

The background of the cover is a deep space scene. A bright spiral galaxy with a glowing yellow core is the central focus. A comet with a long, blue and white tail streaks across the sky from the top left towards the bottom right. In the lower-left corner, a trail of various Euro coins (1, 2, and 5 Euro) appears to be falling or floating, creating a path that leads towards the galaxy.

PYTHA GORAS

WISKUNDETIJDSCHRIFT VOOR JONGEREN

Risico's indammen met kansrekening

Prijsvraag: wees een magiër

Arabische wiskunde: Omar Khayyam

49ste JAARGANG - NUMMER 2 - NOVEMBER 2009

WIN EEN GEHAAKTE SCHEMERLAMP!



De lamp die je hier ziet afgebeeld is samengesteld uit plastic 'puzzelstukjes' die allemaal dezelfde vorm hebben. Die stukjes kun je in allerlei vormen vrijdragend in elkaar zetten, zonder te plakken of te nieten. In het juninummer van *Pythagoras* schreven we erover. Zo'n fraaie lamp kun je nu winnen! Hoe? Kijk gauw op pagina 14.



INHOUD

6



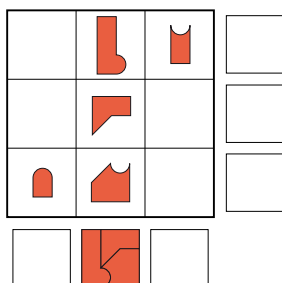
DE FINANCIËEL WISKUNDIGE: 'IK HANDEL ZELF NOOIT, IK HOU NIET VAN DIE STRESS'

Zelfs de beste wiskundige kan geen beurskoersen voorspellen. Maar wiskunde is onmisbaar om de prijzen van opties en nog ingewikkelder beleggingsproducten te berekenen en risico's te minimaliseren. Michel Vellekoop is hoogleraar aan de Universiteit van Amsterdam, maar werkt ook een dag per week voor een stichting die onderzoek doet voor optiehandelaren op de Amsterdamse beurs.

14

PRIJSVRAAG: WEES EEN MAGIËR

Doe mee met de nieuwe prijsvraag van *Pythagoras*! Dit jaar draait het om magische vierkanten, magische zeshoeken, magische sterren, geomagische vierkanten, ... Kortom: magische wiskunde!



20

OMAR KHAYYAM (1048-1131): PIONIER VAN DE DERDEGRAADVERGELIJKING



De oude Grieken hebben de meetkunde tot grote hoogte gebracht, maar het waren in de vroege Middeleeuwen de Arabische wiskundigen die de algebra verder ontwikkelden. Een van die Arabische wiskundigen was Omar Khayyam. Hij vond een manier om derdegraadsvergelijkingen op te lossen met behulp van de snijpunten tussen twee kegelsneden.

EN VERDER

- 2 Kleine nootjes
- 4 Helderziend vierkant
- 10 Piet Grijs bewijst Pythagoras
- 12 Journaal
- 18 Geomagische vierkanten met Lucas' formule
- 26 Een rij vol kwadraten
- 30 Pythagoras Olympiade
- 33 Oplossingen Kleine nootjes nr. 1

■ **NIVEAUBALKJES** Pagina's met één of meer zwarte balkjes (onder de paginanummering) geven de moeilijkheidsgraad aan. Eén balkje: lastig. Twee balkjes: vereist wiskundekennis uit de vijfde of zesde klas. Drie balkjes: net iets moeilijker.



KLEINE NOOTJES

■ door Dick Beekman en Jan Guichelaar

PUZZELSTUKJES

Marije heeft een kleine legpuzzel. Ze telt in totaal 17 uitsteeksels, die in de openingen van andere puzzelstukjes passen. Uit hoeveel puzzelstukjes bestaat de legpuzzel?

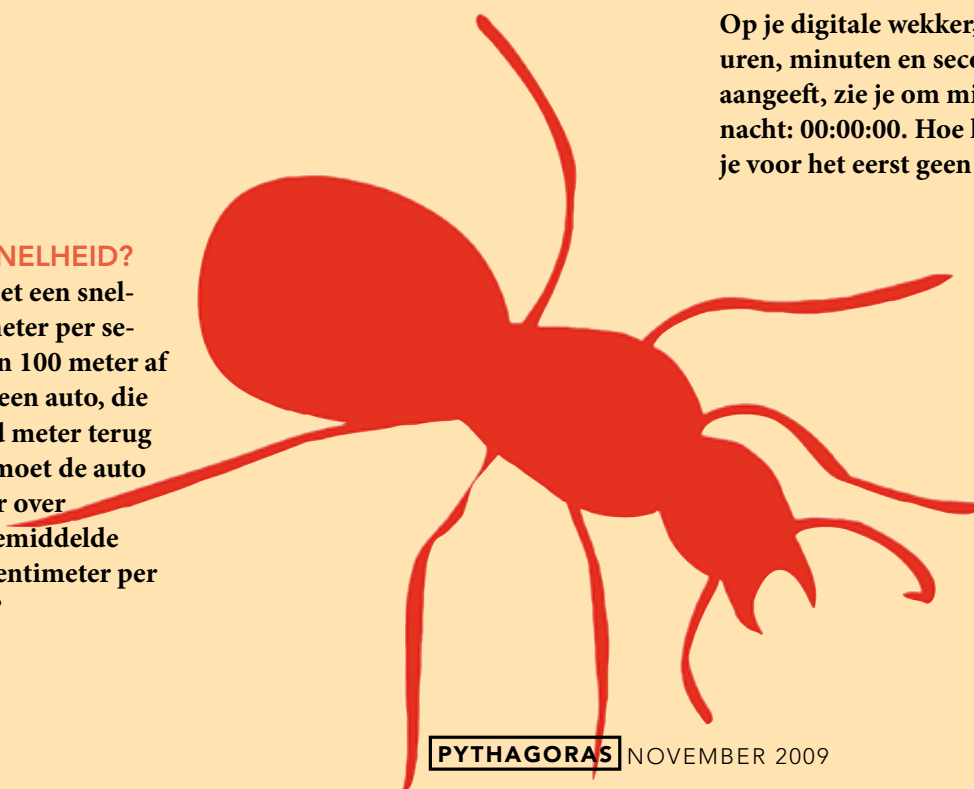


NULLEN OP JE WEKKER

Op je digitale wekker, die uren, minuten en seconden aangeeft, zie je om middernacht: 00:00:00. Hoe laat zie je voor het eerst geen 0?

MIER OP TOPSNELHEID?

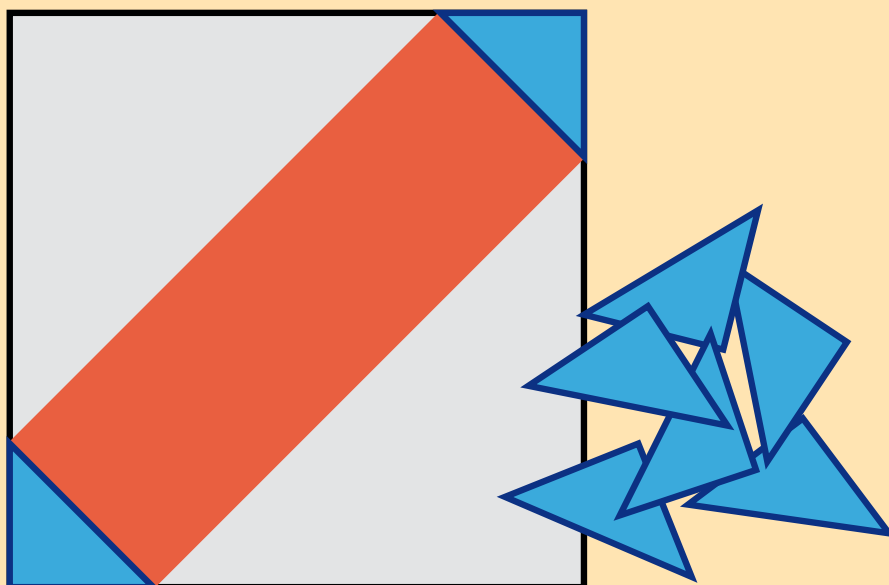
Een mier loopt met een snelheid van 8 centimeter per seconde een weg van 100 meter af en kruipt dan op een auto, die direct de honderd meter terug aflegt. Hoe hard moet de auto rijden om de mier over de hele reis een gemiddelde snelheid van 16 centimeter per seconde te geven?



Kleine nootjes zijn eenvoudige opgaven die weinig of geen wiskundige voorkennis vereisen om opgelost te kunnen worden. De antwoorden vind je in het volgende nummer van Pythagoras.

RECHTHOEK IN VIERKANT

De oppervlakte van de rode rechthoek is $\frac{3}{8}$ deel van die van het vierkant. Hoeveel blauwe driehoekjes heb je nodig om het hele vierkant te bedekken?



3



GRABBELTON

Een grabbelton met een inhoud van 100 liter is tot aan de rand toe gevuld. Er zit 90% vulmateriaal van piepschuim bolletjes in en verder een aantal prijsjes. Op een gegeven moment zijn veel prijsjes eruit gegrabbeld. De grabbelton wordt weer aangevuld tot het oorspronkelijke aantal prijsjes. Door al het gegrabbelen is er echter vulmateriaal verloren gegaan: van de totale inhoud bestaat slechts 80% uit vulmateriaal. Hoeveel liter zit er dan in totaal in de ton?

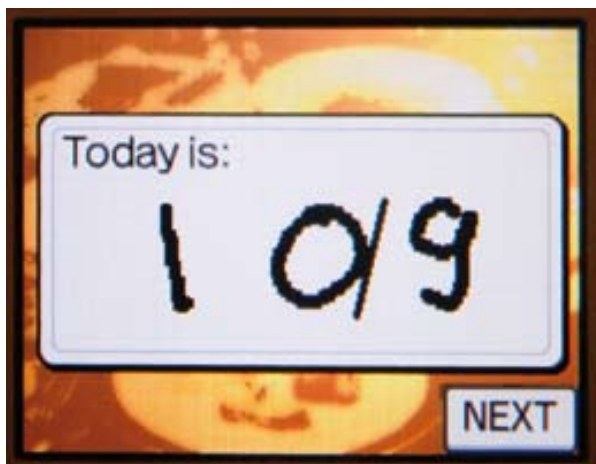
HELDERZIEND VIERKANT

■ door Arnout Jaspers

In een spelletje voor de Nintendo DS dat je kunt downloaden, *Deep Psyche*, schrijf je eerst zelf een getal op het touchscreen, bijvoorbeeld de datum, je leeftijd of je huisnummer. In dit voorbeeld is het getal 109, wat staat voor 10-9, ofwel 10 september. De spelcomputer schotelt je dan een vierkant met zestien getallen voor. Daaruit kies je drie keer een willekeurig getal, terwijl je volgens een vaste procedure getallen schrapt.

De plaatjes laten stap voor stap zien hoe dit in z'n werk gaat. Je houdt dan vier getallen over, waarvan de som het oorspronkelijke getal is. Dit is op het eerste gezicht heel wonderlijk, want hoe kan de computer van tevoren weten welke drie getallen jij uit het schrapvierkant zou kiezen? Natuurlijk moet het schrapvierkant een speciale eigenschap hebben, waardoor je altijd uitkomt op het getal dat je aan het begin opschreef. Maar welke?

ZELF AAN DE SLAG Wat is de speciale eigenschap van dit schrapvierkant die er voor zorgt dat je altijd op 109 uitkomt? Wat is de meest algemene formule voor een schrapvierkant dat op een vooraf gegeven getal uitkomt? Hoe zorg je ervoor dat alle getallen in het schrapvierkant verschillend zijn? De antwoorden op deze vragen komen in het volgende nummer van *Pythagoras*. ■



1 Schrijf de datum op (dag/maand).



2 De computer geeft je vervolgens een vierkant met zestien getallen.



3 Kies een willekeurig getal. Schrap alle andere getallen in dezelfde kolom en rij.



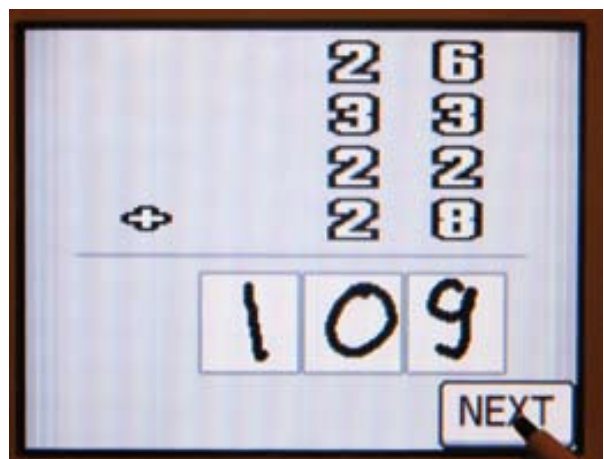
4 Kies nog een getal. Schrap weer alle andere getallen in dezelfde kolom en rij.



5 Kies een derde getal en herhaal het schrappen.



6 Je hebt nu vier getallen over...



7 die je optelt, en inderdaad is de som de datum!

Het is een hardnekkig misverstand, dat je na een studie wiskunde eigenlijk alleen maar le-
raar kunt worden. Deze jaargang laten we telkens iemand aan het woord die afgestudeerd
is in de wiskunde en die kennis nu toepast in een heel ander vak.

■ door Arnout Jaspers

DE FINANCIËEL WISKUNDIGE: 'IK HANDEL ZELF NOOIT, IK HOU NIET VAN DIE STRESS'

Wie?	Prof. dr. Michel Vellekoop (16 september 1971, Haarlem)
Wat?	hoogleraar Life Insurance, directeur onderzoek TDTF
Waar?	Faculteit Economie en Bedrijfskunde Universiteit van Amsterdam & de Beurs
Welke wiskunde?	kansrekening
Studie:	toegepaste wiskunde, Universiteit Twente
Promotie:	Imperial College of Science, Technology and Medicine, Londen
Middelbare school:	Fioretticollege, Lisse

Zelfs de beste wiskundige kan geen beurskoersen voorspellen. Maar wiskunde is onmisbaar om de prijzen van opties en nog ingewikkelder financiële producten te berekenen en risico's te minimaliseren. Michel Vellekoop is hoogleraar aan de Universiteit van Amsterdam, maar werkt ook één dag per week voor TDTF, een stichting die onderzoek doet voor optiehandelaren op de Amsterdamse beurs.

'We dachten met z'n allen dat het system stabiel genoeg was. Ook ik dacht dat. Maar banken hebben bepaalde risico's niet goed ingeschat.' Michel Vellekoop's beroep is het analyseren van financiële markten, maar hij geeft eerlijk toe dat hij de kredietcrisis niet aan heeft zien komen.

Vellekoop is wat ze in de Verenigde Staten een *quant* noemen, een wiskundige die met kansre-

kening en andere wiskundige instrumenten probeert grip te krijgen op grillige koersschommelingen. Anders dan vaak wordt gedacht, is dat niet om met financieel stuntwerk enorme winsten te behalen. Banken, verzekeraars, pensioenfondsen en andere grote beleggers zijn er meestal juist op uit om met opties en andere beleggingsconstructies risico's af te dekken en een stabiele, zoveel mogelijk voorspelbare winst te boeken. Maar tijdens de kredietcrisis bleken niet alle modellen naar verwachting te werken.

Vellekoop: 'Sommige bankiers hebben nu de neiging om te zeggen dat die wiskundige modellen de schuldige van de crisis zijn. Dat is niet waar. Ik pleit wel voor beter opgeleide beurshandelaren, bankiers en toezichthouders. Het maakt nogal verschil of je andermans modellen blind toepast, of een model gebruikt dat je volledig begrijpt of zelfs zelf hebt gemaakt. In het eerste geval ben je je niet bewust van de aannames en de beperkingen die aan het model ten grondslag liggen. En dat is gevaarlijk als er onverwachte dingen gebeuren.'

Ook de wiskunde heeft geen grip op grote, totaal onverwachte gebeurtenissen. Vergelijk de financiële wereld met een spel als Poker of Risk: het probleem is niet dat toeval daar een rol speelt, want daar kun je aan rekenen, modellen voor opstellen en simulaties mee doen. Dat levert voorspellingen op over het risico en de verwachte winst bij bepaalde strategieën. Maar al die voorspellingen kunnen de prullenbak in zodra een Pieter Lakeman spaarders oproept om hun geld bij de bank weg te halen. Dan wordt ineens een heel ander spel gespeeld,



en tegenwoordig gaat dat razendsnel: 'Als mensen vroeger massaal hun geld bij een bank weg wilden halen, stond er een rij van een kilometer voor het loket. Toen had je als bank nog tijd om maatregelen te nemen. Tegenwoordig, met het internetbankieren, gaat het meteen helemaal mis. Het is heel moeilijk om de dingen zó te regelen dat het systeem bestand is tegen dergelijke grote schokken.'

RISICO'S SPREIDEN Vellekoop werkt één dag in de week voor de Derivatives Technology Foundation, een stichting die onderzoek doet voor bedrijven die op de Amsterdamse beurs handelen in opties. Staat hij die dag zelf op de beursvloer opties te kopen en te verkopen? 'Oh nee. Ik handel zelf nooit. Ik hou niet van die stress, ik heb er de psychische opmaak niet voor.' Wat hij dan wel doet, is onder andere het begeleiden van studenten. Die krijgen specifieke vragen uit het bedrijf. Soms is het antwoord al in bestaande wetenschappelijke literatuur te vinden, soms is de opdracht interessant genoeg voor een afstudeeropdracht. Soms moet een heel nieuw wiskundig model gebouwd worden, omdat het gaat om een nieuw product of een nieuwe handelsstrategie. Maar hoe leg je die beurshandelaren dan uit hoe ze die wiskunde moeten gebruiken? 'Meestal is dat in de vorm van een model dat geïmplementeerd wordt in een stuk software. Zo draag je nu eenmaal als wiskundige je kennis over aan een niet-wiskundige.'

Om een idee te geven van de bijdrage van wiskunde aan het afdekken van risico's in beleggingsproducten, noemt Vellekoop een vernieuwend voorbeeld uit het recente verleden: het Clickfonds. Als je belegde in een Clickfonds, kon je profiteren

van een koersstijging, en daarna die hogere koers 'vastklikken': de bank garandeerde dan dat de waarde van je aandelen nooit meer onder die koers zak- te.

Natuurlijk betaalde je een premie voor die risicoverzekering. Vellekoop: 'Dat was een ongelooflijk succes in Nederland.' Voordat dit Clickfonds op de markt werd gebracht, is met wiskundige modellen doorgerekend welke premie in rekening gebracht moest worden, en hoe de bank zelf in aandelen en opties moest handelen om het Clickfonds niet te risicovol te maken. In die berekening zitten aan- names over de gemiddelde koersstijging, de volati- liteit (hoe snel de koersen fluctueren), de rente en dergelijke.

DERIVATEN Opties en andere *derivaten* (indirecte beleggingsproducten) hebben de reputatie dat het producten voor roekeloze gokkers op de beurs zijn, die ofwel enorme winsten, ofwel enorme verliezen opleveren. Door een optie te kopen, beleg je namelijk in een product dat al zeer snel in waarde kan dalen of stijgen als de bijbehorende aandeel- koersen maar weinig veranderen (zie het kader op pagina 8).

Vellekoop benadrukt echter, dat je opties juist kunt gebruiken om de risico's van aandelen af te dekken. Als je bijvoorbeeld voor 10.000 euro aandelen Shell koopt die op 50 euro staan, zou je 2000 euro verlies lijden als de koers na een jaar tot 40 gedaald is. Je kunt echter meestal voor aanzien- lijk minder dan 2000 euro, zeg 500 euro, een aantal put-opties kopen die je het recht geven om die aan- delen over een jaar tegen een koers van 50 euro te verkopen aan de schrijver van de put-optie. Zo heb

Wat is een ...?

AANDEEL Het woord zegt het eigenlijk al: een *aandeel* is een stukje van een bedrijf dat vrij verhandelbaar is. De prijs waarvoor de aandelen op een bepaald moment verhandeld worden, heet de *koers*. Als je één aandeel Shell koopt, word je voor een piepklein gedeelte mede-eigenaar van dit miljardenbedrijf en mag je in theorie meebe-slissen over het beleid.

Een aandeel kan voor de bezitter op twee manieren geld opleveren: ten eerste geeft het aandeel recht op een evenredig deel van de winst die het bedrijf maakt. Dit heet het *dividend*, dat meestal jaarlijks uitgekeerd wordt (of niet, als er verlies gemaakt is). Ten tweede kan de koers van het aandeel stijgen, zodat je het met winst kunt verkopen. Aandelen worden over het algemeen gezien als relatief risicoloze investeringen, maar sinds de kredietcrisis, en met name de enorme koersdalingen in aandelen Fortis, weten we wel beter.

OPTIE Een optie geeft je het recht (maar niet de plicht) om op een datum in de toekomst, de af-loopdatum, honderd aandelen van een zeker bedrijf te kopen of te verkopen tegen een prijs die nu al vastligt.

Een *call-optie* is een contract dat je van iemand (we noemen hem even Wouter) koopt waarin staat: 'De houder van deze optie mag op 1 januari 2011 tegen een koers van 50 euro per stuk honderd aandelen Shell kopen van Wouter.'

En een *put-optie*: 'De houder van deze optie mag op 1 januari 2011 tegen een koers van 50 euro per stuk honderd aandelen Shell verkopen aan Wouter.'

Omdat een optie het recht, maar niet de plicht geeft om de onderliggende aandelen te kopen/verkopen, kun jij er nooit op verliezen. Je kijkt op 1 januari 2011 namelijk wat de koers van het aandeel Shell is: is die lager/hoger (bij respectievelijk call-optie/put-optie) dan 50 euro, dan doe je gewoon niets. Beurshandelaren zeggen dan dat de optie *out of the money* is. Ligt de koers echter hoger/lager (call-optie/put-optie), dan kun je honderd aandelen Shell tegen een gunstiger prijs kopen/verkopen dan de marktprijs.

Met een call-optie maak je dan winst door aandelen die je op 1 januari 2010 voor 50 euro per stuk gekocht hebt van Wouter, op de beurs duurder te verkopen. Met een put-optie verkoop

je aandelen aan Wouter tegen een hogere prijs dan de beurskoers. Let wel: met een put-optie hoeft je de onderliggende aandelen niet vooraf in bezit te hebben, die koop je pas op de beurs zodra je de put-optie uitoefent. Uiteraard betaal je een prijs voor zo'n optie-contract aan Wouter, anders zou die nooit iets kunnen verdienen. Die prijs is echter veel minder dan de contractwaarde van de onderliggende aandelen (in dit voorbeeld $100 \times 50 = 5000$ euro).

In de begintijd stelden optiehandelaren prijzen min of meer intuïtief vast, maar tegenwoordig gebruikt men daar uitbreidingen van de Black-Scholesformule voor (zie het kader op pagina 9). De wiskundige modellen die daarvoor gebruikt worden, gaan steeds uit van het principe dat je probeert de risico's af te dekken door tegelijkertijd te handelen in opties en de onderliggende aandelen. Ook kun je vaak opties afdekken met andere opties. De koersen van calls en puts bewegen bijvoorbeeld in tegenovergestelde richtingen als de bijbehorende aandeelkoers verandert. Dat kun je gebruiken om grote portefeuilles te maken die relatief ongevoelig zijn voor schommelingen in aandeelkoersen. En daarmee wordt dus precies de beperking van risico bereikt die het doel is van dat soort modellen.

CREDIT-DEFAULT SWAP Oorspronkelijk was een *credit-default swap* een soort verzekering tegen wanbetaling. Als Anton een schuld heeft aan Bernard, kan Bernard afspreken dat Cornelis Anton's schuld afbetaalt als die in gebreke blijft. Uiteraard betaalt Bernard daarvoor een premie aan Cornelis. Zolang Cornelis voldoende constant geld in reserve heeft, is hier weinig mis mee. Echter, van zo'n credit-default swap werd op zich weer een product gemaakt dat je aan anderen kon verkopen, die niets met de schuld tussen Anton en Bernard te maken hebben. Dat gold ook voor miljoenen hypotheek van armlastige Amerikaanse huizenbezitters (een hypotheek is ook een schuld, aan de bank). De laatste jaren is op zo'n enorme schaal, ook internationaal, in credit-default swaps gehandeld, dat eigenlijk niemand nog begreep wie aan wie welke bedragen schuldig was waardoor het vertrouwen in het hele financiële systeem instortte.



je je aandelen relatief goedkoop verzekerd tegen een koersdaling.

Het samenstellen van portfolio's (pakketten van verschillende aandelen, een mix van call- en put-opties en soms nog andere derivaten) die redelijk immuun zijn tegen koersdalingen, is een tak van wetenschap die heel wat financieel wiskundigen aan het werk houdt. Het netto effect van al die financiële constructies is risicospreiding. Vellekoop: 'Het is een heel goed principe om risico over heel veel mensen te spreiden. Een brandverzekering werkt ook niet als maar tien of honderd huizen meedoen. Je kunt je wel afvragen of sommige derivaten er wel moeten zijn. Neem bijvoorbeeld de *credit-default swaps* (zie het kader) waar de afgelopen jaren op grote schaal in gehandeld is. Moet je je wel kunnen verzekeren tegen een kredietprobleem waar je zelf geen partij in bent?

In de Verenigde Staten ruiken begerige handelaren alweer kansen met een nieuw product: het opkopen van levensverzekeringsspolissen. Dat werkt zo: veel ouderen die tien of twintig jaar lang premie hebben betaald voor een levensverzekering, willen liever nu contant geld ontvangen dan tot hun dood premie blijven betalen. Een handelaar koopt de polis van een bejaarde, voor een percentage X van het bedrag dat na overlijden wordt uitgekeerd. De handelaar blijft de premie betalen tot de bejaarde overlijdt en incasseert dan het hele polisbedrag.

Het gaat alleen al in de V.S. om een geschatte markt van 500 miljard dollar. De opkoper wil natuurlijk X zo laag mogelijk houden, maar hoe lager hij biedt, hoe minder mensen aan hem hun polis willen verkopen. Maar bij welke X de opkoper nog winst maakt, hangt af van hoe lang de verko-

per daarna nog in leven blijft. Dat is voor één mens onvoorspelbaar, maar als je veel polissen opkoopt, geven overlijdensstatistieken een behoorlijke zekerheid. Wall Street heeft dus behoefte aan een wiskundig model dat een prijskaartje hangt aan al deze risico's en winstkansen. Maar Vellekoop vindt het 'een bijzonder onfrisse gedachte', dat het bij dit product in het belang van de opkoper is dat de klant zo snel mogelijk overlijdt. Volgens hem denken de meeste mensen die in de financiële sector werken er net zo over. 'Het idee dat de hele sector rot zou zijn, slaat nergens op. Het overgrote merendeel van alle activiteiten in de financiële sector is gericht op risicospreiding. Verzekeringen, pensioenen, hypotheken en vele andere nuttige producten zouden niet kunnen bestaan zonder efficiënte financiële markten. En wiskundigen spelen een belangrijke rol bij het in toom houden van de risico's die dit met zich meebrengt. Ik verwacht dan ook dat er na de kredietcrisis nog veel meer behoefte zal zijn aan financieel wiskundigen.' ■

Het thema van jaargang 38 (1998-1999) van *Pythagoras* was *financiële wiskunde*. Michel Vellekoop leverde verschillende bijdragen aan deze serie artikelen, die je nog kunt lezen op www.pythagoras.nu.

Michel Vellekoop gaf vorig schooljaar samen met Nico Alink een masterclass voor scholieren waarin de financiële wiskunde uitgebreid behandeld werd. Alle lessen zijn te vinden op www.home.cs.utwente.nl/~vellekoopmh/masterclass.

Wat is de prijs van een optie?

De waarde van een optie wordt onder andere bepaald door de koers van het onderliggende aandeel in de toekomst (zeg, over een jaar). Welke prijs moet de schrijver van een optie daar dan voor vragen? Pas in de jaren zeventig van de vorige eeuw ontwikkelden de economen Fischer Black (1938-1995) en Myron Scholes (1941) daarvoor een theorie. Het principe is dat er een doorlopend aan te passen mix van aandelen en geld te berekenen is die uiteindelijk dezelfde eindwaarde als de optie oplevert. Dat betekent dus dat er een handelsstrategie gevonden kan worden die de risico's vrijwel helemaal wegneemt. Het geld dat nodig is om die handelsstra-

tegie te implementeren, bepaalt dus de waarde van de optie. Dit leidt tot de fameuze *Black-Scholesvergelijking*, waarmee beurshandelaren (beter gezegd: hun computers) vroeger de prijs van opties bepaalden, afhankelijk van de aflooptdatum, de bankrente en nog een paar gegevens. Inmiddels worden veel gecompliceerdere modellen gebruikt. Scholes kreeg in 1997 (Black was twee jaar daarvoor overleden) de Nobelprijs voor economie voor hun theorie, maar een jaar later ging een enorm groot beleggingsfonds waarvan Scholes deel uitmaakte, failliet. Dat was toen al een waarschuwing, dat de praktijk zich soms weinig van wiskundige theorieën aantrekt...

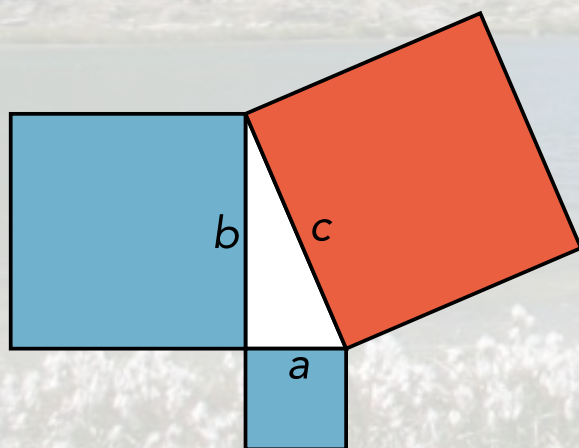
Van de stelling van Pythagoras bestaan honderden bewijzen. Bij sommige daarvan heeft een plaatje al voldoende overtuigingskracht, bij andere worden er onnodig ingewikkelde formules van stal gehaald. Hugo Brandt Corstius (geboren in 1935), die tot eind vorig jaar onder de naam Piet Grijs een column had in *Vrij Nederland*, bewees in 1945 de stelling van Pythagoras als tienjarig jochie.

■ door Alex van den Brandhof

PIET GRIJS BEWIJST PYTHAGORAS

Je kent de stelling van Pythagoras natuurlijk wel: in een rechthoekige driehoek is de som van de kwadraten van de rechthoekszijden gelijk aan het kwadraat van de schuine zijde.

In formulevorm: $a^2 + b^2 = c^2$, waarbij a en b de rechthoekszijden zijn en c de schuine zijde.



De stelling van Pythagoras: $a^2 + b^2 = c^2$, ofwel: de twee blauwe vierkanten zijn samen even groot als het rode vierkant

Toen de bekende publicist Hugo Brandt Corstius, inmiddels 74 jaar, op de lagere school zat, was hij al gefascineerd door wiskunde en taal. Dit thema heeft hij daarna nooit meer losgelaten: in zijn boeken en columns komt zijn talent als wis- en taalkunstenaar regelmatig terug. Al op tienjarige leeftijd bewees hij de stelling van Pythagoras. Het wiskundige idee van zijn bewijs bleek niet nieuw te zijn (wat wil je ook, als er al zeker 400 bewijzen be-

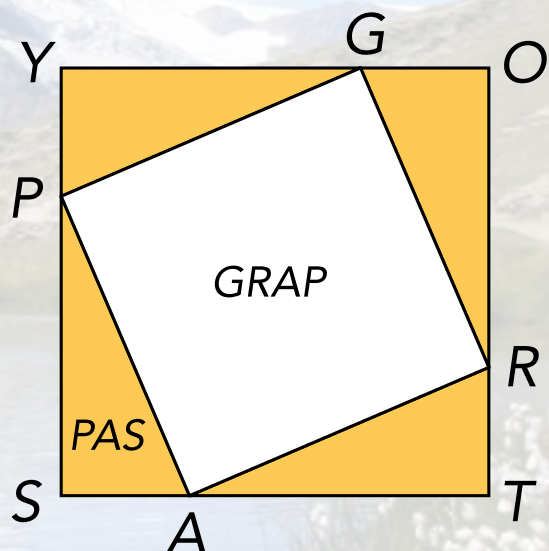
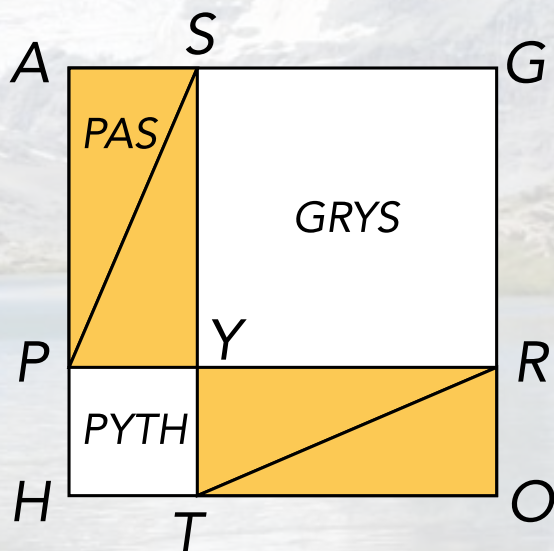
staan), maar het mooie is dat hij grapjes met de taal wist te verwerken in zijn bewijs. Welke persoon die een bewijs van de beroemdste stelling uit de wiskunde op zijn naam heeft staan, kan dat zeggen?

HUGO'S BEWIJS De kleine Hugo bewees de stelling van Pythagoras door een soort legpuzzel te maken van vier identieke rechthoekige driehoeken. Door die driehoeken verschillend te rangschikken, zie je in één keer de juistheid van de stelling van Pythagoras, zonder dat er ook maar de minste algebra aan te pas hoeft te komen.

De vier driehoeken worden in eerste instantie neergelegd zoals in het linkerplaatje op pagina 11. Het 'omhullende vierkant' bevat dan naast die vier driehoeken nog twee kleinere vierkanten, waarvan de zijden zo lang zijn als een rechthoekszijde van één zo'n driehoek.

Vervolgens worden de vier driehoeken binnen dat omhullende vierkant verschoven, zie het rechterplaatje op pagina 11. Ze worden zo neergelegd dat er binnen het grote vierkant één kleiner vierkant overblijft. Dat kleinere vierkant heeft zijden die zo lang zijn als de schuine zijde van één zo'n driehoek.

De totale linkerfiguur en rechterfiguur zijn overduidelijk even groot en beide bevatten vier identieke driehoeken. De resterende delen – de twee kleine vierkanten in het linkerplaatje enerzijds, en het vierkant middenin het rechterplaatje anderzijds – moeten dan ook wel even groot zijn. Met andere woorden: de som van de kwadraten van de rechthoekszijden is gelijk aan het kwadraat van de schuine zijde.



$$PYTH + GRYS + 4 \times PAS = GRAP + 4 \times PAS$$

$$\text{Dus: } PYTH + GRYS = GRAP$$

ZONDER ALGEBRA In de bekende bewijzen van de stelling van Pythagoras die gebruikmaken van plaatjes zoals hierboven, wordt meestal één zo'n figuur als uitgangspunt genomen en vervolgens met een beetje algebra de stelling afgeleid. Het mooie van het bewijs dat Hugo bedacht, is dat je deze twee plaatjes juist *niet* afzonderlijk moet bekijken en daardoor helemaal geen algebra nodig hebt.

Voor zover bekend, is de eerste die dit bewijs publiceerde de Engelsman Henry Boad in een

meetkundeboek dat in 1733 in Londen verscheen. Daarvan had de tienjarige Hugo natuurlijk geen weet. Hij tekende zijn plaatjes in Zwitserland in de twee binnenkanten van een vierkant chocolade-doodsje. Zijn leraar wou eerst niet geloven dat hij het zelf verzonnen had, maar gaf later toe dat die stelling nou ook weer niet zó moeilijk was... Het leuke van Hugo's bewijs is dat hij er zijn latere pseudoniem Piet Grijs op een creatieve wijze in wist te verwerken, zoals je aan de plaatjes kunt zien. ■

JOURNAAL

■ door Alex van den Brandhof

Doorbraak congruente getallen

Wiskundigen hebben met behulp van computers de eerste biljoen (een één met twaalf nullen) gevallen van een eeuwenoud wiskundig probleem gevonden. Het gaat om zogeheten 'congruente getallen': gehele getallen die de oppervlakte kunnen zijn van rechthoekige driehoeken waarvan de lengtes van de drie zijden rationale getallen zijn.

Het probleem waar een internationaal team van wiskundigen zich mee bezig hield, is al meer dan duizend jaar oud. Het ogenschijnlijk eenvoudige probleem is om te bepalen welke gehele getallen de oppervlakte kunnen zijn van een rechthoekige driehoek, waarvan de lengtes van de drie zijden rationale getallen (dat wil zeggen: breuken) zijn. Zulke getallen noemen wiskundigen *congruente getallen*. De rechthoekige driehoek met zijden 3, 4 en 5 heeft oppervlakte $\frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6$, dus 6 is een congruent getal. Het kleinste congruente getal is 5: het is de oppervlakte van een rechthoekige driehoek met zijden $\frac{3}{2}$, $\frac{20}{3}$ en $\frac{41}{6}$.

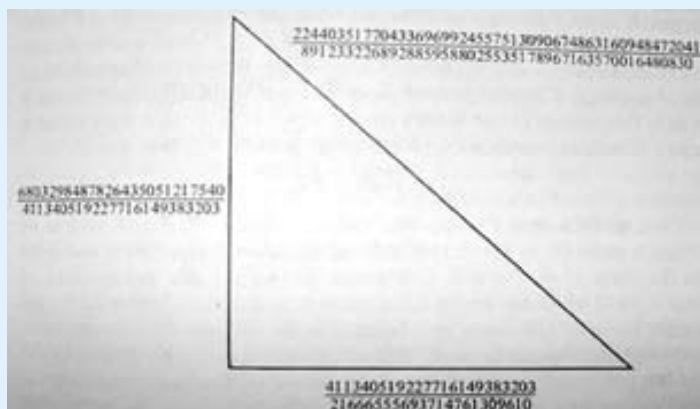
De rij van congruente getallen begint zo: 5, 6, 7, 13, 14, 15, 20, 21. In 1915 waren alle congruente getallen onder de 100 bekend; voor in een tijd waarin het rekenwerk nog niet door computers kon worden gedaan, is dat best indrukwekkend. In 1952 maakte Kurt Heegner een belangrijke stap voorwaarts: hij bewees dat alle priemgetallen die voorkomen in de rij 5, 13, 21, 29, 37, ... congruent zijn. Hoe diepzinnig dit resultaat ook is, het zegt nog lang niet alles over de getallen in die rij: bijvoorbeeld 21 is niet priem en daarover geeft de stelling van Heegner dan ook geen uitsluitsel.

De lijst van bekende congruente getallen is nu flink uitgebreid. De wiskundigen hebben computers geavanceerde berekeningen laten uitvoeren. Zij vonden niet minder dan 3.148.379.694 nieuwe congruente getallen. Daarmee zijn er nu meer dan een biljoen ($= 10^{12}$) van dit soort getallen bekend!

De wiskundige Jerrold Tunnell vond in 1982 een formule om te bepalen of een gegeven getal al dan niet congruent is. Het probleem is echter dat de waarheid van die formule afhangt van een nog onopgelost probleem in de wiskunde: het vermoeden

van Birch en Swinnerton-Dyer. In 2000 kwam dit vermoeden op de lijst van zeven grootste open problemen uit de wiskunde: de *millennium problems* van het Clay Mathematics Institute.

Lees meer over congruente getallen op www.kennislink.nl (zoek op 'congruente getallen').



In de jaren 1980 berekende de in Amerika geboren en in Duitsland werkzame wiskundige Don Zagier dat bovenstaande driehoek een congruent getal oplevert: de oppervlakte van deze driehoek is 157. De illustratie is afkomstig uit het boek *Introduction to Elliptic Curves and Modular Forms* uit 1993 van N. Koblitz.

SASTRA Ramanujanprijs voor 32-jarige vrouw

De Duitse Kathrin Bringmann is dit jaar de winnaar van de SASTRA Ramanujanprijs, die op 22 december zal worden uitgereikt. Zij werkt als wiskundige aan de universiteit van Keulen (Duitsland) en de universiteit van Minnesota (VS).

Kort voor zijn dood in 1920 schreef het Indiase wiskundegenie Srinivasa Ramanujan over *mock thetafuncties*. Hij deed dat in een brief aan de Britse wiskundige Godfrey Harold Hardy van de univer-

Hypatia op het witte doek

Sinds 9 oktober is in Spanje de duurste Spaanse (maar Engels gesproken) film ooit te zien in de bioscopen: *Agora* van regisseur Alejandro Amenábar. Eerder dit jaar was de film al te zien op het Cannes Filmfestival en het Toronto Filmfestival. De film gaat over het leven van de vierde eeuwse wiskundige en astronome Hypatia.

Aan Hypatia worden meerdere schriftelijke werken toegeschreven, waaronder commentaren op *Arithmetika* van Diophantus en de *Konica* (kegelsneden) van Apollonius. Vanwege haar vooruitstrevende en wetenschappelijke manier van denken en doen werd zij het slachtoffer van geloofsfanatici. In Cannes vertelde Amenábar dat hij in het verhaal van Hypatia veel hedendaagse misstanden terugzag. Dat gaf hem het idee om haar verhaal te gebruiken om een film over het heden te maken.

De film speelt zich af in het door Rome overheerste Egypte, waar een gewelddadige religieuze opstand plaatsvindt. De opstand verplaatst zich naar de bekendste bibliotheek van de stad, waar Hypatia en haar volgelingen vechten om de wijsheid van de oude wereld te redden. Twee van de volgelingen, Orestes en Davus, zijn mannen die met elkaar in de strijd zijn voor de liefde van Hypatia. Davus wordt verscheurd tussen zijn liefde voor zijn meesteres en de vrijheid die hij weet te kun-



De Britse actrice Rachel Weisz op een poster

nen bemachtigen als hij kiest voor de strijd van de Christenen.

Wanneer *Agora* in Nederland en België te zien zal zijn, is nog niet bekend. Wel kun je alvast een prachtig gemaakte website bekijken: agorathemovie.com.

siteit van Cambridge, bij wie Ramanujan van 1914 tot 1919 had gewerkt. 'Gewone' thetafuncties, een speciaal soort functies van complexe variabelen, waren in Ramanujans tijd reeds uitgebreid bestudeerd en ook Ramanujan was hier vertrouwd mee. Thetafuncties hebben hun nut in de wiskunde al lang bewezen; zij spelen onder meer een rol in elliptische krommen, die op hun beurt weer een rol spelen in onder andere de theorie van congruente getallen (zie het stukje hiernaast).

Ramanujan hield zich voor het eerst bezig met mock thetafuncties. Maar toen hij op 32-jarige leeftijd overleed, liet hij de wiskundewereld met veel

vragen achter: zijn aantekeningen waren zo onduidelijk, dat niemand precies wist wat mock thetafuncties eigenlijk zijn.

De SASTRA Ramanujanprijs wordt sinds 2005 jaarlijks uitgereikt aan een wiskundige die onderzoek doet in gebieden waarvoor Ramanujan de grondslag legde. De Amerikaan Freeman Dyson en de Nederlander Sander Zwegers hebben eerder al baanbrekend werk op het gebied van mock thetafuncties gedaan. De Duitse Kathrin Bringmann heeft dat werk een dusdanige impuls gegeven, dat zij nu wordt beloond met de SASTRA Ramanujan Prijs, een bedrag van 10.000 dollar.

Doe mee met de nieuwe prijsvraag van *Pythagoras*! Dit jaar draait alles om *magische wiskunde*. Hierbij kun je denken aan de bekende magische vierkanten, maar ook aan magische kubussen, magische sterren en magische zeshoeken. Op de achterkant van elke *Pythagoras* van deze jaargang staat een *geomagisch vierkant*: deze figuren, ontworpen door Lee Sal- lows, hebben een centrale rol in de prijsvraag.

■ door Matthijs Coster

PRIJSVRAAG: WEES EEN MAGIËR

In 1514 maakte Albrecht Dürer de gravure *Melencolia I*, waarin hij een vierkant van 4 bij 4 verwerkte met daarin de getallen 1 tot en met 16, zie figuur 1. Wat is er zo bijzonder aan dat vierkant? Ten eerste: het jaartal waarin de gravure is gemaakt, is erin verwerkt (kijk maar naar de onderste rij van het vierkant), maar daar gaat het hier niet om. Als je een tijdje naar het getallenvierkant kijkt, zul je zien dat de som van elke rij, elke kolom en de beide diagonalen hetzelfde is, namelijk 34. Een getallenvierkant met deze eigenschap heet een *magisch vierkant*.

Het kleinste magische vierkant is 3 bij 3. Je ziet het in figuur 2. De som van elke rij, kolom en diagonaal is 15. In het algemeen geldt het volgende: in een magisch vierkant van n bij n waarin de getallen 1 tot en met n^2 zijn geplaatst, is de *magische som*

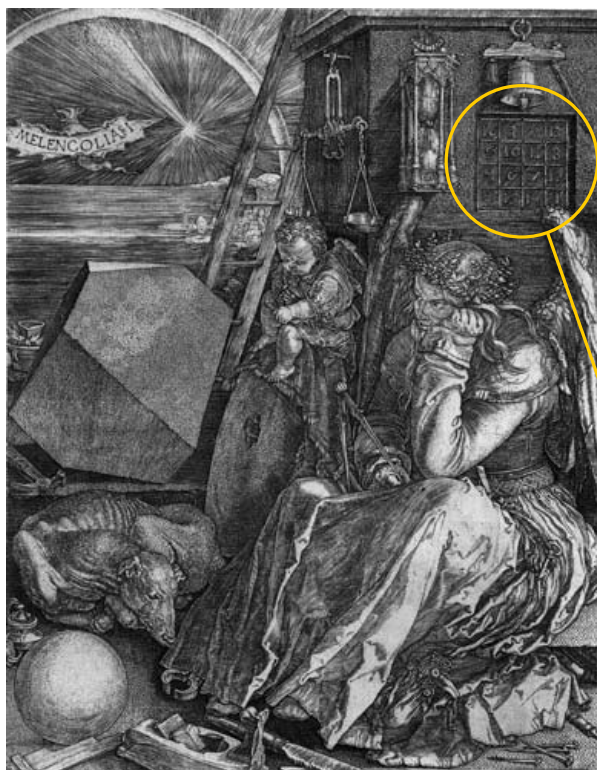
gelijk aan $\frac{1}{2}n(n^2 + 1)$. Het is niet moeilijk om dat te verklaren. De som van de getallen 1 tot en met n^2 is $\frac{1}{2}n^2(n^2 + 1)$ (de 'truc van Gauss'); omdat het vierkant bestaat uit n kolommen, ieder met gelijke som, is de som per kolom dus gelijk aan $\frac{1}{2}n(n^2 + 1)$. Voor $n = 3, 4$ en 5 is de magische som achtereenvolgens 15, 34 en 65.

VARIANTEN Er zijn vele varianten te bedenken van magische vierkanten. Een *panmagisch vierkant* is een magisch vierkant met de volgende eigenschap: als één of meer kolommen van de voorzijde naar de achterzijde wordt verplaatst, dan ontstaat er opnieuw een magisch vierkant (dus hebben opnieuw de diagonalen dezelfde som als de rijen en kolommen).

Oefenopgave 1. In figuur 3 zie je een deel van een panmagisch vierkant van 5 bij 5. Kun jij hem afmaken? Bedenk dat de magische som 65 is, zoals we hierboven zagen.

Een *alphamagisch vierkant* heeft de volgende eigenschap: als je het aantal letters telt van de getallen (uitgeschreven in woorden), dan vormen die aantallen opnieuw een magisch vierkant. In figuur 4 staat een voorbeeld van een alphamagisch vierkant.

Een *bimagisch vierkant* is een magisch vierkant waarvoor geldt dat als je de getallen in het vierkant met zichzelf vermenigvuldigt, er opnieuw een magisch vierkant ontstaat.



16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Figuur 1 *Melencolia I* van Albrecht Dürer met een magisch vierkant

8	1	6
3	5	7
4	9	2

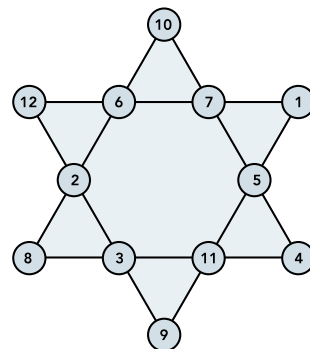
Figuur 2
Het kleinste
magische vierkant

			15	7
		9	1	23
	3		17	
22	19	11		
13	10			

Figuur 3
Vul de lege vakjes in
zodat er een panmagisch
vierkant ontstaat

64	2	123
122	63	4
3	124	62

Figuur 4
Een alphamagisch
vierkant



Figuur 5
Een magische ster

Een *magisch priemvierkant* is een magisch vierkant dat slechts met priemgetallen is gevuld.

Een andere variant is de *magische ster*. In de magische ster van figuur 5 zijn de getallen 1 tot en met 12 ingevuld. De som van de vier getallen die op één lijn staan, is steeds 26.

In *Pythagoras* van januari 2009 schreven we over *magische zeshoeken*, een variant waarbij het vierkant wordt vervangen door een zeshoek. Voor de prijsvraag hebben we een wat lastigere magische zeshoek bedacht.

GEOMAGISCHE VIERKANTEN Deze jaargang vind je op de achterkant van *Pythagoras* steeds een *geomagisch vierkant*. In een geomagisch vierkant staan geen getallen, maar tweedimensionale figuren. Het is de bedoeling om met de figuurtjes die in één rij, kolom of diagonaal staan, steeds dezelfde vorm (die het 'doel' wordt genoemd) te leggen. Het geomagische vierkant op de achterkant van deze *Pythagoras* bestaat uit $3 \times 3 = 9$ figuurtjes die gebaseerd zijn op *polyhexes*. Met de drie figuurtjes op één rij, kolom of diagonaal kun je steeds een gelijkzijdige driehoek (het doel) leggen.

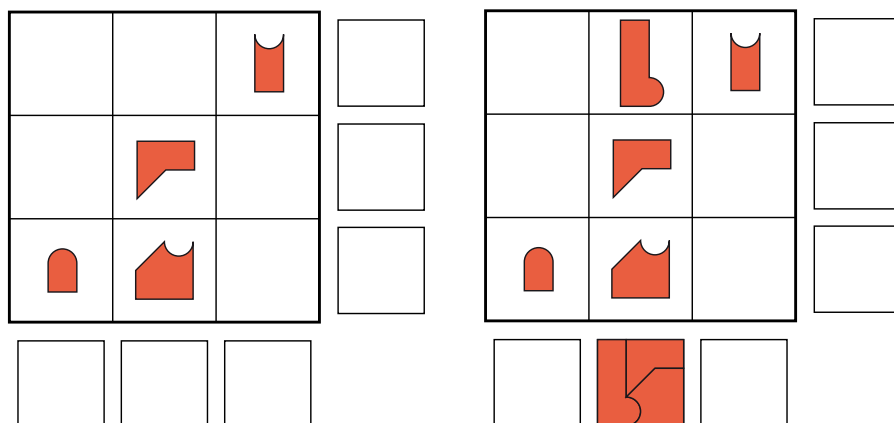
In het vorige nummer legde Lee Sallows uit hoe hij op het idee van geomagische vierkanten kwam. Deze fraaie objecten lenen zich goed voor leuk gepuzzel. Ze zijn daarom een belangrijk element van deze prijsvraag.

Oefenopgave 2. In figuur 6 zie je links het begin van een semi geomagisch vierkant (semi, omdat met de drie figuren in elke rij en in elke kolom het doel kan worden gevormd, maar *niet* met de drie figuren op een diagonaal). Het vierkant moet worden gevuld met *negen verschillende figuurtjes*. Er zijn vier figuurtjes gegeven. We proberen eerst het ontbrekende figuurtje van de middelste kolom te vinden. Daartoe leggen we de figuren in het vierkant dat eronder is getekend (het doel). Met een beetje schuiven kun je het figuurtje dat we zoeken, vinden, zie figuur 6 (rechts). Let op, je mag de figuren dus *draaien* (roteren), maar ook *omkeren* (spiegelen). Kun jij het geomagische vierkant verder afmaken?

Oefenopgave 3. In een geomagisch vierkant van $3 \times 3 = 9$ figuren is de oppervlakte van de middelste figuur altijd eenderde deel van de oppervlakte van het doel. Kun je beredeneren waarom dat zo is?

Er zijn nog veel meer varianten op de traditionele magische vierkanten te bedenken. Arno van den Essen schreef er een boek over: *Magische vierkanten: van Lo Shu tot Sudoku*. Ook op internet is veel te vinden.

In het volgende nummer zullen we de antwoorden geven van de oefenopgaven. Benieuwd naar de opgaven van de prijsvraag? Sla dan snel om!



Figuur 6 Maak van de linkerfiguur een semi geomagisch vierkant; de rechterfiguur helpt je al een beetje op weg

SPELREGELS De prijsvraag staat open voor iedereen: scholier of geen scholier, individueel of als groep. Bij sommige opgaven hebben scholieren (of schoolklassen) voorrang op anderen bij het winnen van prijzen. De opgaven 1 en 2 zijn wat eenvoudiger en vooral bedoeld voor leerlingen tot en met klas 3. Overigen maken pas kans op een prijs in deze categorie, als blijkt dat we geen goede inzendingen van onderbouwleerlingen hebben ontvangen. Voor de opgaven 3, 4 en 5 geldt dat de jury meer oog zal hebben voor inzendingen van scholieren (onder- en bovenbouw) dan van niet-scholieren. De jury belooft graag onderbouwers die één oplossing vinden bij opgave 4 of 5, maar ook bovenbouwers die meerdere oplossingen vinden. Bij

opgave 7 speelt vooral de creativiteit een rol; het is de jury om het even of de mooiste inzendingen van scholieren zijn of niet.

PRIJZEN In de binnenkant van het omslag van deze *Pythagoras* zie je een *gehaakte schemerlamp*. We schreven over deze objecten in het laatste nummer van de vorige jaargang. De lampen zijn samengesteld uit plastic 'puzzelstukjes' die allemaal dezelfde vorm hebben. Die stukjes zijn niet aan elkaar geplakt, maar gehaakt. Elk plastic stukje staat onder spanning omdat het kromgebogen wordt door z'n naaste burens. *Pythagoras* geeft negen van zulke lampen weg als prijs.*) Ze zijn er in verschillende grootte: de grootste lampen gaan naar winnaars van

DE OPGAVEN

1. Hieronder is een panmagisch vierkant deels ingevuld. Maak het vierkant af.

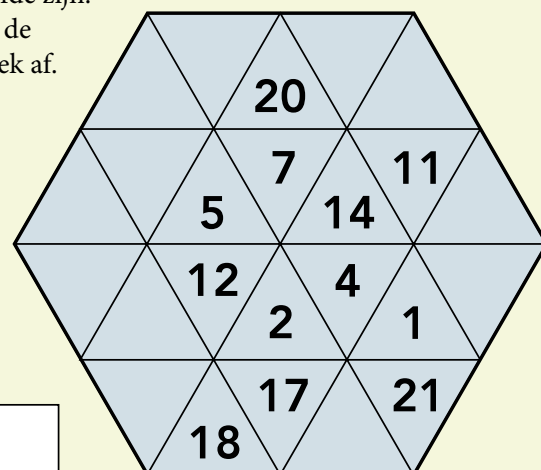
		8	
7		1	
	6		4

2. Hiernaast staat het begin van een geomagisch vierkant van $3 \times 3 = 9$ figuren. Het doel is een vierkant. Maak het geomagische vierkant af.

3. Hieronder zie je een deel van een magische zeshoek. Alle getallen van 1 tot en met 26 moeten erin voorkomen. De som van de getallen die op één lijn staan, moet steeds hetzelfde zijn.

Maak de zeshoek af.



de moeilijkere opdrachten of origineelste vondsten van opgave 7. Kleinere lampen zijn voor de winnaars van de wat eenvoudiger opgaven. Naast de negen lampen, geven we nog enkele kalenders met geomagische vierkanten, gemaakt door Lee Sallows, weg als prijs.

Je inzending kun je opsturen naar:

Pythagoras - Wees een magiër
Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
Postbus 9512
2300 RA Leiden
e-mail: prijsvraag@pythagoras.nu

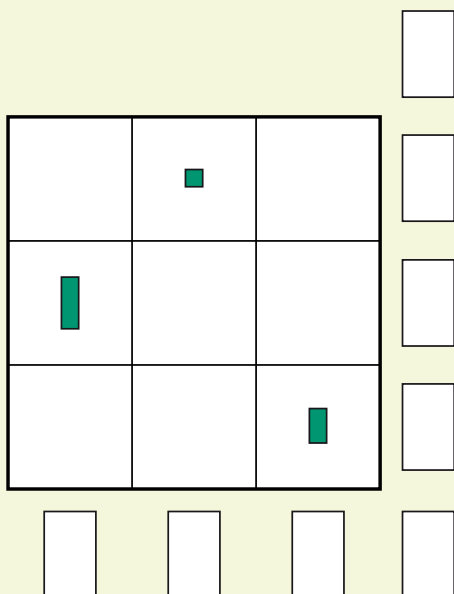
Vermeld duidelijk het nummer van de opgave, je naam, adres, telefoonnummer en e-mailadres. Als je scholier bent, vermeld dan tevens de naam en het adres van je school, je leeftijd en je klas. Bij een klasseninzing moet bovendien de naam van de wiskundedocent worden opgegeven.

Inzendingen moeten bij ons binnen zijn **vóór 1 april 2010**. Veel succes! ■

*) In principe is bij elk van de zeven opgaven een gehaakte schemerlamp te winnen. De jury bepaalt naar aanleiding van de inzendingen in welke categorieën de twee resterende lampen worden gewonnen. De jury behoudt zich het recht voor om niet alle negen lampen als prijs weg te geven, als blijkt dat we geen correcte oplossingen voor bepaalde opgaven hebben ontvangen. Per persoon kunnen maximaal twee lampen worden gewonnen.

4. Ga uit van het magische vierkant van 3 bij 3 in figuur 2 (pagina 15). Neem in plaats van de getallen even zoveel aaneengesloten vierkantjes. Zo ontstaan negen figuren. Doe het zo, dat je een geomagisch vierkant krijgt waarvan het doel een rechthoek van 3×5 vierkantjes is. Hieronder is al een beginnetje gemaakt.

Er zijn meerdere oplossingen mogelijk! Twee oplossingen zijn verschillend als ten minste twee van de figuren verschillen. Let op dat je ook kunt kijken naar de oplossingen met drie vierkantjes niet in een lijn maar in een hoek.



5. Zoals opgave 4, maar het doel is nu geen rechthoek van 3 bij 5, maar een vierkant van 4 bij 4, waaruit steeds op dezelfde plaats een vierkantje wordt weggelaten. Ook hier zijn meerdere oplossingen mogelijk!

6. Ga uit van een (pan)magisch vierkant van 4 bij 4. Vervang de getallen door even zoveel aaneengesloten vierkantjes. Maak een geomagisch vierkant, waarvan het doel bestaat uit 34 vierkantjes, passend in een rechthoek van 6×7 vierkantjes. Het lukt de redactie wel om zo een geomagisch vierkant te maken, maar (nog?) niet om een pan-geomagisch vierkant te maken.

7. Er zijn in de loop van de jaren al veel nieuwe ideeën gelanceerd voor ontwerpen van magische vierkanten. Bij deze dagen we je uit om met een eigen idee te komen. Denk aan magische kubussen, een eigen (semi)geomagisch vierkant, een geomagische kubus, enzovoorts. Stuur een toelichting mee wat er zo bijzonder is aan je idee voor het specifieke magische vierkant.

In het vorige nummer van *Pythagoras* legde Lee Sallows uit hoe hij op het idee van geomagische vierkanten was gekomen door middel van een formule van de negentiende eeuwse Franse wiskundige Édouard Lucas. Het artikel sloot af met een opgave waarvan we nu de oplossing geven.

■ door Lee Sallows

GEOMAGISCHE VIERKANTEN MET LUCAS' FORMULE

Kun je met de basisvormen a , b en c die je onderaan figuur 2 ziet (a een rechthoek, b een halve cirkel en c een vierkant, niet noodzakelijk van precies dezelfde maten), een 3×3 vierkant volgens de formule van figuur 1 vinden, zodanig dat je uit alle rijen, kolommen en de twee diagonalen hetzelfde doel kunt vormen?

Zo luidde de vraag in het artikel over geomagische vierkanten in de vorige *Pythagoras*. In figuur 2 zie je een oplossing: de breedte van de rechthoek

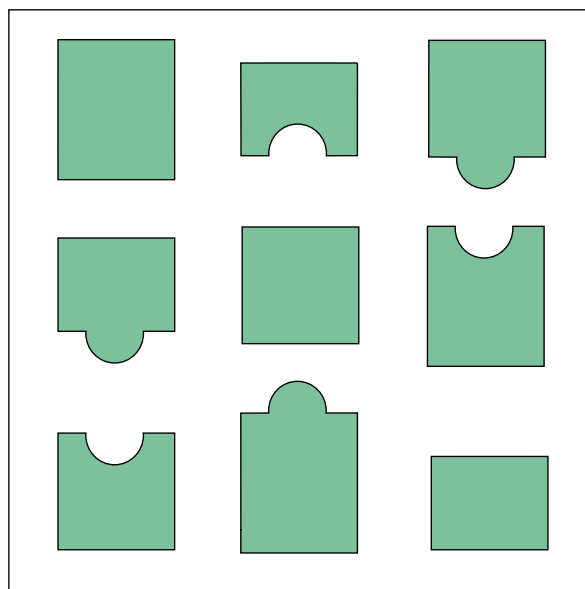
(vorm a) is gelijk aan de zijde van het vierkant (vorm c). Het effect is dus alleen maar een verandering in de lengte van stukken waarin a een rol speelt. Het probleem van niet-passende stukken verdwijnt daardoor.

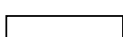
De oplossing in figuur 3 spreekt voor zich. Het lijkt simpel, maar heeft wel wat hoofdbrekens gekost voordat het T-vormige doel werd bedacht. Figuur 4 ten slotte laat zien hoe je zo'n oplossing kunt gebruiken als basis voor een nieuw geomagisch vierkant met polyomino's. ■

18

$c + a$	$c - a - b$	$c + b$
$c - a + b$	c	$c + a - b$
$c - b$	$c + a + b$	$c - a$

Figuur 1 Lucas' formule voor een 3×3 geomagisch vierkant



$a =$ 

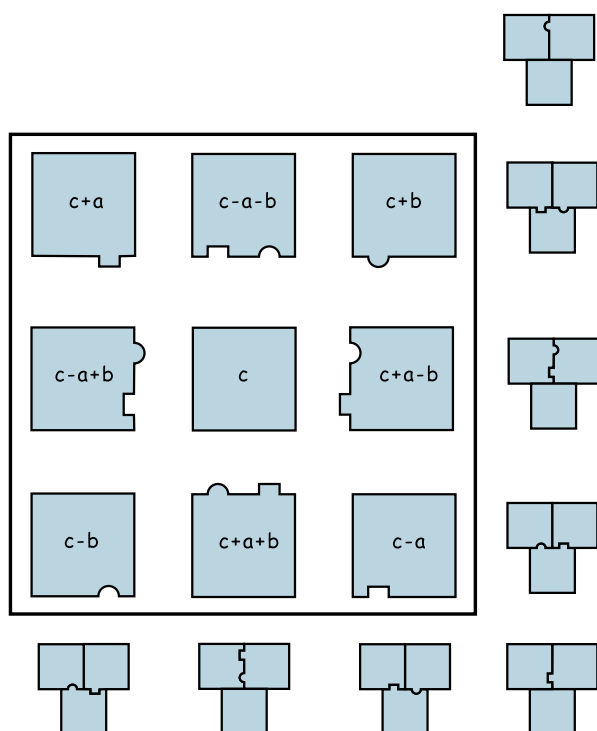
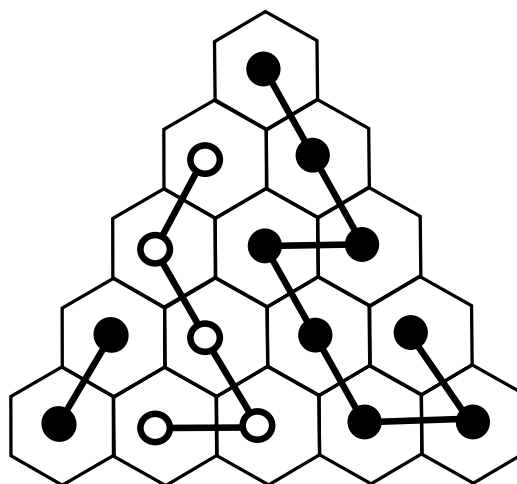
$b =$ 

$c =$ 

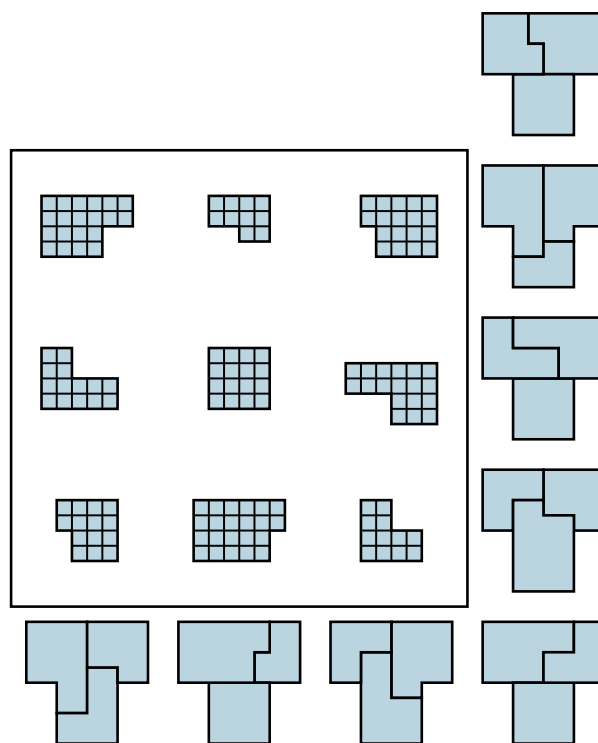
Figuur 2 Oplossing 1: het doel (niet getekend) is weer een rechthoek van 1×3

GEOMAGISCH MET POLYHEXES

Op de achterkant van dit nummer zie je een geomagisch vierkant dat is gebaseerd op het bekende Lo shu diagram. We noemen dit een *normaal* geomagisch vierkant, omdat de figuren maten hebben van 1, 2, 3, ... De figuren zijn gebaseerd op *polyhexes* (dat zijn figuren getekend op een honingraat opgebouwd uit gelijkzijdige zeshoekjes), zie de afbeelding hiernaast. Hier verbinden de lijntjes puntjes die geplaatst zijn in het midden van de zeshoekjes behorend bij dezelfde polyhex. Het doel van het geomagische vierkant is een gril-lige gelijkzijdige driehoek, een vorm die doet denken aan een Chinese boerenzonnehoed, al is die hoed misschien iets aan de hoge kant. Vandaar de titel: *Lo shu & Hi hat*.



Figuur 3 Oplossing 2: het (verkleinde) doel is de kurk van de *toverdrankfles* (zie de achterkant van het septembernummer)!



Figuur 4 Kijk hoe tegenover elkaar liggende paren (zoals $c + a$ en $c - a$) samen dezelfde vorm (een rechthoek van 4×8) maken. Dit is niet het geval voor elk 3×3 geomagisch vierkant.

De oude Grieken hebben de meetkunde tot grote hoogte gebracht, maar het waren in de vroege Middeleeuwen de Arabische wiskundigen die de algebra verder ontwikkelden. Muhammad al-Khwarizmi maakte de algebra voor iedereen toegankelijk. Omar Khayyam maakte grote vorderingen met de oplossing van derdegraadsvergelijkingen. Ook is hij nog steeds beroemd als dichter.

■ door Eric Kirchner

OMAR KHAYYAM (1048-1131):



PIONIER VAN DE DERDEGRAADS- VERGELIJKING

De bekendste wiskundige in de hoogtijdagen van de islamitische cultuur was ongetwijfeld Muhammad al-Khwarizmi (780-850, Bagdad). In zijn belangrijkste werk, *Kitab fi'l-jabr wa'l muqabala* ('Boek van de restauratie en confrontatie') uit het jaar 830 beschreef hij in heel toegankelijke taal de algebra. De oude Grieken hadden vóór hem de meetkunde tot grote hoogte gebracht, maar de algebra stond nog in de kinderschoenen. Zo werden vergelijkingen meestal in woorden uitgeschreven, waardoor ze al gauw langdradig werden en moeilijk te volgen. Veel wiskundige studies waren bovendien in een jargon geschreven dat het voor leken onmogelijk maakte ze te doorgronden. Griekse wiskundigen wisten bijvoorbeeld best hoe ze kwadratische vergelijkingen moesten oplossen. Maar landmeters die tegen zo'n vergelijking aanliepen, hadden niets aan de geleerde Griekse verhandelingen. Voor gewone mensen waren die niet te lezen.

Ook al-Khwarizmi beschikte nog niet over een handige manier om formules weer te geven; die zou pas veel later ontwikkeld worden, in Europa. Met het woord *al-jabr* ('restauratie') uit de titel van zijn eerder genoemde boek bedoelde hij dat negatieve termen in een vergelijking kunnen worden weg-gewerkt door aan beide kanten van de vergelijking eenzelfde hoeveelheid op te tellen. Het 'tekort' dat door de negatieve term wordt beschreven, wordt op die manier 'gerestaureerd'. Het andere titelwoord, *al-muqabala* ('confrontatie'), geeft aan dat termen die aan beide zijden van de vergelijking voorkomen, elkaar 'confronteren' en daarmee opheffen. Al-Khwarizmi gebruikte ter illustratie van deze

stappen het volgende voorbeeld:

Neem de vergelijking $2x^2 + 100 - 20x = 58$. Herleid dit tot $2x^2 + 100 = 58 + 20x$ (*al-jabr* toegepast, want de lineaire term in x wordt positief gemaakt). Elke term delen door 2 geeft $x^2 + 50 = 29 + 10x$. En ten slotte: $x^2 + 21 = 10x$ (*al-muqabala* toegepast, omdat twee termen van hetzelfde type worden vervangen door één term).

Zoals gezegd, deze manier van rekenen was helemaal niet nieuw. Diophantus had het al in de vierde eeuw n.C. besproken. Maar in al-Khwarizmi's leerboek werd de algebra voor het eerst toegankelijk voor iedereen, en bovendien een zelfstandig vakgebied.

In hetzelfde boek bespreekt al-Khwarizmi ook heel systematisch de oplossingen van alle mogelijke soorten kwadratische vergelijkingen. Zijn oplossingen komen overeen met de *abc*-formule die je nog steeds op de middelbare school leert. Ook hiermee was al-Khwarizmi niet nieuw. Voor een aantal typen kwadratische vergelijkingen hadden de Babyloniërs al rekenprocedures gevonden, die in feite neerkomen op de *abc*-formule. Wat wel nieuw was bij al-Khwarizmi, was de systematische en alomvattende aanpak van deze vergelijkingen. En bovendien de didactische aanpak, die maakte dat al-Khwarizmi's boek nog eeuwenlang het standaard algebraboek was, zowel in het Midden-Oosten als in Europa. Wat Euclides (zie *Pythagoras*, april 2009) was voor de meetkunde, was al-Khwarizmi voor de algebra. Een woord uit de titel van zijn boek zou zelfs synoniem worden voor het vakgebied zelf (*al-jabr*: algebra), en de naam van al-Khwarizmi zou

blijven voortleven in ons woord algoritme.

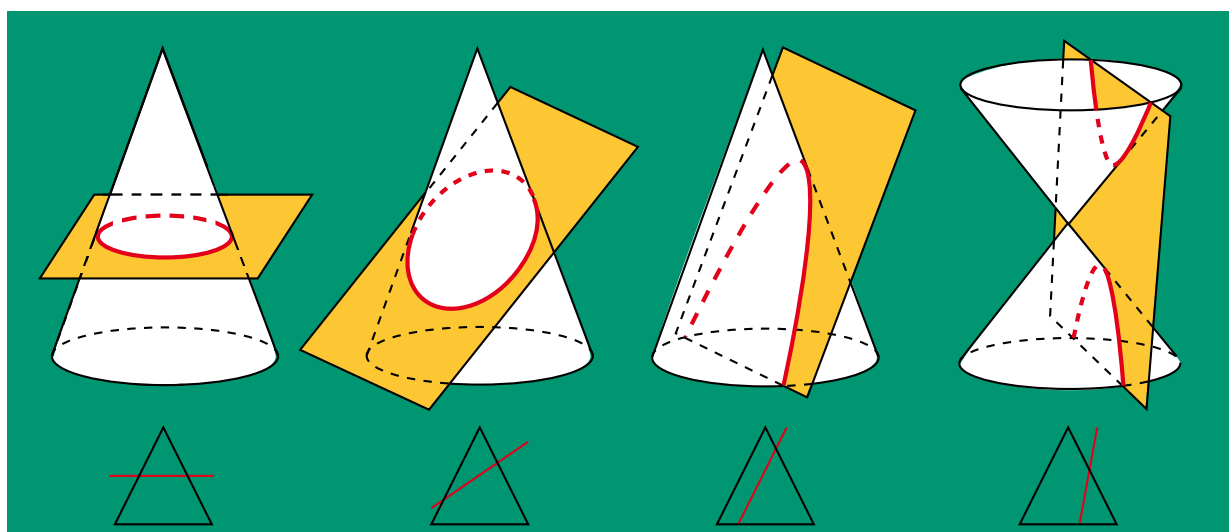
Dat zijn werk voor iedereen leesbaar was, was ook uitdrukkelijk de bedoeling. In het voorwoord schreef al-Khwarizmi dat hij het voor praktisch gebruik had geschreven, als antwoord op mensen die dit 'constant nodig hebben in gevallen van erfenis, nalatenschap, verdelingen, rechtszaken en handel, en in alle zaken met elkaar, of waar het gaat om het meten van landgoederen, het graven van kanalen, meetkundige berekeningen, en allerlei andere zaken van diverse aard'. Blijkbaar zette hij zich af tegen de theoretische benadering van de wiskunde, die door de Grieken zo sterk was ontwikkeld.

Alle bewijzen die al-Khwarizmi in zijn werk geeft voor de oplossingen van kwadratische vergelijkingen zijn meetkundig van aard. Het zijn constructies met passer en liniaal. Ze zijn correct, maar hun opzet is eerder intuïtief dan formeel. Later zou een andere Arabische geleerde, Thabit ibn-Qurra (836-901, Turkije/Syrië/Irak) deze oplossingen nog eens rigoureus en formeel bewijzen met behulp van de strenge logica uit de *Elementen* van Euclides.

GESNEDEN KEGELS Ook na de dood van al-Khwarizmi bleef er veel belangstelling voor algebra. Het belangrijkste vraagstuk dat moest worden opgelost, was dat van derdegraadsvergelijkingen. Hier had niemand, ook de oude Grieken niet, ooit een

oplossingsmethode voor gevonden. Rond het jaar 930 ontdekte Abu Ja'far al-Khazin dat de vergelijking $x^3 + m = nx^2$, met $m, n > 0$, meetkundig kan worden opgelost met behulp van zogenaamde *kegelsneden*. Kegelsneden krijg je wanneer een kegel en een vlak elkaar snijden; het kunnen cirkels, ellipsen, parabolen of hyperbolen zijn, zie figuur 1.

De theorie van kegelsneden was op zichzelf goed bekend. In het oude Griekenland had Apollonius (262-190 v.C., Perga) er een gedetailleerde studie over geschreven. Allerlei meetkundige eigenschappen van kegelsneden kwamen daarin aan de orde. In het islamitische Midden-Oosten werd dat hele formalisme voor het eerst toegepast op derdegraadsvergelijkingen. Het bleek dat uit de coëfficiënten van de vergelijking twee kegelsneden moesten worden geconstrueerd. Welke kegelsneden je precies nodig had, bleek af te hangen van de precieze vorm van de derdegraadsvergelijking die moest worden opgelost. De twee kegelsneden bleken twee snijpunten te hebben, en een van de coördinaten van zo'n snijpunt bleek precies overeen te komen met de (positieve) oplossing van de derdegraadsvergelijking! De eerste die een systematisch overzicht schreef over alle mogelijke vormen van derdegraadsvergelijkingen, en er de oplossingen bij gaf, was Omar Khayyam.



Figuur 1 De kegelsneden die je krijgt als je een kegel doorsnijdt met een vlak, van links naar rechts: cirkel, ellips, parabool, hyperbool

MEERDERE TALENTEN Omar Khayyam's volledige naam was Ghiyath al-Din Abu'l-Fath Umar ibn Ibrahim Al-Nisaburi al-Khayyami. Hij werd geboren in de stad Nishapur in het huidige Iran, volgens de meeste bronnen in het jaar 1048. In diezelfde stad zou hij in 1131 ook sterven, maar hij werd op eigen verzoek begraven in Isfahan. Omdat daar, in de woorden die hij zelf een vriend voor zijn dood toevertrouwde, 'de wind de geur van rozen over mijn graf blaast'. Mooi gezegd: Omar Khayyam blonk dan ook niet alleen uit in wiskunde, maar ook in de dichtkunst. Een combinatie die zo zeldzaam is, dat de volgende persoon die deze talenten zo sterk in zich verenigt nog geboren moet worden! Volgens zijn biograaf, die hem persoonlijk had gekend, had Khayyam een uitzonderlijk goed geheugen. Ooit had hij in Isfahan zeven maal een bepaald boek gelezen. Na terugkeer wist hij het complete boek uit zijn hoofd op te schrijven. Het bleek op een paar foutjes na letterlijk met het origineel overeen te komen. In diezelfde biografie lezen we trouwens ook dat Khayyam een chagrijn was, en bovendien kortzichtig. Een stevig oordeel voor zo'n eerbiedwaardig man, zie figuur 2. Het zal er wel mee te maken hebben dat deze biograaf in zijn jeugd wiskundelessen en literatuur bij Khayyam had gevolgd, en wellicht niet altijd even goede cijfers had behaald. Want uit Khayyam's gedichten komt een heel andere persoonlijkheid naar voren, die boven alles de vrijheid liefheeft en van het leven geniet (zie kader *Kwatrijnen*).

Vlak voordat Khayyam werd geboren, hadden de Seldjoek-Turken de regio Khorasan veroverd, waar Nishapur in ligt. Ze hadden een groot rijk gesticht, maar dat was politiek en militair niet erg stabiel. Het was dan ook geen gemakkelijke tijd voor een geleerde. In het voorwoord van zijn werk *de Algebra* schreef Khayyam: 'Ik was niet in staat om mij aan de studie van de algebra te wijden en aan de langdurige aandacht ervoor, vanwege de obstakels in de nukken van de Tijd die mij hinderden; want we zijn beroofd van alle mensen met kennis, afgezien van een kleine groep met veel moeilijkheden, voor wie het een dagelijkse zorg is om de kansen te grijpen, en zich wanneer de Tijd slaapt te wijden aan het bestuderen en de vervolmaking van een wetenschap; want de meeste mensen die filo-



Figuur 2 Standbeeld voor Omar Khayyam in zijn geboortestad Nishapur, het huidige Neyshabur in Iran

sofen nadoen verwarren het goede met het foute, en zij doen niets anders dan bedriegen en kennis voorwenden, en ze gebruiken niet wat ze over de wetenschappen weten, behalve voor basale en materiële doeleinden: en als zij iemand zien die het goede zoekt en de waarheid prefereert, en die zijn best doet fouten en onwaarheden te weerleggen en hypocrisie en bedrog te negeren, dan bespotten zij hem en lachen om hem.'

VEELZIJDIG WETENSCHAPPER Ondanks zijn moeilijkheden wist Khayyam steun te krijgen van machtige beschermheren. Zo besloot rond het jaar 1070 een opperrechter in de stad Samarkand om hem financieel te ondersteunen. Hierdoor kon Khayyam het belangrijke werk *de Algebra* schrijven, dat derdegraadsvergelijkingen behandelt zoals we hieronder zullen zien. Daarna werd Khayyam door sultan Malik-shah uitgenodigd om het astronomische observatorium in de stad Isfahan te gaan leiden. Hij zou daar achttien jaar in betrekkelijke rust blijven werken. Samen met zijn staf van astronomen stelde hij, op basis van uitgebreide observaties, een lijst op met de hemelcoördinaten van de sterren. Helaas is deze lijst voor het grootste deel verloren gegaan. In het jaar 1077 rondde Khayyam een omvangrijk commentaar af op het werk van Euclides, de *Sharh ma ashkala min musadarat kitab Uqlidis* ('Verklaring van de moeilijkheden in de postulaten van Euclides'). Hierin besprak hij vooral Euclides' parallellenpostulaat en de theorie van verhoudingen (zie kader *Nieuwe getallen*).

Uit al het observatiewerk wist Khayyam ook heel nauwkeurig de lengte van het jaar te bepalen. Daardoor kon hij in het jaar 1079 aan de sultan een verbeterde kalender voorstellen. Hij introduceerde daarvoor een 'Maliki-periode' van 33 jaar. Daarin zouden de jaarnummers 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28 en 33 steeds een schrikkeljaar zijn, en dus een extra dag tellen. Zijn kalender loopt maar één

dag verkeerd per 5000 jaar. Daarmee is deze kalender nauwkeuriger dan de Gregoriaanse kalender die in Europa in 1584 werd ingevoerd, en die een fout heeft van één dag per 3333 jaar.

Na de dood van zijn beschermheer, sultan Malik-shah, werd het moeilijker het werk voort te zetten. Het observatorium raakte zijn financiering kwijt, de kalenderhervorming werd afgelast en het hof raakte steeds meer onder invloed van orthodoxe moslims die Khayyam vanwege zijn gedichten beschuldigden van atheïsme. Khayyam zou nog jarenlang aan het hof werkzaam blijven, en proberen de gunst van de heersers terug te winnen. Na het jaar 1118 verhuisde hij naar Merv, in het huidige Turkmenistan. Dit was de nieuwe hoofdstad van de Seldjoek-Turken. Daar werkte hij onder meer aan de theorie van de balans (weegschaal). Hij bestudeerde al het werk dat zijn voorgangers sinds de Griekse oudheid hadden geschreven over balansen, en over zogenaamde hydrostatische balansen. Dit zijn balansen waarvan één schaal onder water wordt gedompeld. Net als in het beroemde verhaal over Archimedes die het gehalte aan goud in een kroon moet bepalen, levert onderdompeling in water informatie op over de materiaalsamenstelling van een voorwerp. Khayyam ontwikkelde deze theorie verder, door de vergelijkingen uit te werken voor de volgende vraag: hoe kunnen met een hydrostatische balans de verhoudingen aan goud en zilver worden bepaald in een onbekende legering? Hij ontwikkelde samen met zijn leerlingen een nieuw instrument, dat een gewone balans en een hydrostatische balans combineerde. De mogelijkheden van dit instrument waren ongekend groot. Er

kon snel mee worden bepaald of een voorwerp uit puur goud of zilver bestond. Het was eenvoudig om er munten mee om te wisselen, omdat er een vaste gewichtsverhouding bestond tussen bijvoorbeeld dirhams en dinars. En er konden natuurlijk gewoon voorwerpen mee gewogen worden, met een op dat moment ongekende nauwkeurigheid van 0,08 gram voor voorwerpen tot vier kilogram. Uiteindelijk zou zijn leerling al-Khazini het instrument vervolmaken onder de naam *Mizan al-hikma* ('Balans der Wijsheid').

DERDEGRAADS Omar Khayyam onderzocht welke soorten derdegraadsvergelijkingen er allemaal mogelijk zijn. Hij vond maar liefst 25 verschillende klassen. Dat het er zo veel zijn, komt doordat alle termen in zijn vergelijkingen positieve coëfficiënten hebben. Bij hem zouden bijvoorbeeld $x^3 + 3x - 8 = 0$ en $x^3 - 3x + 8 = 0$ tot verschillende klassen behoren, terwijl ze in onze moderne technologie tot dezelfde klasse behoren. Voor elk van die klassen construeerde hij een oplossing. Die standaardoplossingen probeerde hij met opzet met zo eenvoudig mogelijke middelen te vinden, en hij deed dat door de vergelijkingen om te zetten naar meetkundige vraagstukken. Voor elf klassen lukte dat met uitsluitend Euclidische meetkunde, dus met passer en liniaal. Dit zijn de vergelijkingen die na deling door x of door x^2 herleidbaar zijn tot lineaire of kwadratische vergelijkingen. Maar Khayyam ontdekte als eerste dat je er voor veertien klassen (zie figuur 3) met passer en liniaal niet uitkomt, en dat er dan kegelsneden nodig zijn. Hij schreef dat voor vier van de veertien klassen eerdere wiskundi-

23

$x^3 = r$	$x^3 = px^2 + qx + r$
$x^3 + px^2 = r$	$x^3 + qx + r = px^2$
$x^3 + r = qx$	$x^3 + px^2 + r = qx$
$x^3 + r = px^2$	$x^3 + px^2 + qx = r$
$x^3 + qx = r$	$x^3 + px^2 = qx + r$
$x^3 = px^2 + r$	$x^3 + qx = px^2 + r$
$x^3 = qx + r$	$x^3 + r = px^2 + qx$

Figuur 3 De veertien klassen van vergelijkingen, waar kegelsneden gebruikt moeten worden

KWATRIJNEN Naast zijn werk als wiskundige en filosoof is Omar Khayyam ook bekend geworden door zijn gedichten. Er zijn er meer dan duizend van bewaard gebleven, allemaal geschreven in de Perzische taal. Het zijn kwatrijnen, dat wil zeggen composities waarvan steeds de eerste, de tweede en de laatste regel op elkaar rijmen. Ze ademen een liefde voor vrijheid en humanisme uit, geschreven met een mengsel van ironie en levenslust.

Deze gedichten zijn in het Midden-Oosten altijd heel geliefd geweest. In Europa werden ze ontdekt door de Engelse dichter Edward Fitzgerald, die Perzisch had gestudeerd. Hij zou de rest van zijn leven besteden om ze in het Engels te vertalen, onder de titel *Rubaiyat*. Deze vertaling werd ongelooflijk populair, zoals de postzegel uit Guyana

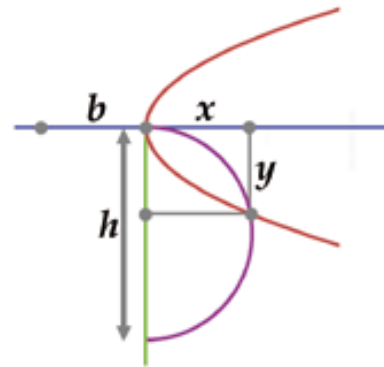


laat zien, en zou tot op de dag van vandaag in druk blijven. Het jaar 2009 is internationaal uitgeroepen tot Omar Khayyam jaar, omdat Fitzgerald's vertaling precies 150 jaar oud is. Het is ondertussen wel de vraag in hoeverre de Engelse gedichten van Fitzgerald nog de bedoelingen van Khayyam weergeven. Zoals de bekende Spaanse schrijver Borges het uitdrukte: 'Er geschiedt een wonder: uit de toevallige verbintenis van een Perzische astronoom die zich verwaardigde tot poëzie, met een excentrieke Engelsman die Oosterse en Spaanse boeken doorwerkt, wellicht zonder ze ooit helemaal te begrijpen, komt een buitengewoon dichter te voorschijn die op geen van beiden lijkt.'

Een van de kwatrijnen (in de Nederlandse vertaling van Chr. Van Balen, uit 1910) luidt als volgt:

Een boek met verzen in de koele wei,
Een kruik met wijn, een goudgeel brood, en gij
Al zingend naast me in de wildernis,
En zalig wordt mij zelfs de woestenij.

Terwijl de een steeds van 't verleden zingt,
En d'ander reeds de paradijsvreugd drinkt,
Neem gij wat is, en hoop niet op wat komt,
En let niet op de trom, die ginder klinkt.



Figuur 4 Constructie met kegelsneden, in dit geval cirkel en parabool, om de oplossing te vinden van de vergelijking $x^3 + qx = r$

gen een meetkundige oplossing hadden gevonden, maar dat 'geen gerucht ons heeft bereikt voor een van de overige tien klassen'. Hijzelf slaagde er wel in om een gedetailleerd overzicht op te stellen met de oplossingen voor alle veertien klassen. Daarbij hanteerde hij een rigoureuze aanpak. Zijn analyse, aanpak en oplossingen waren in essentie gelijk aan die van de Franse wiskundige-filosoof Descartes, meer dan 500 jaar later.

Laten we met behulp van een voorbeeld eens zien hoe zulke meetkundige analysetechnieken en oplossingen in elkaar zitten. Voor het oplossen van de vergelijking $x^3 + qx = r$ blijken een cirkel en een parabool (allebei voorbeelden van kegelsneden) geconstrueerd te moeten worden, zie figuur 4. Daarvoor schreef Khayyam eerst $b^2 = q$. Of, in zijn eigen woorden: 'Laat b de zijde zijn van een vierkant dat [een oppervlak heeft dat] gelijk is aan het aantal wortels [, dat wil zeggen, q]' Op dezelfde manier schreef Khayyam dat $h = r/b^2$. Vervolgens bewees hij dat het snijpunt van de parabool $y^2 = bx$ en de cirkel $x^2 = y(h - y)$ wordt gegeven door de eerder genoemde derdegraadsvergelijking. In onze moderne symbolische notatie is het bewijs daarvoor eenvoudig, want $y^4 = b^2x^2 = b^2y(h - y)$ geeft $y^3 = b^2(h - y)$, ofwel $y^3 + b^2y = b^2h$ en dat betekent dat $y^3 + qy = r$, want er was gedefinieerd dat $q = b^2$ en $h = r/b^2$. Dus inderdaad, de y -coördinaat van het snijpunt van de parabool en de cirkel is een oplossing van de onderzochte derdegraadsvergelijking.

Maar we zagen het hierboven al, deze symbolische algebra bestond nog niet in de tijd van Omar Khayyam. Hij moest het bewijs leveren door elke vergelijking term voor term in woorden te beschrijven. Hoewel zijn manipulaties met vergelijkingen

daarom veel meer ruimte beslaan dan de paar regels hierboven, zijn die manipulaties om tot de oplossing te komen wel degelijk algebra. Probeer zelf eens de volgende opgave te maken; Khayyam behandelde dit in het eerste algebrawerk dat hij publiceerde.

Opgave. Welke derdegraadsvergelijking laat zich meetkundig oplossen door de cirkel $y^2 = (x - 10)(20 - x)$ te snijden met de hyperbool $xy = 10\sqrt{2}(x - 10)$? (Hint: elimineer y .)

Khayyam probeerde ook om algemene algebraïsche oplossingen te vinden van derdegraadsvergelijkingen, zonder zich te hoeven beroepen op meetkundige bewijzen. Ondanks veel inspanningen lukte dat niet, zodat hij ten slotte de hoop opgaf en verzuchtte: 'We hebben geprobeerd om deze [oplossings]wortels algebraïsch uit te drukken, maar we faalden. Het kan zijn, echter, dat mensen die na ons komen hierin zullen slagen.' Voor derdegraadsvergelijkingen zou het overzicht van Omar Khayyam lange tijd de meest geavanceerde analyse blijven. Pas vier eeuwen later werd de algebraïsche oplossing gevonden, door de Italianen Scipione del Ferro, Tartaglia en Cardano. Voor de derdegraadsvergelijking uit het voorbeeld ($x^3 + qx = r$) is dat:

$$x = \sqrt[3]{\frac{r}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{3}\right)^3 + \left(\frac{r}{2}\right)^2}} - \sqrt[3]{-\frac{r}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{3}\right)^3 + \left(\frac{r}{2}\right)^2}}$$

Khayyam probeerde niet om te bewijzen of er voor een gegeven derdegraadsvergelijking eigenlijk wel een oplossing bestaat. Het bewijs daarvoor werd in de twaalfde eeuw geleverd door Sharaf al-Din al-Tusi (1135-1213, Aleppo/Mosul). Deze al-Tusi slaagde erin om precies te bepalen hoeveel positieve oplossingen er zijn voor elke mogelijke combinatie van coëfficiënten. Hiermee werd Khayyam's meetkundige theorie van derdegraadsvergelijkingen alsnog voltooid.

LITERATUUR Meer informatie over Arabische wiskundigen is te vinden op de website van Jan Hogendijk (Universiteit Utrecht en Leiden),

NIEUWE GETALLEN Omar Khayyam beperkte zich in zijn wiskunde niet tot de meetkunde. Het hele begrip getal werd mede door hem verder ontwikkeld. Euclides en de andere Griekse wiskundigen hadden altijd een duidelijk onderscheid gemaakt tussen 'getallen', dat wil zeggen gehele getallen en breuken, en 'groottes'. Een vierkante tafel met zijden van precies 1 meter zou volgens hen een diagonaal hebben waarvan de lengte niet als getal, maar alleen als 'grootte' weergegeven kan worden. In de Arabische wiskunde werd het begrip getal opgerekt, zodat ook vierkantswortels (zoals $\sqrt{2}$) door hen als getal werden beschouwd.

Omar Khayyam betoogde dat er een nieuwe klasse van getallen bestond, die gevormd werd door de verhouding tussen twee 'groottes'. Zo moesten volgens hem ook de verhouding tussen de omtrek en de diameter van een cirkel, of tussen de diagonaal en de zijde van een vierkant, worden beschouwd als een getal. Het voorstel om op die manier getallen zoals π en $\sqrt{2}$ te beschouwen als een nieuwe klasse van getallen zou door de latere wiskundige/astronoom Nasir al-Din al-Tusi (1201-1274, Maragha; geen familie van de wiskundige Sharaf al-Din al Tusi) worden overgenomen. Via het werk van al-Tusi belandden deze denkbeelden later bij de Europese wiskundigen. Die werkten de theorie verder uit. Zo ontstonden de verzameling van de natuurlijke getallen, gehele getallen, rationale getallen (breuken) en reële getallen (waartoe ook de irrationale getallen, zoals π en $\sqrt{2}$, behoren).

een wereldwijd erkend expert op dit vakgebied: www.math.uu.nl/people/hogendijk.

Een goed leesbare inleiding tot de wiskunde die door Arabische geleerden is ontwikkeld vind je in *Episodes in the Mathematics of Medieval Islam* van J.L. Berggren. Het verscheen in 1986 bij uitgeverij Springer-Verlag.

Een interessante website die speciaal aan Omar Khayyam is gewijd, is www.omarkhayyamnederland.com. ■

Op 18 september bogen 131 scholieren zich in Eindhoven over vijf uitdagende opgaven die samen de tweede ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade 2009 vormden. Het was de laatste keer dat er een nationale tweede ronde plaatsvond: vanaf 2010 bestaat de Nederlandse Wiskunde Olympiade uit drie rondes en worden ruim 500 deelnemers aan de eerste ronde uitgenodigd voor een regionale tweede ronde op een universiteit in de buurt. Zij kunnen zich dan plaatsen voor de landelijke finale in september 2010.

■ door Quintijn Puite en Birgit van Dalen

EEN RIJ VOL KWADRATEN



We bekijken in dit artikel opgave 2 van de tweede ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade. Deze opgave gaat over een getallenrij die zo begint:

0, 1, 2, 4, 6, 9, 12, ...

De getallen in deze rij noemen we de *termen* van de rij. Uitgaande van de beginterm $a_0 = 0$ wordt een nieuwe term in de rij steeds gemaakt door een bepaald getal op te tellen bij de vorige term. Dat getal dat opgeteld wordt, is de eerste twee keer 1, de volgende twee keer 2, de twee keer daarna 3, enzovoorts. We krijgen zo $a_1 = a_0 + 1 = 1$, $a_2 = a_1 + 1 = 2$, $a_3 = a_2 + 2 = 4$, $a_4 = a_3 + 2 = 6$, $a_5 = a_4 + 3 = 9$, $a_6 = a_5 + 3 = 12$, ... We kunnen dit recept blijven volgen en zo een oneindig lange rij getallen maken. Van elke term in de rij kunnen we zeggen hoe hij gemaakt is uit zijn voorganger. We moeten daarvoor wel onderscheid maken tussen termen met een *oneven index* (die schrijven we als a_{2n-1}) en termen met een *even index* (die schrijven we als a_{2n}). In de berekening van de eerste paar termen van de rij wordt steeds een term met een even index gemaakt door de helft van de index op te tellen bij zijn voorganger. Dus bijvoorbeeld $a_2 = a_1 + 1$, $a_4 = a_3 + 2$ en $a_6 = a_5 + 3$. Dit blijft waar, ook voor termen verderop in de rij, omdat het getal dat we optellen steeds 1 groter wordt als je twee termen verder gaat in de rij. In het algemeen kunnen we nu schrijven dat $a_{2n} = a_{2n-1} + n$. De term met oneven index die direct voor a_{2n} zit, is gemaakt door hetzelfde getal op te tellen bij de term daar weer voor. Kortom, $a_{2n-1} = a_{2n-2} + n$. We kunnen nu de rij heel mooi wiskundig opschrijven:

$a_0 = 0$ en voor alle gehele $n \geq 1$ geldt:

$$a_{2n-1} = a_{2n-2} + n,$$

$$a_{2n} = a_{2n-1} + n.$$

In de tweede ronde werd over deze getallenrij de volgende vraag gesteld:

Vind alle gehele getallen $k \geq 0$ waarvoor de term a_k het kwadraat van een geheel getal is.

Laten we eerst maar eens een flink stuk van de rij uitschrijven: 0, 1, 2, 4, 6, 9, 12, 16, 20, 25, 30, 36, 42, 49, 56, 64, 72, 81, 90, 100, ...

Hier zitten aardig wat kwadraten in! Het begint al met 0 (dat is 0^2) en daarna zien we 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81 en 100. Het lijkt er wel op dat in ieder geval alle termen met een oneven index een kwadraat zijn: $a_1 = 1^2$, $a_3 = 2^2$, $a_5 = 3^2$, enzovoorts. Kunnen we dit vermoeden ook weer in een mooie formule uitdrukken? We schreven de termen met oneven index als a_{2n-1} . Voor $n = 1$ krijgen we dat de term gelijk is aan 1^2 , voor $n = 2$ is hij 2^2 en voor $n = 3$ is hij 3^2 . Hier zien we al een mooi patroon in, wat we gemakkelijk genoeg in een formule kunnen gieten:

Vermoeden:

$$a_{2n-1} = n^2 \quad \text{voor alle gehele } n \geq 1.$$

We concentreren ons nu even op dit vermoeden over de termen met oneven index. Verderop gaan we nog kijken wat er met de termen met even index gebeurt.

HET VERMOEDEN BEWIJZEN Bij de tweede ronde moet je al je beweringen bewijzen. In dit geval is het niet voldoende dat ons vermoeden klopt voor de eerste twintig termen van de rij, die we uitgeschreven hebben, maar moeten we het voor algemene n bewijzen. Dat is echter niet zo moeilijk als het klinkt. Omdat we op dit moment even alleen geïnteresseerd zijn in de termen van de rij met oneven index, gaan we eerst eens proberen om een term met oneven index uit te drukken in de vorige term met een oneven index. We wisten al

$a_{2n-1} = a_{2n-2} + n$. Bovendien kunnen we ook a_{2n-2} weer uitdrukken in zijn voorganger: $a_{2n-2} = a_{2n-3} + (n-1)$. Samen krijgen we dus $a_{2n-1} = a_{2n-3} + (n-1) + n = a_{2n-3} + 2n-1$.

Kunnen we nu bijvoorbeeld ook a_{11} uitdrukken in a_1 ? Als we hierboven $n = 6$ nemen, krijgen we $a_{11} = a_9 + 11$. Als we $n = 5$ nemen, krijgen we $a_9 = a_7 + 9$. Door op deze manier verder te gaan, komen we uiteindelijk op

$$\begin{aligned} a_{11} &= a_1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = \\ &= 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11. \end{aligned}$$

Dit kunnen we ook wel in het algemeen:

$$\begin{aligned} a_{2n-1} &= a_{2n-3} + (2n-1) = \\ &= a_{2n-5} + (2n-3) + (2n-1) = \dots = \\ &= 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-3) + (2n-1). \end{aligned}$$

Nu moeten we alleen nog uitvinden wat de som van de oneven getallen van 1 tot en met $2n-1$ is. Voor de som van een aantal getallen waar steeds hetzelfde verschil tussen zit (ook wel een *rekenkundige rij* genoemd) bestaat een formule: we moeten het gemiddelde van het eerste en laatste getal nemen en dat vermenigvuldigen met het aantal getallen dat we willen optellen. In ons geval: het aantal oneven getallen van 1 tot en met $2n-1$ is precies n ; en het gemiddelde van 1 en $2n-1$ is $\frac{1+(2n-1)}{2} = n$. Dit betekent dat de som van de oneven getallen van 1 tot en met $2n-1$ gelijk is aan $n \cdot n = n^2$. We concluderen dat ons vermoeden correct is: $a_{2n-1} = n^2$ voor alle gehele $n \geq 1$. In het kader op pagina 28 vind je nog een ander bewijs.

DE TERMEN MET EVEN INDEX We weten nu dat alle termen met oneven index een kwadraat zijn. We wisten ook dat a_0 een kwadraat is. Maar hoe zit het met de termen $a_2, a_4, a_6, \dots$? Kunnen sommige van deze termen ook nog een kwadraat zijn? Het lijkt er niet op, want bij de eerste twintig termen is dat nooit het geval. Bovendien zijn er al zoveel kwadraten in gebruik door de termen met oneven index, dat er weinig overblijft voor de termen met even index. Om precies te zijn, er blijven helemaal *geen* kwadraten over.

Kunnen we dat ook wiskundig precies maken? We weten dat de termen van de rij steeds groter worden (je telt er immers steeds een positief getal bij op), oftewel $a_{2n-1} < a_{2n} < a_{2n+1}$ voor alle $n \geq 1$. En we weten dat $a_{2n-1} = n^2$ en $a_{2n+1} = (n+1)^2$. Dus geldt $n^2 < a_{2n} < (n+1)^2$. Maar n^2 en $(n+1)^2$ zijn opeenvolgende kwadraten, dus daar liggen natuurlijk geen andere kwadraten meer tussen. Dus a_{2n} kan nooit een kwadraat zijn voor $n \geq 1$.

We hebben nu de oplossing van de opgave gevonden. De indices k waarvoor a_k een kwadraat is, zijn $k = 0$ en alle oneven getallen k (en dat zijn ze ook echt allemaal).

NOG EEN FORMULE We hebben hiervoor gekeken naar de termen in de rij met oneven index. Daar hebben we een formule voor gemaakt en met behulp van die formule hebben we de opgave opgelost. Dit hebben we gedaan zonder een formule voor de termen met even index te bedenken! Natuurlijk kunnen we daar wel een formule voor maken, heel makkelijk zelfs. We kennen immers de termen met oneven index al en we kunnen elke term uit zijn voorganger maken: $a_{2n} = a_{2n-1} + n = n^2 + n$. Deze formule $a_{2n} = n^2 + n$ kun je overigens ook direct bewijzen op dezelfde twee manieren als waarmee we de formule $a_{2n-1} = n^2$ bewezen hebben. Probeer het maar eens.

Kunnen we nu ook aan deze formule zien dat a_{2n} geen kwadraat is voor $n \geq 1$, zonder te gebruiken (zoals we hierboven deden) dat het tussen twee opeenvolgende kwadraten in zit? Ja, dat kan, als we gebruikmaken van *priemgetallen* (getallen die door precies twee getallen deelbaar zijn: 1 en zichzelf). Elk positief geheel getal kun je schrijven als product van priemgetallen. Dat heet de *priemfactorisatie*

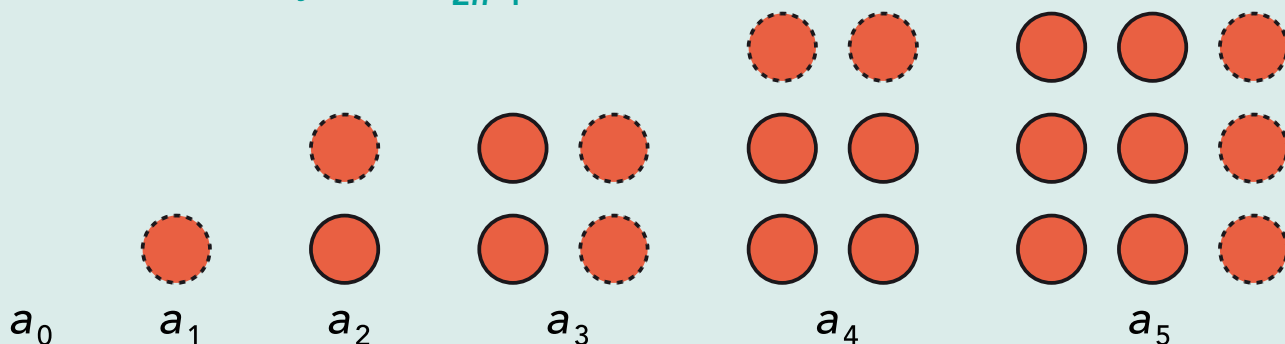
van een getal. Bijvoorbeeld: $10 = 2 \cdot 5$ en $24 = 2^3 \cdot 3$. In de priemfactorisatie van 24 komt de priemfactor 2 voor met exponent 3 en komt de priemfactor 3 voor met exponent 1 (maar die laten we in de schrijfwijze meestal weg, want $3^1 = 3$). De priemfactorisatie van een getal laat dus zien door welke priemgetallen dat getal deelbaar is en ook hoe vaak het door elk van die priemgetallen deelbaar is.

We kunnen aan de priemfactorisatie van een getal zien of het een kwadraat is of niet. Kwadraten zijn namelijk precies de getallen die allemaal *even* exponenten in hun priemfactorisatie hebben. Neem bijvoorbeeld 144. Dat kunnen we schrijven als $144 = 2^4 \cdot 3^2$. Je ziet dat de 144 een even aantal keer (namelijk 4 keer) deelbaar is door 2 en een even aantal keer (namelijk 2 keer) deelbaar door 3. Omdat 2 en 3 de enige priemgetallen zijn waar 144

deelbaar door is, kunnen we hieruit concluderen dat 144 een kwadraat is. Andersom geldt het ook: omdat bijvoorbeeld $48 = 2^4 \cdot 3$ een oneven aantal keer (namelijk 1 keer) deelbaar is door 3, is 48 geen kwadraat. Dat hij wel een even aantal keer door 2 deelbaar is, is niet genoeg: kwadraten zijn door *al* hun priemfactoren een even aantal keer deelbaar.

Nu gaan we bewijzen dat $n^2 + n$ nooit een kwadraat is voor $n \geq 1$. We halen eerst een factor n buiten haakjes: $n^2 + n = n(n + 1)$. We kijken nu naar de priemfactoren van n en $n + 1$. Als n bijvoorbeeld deelbaar is door 2, dan is $n + 1$ dat juist niet. En andersom: als $n + 1$ deelbaar is door 2, dan is n dat niet. Zo geldt dat voor elk priemgetal p waar $n(n + 1)$ deelbaar door is: ofwel n is deelbaar door p , ofwel $n + 1$ is deelbaar door p , maar niet allebei. Als n deelbaar is door p , dan is daarom de exponent bij p in de priemfactorisatie van n gelijk aan de ex-

Een ander bewijs voor $a_{2n-1} = n^2$



Figuur 1 De eerste zes termen van de rij weergegeven met fiches

Het vermoeden dat we op pagina 26 formuleerden, kunnen we ook anders bewijzen, namelijk met behulp van het neerleggen van *fiches*. We gaan, zoals in figuur 1, één voor één de termen uit de rij weergeven door een aantal fiches op tafel te leggen. We beginnen met $a_0 = 0$ fiches. Dat is dus een lege tafel. Vervolgens voegen we 1 fiche toe om a_1 te krijgen. Nu ligt er 1 fiche op tafel. Om a_2 te krijgen, moeten we weer 1 fiche toevoegen, dat we netjes boven het eerste fiche leggen. Voor a_3 moeten we 2 fiches toevoegen. Deze leggen

we zo bij de twee fiches die er al lagen, dat de fiches samen een vierkant vormen. In de volgende stap voegen we weer 2 fiches toe, die we langs één zijde van het vierkant leggen. Nu ligt er een rechthoek van $a_4 = 6$ fiches. We maken er a_5 fiches van door 3 fiches toe te voegen. Deze kunnen we langs de lange zijde van de rechthoek leggen, zodat we opnieuw een vierkant krijgen.

Elke keer dat we met de fiches op tafel een vierkant kunnen leggen, betekent dat dat het aantal fiches op

ponent bij p in de priemfactorisatie van $n(n+1)$.

We kunnen dus in feite de priemfactorisatie van $n(n+1)$ in twee stukken hakken: sommige priemfactoren zitten in hun 'geheel' (dat wil zeggen: inclusief exponent) in de priemfactorisatie van n , en andere priemfactoren zitten juist helemaal in $n+1$. Neem bijvoorbeeld $n = 15$. Dan is $n(n+1) = 240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$. De priemfactor 2 met exponent 4 zit in $n+1 = 16$; de andere twee priemfactoren vormen samen $n = 15$.

Stel nu dat $n(n+1)$ een kwadraat is. Dan zijn alle exponenten in de priemfactorisatie van $n(n+1)$ even. We hebben net gezien dat de priemfactoren inclusief exponenten verdeeld worden over n en $n+1$, dus ook de exponenten in de priemfactorisaties van n en $n+1$ zijn allemaal even. Dat betekent dat n en $n+1$ allebei zelf een kwadraat zijn. Dat zijn dus twee opeenvolgende getallen die alle-

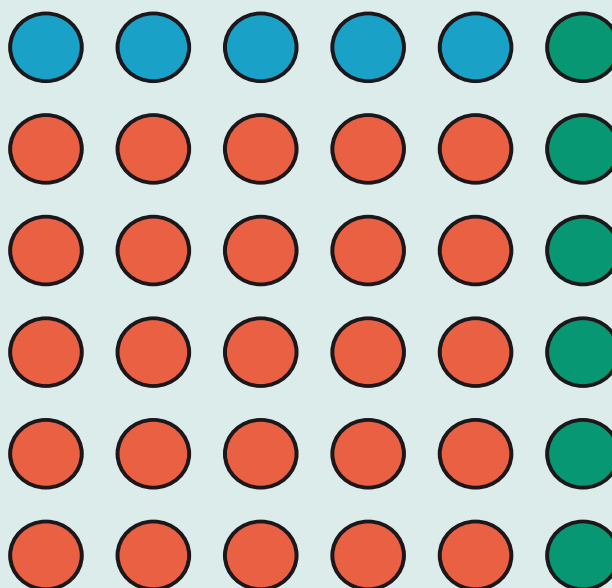
bei een kwadraat zijn. Maar dat komt bij positieve kwadraten nooit voor. We concluderen dat $a_{2n} = n(n+1)$ voor geen enkele gehele $n \geq 1$ een kwadraat is. Natuurlijk is $a_0 = 0$ wel een kwadraat.

We zijn nu op een andere manier opnieuw bij de oplossing van de opgave aangekomen. Even terugkijken: we hebben op twee verschillende manieren de formules $a_{2n-1} = n^2$ en $a_{2n} = n(n+1)$ bewezen. Vervolgens hebben we daar op twee verschillende manieren uit afgeleid welke termen van de rij kwadraten zijn. Je kunt deze opgave dus op minstens vier manieren oplossen! Lukt het jou om nog een andere oplossing te vinden? ■

tafel een kwadraat is. Ons vermoeden zegt dat bij term a_{2n-1} een vierkant van n bij n fiches op tafel ligt. Stel nu dat we dit al weten voor een zekere n . We willen nu laten zien dat we na twee keer fiches toevoegen een vierkant van $n+1$ bij $n+1$ kunnen leggen, want dan geldt $a_{2n+1} = (n+1)^2$. Als we zo voor elke n de stap van een $n \times n$ vierkant naar een $(n+1) \times (n+1)$ vierkant kunnen maken, dan kunnen we van een 1×1 vierkant naar een 2×2 vierkant, vanaf daar naar een 3×3 vierkant, enzovoorts. Deze bewijsmethode heet *volledige inductie*.

We beginnen dus met een vierkant van n bij n fiches. In figuur 2 hebben we bijvoorbeeld voor $n = 5$ een vierkant van 5 bij 5 rode fiches liggen. We gaan eerst maar eens naar a_{2n} fiches: we moeten daarvoor n extra fiches op tafel leggen, want $a_{2n} = a_{2n-1} + n$. Omdat we een vierkant van n bij n hadden, kunnen we de n nieuwe fiches mooi langs een zijde van het vierkant leggen (de blauwe fiches in figuur 2). Nu hebben we een rechthoek van n bij $n+1$. Omdat $a_{2n+1} = a_{2n} + (n+1)$, pakken we vervolgens $n+1$ fiches erbij. Deze leggen we langs de lange zijde van de rechthoek (de groene fiches in figuur 2) zodat er een vierkant van $n+1$ bij $n+1$ gevormd wordt. Er liggen nu a_{2n+1} fi-

ches op tafel en dat zijn er blijkbaar precies $(n+1)^2$. Dit is wat we graag wilden! We hebben vanuit een vierkant van n bij n fiches in twee stappen een vierkant van $n+1$ bij $n+1$ fiches gemaakt.



Figuur 2 Van een vierkant van 5 bij 5 fiches in twee stappen naar een vierkant van 6 bij 6 fiches

PYTHAGORAS OLYMPIADE

■ door Matthijs Coster, Alexander van Hoorn, Eddie Nijholt en Tijmen Veltman

30

De *Pythagoras Olympiade* is vernieuwd!
Elke aflevering bevat vier opgaven.

De eerste twee zijn wat eenvoudiger;
onder de goede inzendingen van
leerlingen uit de klassen 1, 2 en 3 wordt
een boekenbon van 20 euro verloot.

De laatste twee zijn echte breinbrekers;
onder de goede inzendingen van
leerlingen (tot en met klas 6) wordt een
boekenbon van 20 euro verloot.

Bovendien kun je je via deze breinbrekers plaatsen voor de tweede ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade, mocht het via de eerste ronde niet lukken. Niet-leerlingen kunnen met de Pythagoras Olympiade meedoen voor de eer.



HOE IN TE ZENDEN?

Inzendingen ontvangen we bij voorkeur per e-mail (getypt of een scan van een handgeschreven oplossing):
pytholym@pythagoras.nu.

Eventueel kun je je oplossing sturen naar
Pythagoras Olympiade,
Korteweg-de Vries Instituut,
Universiteit van Amsterdam,
Postbus 94248, 1090 GE Amsterdam.

Voorzie het antwoord van een duidelijke toelichting (dat wil zeggen: een berekening of een bewijs). Vermeld je naam en adres; leerlingen moeten ook hun klas en de naam van hun school vermelden.

Je inzending moet bij ons binnen zijn vóór 31 december 2009.

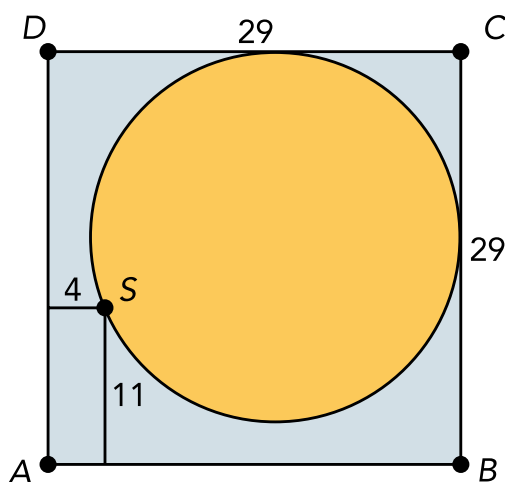
OPGAVE 174



Drie jongens en vijf meisjes gaan naar de bioscoop. Ze nemen plaats op acht naast elkaar staande stoelen. De jongens willen graag zo zitten, dat ze allemaal tussen twee meisjes in zitten. Op hoeveel manieren kunnen de acht kinderen plaatsnemen op de stoelen?

OPGAVE 175

Binnen vierkant $ABCD$ met zijde 29 is een punt S getekend. De afstand van S tot AB is 11 en de afstand van S tot AD is 4. De gele cirkel is de grootste mogelijke cirkel door het punt S die nog binnen het vierkant past. Bereken de straal van die cirkel.

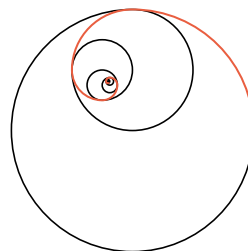


OPGAVE 176

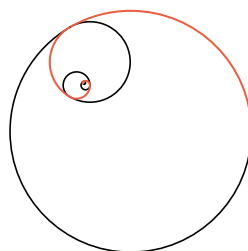
Vind alle gehele getallen x en y die voldoen aan de vergelijking

$$\frac{1}{x^2 y} + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{y} = 1.$$

OPGAVE 177



Op de eenheidscirkel (de cirkel met de oorsprong als middelpunt en straal 1) begin je vanaf het punt $(1, 0)$ tegen de klok in te lopen. Zodra je een kwart van de cirkel hebt doorlopen (en dus op het punt $(0, 1)$ staat), teken je een nieuwe cirkel, met straal $\frac{1}{2}$, die de vorige cirkel op dit punt van binnen raakt. Op deze cirkel loop je ook weer een kwart tegen de klok in, waarna je opnieuw een cirkel tekent met een straal die de helft van de vorige is en die de vorige cirkel op dit punt van binnen raakt. Deze procedure herhaal je eindeloos. Wat zijn de coördinaten van het limietpunt?



Wat is het limietpunt als je niet steeds een kwart-cirkel doorloopt maar eenderde deel van de cirkel, en als straal niet de helft van de vorige neemt maar eenderde deel van de vorige? Je beginpunt is nog steeds $(1, 0)$.

OPLOSSING

168

Schrijf de volgende som zo eenvoudig mogelijk:

$$1 \cdot n + 2 \cdot (n-1) + 2^2 \cdot (n-2) + \\ + 2^3 \cdot (n-3) + \dots + 2^{n-2} \cdot 2 + 2^{n-1}$$

Oplossing. Noem de som S_n . Dan is

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k (n-k) \\ = \sum_{k=0}^n 2^k (n-k)$$

en

$$2S_n = \sum_{k=0}^{n-1} 2^{k+1} (n-k) \\ = \sum_{k=0}^n 2^k (n-k+1) - (n+1)$$

Trekken we de eerste gelijkheid van de tweede af, dan krijgen we

$$S_n = \sum_{k=0}^n 2^k - (n+1).$$

Met de formule voor de som van een meetkundige rij vinden we vervolgens

$$S_n = \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} - (n+1) = 2^{n+1} - n - 2.$$

32

De goede inzenders

168: Kees Boersma, Vlissingen; Elias C. Buissant des Amorie, Castricum; Patrick Heebels, Alkmaar; Arie Heikoop, Kampen; Jeroen Huijben, Theresia Lyceum, Tilburg; Walter Jacobs, Mechelen; Sander Konijnenberg, RSG 't Rijks, Bergen op Zoom; Arie van der Kraan, Nuth; Aziz el Mallouki, Amersfoort; Erzsébet Nándorfi, Rijnlands Lyceum, Oegstgeest; Fred Schalekamp, Brakel.

169: Kees Boersma, Vlissingen; Elias C. Buissant des Amorie, Castricum; Anthon van Dijk, Hoofddorp; Andy Habets, St. Ignatius Gymnasium, Amsterdam; Joep Hamersma, Praedinius Gymnasium, Groningen; Patrick Heebels, Alkmaar; Arie Heikoop, Kampen; Jeroen Huijben, Theresia Lyceum, Tilburg; Walter Jacobs, Mechelen; Sander Konijnenberg, RSG 't Rijks, Bergen op Zoom; Willem van Loon, Berg en Dal; Daan van der Maas, RSG Pantarijn, Wageningen; Aziz el Mallouki, Amersfoort; Erzsébet Nándorfi, Rijnlands Lyceum, Oegstgeest; Sander Pereboom, Alfrink College, Zoetermeer; Fred Schalekamp, Brakel; Simon Vandeveld, Edugo Campus De Toren, Oostakker; Marieke van der Wegen, Stedelijk Lyceum, Enschede.

De boekenbonnen gaan naar Sander Konijnenberg en Erzsébet Nándorfi.

OPLOSSING

169

Vind alle positieve gehele getallen waarvan het eerste cijfer een 6 is en die de eigenschap hebben dat het getal 25 keer zo klein wordt door die eerste 6 weg te halen.

Laat ook zien dat er geen positieve gehele getallen zijn die 35 keer zo klein worden door het eerste cijfer (wat dat ook is) weg te halen.

Oplossing. Een getal x dat met een 6 begint, kan worden geschreven als $x = 6 \cdot 10^n + y$, waarbij $y < 10^n$. Als we de 6 weghalen, houden we y over. We hebben dus:

$$y = \frac{x}{25} = \frac{6 \cdot 10^n + y}{25},$$

ofwel

$$24y = 6 \cdot 10^n = 600 \cdot 10^{n-2}.$$

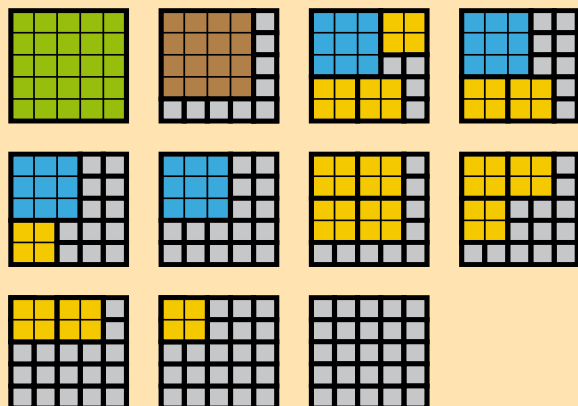
Delen door 24 levert $y = 25 \cdot 10^{n-2}$. Dus moet x voldoen aan $x = 625 \cdot 10^{n-2}$. Omdat x geheel moet zijn, volgt $x = 625 \cdot 10^k$, waarbij k een geheel, niet-negatief getal is.

Dan het tweede deel van de opgave. Stel dat er wél een geheel getal bestaat dat 35 keer zo klein wordt als we het eerste cijfer weghalen. Dit getal is te schrijven als $c \cdot 10^n + y$, met $y < 10^n$ en waarbij c een cijfer is (1 tot en met 9). Dan volgt $c \cdot 10^n + y = 35y$ en dus $c \cdot 10^n = 34y$. We zien dat de rechterkant deelbaar is door 17, en in de priemontbinding dus ten minste één factor 17 heeft. Maar de linkerkant heeft in de priemontbinding alleen de priemfactoren van c en van 10^n . Omdat de priemfactoren van 10^n alleen maar tweeën en vijven zijn en $0 < c < 10$, kan de linkerkant geen factor 17 bevatten; een tegenspraak. Dus zijn er geen natuurlijke getallen die 35 keer zo klein worden als je het eerste cijfer weghaalt.

OPLOSSINGEN KLEINE NOOTJES NR. 1

GREEP VAN VIERKANTJES

Het kan met 11 verschillende grepen:



DELEN

De drie getallen zijn 48 (een viervoud),
49 (een zevenvoud) en 50 (een vijfvoud).

OP ZIJN KOP

196 is het kwadraat van 14. Als je 196 op zijn kop
ziet, lees je 961 en dat is het kwadraat van 31.

GELDTOREN VAN HANOI

In totaal gaat er 15,16 euro door je vingers.

KNIKKERDOOS

Er zitten $2^3 = 8$ keer zoveel knikkers in.
Het gewicht blijft hetzelfde.

**PYTHA
GORAS**

49ste jaargang nummer 2
november 2009
ISSN 0033 4766

Pythagoras wordt uitgegeven onder
auspiciën van de Nederlandse On-
derwijscommissie voor Wiskunde en
richt zich tot alle leerlingen van vwo
en havo. *Pythagoras* stelt zich ten
doel jongeren kennis te laten maken
met de leuke en uitdagende kanten
van wiskunde.

Internet www.pythagoras.nu

Hoofredacteur Arnout Jaspers

Eindredacteur Alex van den Brandhof

Redactie Matthijs Coster,
Jeanine Daems, Jan Guichelaar,
Klaas Pieter Hart

Bladmanager Tilman Grünwald,
Mathematisch Instituut,
Universiteit Leiden,
Postbus 9512, 2300 RA Leiden.

Vormgeving Grafisch Team
Digipage BV, Leidschendam

Druk Drukkerij Ten Brink, Meppel

Uitgever Koninklijk Wiskundig
Genootschap

Verantwoordelijk uitgever Chris Zaal

Lezersreacties en kopij Bij voorkeur
per e-mail; lezersreacties naar Jan
Guichelaar, jan@pythagoras.nu en
kopij naar Arnout Jaspers, arnout@pythagoras.nu. Eventueel per post
naar Jan Guichelaar, Pedro de Medi-
nalaan 162, 1086 XR Amsterdam.

Abonnementen, bestellingen en mutaties

Mirjam Worst, Drukkerij Ten Brink,
Postbus 41,
7940 AA Meppel.
Telefoon 0522 855 175,
fax 0522 855 175.

Abonnementsprijs

(6 nummers per jaargang)
€ 22,00 (Nederland),
€ 24,00 (België),
€ 28,00 (overig buitenland),
€ 18,00 (leerlingabonnement
Nederland),
€ 20,00 (leerlingabonnement België),
€ 12,00 (groepsabonnement
Nederland),
€ 14,00 (groepsabonnement België).
Zie www.pythagoras.nu voor toelich-
tingen.

Aan dit nummer werkten mee

Dick Beekman, auteur van diverse brein-
brekerboeken (d.beekman9@chello.nl),
Alex van den Brandhof, docent
wiskunde op het Vossiusgymnasium te
Amsterdam (alex@pythagoras.nu),
Matthijs Coster, wetenschappelijk on-
derzoeker bij het Ministerie van Defen-
sie (matthijs@pythagoras.nu), Birgit van
Dalen, aio wiskunde aan de UL (daalen@math.leidenuniv.nl), Jan Guichelaar, voor-
malig directeur van Interconfessionele
Scholengroep Amsterdam ([jan@pytha-
goras.nu](mailto:jan@pytha-
goras.nu)), Klaas Pieter Hart, docent to-
pologie aan de TUD ([kp@pythagoras.
nu](mailto:kp@pythagoras.
nu)), Alexander van Hoon, student wis-
kunde aan de UvA ([alexander@pythago-
ras.nu](mailto:alexander@pythago-
ras.nu)), Arnout Jaspers, wetenschaps-
journalist (arnout@pythagoras.nu), Eric
Kirchner, wetenschappelijk onderzoeker
bij AkzoNobel (herihor@yahoo.com), Ed-
die Nijholt, student wiskunde aan de UvA
(eddie@pythagoras.nu), Quintijn Puite,
docent wiskunde aan de TUE en de Ho-
geschool Utrecht (g.w.q.puite@tue.nl),
Lee Sallows, recreatief wiskundige
(lee.sal@inter.nl.net), Tijmen Veltman,
student wiskunde aan de UvA (tijmen@pythagoras.nu)

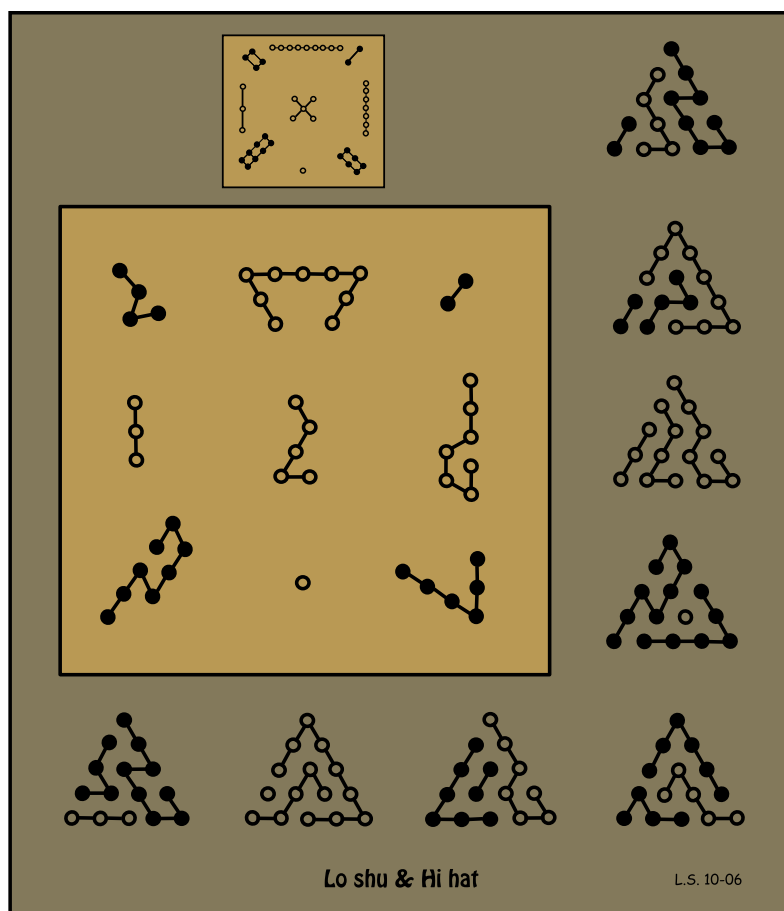
33



GEOMAGISCH VIERKANT

■ door Lee Sallows

In een magisch vierkant is de som van de getallen in alle rijen, kolommen en de twee diagonalen hetzelfde. In een geomagisch vierkant staan geen getallen, maar figuren. Met de figuren in iedere kolom, rij en diagonaal moet steeds dezelfde vorm worden gelegd.



© Lee Sallows

Bovenaan zie je het bekende Lo shu diagram, waarin getallen worden gerepresenteerd door groepen van puntjes. Het komt over alsof het zeer oud is, maar het is eigenlijk nep. Het is het werk van een Chinese grappenmaker uit de tiende eeuw, lang nadat men in China al gewend was met karakters te schrijven. Maar kijk eens hoe dicht hij bij het uitvinden van geomagische vierkanten komt!

Lees ook pagina 18 en doe mee met de prijsvraag (zie pagina 14) waarin geomagische vierkanten een rol spelen!