_n in minstens één decimaal verschilt. Anders gezegd: r komt met geen enkele r_n overeen, en komt dus niet in de lijst voor. Maar toch is r een getal dat wordt gedefinieerd door een Nederlandse tekst (namelijk de cursieve tekst hierboven) en de aanname was, dat alle getallen gedefinieerd door een Nederlandse tekst in de lijst staan. Staat r nu wel of niet in de lijst? Deze constructie lijkt sterk op het *diagonaalargument* van Cantor. Georg Cantor, die ook al aan bod kwam in deze serie (*Pythagoras*, januari 2009) bewees met zijn diagonaalargument dat je nooit een volledige lijst van de reële getallen kunt maken.

De paradox van Richard heeft wiskundigen evenmin massaal uit de slaap gehouden, omdat ook deze lijkt voort te komen uit de vaagheid van taal. Je een oneindig lange lijst van getallen voorstellen is nog tot daar aan toe (al moet je ook daar voorzichtig mee zijn), maar een oneindig lange lijst van 'alle



Vanaf de jaren veertig was zowel Gödel als Einstein verbonden aan het Institute for Advanced Study in Princeton, V.S., waar ze goed bevriend raakten - uitzonderlijk, voor de zeer eenkennige Gödel. Hij bestudeerde Einsteins Algemene Relativiteitstheorie en ontdekte een model van een roterend heelal waarin tijdreizen mogelijk was.

mogelijke Nederlandse teksten die een getal definiëren, dat is vragen om moeilijkheden.

GETALLEN Zoals gezegd, bedacht Gödel een manier om wiskundige stellingen om te zetten in getallen. En omdat stellingen over getallen gaan, kon hij een (zeer groot) getal construeren dat de vertaling was van de G die we boven al tegenkwamen, terwijl dit getal toch aantoonbaar niet voorkomt in de lijst met getallen die corresponderen met bewijsbare stellingen. Het principe is simpel: elk getal, elke variabele en alle tekens als $+$, $=$ en $\exists$ krijgen een eigen cijfercode, en al die codes achter elkaar geplakt vat je op als een getal. In de praktijk is het heel lastig om het wiskundig netjes te doen, maar op die details gaan we nu niet in.

We keren nog even terug naar de vergelijking met het schaakspel. Ook een schaakstelling zou je eenduidig in een getal om kunnen zetten. Elk stuk en elke positie krijgt dan een eigen cijfercode, en elke zet is op te vatten als een rekenkundige bewerking op dat getal. Als je de vakjes van het schaakbord aanduidt met twee getallen van 1 tot en met 8, geldt bijvoorbeeld voor elke geldige loperzet dat ofwel het verschil, ofwel de som van die getallen constant blijft. Ook voor toren- en koningszetten is de regel eenvoudig – je kunt ze vast zelf bedenken. Voor de paardesprong is het al heel wat ingewikkelder. Zo kun je je voorstellen dat het mogelijk is (hoewel heel omslachtig) om alle regels van het schaakspel te vertalen in rekenkundige bewerkin-

gen op de posities van de schaakstukken. Uiteindelijk betekent dit dat elke 'ware' stelling wordt weergegeven door een getal, dat door een ingewikkelde serie rekenkundige bewerkingen is verkregen uit het getal dat de beginstelling voorstelt.

ALGEMEEN TOEPASBAAR Van Gödels kunststukje heeft de oude Hilbert in de jaren dertig wel degelijk wakker gelegen. De methode was namelijk zo algemeen toepasbaar, dat elk axiomasysteem erdoor ondermijnd werd. Het was dus geen kwestie van: 'Goh, Gödel heeft ontdekt dat ergens in de regels voor het rekenen een foutje zit, en dat verhelpen we door regel X aan te passen.' Elk systeem dat ten minste de regels voor het rekenen met gehele getallen bevat, is vatbaar voor Gödels ondermijnende werk.

In het begin werd nog wel de tegenwerping gemaakt, dat zo'n Gödelstelling G dan wel bestond, maar dat het slechts één, hoogst gekunsteld ding was, waar je je als wiskundige eigenlijk weinig van aan hoeft te trekken. Maar ook dat bleek niet waar.

Of neem het *continuümprobleem*, waar wiskundigen al een halve eeuw over piekerden. Het continuümprobleem stelt de vraag of er tussen enerzijds de oneindigheid van de natuurlijke getallen en anderzijds de reële getallen (alle punten op een lijn) nog een 'middelgroot' soort oneindigheid bestaat. In 1940, toen Gödel uit afkeer van de nazi's van Oostenrijk naar de Verenigde Staten geëmigreerd

was, bewees hij dat je niet kunt bewijzen dat die derde mogelijkheid er is. Dat liet nog wel de mogelijkheid open dat iemand zou bewijzen dat die derde mogelijkheid niet bestaat. Paul Cohen (1934-2007) bewees in 1963 de andere helft van de onbeslisbaarheid: je kunt dat laatste ook niet bewijzen.

Eigenlijk is de onvolledigheidsstelling van Gödel juist heel hoopgevend: die betekent dat een alwetende 'Hilbert-machine' niet bestaat en niet kan bestaan. Altijd heb je nog de kans, om *out of the box* te denken en een stelling te ontdekken die juist heel interessant is, maar binnen het systeem onbeslisbaar. De onvolledigheidsstelling – althans ons vermogen om die te begrijpen! – wordt daarom door auteurs als Hofstadter en wiskundige Roger Penrose graag opgevoerd als voorbeeld van het wezenlijke verschil tussen een mens en een computer. Elke hedendaagse computer is in wezen een apparaat dat machinaal berekeningen uitvoert op getallen en zal dus nooit net zo briljant als Gödel *out of the box* kunnen denken.

VERGIFTIGING Dat genialiteit grenst aan krankzinnigheid is een cliché, maar clichés bevatten vaak een kern van waarheid. Op foto's ziet Gödel er al jong graatmager uit. Dat kwam doordat hij altijd bang was om iets binnen te krijgen waar hij ziek van zou worden. Dit paranoïde trekje werd met het klimmen van de jaren erger. Gödel deelde zijn leven met Adèle, een voormalige nachtclubzangeres, waarmee hij in 1938 ook officieel trouwde. Op den duur at hij niets meer wat zij niet had voorgeproefd, uit angst dat iemand hem probeerde te vergiften. Maar in 1978 belandde Adèle zelf langdurig in het ziekenhuis wegens een hersenbloeding. Gödel stopte simpelweg met eten in haar afwezigheid en overleed nog datzelfde jaar. Hij woog toen 30 kilo. De stelling dat iemand hem probeerde te vergiften was voor alle andere stervelingen onbewijsbaar, maar alleen de superieure logicus Gödel wist met absolute zekerheid dat deze toch waar was. Hij had alleen niet door dat hij het zelf was. ■

ONBEWIJSBARE STELLINGEN

In *Pythagoras* van juni 2008 staat een artikel over de stelling van Goodstein. Dat is een stelling die geheel in (eenvoudige) rekenkundige termen geformuleerd kan worden. Het bewijs van die stelling, dat in *Pythagoras* geschetst wordt, maakt gebruik van dingen die zelf *niet* rekenkundig worden uitgedrukt. Dat is ook nodig, want van deze stelling is aangetoond dat hij niet volgens de afleidingsregels uit de axioma's van de rekenkunde kan worden afgeleid.

In *Pythagoras* van april 2005 staat een artikel over de stelling van Ramsey. Hoewel deze in termen van grafen is geformuleerd, kun je hem ook als een rekenkundige bewering zien. De stelling van Ramsey zegt het volgende (hou je vast!): voor elke k , n en r bestaat een M met de volgende eigenschap: als we de familie van alle deelverzamelingen van $\{1, 2, \dots, M\}$ met r elementen in n groepen verdelen, dan is er een deelverzameling A van $\{1, 2, \dots, M\}$ met ten minste k ele-

menten en zó dat alle deelverzamelingen van A met r elementen in dezelfde groep zitten; zo'n A heet *homogeen*. Het kost wat moeite, maar je kunt de stelling van Ramsey vertalen naar een rekenkundige bewering die netjes volgens de regels uit de axioma's van de rekenkunde is af te leiden.

Er is echter een variant die óók rekenkundig te formuleren is, *wáár* is, maar waarvoor géén bewijs bestaat dat alleen de axioma's van de rekenkunde en de afgesproken afleidingsregels gebruikt. Die variant eist dat de verzameling A ook nog *relatief groot* moet zijn: A moet ten minste min A elementen hebben. Dit laatste maakt het vinden van een kleine M onwaarschijnlijk; ook al geldt bijvoorbeeld $k = 100$, als je geen homogene verzameling met een minimum kleiner dan 1000 kunt vinden, moet je er een zoeken die ten minste 1000 elementen heeft.

In het vorige nummer introduceerden we de *Standvastige Kwadraten*: getallen waarvan het kwadraat op dezelfde cijfers eindigt als het getal zelf, zoals 6, 25 of 9376. We formuleerden toen ook een stelling over Standvastige Kwadraten, die we nu bewijzen.

■ door Klaas Pieter Hart

DE STELLING VAN STANDVASTIGE KWADRATEN

Als je het kwadraat van 90625 berekent, valt op dat de uitkomst ervan op dezelfde cijfers eindigt als dat getal zelf: $90625^2 = 8212890625$. Een getal met deze eigenschap noemen we een *Standvastig Kwadraat*. We staan toe dat een getal ook met 0 mag beginnen. Dus 09376 is ook een standvastig kwadraat: $09376^2 = 87909376$.

Stelling. De som van de standvastige kwadraten van n cijfers is $10^n + 1$.

Een speciaal geval is $n = 1$: we hadden hier de getallen $0^2 = 0$ en $1^2 = 1$ uitgesloten, omdat het flauw is als een kwadraat hetzelfde is als het getal zelf. Dan blijven $5^2 = 25$ en $6^2 = 36$ over, en inderdaad is $5 + 6 = 11 = 10^1 + 1$. In het vorige nummer zagen we voor $n = 2$ dat alleen 25 en 76 standvastige kwadraten waren, en jawel, $25 + 76 = 101 = 10^2 + 1$. Maar een paar voorbeelden zijn natuurlijk nog geen bewijs.

We gaan met *volledige inductie naar k* bewijzen dat er precies twee standvastige kwadraten van k cijfers zijn: één die op een 5 eindigt en één die op een 6 eindigt. Het bewijsprincipe van volledige inductie is al eerder aan bod gekomen in *Pythagoras* en ook op internet kun je er veel over vinden. Eerst voeren we een notatie in: een getal van meerdere cijfers noteren we zonnodig als $[x, y, z]$, waarbij z het laatste cijfer is, y het één na laatste cijfer, enzovoort. x en y kunnen ook groepjes van meer dan één cijfer voorstellen, dat blijkt dan uit de context. Nu gaan we aan de slag met de volledige inductie. Voor $k = 1$ is de bewering duidelijk: er zijn twee standvastige kwadraten van 1 cijfer, namelijk 5 en 6. Neem nu aan dat er precies twee standvastige kwadraten $[A, 5]$ en $[B, 6]$ van k cijfers zijn. We laten zien dat we beide met één cijfer kunnen uitbreiden.

We bekijken eerst $[A, 5]$ ($= A \cdot 10 + 5$). Zet daar een cijfer r voor en werk het kwadraat uit: $[r, A, 5]^2 = (r \cdot 10^k + [A, 5])^2 = r^2 \cdot 10^{2k} + 2 \cdot [A, 5] \cdot r \cdot 10^k + [A, 5]^2$.

De eerste term na het laatste $=$ -teken eindigt op $2k$ nullen en de tweede term eindigt op $k + 1$ nullen (omdat $[A, 5]$ eindigt op een 5 en er ook een factor 2 in staat). Dit betekent dat cijfer $k + 1$ van het nieuwe kwadraat gelijk is aan cijfer $k + 1$ van $[A, 5]^2$ (onafhankelijk van r). Als we voor r dat cijfer nemen (en alleen dan) krijgen we dus een standvastig kwadraat van $k + 1$ cijfers.

Als we aan $[B, 6]$ een cijfer s toevoegen en het kwadraat uitwerken, krijgen we iets als hierboven, namelijk $s^2 \cdot 10^{2k} + 2 \cdot [B, 6] \cdot s \cdot 10^k + [B, 6]^2$. Het $k + 1$ -ste cijfer van dit kwadraat vinden we door de $k + 1$ -ste cijfers van $[B, 6]^2$ (noem dat even b) en $2 \cdot [B, 6] \cdot s \cdot 10^k$ bij elkaar op te tellen. Het tweede cijfer is het laatste cijfer van $2 \times 6 \times s = 12 \times s$ en dat is hetzelfde als het laatste cijfer van $2s$. Voor een standvastig kwadraat moet het laatste cijfer van $b + 2s$ dus gelijk zijn aan s . Door van allebei s af te trekken, volgt dat $b + s$ als laatste cijfer een nul moet hebben en daarmee volgt $b + s = 10$, en dus $s = 10 - b$.

We zien dat er in beide gevallen precies één goede keuze is: bij $[A, 5]$ het $k + 1$ -ste cijfer van $[A, 5]^2$ en bij $[B, 6]$ moeten we dat $k + 1$ -ste cijfer van 10 aftrekken.

Andersom: als een getal een standvastig kwadraat oplevert, dan levert elk eindstuk dat ook. Immers: $[A, B]^2 = A^2 10^{2k} + 2AB10^k + B^2$, dus de laatste k cijfers van $[A, B]^2$ vallen samen met die van B^2 en in het geval van een standvastig kwadraat zijn dat de cijfers van B .

De twee hierboven gevonden standvastige kwadraten van $k + 1$ cijfers zijn dus de enige twee. ■

OPLOSSINGEN KLEINE NOOTJES NR. 6

SLIM OPTELLEN

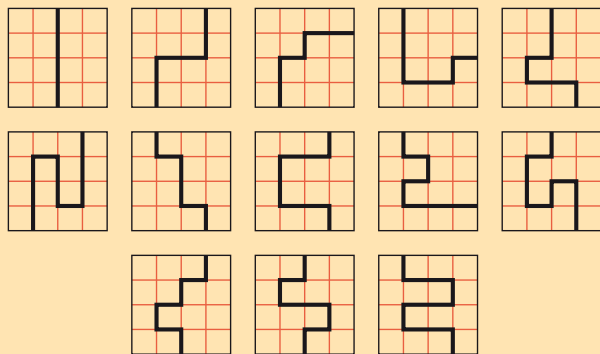
Er zijn $3^3 = 27$ getallen van drie cijfers waarin alleen de getallen 1, 2 en/of 3 voorkomen.

Gemiddeld zijn ze 222.

De som is dus $27 \times 222 = 5994$.

KNIPPEN

De redactie vond 13 manieren:



BREUKEN

Het gekozen getal is 3 en de breukschrijfwijze hiervan is $\frac{9}{3}$.

Er geldt namelijk: $\frac{10}{2} - \frac{8}{4} = 5 - 2 = 3$.

HUISNUMMERS

Er zijn 26 huizen.

De nummers 13 en 14 staan tegenover elkaar en $27 = 3^3$.

BRANDENDE DRAADJES

Steek beide draadjes aan één uiteinde aan.

Na 5 minuten is het eerste draadje opgebrand en steek je het tweede uiteinde van de 25-minuten-draad aan. Na 10 minuten bereiken de vonkjes elkaar. In totaal zijn er dan 15 minuten verstreken.

PYTHAGORAS

49ste jaargang nummer 1
september 2009
ISSN 0033 4766

Pythagoras wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde en richt zich tot alle leerlingen van vwo en havo. *Pythagoras* stelt zich ten doel jongeren kennis te laten maken met de leuke en uitdagende kanten van wiskunde.

Internet www.pythagoras.nu

Hoofredacteur Arnout Jaspers

Eindredacteur Alex van den Brandhof

Redactie Matthijs Coster, Jeanine Daems, Dion Gijswilt, Jan Guichelaar, Klaas Pieter Hart

Bladmanager Tilman Grünwald, Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden, Postbus 9512, 2300 RA Leiden.

Vormgeving Grafisch Team Digipage BV, Leidschendam

Druk Drukkerij Ten Brink, Meppel

Uitgever Koninklijk Wiskundig Genootschap

Verantwoordelijk uitgever Chris Zaal

Lezersreacties en kopij Bij voorkeur per e-mail; lezersreacties naar Jan Guichelaar, jan@pythagoras.nu en kopij naar Arnout Jaspers, arnout@pythagoras.nu. Eventueel per post naar Jan Guichelaar, Pedro de Medinallaan 162, 1086 XR Amsterdam.

Abonnementen, bestellingen en mutaties

Mirjam Worst, Drukkerij Ten Brink, Postbus 41, 7940 AA Meppel.
Telefoon 0522 855 175,
fax 0522 855 175.

Abonnementsprijzen

(6 nummers per jaargang)
€ 22,00 (Nederland),
€ 24,00 (België),
€ 28,00 (overig buitenland),
€ 18,00 (leerlingabonnement Nederland),
€ 20,00 (leerlingabonnement België),
€ 12,00 (groepsabonnement Nederland),
€ 14,00 (groepsabonnement België).
Zie www.pythagoras.nu voor toelichtingen.

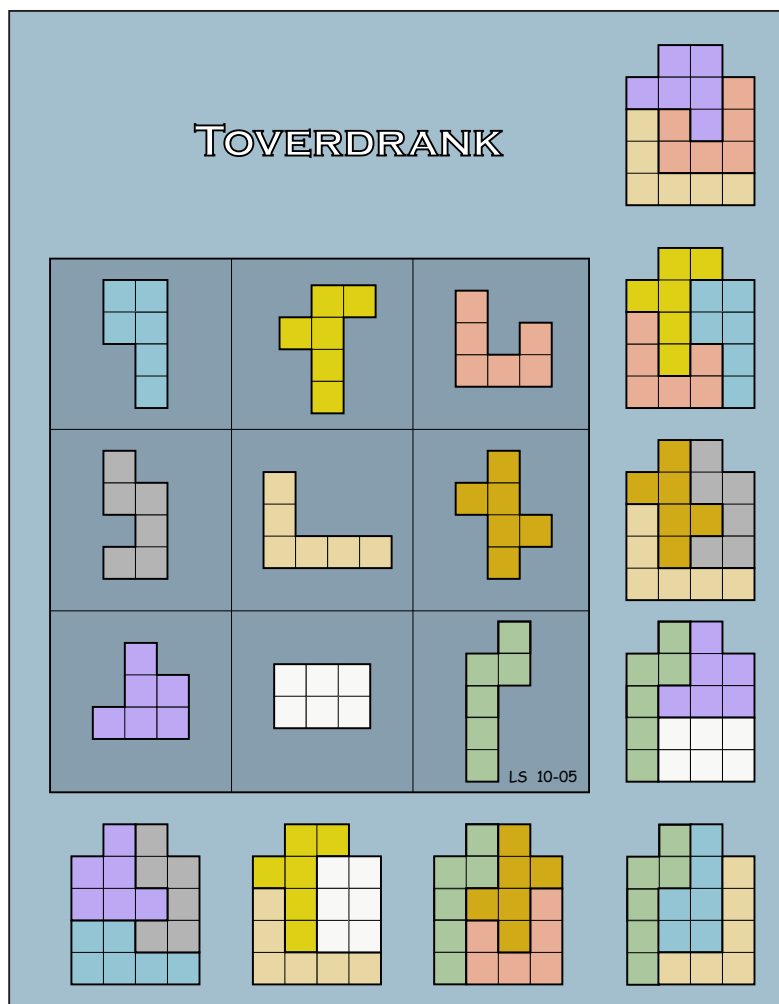
Aan dit nummer werkten mee

Dick Beekman, auteur van diverse breinbrekerboeken (dh.beekman@hetnet.nl), Alex van den Brandhof, docent wiskunde op het Vossiusgymnasium te Amsterdam (alex@pythagoras.nu), Matthijs Coster, wetenschappelijk onderzoeker bij het Ministerie van Defensie (matthijs@pythagoras.nu), Birgit van Dalen, aio wiskunde aan de UL (dalen@math.leidenuniv.nl), Dion Gijswilt, postdoc combinatorische optimalisering aan de UL en het CWI (dion@pythagoras.nu), Aad Goddijn, wiskundige aan het Freudenthal Instituut te Utrecht (a.goddijn@fi.uu.nl), Jan Guichelaar, voormalig directeur van Interconfessionele Scholengroep Amsterdam (jan@pythagoras.nu), Klaas Pieter Hart, docent topologie aan de TUD (kp@pythagoras.nu), Alexander van Hoor, student wiskunde aan de UvA (alexander@pythagoras.nu), Arnout Jaspers, wetenschapsjournalist (arnout@pythagoras.nu), Leo Minnigh, geoloog (minnigh@dds.nl), Eddie Nijholt, student wiskunde aan de UvA (eddie@pythagoras.nu), Quintijn Puite, docent wiskunde aan de TUE en de Hogeschool Utrecht (g.w.q.puite@tue.nl), Lee Sallows, recreatief wiskundige (lee.sal@inter.nl.net), Tijmen Veltman, student wiskunde aan de UvA (tijmen@pythagoras.nu), Charlotte Vlek, pr-medewerker wiskunde (prmedewerker@wiskgenoot.nl)

GEOMAGISCH VIERKANT

■ door Lee Sallows

In een gewoon magisch vierkant is de som van de getallen in alle rijen, kolommen en de twee diagonalen hetzelfde. Een getal kun je opvatten als een lijnstuk: een ééndimensionale 'tegel'. Magie blijkt ook mogelijk met tweedimensionale tegels; het doel van zo'n geomagisch vierkant is om met de tegels in iedere kolom, rij en diagonaal dezelfde vorm te leggen.



Een 3 x 3 geomagisch vierkant met negen hexomino's, gevonden met behulp van de computer. Geomagische vierkanten waarin alle stukken dezelfde oppervlakte hebben zijn veel zeldzamer dan die met stukken van verschillende oppervlaktes. Lees ook het artikel van Lee Sallows over zijn ontdekking van geomagische vierkanten op pagina 12.