

PYTHA GORAS

WISKUNDETIJDSCHRIFT VOOR JONGEREN

Ads door **Pythagoras**



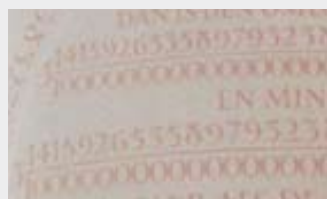
**De software-engineer
van Google**



**Hoeveel driehoeken
zie je?**



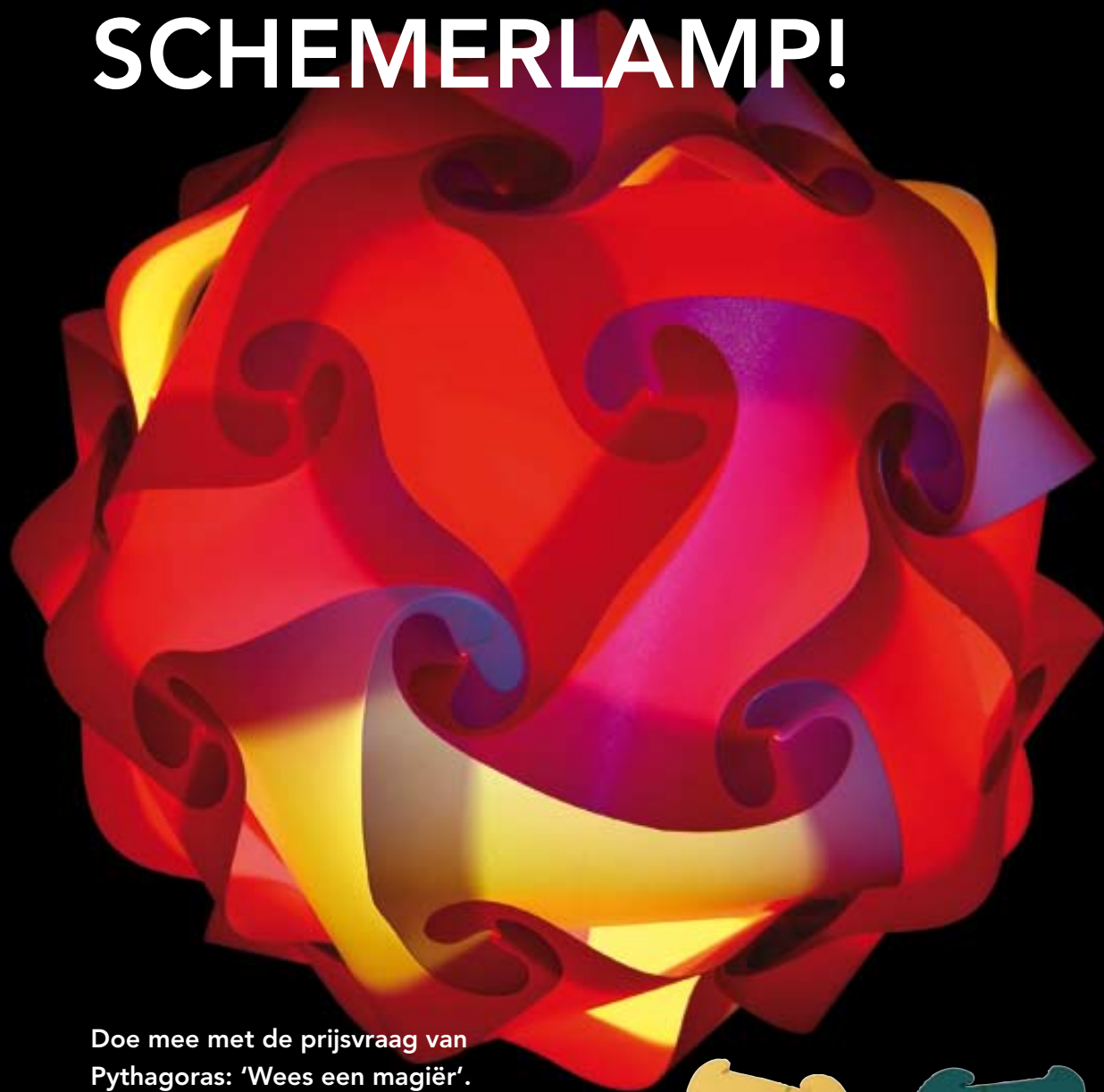
Spelen met variantie



**Hoe Van Ceulen
 π insloot**



WIN EEN GEHAAKTE SCHEMERLAMP!



Doe mee met de prijsvraag van Pythagoras: 'Wees een magiër'. Een gehaakte schemerlamp, zoals je hier ziet afgebeeld, kun je winnen. In het vorige nummer presenteerden we de prijsvraag; je kunt hem ook vinden op onze website: www.pythagoras.nu. Op pagina 25 van dit nummer vind je de antwoorden van de oefenopgaven uit het vorige nummer. Insturen kan nog tot 1 april.



INHOUD



4 DE SOFTWARE-ENGINEER VAN GOOGLE: 'EIGENLIJK MAG IK NIKS ZEGGEN'

In het thema-artikel komt Han-Wen Nienhuys aan het woord. Hij studeerde toegepaste wiskunde en deed een promotie-onderzoek op het snijvlak van wiskunde en informatica. Tegenwoordig werkt hij bij Google in Brazilië. Hij is daar programmeur, of, met een sjiek woord: software-engineer. Hij houdt zich bezig met de advertentiedienst *Google AdSense*.

EN VERDER

- 2 Kleine nootjes
- 9 Journaal
- 10 Hoeveel driehoeken zie je?
- 16 Alle hoeken van het spiegelpaleis
- 18 Vier tips voor de eerste ronde
- 20 Spelen met variantie
- 25 Wees een magiër; de antwoorden van de oefenopgaven van de prijsvraag
- 29 De werking van een helderziend vierkant
- 30 Pythagoras Olympiade
- 33 Oplossingen Kleine nootjes nr. 2

12 LUDOLPH VAN CEULEN (1540-1610): MEESTER DER REKENMEESTERS

12



2010 is Van Ceulenaar en daarom kun je in dit eerste nummer van 2010 in onze serie over grote wiskundigen twee artikelen lezen over deze rekenmeester. Hij overleed dit jaar precies 400 jaar geleden. Op zijn grafsteen in de Pieterskerk te Leiden staan de eerste 35 decimalen van het getal π die hij wist te berekenen – een enorme prestatie in een tijd zonder rekenmachines en computers.

HOE VAN CEULEN π INSLOOT

■ **NIVEAUBALKJES** Pagina's met één of meer zwarte balkjes (onder de paginanummering) geven de moeilijkheidsgraad aan. Eén balkje: lastig. Twee balkjes: vereist wiskundekennis uit de vijfde of zesde klas. Drie balkjes: net iets moeilijker.



KLEINE NOOTJES

■ door Dick Beekman en Jan Guichelaar



TOVENARIJ

Je hebt een blinddoek om en krijgt een stapel rood-witte kaarten in je handen. Je krijgt te horen: 'Precies tien van de kaarten in je hand hebben de witte kant boven.' Je rommelt wat met de kaarten en verdeelt ze in twee stapels. In beide stapels blijken even veel kaarten met de witte kant naar boven te liggen. Hoe heb je dat gedaan?



HOE LAAT IS HET?

De grote en de kleine wijzer van een klok staan elk precies op een minuten-streepje op een klok. De grote wijzer is 14 streepjes voor op de kleine wijzer. Hoe laat is het?

PRESIDENTEN

In de Verenigde Staten kun je bekers kopen met fotootjes van alle Amerikaanse presidenten erop, tot en met Obama. Obama is de 44ste president, maar er staan slechts 43 fotootjes op. Hoe kan dat?



Kleine nootjes zijn eenvoudige opgaven die weinig of geen wiskundige voorkennis vereisen om opgelost te kunnen worden. De antwoorden vind je in het volgende nummer van Pythagoras.

ZWAARDER OF LICHTER?

Je hebt vijf gewichtjes, waarvan er één een afwijkend gewicht heeft. Verder heb je een balans waar je de gewichtjes op kunt leggen. Als het gewicht aan beide kanten van de balans even zwaar is, blijft de balans in evenwicht. Als de balans doorslaat, raakt hij uit evenwicht: de zware kant komt dan lager te liggen dan de lichte kant.

Je mag de balans maar twee keer gebruiken. Hoe kun je bepalen of het afwijkende gewichtje zwaarder of lichter is dan de overige vier?



GEKKE BREUKEN

De breuk $\frac{6729}{13458}$ is gelijk aan $\frac{1}{2}$ en gebruikt alle cijfers 1 tot en met 9 precies één keer. Kun je op dezelfde manier breuken maken die gelijk zijn aan $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ en $\frac{1}{5}$?

$$\frac{6729}{13458} = \frac{1}{2}$$

THEMA BEROEPEN ► AFLEVERING 3

Google is tegenwoordig veel meer dan een zoekmachine op internet. Google Earth, Google Desktop, Google Maps, Google Street View, Gmail, Google Wave, Google Chrome, Google Talk, Google Translate, Google Picasa, Google Analytics en zo kunnen we nog wel even doorgaan: het bedrijf heeft het afgelopen decennium talloze diensten ontwikkeld. Nederlander Han-Wen Nienhuys werkt voor Google in Brazilië. Hij studeerde toegepaste wiskunde en deed een promotie-onderzoek op het snijvlak van wiskunde en informatica. Bij Google is hij programmeur, of, met een sjiek woord: software-engineer.

■ door Alex van den Brandhof

DE SOFTWARE-ENGINEER VAN GOOGLE: 'EIGENLIJK MAG IK NIKS ZEGGEN'



Op deze foto zie je behalve Google-logo's vlaggen van diverse Braziliaanse staten en landen. Han-Wen Nienhuys staat ongeveer in het midden (met wit T-shirt); hij houdt een Nederlandse vlag vast (dat is niet meteen duidelijk: de blauwe strook van de vlag zit verstopt achter het Google-bord op de voorgrond). Op sommige T-shirts staan logo's van voetbalteams; voetbal is zowat een religie in Brazilië! (Foto: Eider Oliveira)

Wie?	Dr. ir. H.-W. Nienhuys (15 januari 1975, Eindhoven)
Wat?	software-engineer bij Google Brasil Internet Ltda.
Waar?	Belo Horizonte, Brazilië
Studie:	toegepaste wiskunde, Technische Universiteit Eindhoven
Promotie:	informatica, Universiteit Utrecht
Middelbare school:	Hertog Jan College, Valkenswaard (tegenwoordig Were Di College)

'Ik ben een rijke stinkerd,' zegt Han-Wen Nienhuys. Hij voegt daar gauw aan toe: 'Althans, in Brazilië.' Dat is het land waar Nienhuys sinds maart 2007 woont en werkt bij Google. Voor West-Europese begrippen valt zijn salaris wel mee: 'Mijn salaris is hier weliswaar bovenmodaal, maar niet extreem hoog.' Je ziet het niet aan hem af: gekleed in een eenvoudig groen T-shirt arriveert hij op een vrijdagochtend in een grand café in Utrecht, zijn voormalige woonplaats, waar ik een afspraak met hem heb. Hij heeft nog niet ontbeten en bestelt een uit-smijter ham-kaas en een cappuccino.

Het Braziliaanse Research & Development kantoor van Google bevindt zich in Belo Horizonte, de op drie na grootste stad van Brazilië, 600 kilometer van São Paulo en 450 kilometer van Rio de Janeiro. Nienhuys kwam bij Google terecht nadat hij bezig was geweest met zijn eigen product *LilyPond*, een soort tekstverwerker voor muziekpartituren waaraan Nienhuys al als student werkte (zie kader). Ook had hij een jaar op een consultancy-bureau in Nederland gewerkt. Het werk als consultant viel hem tegen; het betaalde weliswaar goed en hij kreeg een auto van de zaak, maar de bedrijfscultuur beviel hem niet. LilyPond daarentegen was (en is) zijn kindje waar hij nog altijd liefde voor heeft, maar uiteindelijk moet er ook brood op de plank. Nienhuys: 'Je eigen product maken is leuk, dus ik dacht eraan om voor mijzelf te beginnen. Dat leek aantrekkelijk: als je eigen baas bent, heb je veel vrijheid. Maar er is ook een keerzijde: je moet je product verkopen en de markt voor LilyPond is klein. Ik heb het een tijdje geprobeerd, maar het leverde nauwelijks geld op.'

Toen kreeg hij, *out of the blue*, een e-mail van een recruiter van Google Zürich. 'Wil je bij ons komen werken?' was samengevat de vraag die in het mailtje werd gesteld. Nienhuys had helemaal geen contacten in Zürich en aan een baan bij Google had hij nog nooit gedacht. Ze hadden zijn cv op internet gevonden en dachten: dat kan een interessante persoon voor ons zijn. Nienhuys was nieuwsgierig en liet blijken wel interesse te hebben in een functie bij Google.

Natuurlijk zat er nog wel een sollicitatieprocedure aan vast. Die verliep op zijn zachtst gezegd opmerkelijk: in een aantal telefoongesprekken werden Nienhuys enkele problemen voorgelegd. Bijvoorbeeld: 'Je hebt een miljoen 32-bits getallen en die moeten allemaal gesorteerd worden.' Het sorteren is voor een programmeur geen probleem, maar wat de vragensteller aan de andere kant van de lijn voortdurend deed, was extra hindernissen inbouwen: 'Die getallen moeten worden gesorteerd op een mobiele telefoon met 2 MB geheugen. Hoe doe je dat?' Door deze extra eis wordt het opeens een

LILYPOND Samen met Jan Nieuwenhuizen ontwikkelde Han-Wen Nienhuys het computerprogramma *LilyPond* om bladmuziek te maken. Zij hebben speciale aandacht besteed om de uitvoer zo veel mogelijk op handgegraveerde bladmuziek te laten lijken. LilyPond maakt gebruik van een simpele ASCII-notatie om muziek weer te geven. Het programma compileert deze code vervolgens naar pdf. Ook kan LilyPond automatisch midi-bestanden genereren. De Mutoxia- en Musipedia-projecten distribueren vrije bladmuziek en maken hiervoor gebruik van het LilyPond-bestandsformaat. Wiki-TeX, een MediaWiki-interface, ondersteunt het gebruik van

LilyPond-notatie in wiki-artikelen. In het plaatje hieronder zie je links een stukje LilyPond-

code en rechts het resultaat daarvan zoals het er na de compilatie uitziet.

lastig probleem. Nienhuys weet inmiddels waarom ze zo werken: ‘We proberen af te tasten hoe snel iemand kan reageren op veranderende omstandigheden.’

Na Nienhuys’ eerste telefoongesprek hing hij opgelucht op – hij was tevreden over hoe het was verlopen. Bij Google dachten ze er net zo over en dus volgde even later een tweede telefoongesprek. Helaas verliep dat gesprek wat minder soepel; Nienhuys werd bedankt voor zijn interesse, maar hoefde zijn koffers niet te pakken.

EEN CONFERENTIE IN BRAZILIË Kort na het mislukte telefoongesprek met Google Zürich kreeg Nienhuys het verzoek van een bekende met de vraag of hij een lezing kon geven op een conferentie in Porto Alegre, in het zuiden van Brazilië. Die conferentie stond in het teken van *open source* producten, dat zijn producten waarvan elke gebruiker de bronmaterialen (de *source*) kan zien. Van webpagina’s kun je de broncode zien als je in de bovenbalk van je browser ‘Beeld’ of ‘Weergave’ en daarna ‘Bron’ of ‘Toon bronversie’ aanklikt: probeer dat maar eens. Maar de broncode van bijvoorbeeld Windows of Photoshop wordt angstvallig geheim

gehouden. Voorbeelden van open source producten zijn de internetbrowser Firefox, het kantoorpakket OpenOffice en het besturingssysteem Linux. Ook Nienhuys’ LilyPond is een open source product en hem werd gevraagd daarover een praatje te houden. Nienhuys ging op het verzoek in, op voorwaarde dat zijn hotel en vliegticket werden vergoed.

In april 2006 vond de conferentie plaats. Nienhuys hield er zijn praatje en in een van de pauzes liep hij wat rond. Verschillende bedrijven waren met een standje aanwezig bij de conferentie, waaronder Google. Opnieuw raakte Nienhuys in gesprek met dit jonge, uiterst succesvolle bedrijf en de conversatie liep uit in een serie technische gesprekken. Toen Nienhuys terug in Nederland was, volgden er nog enkele telefoongesprekken, of hij werkelijk wilde emigreren, en tot slot een ronde technische interviews in New York. Alles verliep goed: Nienhuys kon aan de slag in Belo Horizonte. Tegenwoordig werkt hij aan *Google Adsense*, een advertentiedienst van Google.

ADS DOOR GOOGLE Als je iets zoekt op Google, verschijnen boven en rechts van de zoekresultaten ‘gesponsorde links’, kleine tekstadvertenties.

GOOGLE-CODE De meeste codes van Google zijn geheim. Maar sommige producten van Google zijn open source, zoals hun internetbrowser Google Chrome. Daarvan kun je de bron dus wel zien. Een voorbeeld van een code die Google veel gebruikt zie je hiernaast. Als Google informatie op een disk opslaat, of via het netwerk intern verstuurt, coderen ze de zaak zodat kleine getallen (bijvoorbeeld van 0-127, die komen vaker voor) minder ruimte innemen dan grote getallen. Deze functie decodeert een gecompriemd getal.

```
bool CodedInputStream::ReadVarint32Fallback(uint32* value) {
    if (buffer_size_ >= kMaxVarintBytes) {
        // Optimization: If the varint ends at exactly the end of the buffer,
        // we can detect that and still use the fast path.
        (buffer_size_ != 0 && !(buffer_[buffer_size_-1] & 0x80)) {
            // Fast path: We have enough bytes left in the buffer to guarantee that
            // this read won't cross the end, so we can skip the checks.
            const uint8* ptr = buffer_;
            uint32 b;
            uint32 result;

            b = *(ptr++); result |= (b & 0x7F); if (!(b & 0x80)) goto done;
            b = *(ptr++); result |= (b & 0x7F) << 7; if (!(b & 0x80)) goto done;
            b = *(ptr++); result |= (b & 0x7F) << 14; if (!(b & 0x80)) goto done;
            b = *(ptr++); result |= (b & 0x7F) << 21; if (!(b & 0x80)) goto done;
            b = *(ptr++); result |= b << 28; if (!(b & 0x80)) goto done;

            // If the input is larger than 32 bits, we still need to read it all
            // and discard the high-order bits.
            for (int i = 0; i < kMaxVarintBytes - kMaxVarint32Bytes; i++) {
                b = *(ptr++); if (!(b & 0x80)) goto done;
            }

            // We have overrun the maximum size of a varint (10 bytes). Assume
            // the data is corrupt.
            return false;

        done:
            Advance(ptr - buffer_);
            *value = result;
            return true;
        } else {
```




Twee screenshots van websites die gebruikmaken van Google AdSense. De linker is afkomstig van een site over fotograferen, de rechter van een site over reizen.



Zoek je bijvoorbeeld op 'digitale camera', dan verschijnen er links naar websites waar je een camera kunt aanschaffen. Als je op zo'n advertentie klikt, dan betaalt de adverteerder een bedrag aan Google, in de wetenschap dat mensen die naar 'digitale camera' zoeken, er vaak ook een willen aanschaffen.

Nadat deze dienst in de lucht in ging, kwam iemand binnen Google op het idee: mensen brengen nog veel meer tijd door op andere sites dan google.com (of .nl, of .be, etcetera) en op die sites kunnen óók kleine tekstadvertenties staan. Ze zijn je vast wel eens opgevallen: advertentieblokjes op websites met daarbij de mededeling 'Ads door Google'. Die advertenties maken deel uit van het Google AdSense programma. Iedereen die een website heeft, kan zulke advertenties op zijn site plaatsen. Als iemand jouw site bezoekt en op zo'n advertentie klikt, krijg je daar een bepaald bedrag voor.

Hoe weet Google welke advertenties geschikt zijn? Denk niet dat Nienhuys met een Gouden Gids in de hand op zoek gaat naar adverteerders die geïnteresseerd zouden kunnen zijn in het plaatsen van advertenties op jouw pagina. Nienhuys legt uit hoe het werkt: 'Elke keer dat een bezoeker op een webpagina met Google AdSense komt, analyseert ons systeem de inhoud van de pagina. Geheel automatisch bepalen we het onderwerp van de pagina, en selecteren de advertenties die daar het beste bij passen.'

Met een voorbeeld verduidelijkt hij: 'Stel dat jouw website over fotograferen gaat, dan koppelt ons programma er automatisch advertenties van bijvoorbeeld fotowinkels of fotografie cursussen aan. Dat is ingewikkelder dan het lijkt, want niet

elke pagina met het woord 'foto' gaat echt over fotografie. Omdat de advertenties echt relevant zijn, is de kans dat de advertentie aansluit bij de behoefte van de lezer groot. Daarom willen die adverteerders betalen om met hun advertenties op jouw site te verschijnen.'

Het mooie van Google AdSense is dat het systeem automatisch is: je plakt een code in het bronbestand van je webpagina en daarna plaatst Google AdSense vanzelf advertenties. Als beheerder van de website heb je er dus vrijwel geen werk aan. Je kunt wel enige invloed uitoefenen op de advertenties die op jouw pagina verschijnen. Als je advertenties van een bepaald bedrijf absoluut wilt vermijden, kun je een filter instellen.

Als eigenaar van een website die gebruik maakt van Google AdSense ben je natuurlijk vooral geïnteresseerd in de vraag wat het oplevert, dat plaatsen van advertenties. Je krijgt een vergoeding voor elke persoon die op een van de op jouw website aanwezige advertenties klikt. Natuurlijk is de ene klik de andere niet. De waarde van een klik wordt bepaald door vraag en aanbod. Het bedrag varieert van een paar eurocent tot enkele euro's, met hier en daar uitschieters naar boven. Het is natuurlijk verleidelijk om zelf heel vaak te klikken op de advertenties van je eigen pagina. Iemand die een beetje handig is met programmeren, zorgt voor 'robotkliks': dan wordt er automatisch om de zoveel tijd op een advertentie geklikt zonder dat je er omkijken naar hebt. Nienhuys waarschuwt: 'Daarop zijn wij alert. Wij hebben ook slimme software om fraude te detecteren.' Als je wordt betrapt, kun je je AdSense-account en je verdiende geld kwijtraken.

COCA-COLA-RECEPT Als ik vraag of Nienhuys iets concreets kan laten zien, bijvoorbeeld een stukje code dat hij heeft geprogrammeerd, valt eerst een stilte. 'Het probleem is dat ik dan al gauw in botsing kom met mijn geheimhoudingsplicht,' zegt hij. De concurrentie luistert immers mee. Het is als met het Coca-Cola-recept, dat tot op de dag van vandaag een van de best bewaarde geheimen ter wereld is. 'Intern is Google een zeer open bedrijf. Van vrijwel alles mag ik zien hoe het werkt. Slechts een paar dingen zijn strikt geheim voor de meeste werknemers van Google. Maar zo open als wij intern zijn,

zo gesloten moet ik naar buiten zijn. Eigenlijk mag ik niks zeggen.' Een stukje code die Google veel gebruikt en níét geheim is, zie je in het kader op pagina 7. Dat geeft een beetje een beeld van het werk van Nienhuys.

Een 'gewone werkdag' beschrijft Nienhuys als 'veel programmeren' en ook veel controles uitvoeren. 'Als ik een code schrijf, wordt die altijd door anderen gecontroleerd op fouten. En omgekeerd kijk ik of codes van mijn collega's geen bugs (programmeerfouten) bevatten.' Met de vergadercultuur valt het mee: heel veel communicatie gaat per e-mail of per chat.

VAI PELA SOMBRA Nienhuys is min of meer toevallig in Brazilië terechtgekomen. Was de conferentie over open source producten in Zweden geweest, dan was hij misschien daar in contact met Google gekomen, want ook in de Zweedse hoofdstad Stockholm heeft Google een kantoor. Op de vraag of hij makkelijk zou kunnen overstappen naar een andere Google-vestiging, bijvoorbeeld in het vertrouwde Nederland, antwoordt hij: 'In theorie zou ik mijn werk ook elders kunnen doen. Maar niet overal: in Amsterdam heeft Google alleen een afdeling verkoop, dat is een andere branche.'

Natuurlijk heeft Nienhuys erover nagedacht of hij wel in Brazilië wilde werken. 'Ga ik emigreren naar Zuid-Amerika?', was het dilemma waarvoor ik stond. Nu ja, ik wilde het in elk geval wel tijdelijk. Maar inmiddels ben ik gewend in Brazilië. Het leven bevalt me er. Er heerst hier een soort permanente feestcultuur. Als er iets te vieren valt, is iedereen welkom. Men is hier veel opener dan in Nederland.' Op zijn weblog schrijft hij:

In Brazilië hebben we het begrip 'ficar'. 'Ficar' heeft in het Nederlands geen exacte vertaling. Letterlijk betekent het 'blijven' (in plaats of in tijd), maar in overdrachtelijke zin ook minnekozen ('blijven met'). Het is een amoureuus samenzijn, zonder beloftes, bij voorkeur met iemand die je nog niet kent. In tijd kan het alles tussen een avond en twee maanden bestrijken, en inhoudelijk behoort voorbij de minimum voorwaarde (tongzoen) alles tot de mogelijkheden: samen uitgaan, weekendjes weg, voorstellen aan familie en vrienden. Hoewel het in principe zonder beloftes van



In 2004 stond langs de snelweg ergens in Californië dit billboard. Op dit bord stond een cryptische boodschap over het eerste tiencijferige priemgetal in de reeks cijfers van het getal e (het grondtal van de natuurlijke logaritme, waarvan de eerste tien cijfers 2,718281828 zijn). Wie dat priemgetal intikte in de adresbalk van een internetbrowser met daarachter .com, belandde op de vacaturepagina van Google. Het was een ludieke actie van het bedrijf om wiskundigen binnen te halen.

trouw komt, is het temporeel exclusief. Je mag in elk geval niet in het zicht met anderen flirten, en in conversaties dien je te fingeren dat betreffend lid van de voorkeurssexe de enige op de wereld is die voor jou bestaat. Binnen deze beleefdheidsnormen is het een geaccepteerde vorm van samenzijn, en 'hebben jullie verkering of zijn jullie ficando' is dan een ook normale, zij het wat directe, vraag.

Ook de taal is inmiddels geen probleem meer. Nienhuys heeft een cursus Portugees gevolgd. Na bijna drie jaar spreekt hij de taal heel behoorlijk. Op zijn weblog schrijft hij stukjes in het Nederlands en in het Portugees. Op de werkvloer wordt zowel Engels als Portugees gesproken. Google is een internationaal bedrijf; Nienhuys is niet de enige buitenlander op het kantoor in Belo Horizonte. 'Iedereen die in Brazilië woont, doet zijn best om de taal van het land te spreken. Ik spreek ongeveer even veel Engels als Portugees op het werk.' Lachend sluit Nienhuys af met: 'Vai pela sombra', ofwel: 'Loop in de schaduw' – een toepasselijke groet in een land met de felle tropenzon. ■

Han-Wen Nienhuys beschrijft zijn belevenissen in Brazilië op zijn weblog: <http://andra-moi-ennepe.blogspot.com>.

Zijn muziek-zet-programma LilyPond is hier te vinden: <http://lilypond.org>.

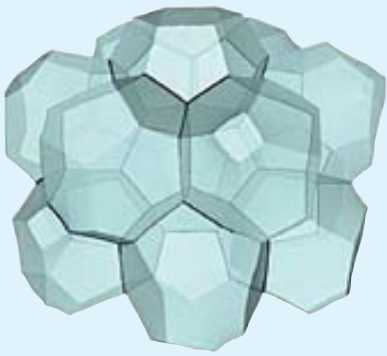
In Pythagoras van september 2008 verscheen het artikel 'De top-10.000.000.000 van Google' van Jan Brandts, over Google's PageRank-algoritme.

JOURNAAL

■ door Alex van den Brandhof

Kelvins schuim opnieuw verslagen

Hoe kun je de driedimensionale ruimte opvullen met identieke objecten, zodanig dat de grensvlakken tussen de objecten een zo klein mogelijke oppervlakte hebben? Lord Kelvin vroeg zich dit in 1887 af en dacht dat je het beste afgeknotte icoesaëders kunt gebruiken. Ruim een eeuw later, in 1994, werd dit vermoeden weerlegd. Nu komt Ruggero Gabbrielli opnieuw met een vorm die beter is dan afgeknotte icoesaëders.



Anders gezegd komt Kelvins vraag hier op neer: wat is de meest efficiënte manier om schuim te maken? Kelvin vermoedde dat je het beste afgeknotte octaëders (met veertien zijden, waarvan het oppervlak van de zeshoekige zijden licht gekromd is) kunt gebruiken. In 1994 vonden Denis Weaire en Robert Phelan een structuur die een verbetering van 0,3% geeft ten opzichte van de oplossing van Kelvin.

Ruggero Gabbrielli heeft nu een nieuwe manier gevonden om de structuur van schuim te modelleren. Hoewel Gabbrielli's schuim (een structuur die uit vier verschillende soorten veelvlakken bestaat; zie afbeelding) het schuim van Weaire en Phelan niet verslaat, leiden zijn ideeën tot nieuwe nuttige inzichten. Hij vermoedt dat zijn aanpak zal leiden tot een nog efficiënter schuim of anders tot een bewijs dat het schuim van Weaire en Phelan optimaal is.

Record tetraëders pakken

Een team van wiskundigen heeft een verrassend compacte stapeling van tetraëders (regelmatige viervlakken) gevonden. De vullingsgraad is 85,03%; dat wil zeggen dat 85,03% van een grote doos gevuld kan worden met deze objecten door ze efficiënt te stapelen.

Wat is de vullingsgraad van een stapeling identieke veelvlakken? De vullingsgraad van een stapeling is gedefinieerd als het percentage van de totale ruimte die de gestapelde lichamen innemen (in een kist die zo groot is, dat het niet uitmaakt of je met stapelen toevallig goed uitkomt). Voor de Platonische lichamen werden afgelopen zomer nieuwe resultaten gepresenteerd; zie het Journaal van het septembernummer. Voor tetraëders is het record van destijds alweer verbroken. Wiskundigen van verschillende Amerikaanse universiteiten publiceerden vorige maand een manier om tetraëders in te pakken met een vullingsgraad van niet minder dan

85,03%. Het record van afgelopen zomer was 78,20%. Hoewel tetraëders simpele objecten zijn, is het allerm minst duidelijk hoe je ze zo efficiënt mogelijk kunt stapelen, omdat ze niet, zoals kubussen, de ruimte naadloos kunnen vullen.

Een kristal is een materiaalstructuur die zich periodiek herhaalt. Neem bijvoorbeeld een stapeling kubusjes: je kunt die stapeling zódanig verschuiven dat hij weer op zichzelf terechtkomt. Quasikristallen daarentegen hebben twee of meer verschillende vormen die zich steeds herhalen, maar zodanig dat de periodiciteit verdwijnt. Tot hun eigen verbazing ontdekten de onderzoekers dat de door hun gevonden tetraëderstapeling de vorm van een quasikristal heeft.



Hoeveel driehoeken zie je in de plaatjes op deze pagina? De afgelopen maanden kwam je deze vraag opeens overal tegen op websites. Of echt 70 procent van de deelnemers het foute antwoord geeft, zoals beweerd wordt in figuur 2, weten we niet. In ieder geval kan iedereen die er voldoende tijd voor neemt, tellen dat hier in totaal 13 driehoeken te zien zijn. Interessanter is, om een formule voor het aantal te vinden, zodat je bij grote figuren alleen de driehoeken aan de onderkant hoeft te tellen.

■ door Robbert van der Kruk

HOVEEL DRIEHOEKEN ZIE JE?

Het antwoord op de vraag die in de titel van dit stukje wordt gesteld, is 5 voor het plaatje in figuur 1 en 13 voor het plaatje in figuur 2. Bij figuur 1 is de enige instinker dat je misschien de grote driehoek (het totale plaatje) vergeet mee te tellen en zo op het antwoord 4 komt. Figuur 2 is iets lastiger, maar nog steeds prima te doen. Er zijn 6 rechtopstaande driehoeken (groen) en 3 driehoeken met de punt naar beneden (wit). De andere vier zijn samengestelde rechtopstaande driehoeken; 3 driehoeken die zelf weer vier driehoeken bevatten en de laatste is de grote driehoek zelf.

Voor grotere exemplaren, zoals in figuur 3, is het meer werk, probeer het maar eens. In de tabel op pagina 11 staan de waarden voor de eerste vijftien samengestelde driehoeken met n rechtopstaande driehoeken in de onderste rij. Hierbij is h is het totale aantal rechtopstaande driehoeken en v het to-

tale aantal driehoeken met de punt naar beneden. Het totale aantal driehoeken dat te zien is, is $f = h + v$.

Is er een algemene regel te vinden? Met andere woorden, een formule die het totale aantal driehoeken geeft, als het aantal driehoeken op de onderste rij n is?

EEN RECURSIEVE FORMULE Als h_{n-1} (het aantal rechtopstaande driehoeken als er $n - 1$ driehoeken op de onderste rij staan) bekend is, is het niet moeilijk om h_n te vinden. Kijk maar naar figuur 3. Als je begint met $n - 1$ driehoeken op de onderste rij (in figuur 3 is $n - 1 = 5$), en je voegt aan de rechterkant één rij driehoeken toe (de rode driehoeken in figuur 3), dan krijg je n driehoeken op de onderste rij. Het totale aantal rechtopstaande driehoeken dat je dan ziet (h_n), is gelijk aan het totale



Figuur 1



Figuur 2

aantal rechtopstaande driehoeken dat we al zagen zonder die toegevoegde rij driehoeken (dus h_{n-1}) plus de volgende aantallen:

- n (de toegevoegde rechtopstaande driehoeken);
- $n - 1$ (de driehoeken aan de rechterkant die zijn samengesteld uit vier driehoekjes);
- $n - 2$ (de driehoeken aan de rechterkant die zijn samengesteld uit negen driehoekjes);
- ... etcetera, tot en met 1 (de gehele driehoek).

In formulevorm:

$$h_n = h_{n-1} + n + (n - 1) + (n - 2) + (n - 3) + \dots + 2 + 1 = h_{n-1} + \frac{1}{2}n(n + 1).$$

We hebben hier gebruik gemaakt van het feit dat de som van de eerste n positieve, gehele getallen gelijk is aan $\frac{1}{2}n(n + 1)$. Je kunt natuurlijk op dezelfde manier h_{n-1} uitdrukken in h_{n-2} :

$$h_{n-1} = h_{n-2} + (n - 1) + (n - 2) + (n - 3) + (n - 4) + \dots + 2 + 1 = h_{n-2} + \frac{1}{2}n(n - 1).$$

Als je de laatste twee formules combineert, krijg je

$$h_n = h_{n-2} + n^2. \quad (1)$$

Voor v_n (het aantal driehoeken met de punt naar beneden, als er n driehoeken op de onderste rij staan) kunnen we iets soortgelijks doen:

$$v_n = v_{n-1} + (n - 1) + (n - 3) + (n - 5) + \dots$$

waarbij de som eindigt bij 1 als n even is en bij 2 als n oneven is. Verder geldt (op dezelfde manier):

$$v_{n-1} = v_{n-2} + (n - 2) + (n - 4) + (n - 6) + \dots$$

Als je de laatste twee formules combineert, krijg je

$$v_n = v_{n-2} + (n - 1) + (n - 2) + (n - 3) + (n - 4) + \dots + 2 + 1 = v_{n-2} + \frac{1}{2}n(n - 1). \quad (2)$$

Uit (1) en (2) kunnen we concluderen:

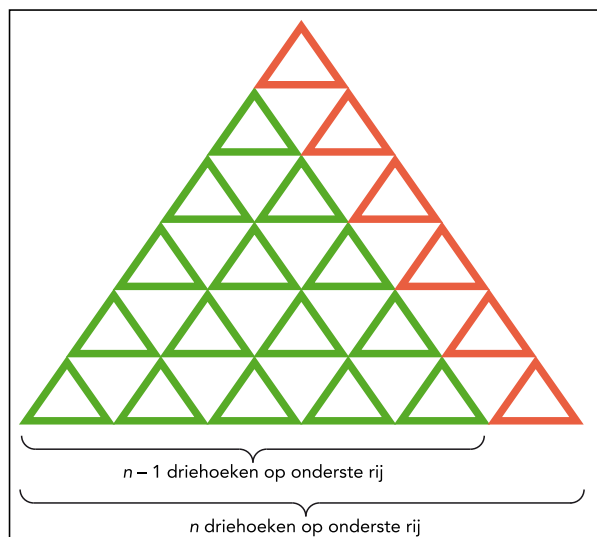
$$f_n = h_n + v_n = h_{n-2} + n^2 + v_{n-2} + \frac{1}{2}n(n - 1) = h_{n-2} + v_{n-2} + \frac{1}{2}n(3n - 1) = f_{n-2} + \frac{1}{2}n(3n - 1).$$

Deze recursieve formule (voor $n \geq 2$ en beginwaarden $f_0 = 0$ en $f_1 = 1$) kun je bijvoorbeeld invoeren in je grafische rekenmachine. De onderstaande tabel is dan snel gemaakt en kun je zo lang maken als je wilt.

Je kunt ook op zoek gaan naar een *directe* formule voor f_n . Lukt het je om te bewijzen dat de volgende formule geldt?

$$f_n = \frac{1}{8}(n(n + 2)(2n + 1) - 1) \text{ voor } n \text{ oneven en}$$

$$f_n = \frac{1}{8}n(n + 2)(2n + 1) \text{ voor } n \text{ even. } \blacksquare$$



Figuur 3 In dit plaatje geldt $n = 6$

n	h_n	v_n	f_n
0	0	0	0
1	1	0	1
2	4	1	5
3	10	3	13
4	20	7	27
5	35	13	48
6	56	22	78
7	84	34	118
8	120	50	170
9	165	70	235
10	220	95	315
11	286	125	411
12	364	161	525
13	455	203	658
14	560	252	812
15	680	308	988

In deze eerste *Pythagoras* van 2010 vertelt historicus van de wiskunde Steven Wepster over Ludolph van Ceulen, die dit jaar precies 400 jaar geleden overleed. Als rekenmeester stak Van Ceulen ver boven de concurrentie uit, maar ook bij academici dwong hij respect af. Hij loste lastige meetkundige problemen op en kon rekenen als de beste. Van Ceulen is beroemd geworden om zijn benadering van π , waarover je kunt lezen in het artikel 'Hoe Van Ceulen π insloot' op pagina 26.

■ door Steven Wepster

LUDOLPH VAN CEULEN (1540-1610): MEESTER DER REKENMEESTERS

Ludolph van Ceulen werd geboren op 28 januari 1540 in het Duitse plaatsje Hildesheim, in de buurt van Hannover. Zijn vader was koopman. Toen Ludolph nog jong was, overleden allebei zijn ouders. Waarschijnlijk is hij daarna met zijn twee broers naar Antwerpen getrokken. Van daar verhuisde hij omstreeks 1562 naar Delft, waar hij rekenmeester en schermleeraar werd.

In die tijd bestond er nog geen Ministerie van Onderwijs en er was ook nog geen leerplicht. Om het vak van bijvoorbeeld timmerman te leren, ging je in de leer bij een timmerman, maar als je vader vond dat je later zijn handelsbedrijf moest overnemen, dan moest je eerst leren rekenen en boekhouden. Dat kon bij een rekenmeester. Als je vader bovendien rijk was, dan vond hij het ook belangrijk dat je leerde dansen, paardrijden en schermen en dat je wat van muziek wist. Met een school voor rekenen en schermen moet Van Ceulen dus wel een rijke potentiële klantenkring hebben aangeboord.

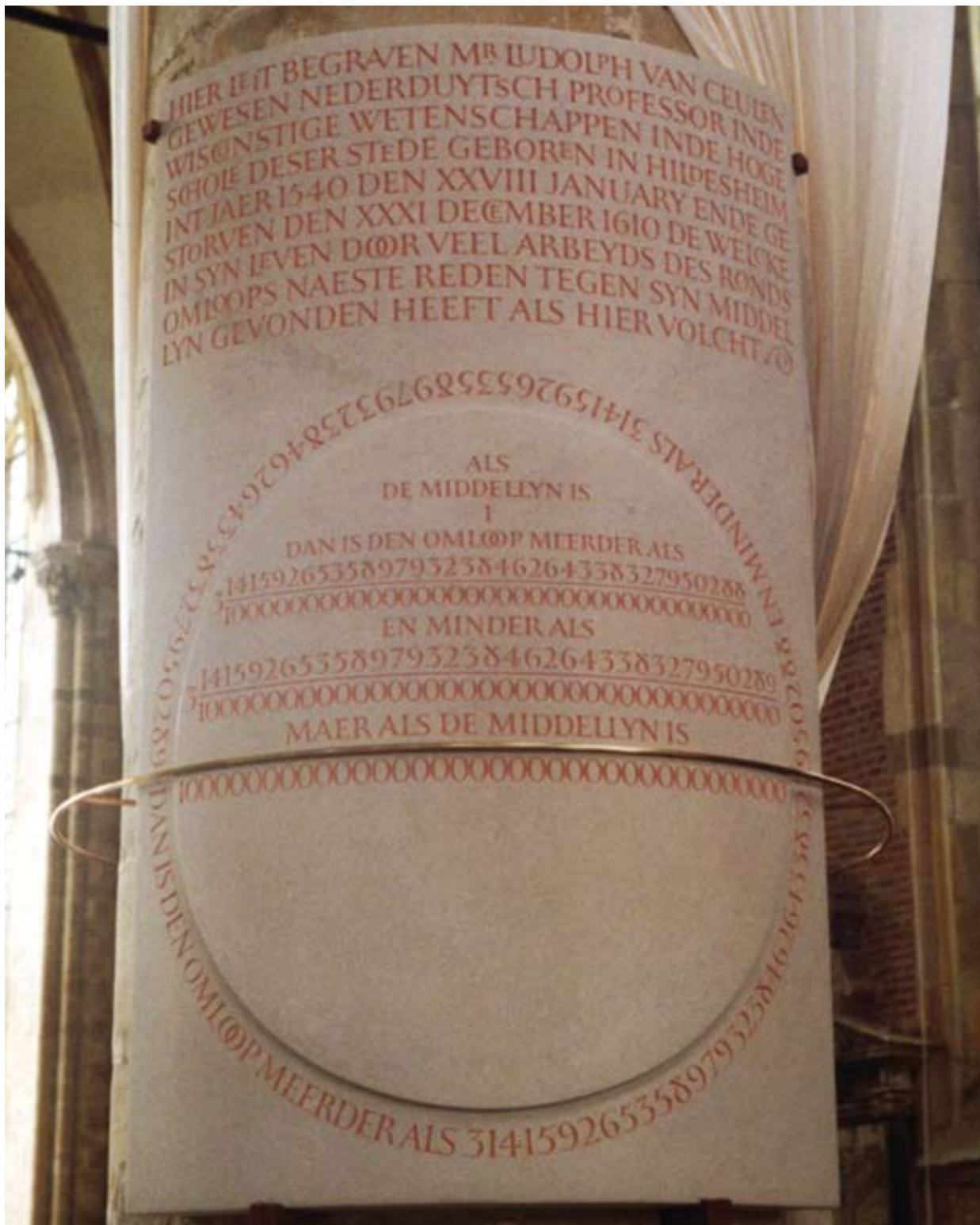
Niet alle rekenmeesters waren even goed, en het was zaak dat je het vak leerde bij een van de betere. De concurrentie tussen rekenmeesters was dan ook groot: elk probeerde te laten zien dat hij beter was dan de concurrentie. Een manier daartoe was om een opgave op een openbare plaats (bijvoorbeeld aan de kerkdeur) op te hangen en een prijs uit te loven voor een ieder die een goede oplossing vond. Gebruikelijk bij dat soort 'wedstrijden' was dat je tegelijk met het indienen van je eigen oplossing, ook een tegenvraag aan de uitdager opgaf.

Een van die uitdagers was de Haarlemse rekenmeester Willem Goudaen. In zijn geval pakte de reclame-actie echter negatief uit. Er waren minstens twee personen, de bekende rekenmeester Nicolaas



Figuur 1 De titelillustratie van Van Ceulens boek *Vanden Circkel*

Petri en onze Ludolph, die Goudaens opgave met gemak oplosten. Maar Goudaen wilde niet van hun oplossing weten en weigerde de prijs (een beker wijn) uit te keren. Het is niet helemaal duidelijk of hij zelf zijn opgave wel begreep. Echt komisch werd het toen uitkwam dat de tweede opgave die Goudaen openbaar ophing, in feite Petri's tegenvraag bij diens oplossing van de eerste opgave was: regelrecht



Figuur 2 De π -steen in de Pieterskerk

plagiaat! Zowel Petri als Van Ceulen hebben hun ergernissen over deze episode in een klein boekje uitgegeven. Het is niet bekend of Goudaen verder nog veel klandizie heeft gehad.

TOT DOLEN GEBOREN Korte tijd later trok Ludolph nogmaals ten strijde tegen een wiskundige kwakzalver. Deze keer was het Simon van der Eyc-ke, een uitgeweken Fransman die beweerde dat hij

een exacte breuk had voor de verhouding tussen de omtrek en de diameter van een cirkel. Volgens hem was π (zo noemen we die verhouding pas sinds de achttiende eeuw) gelijk aan $(\frac{39}{32})^2$.

Van Ceulen toonde aan dat Van der Eyc-ke het mis had. De laatste reageerde met een nieuwe waarde die volgens hem wel echt klopte, namelijk $\pi = \sqrt{\sqrt{320}-8}$. Dat was ook niet zo snugger, want als Van der Eyc-ke de literatuur een beetje bijhield,

dan had hij kunnen weten dat deze waarde al eerder naar het rijk der fabelen was verwezen. Ludolph wees hem een tweede maal terecht en voegde er met niet ongebruikelijke spot aan toe dat (de uit het Franse plaatsje Dôle afkomstige) Simon ‘tot dolen geboren’ was.

Inmiddels had Van Ceulen goede contacten opgebouwd met de Delftse regentenklasse. Zijn schermeschool was gevestigd in de kapel van het Prinsenhof en waarschijnlijk heeft hij zelfs Prins Maurits schermles gegeven. Maurits had een goede vriend en vertrouweling Simon Stevin, die tegelijk een van de belangrijkste wiskunstenaars in Nederland was. Stevin heeft ervoor gezorgd dat het Nederlands veel eigen woorden voor wiskundige begrippen heeft, waarvoor andere talen meestal (verbasterde) Latijnse of Griekse woorden gebruiken, zoals ‘loodrecht’ in plaats van ‘perpendicular’, en ‘wiskonst’ in plaats van ‘Mathematik’.

Ook bevorderde Stevin het gebruik van de decimale schrijfwijze van gebroken getallen. Stevin werkte samen met Jan Cornets de Groot aan het verbeteren van windmolens om polders droog te malen. Jan de Groot was een van de bestuurders van de stad Delft en vader van onze beroemde geleerde Hugo de Groot. Hij kende Van Ceulen ook goed en omdat Van Ceulen geen klassieke talen kon lezen, vertaalde De Groot voor hem zelfs een stukje van Archimedes over π in het Nederlands.

VANDEN CIRKEL In 1596 verscheen het boek *Vanden Circkel*, zie figuur 1, waarmee Van Ceulen het bekendst is geworden. Hierin berekende hij de lengte van de zijde van in cirkels ingeschreven regelmatige n -hoeken met $3 \leq n \leq 80$. Sommige van die zijden waren al eerder berekend, maar nog niet eerder in 20 cijfers achter de komma. Veel bijzonderder is dat hij ook de zijden uitrekende van de veelhoeken met $n = 7, 11, 13, 17$ etcetera die je niet met alleen maar meetkunde kunt vinden. Van Ceulen kon de lengte van de zijde van een $2n$ -hoek uitdrukken in een algebraïsche vergelijking van ongeveer graad n , waar hij dan schijnbaar moeiteloos een numerieke oplossing van vond. Van Ceulen legde precies uit hoe hij aan de vergelijkingen kwam, maar we weten niet hoe hij ze oploste. Algebra was nog een relatief jong vakgebied en er waren

op dat moment maar twee mensen die net zo virtuoos waren in het combineren van meetkunde en algebra: de Vlaamse professor Adriaan van Roomen die contact had met Van Ceulen, en de beroemde Franse hofgeleerde François Viète die ook in contact stond met Van Roomen.

De reden dat Van Ceulen met dit boek beroemd werd is echter anders: het boek bevat namelijk π in 20 decimalen. Later heeft Van Ceulen er zelfs 35 gevonden en daar was hij zo trots op dat hij die graag na zijn overlijden op zijn grafsteen wilde. Die wens is in vervulling gegaan; in de Pieterskerk in Leiden kun je tegenwoordig een replica van de originele grafsteen bewonderen, zie figuur 2. Vooral in Duitsland heette π nog lang het *Ludolphse getal*. Verder bevat *Vanden Circkel* nog goniometrische tabellen met uitleg over het gebruik ervan, een heleboel opgaven en problemen waar de liefhebbers hun tanden in konden zetten en een omvangrijk aanhangsel over renteberekeningen. Dat laatste onderwerp was natuurlijk van belang voor het handelsrekenen.

Nog een ander hoofdstuk in het boek moet hier genoemd worden. Daarin geeft Van Ceulen zijn kritiek op de Leidse hoogleraar Josephus Justus Scaliger die onlangs een valse waarde voor π had gepubliceerd. Deze erudiete geleerde wist verschrikkelijk veel van oude geschriften uit het Midden Oosten, maar van wiskonst had hij duidelijk minder verstand. De kwestie lag uiterst gevoelig omdat de hoogleraar blij had gegeven geen kritiek van een ‘vechtbaas’, die niet eens Latijn kon, te aanvaarden. Van Ceulen koos er daarom voor om de fouten in Scaligers werk aan de dag te leggen zonder de geleerde bij naam te noemen.

VAN SCHOOTEN EN SNELLIUS Inmiddels woonde Van Ceulen zelf ook in Leiden. Hij kon schermles geven in de voormalige Falebagijnkerk, zie figuur 3, die tevens bij de Leidse universiteit in gebruik was als bibliotheek en anatomisch theater. Vanaf 1600 bood het gebouw ook onderdak aan de Duytsche Mathematique. Dat was een school voor landmeters en ingenieurs, die prins Maurits in dat jaar had opgericht omdat hij zulke vakmensen nodig had in zijn strijd tegen de Spaanse overheersing van de Nederlanden. Maurits had Stevin het les-



Figuur 3 De schermeschool in de Faliebagijnkerk

programma laten opstellen. Hij benoemde Ludolph van Ceulen en Symon van Merwen als docenten. Ze gaven les in het Nederlands, terwijl aan de universiteit college werd gegeven in het Latijn.

Tot aan zijn dood op oudejaarsdag 1610 bleef Ludolph lesgeven aan de Duytsche Mathematique. Een van zijn leerlingen was Frans van Schooten, die later zelf docent aan die school is geworden. Een andere student die veel van Van Ceulen heeft opgestoken was Willebrord Snellius, die later professor aan de universiteit werd. Snellius had dan ook een klassieke scholing en zat niet op de Duytsche Mathematique. De meester en de student hebben ook samen aan bepaalde problemen gewerkt. Sporen hiervan zijn terug te vinden in twee postume boeken van Van Ceulen: *De arithmetische en geometrische fundamenten* samen met de Latijnse vertaling ervan *Fundamenta arithmetica et gemetrica*.

Het was Snellius die de vertaling verzorgde; daarbij liet hij niet na om op diverse plekken zijn eigen opvattingen als commentaar toe te voegen. Op die manier kunnen we een mooi inzicht krijgen in de kwesties en keuzes waar de wiskunde in die tijd voor stond. Het was bijvoorbeeld nog helemaal niet algemeen geaccepteerd dat je algebra en meet-

kunde met elkaar kon verbinden. Van Ceulens werk en Snellius' commentaar daarop laten twee verschillende invalshoeken op zulke problemen zien: de ene vanuit de praktisch georiënteerde rekenmeestertraditie, de andere vanuit het perspectief van de klassiek geschoolde, humanistische, geleerde. Dat Snellius de tijd nam om het werk van zijn vroegere leermeester in het Latijn te vertalen, geeft aan dat hij hem ver boven de gewone rekenmeesters uit vond steken.

400STE STERFDAG Ter herdenking van Ludolphs 400ste sterfdag vinden er in 2010 een aantal activiteiten plaats.

Meer hierover lees je op www.ludolphvanceulen.nl. Daar staat ook een transcriptie van *Vanden Circkel* en links naar ander materiaal.

Voor wie meer wil lezen over Van Ceulen: het best gedocumenteerde artikel over hem is 'Einige Entdeckungen über die Geschichte der Zahl Pi sowie Leben und Werk von Christoffer Dybvad und Ludolph van Ceulen' van Friedrich Katscher. Het verscheen in *Denkschriften der mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse*, band 116 pp. 85-129, Wenen 1979. ■

ALLE HOEKEN VAN

■ door Arnout Jaspers

Je hebt vast wel eens tussen twee spiegels aan tegenoverliggende muren gestaan. Je ziet dan aan beide kanten een rij evenbeelden van jezelf die in de verte uitdooft. De rij loopt altijd een beetje krom, omdat de spiegels niet perfect evenwijdig zijn.

Maar wat gebeurt er als de spiegels een flinke hoek met elkaar maken? De spiegelbeelden vormen dan een cirkel, zoals je ziet op de foto van de glazen bol. Er zijn 11 bollen te zien, waarvan er twee overlappen op de naad tussen de twee verticale spiegels. Die staan trouwens op een derde, horizontale spiegel, maar hier is dat alleen maar voor de show. Wanneer passen er precies n bollen in de cirkel? Dat is niet moeilijk: als de hoek tussen de twee spiegels precies $360/n$ graden is.

Als je twee spiegels, als de kanten van een open boek, over een rechte lijn heen zet met een hoek van $360/n$ graden ertussen, zie je in de spiegels een regelmatige n -hoek. Als je een asymmetrisch ding tussen de spiegels zet, bijvoorbeeld een poppetje dat z'n rechterarm omhoog steekt, zul je zien dat de kring bestaat uit om-en-om wel en niet gespiegelde beelden.

Als je in twee spiegels kijkt met een rechte hoek ertussen, zie je niet het spiegelbeeld waaraan je al je hele leven gewend bent, maar je echte hoofd, zoals anderen dat zien. Probeer het maar eens, dan beseft je pas dat mensenhoofden echt niet symmetrisch zijn.

Je kunt ook drie spiegels onder een rechte hoek tegen elkaar zetten. Als je in de punt kijkt, welk hoofd heb je dan? ■



HET SPIEGELPALEIS



De eerste ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade staat weer voor de deur. Op 29 januari vindt deze plaats op scholen in heel Nederland. Er is dit jaar extra veel reden om mee te doen: er gaan maar liefst 750 leerlingen door naar de volgende ronde. Hoe kun je je eigenlijk goed op de olympiade voorbereiden? Een van de beste manieren is om oude opgaven te oefenen. Je vindt ze op www.wiskundeolympiade.nl. In dit artikel bekijken we zo'n opgave en geven we *en passant* een paar tips.

■ door Relinde Jurrius en Quintijn Puite



VIER TIPS VOOR DE EERSTE RONDE

Opgave (uit JWO2009):

Bram heeft muntjes van 5 cent, 10 cent, 20 cent en 50 cent, van elk minstens één. In totaal heeft hij 9 muntjes en samen zijn ze 2,10 euro waard. Hoeveel muntjes van 20 cent heeft hij?
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

Chris heeft muntjes van 5 cent, 10 cent, 20 cent en 50 cent (niet elke soort hoeft voor te komen). In totaal heeft hij 5 muntjes en samen zijn ze 1,25 euro waard. Hoeveel muntjes van 20 cent heeft hij?
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

18

Hoe pak je zo'n opgave nou aan? Er zijn wat dingen gegeven en je hoopt maar dat je daaruit kunt afleiden hoeveel muntjes van 20 cent Bram heeft. Maar het is wel duidelijk dat dat niet lukt door gewoon maar rechthoekig rechtaan wat getallen bij elkaar op te tellen of met elkaar te vermenigvuldigen. Begin maar eens met het bekijken van een voorbeeldje. (En dit is meteen **tip 1** voor tijdens de wedstrijd!) Stel bijvoorbeeld dat Bram 1 muntje van 5 cent heeft, 3 van 10 cent, 3 van 20 cent en 2 van 50 cent. Dat zijn er samen in ieder geval 9. Dan zitten we op 1,95 euro. Bijna raak; het scheelt maar 15 cent... We zouden er een muntje van 10 en een muntje van 5 cent bij kunnen doen; dan zit je wel op 2,10 euro, maar dan heb je juist weer te veel muntjes.

Misschien deed je een gok die wél meteen klopt. Dan heb je geluk en kun je direct door naar de volgende vraag. Maar als je niet zo snel iets vindt, kun je het ook systematisch aanpakken. We zoeken naar een verdeling van de muntjes die aan drie eisen moet voldoen. Laten we eerst eens bedenken wat het betekent dat hij van elke soort minstens één muntje heeft. Dan zijn er dus al 4 van de 9 muntjes bekend. En dan heeft hij bovendien ook al 85 cent binnen. Kortom, we kunnen net zo goed naar de resterende 5 muntjes op zoek gaan, die samen wel een waarde moeten hebben van 1,25 euro. Voor het gemak noemen we de hoofdpersoon van het nieuwe probleem maar even Chris:

We gaan nu verder met dit nieuwe probleem, dat net iets simpeler is omdat we een van de drie eisen al hebben verwerkt. **Tip 2** is dan ook: vertaal het probleem naar een eenvoudiger probleem. Uiteraard moeten we niet vergeten om op het eind nog even de oplossing voor Chris terug te vertalen naar de oplossing voor Bram; dat hebben we hier al gedaan door de multiple choice antwoorden mee te vertalen.

Er zijn nu nog twee eisen over: Chris heeft 5 muntjes in totaal en samen zijn ze 1,25 euro waard. Bij elk van beide eisen hoort een aantal oplossingen en zo krijg je twee verzamelingen oplossingen. We zoeken precies naar de oplossing(en) die tot beide verzamelingen behoort/

behoren (en we verwachten dat dat er maar één is, anders zou de oplossing van het vraagstuk niet uniek zijn...). Een goede aanpak (**tip 3!**) is om binnen één van deze verzamelingen te gaan werken en dan te bedenken welke oplossingen er





ook tot de andere
verzameling behoren.

We kunnen bijvoorbeeld naar alle manieren kijken waarop je überhaupt 5 muntjes kunt kiezen en naderhand nagaan welke manieren leiden tot een totaalbedrag van 1,25 euro. Nu zijn er nogal veel manieren om 5 muntjes te pakken (om precies te zijn: 56) en die willen we toch liever niet allemaal één voor één af gaan... Gelukkig vallen er hele families oplossingen af, waarvan het bijvoorbeeld duidelijk is dat je altijd hoger of juist lager dan 1,25 uitkomt. Of die op een andere manier gegarandeerd niet op 1,25 euro uitkomen.

Zo weten we, doordat het bedrag van 1,25 euro eindigt op een 5, dat Chris wel een oneven aantal muntjes van 5 cent moet hebben; de muntjes van 10, 20 en 50 cent leiden immers alleen maar tot tienvouden. Dus hij heeft 1, 3 of 5 munten van 5 cent en alle oplossingen met 0, 2 of 4 munten van 5 cent kunnen we vergeten. Zouden al zijn 5 muntjes daadwerkelijk van 5 cent zijn, dan komt Chris op 0,25 euro in plaats van 1,25 euro. En ook met 3 muntjes van 5 redt hij het niet: dan komt hij maximaal op $3 \times 0,05 + 2 \times 0,50 = 1,15$ euro. Hij heeft dus precies 1 muntje van 5 cent (ervan uitgaande

dat er überhaupt een oplossing is);
dat is een mooie conclusie!

De laatste 4 muntjes moeten dus optellen tot 1,20 euro. Hiervoor hebben we nog keuze uit munten van 10, 20 en 50 cent. Met 3 of meer munten van 50 cent gaat het mis; dan kom je uit op minstens $1 \times 0,10 + 3 \times 0,50 = 1,60$ euro. Met 1 of minder munten van 50 cent kom je uit op hooguit $3 \times 0,20 + 0,50 = 1,10$ euro. Dus we weten weer iets nieuws: Chris heeft precies 2 munten van 50 cent. Inmiddels weten we dus al van de helft van de muntsoorten hoeveel munten Chris daarvan heeft!

De resterende 2 munten zijn van 10 of 20 cent en moeten samen 0,20 euro zijn. Hier vinden we een unieke oplossing: dit moet wel gaan om 2 munten van 10 cent en 0 van 20 cent. Zo komen we voor Chris op de volgende oplossing: 1×5 ; 2×10 ; 0×20 ; 2×50 . En dus voor Bram op 2×5 ; 3×10 ; 1×20 ; 3×50 . Het antwoord op de vraag is dus dat Bram 1 muntje van 20 cent heeft; dat is de enige oplossing die er mogelijk is. **Tip 4** is: nog even terugkijken. Is dit inderdaad een oplossing die aan alle eisen voldoet? ■

19

Nieuw: halve finale wiskundeolympiade!

Dacht je na de eerste ronde 'Dat smaakt naar meer!' maar behoorde je niet tot de 130 beste leerlingen? Heb je ook weleens dat ene domme rekenfoutje gemaakt, waardoor je net te weinig punten haalde om door te gaan naar de finale? Dan is er nu goed nieuws! Maar liefst 750 leerlingen met goede resultaten bij de eerste ronde zullen dit jaar een uitnodiging krijgen voor de volgende ronde. Het gaat om de beste leerlingen per categorie (onderbouw, vierde klas, vijfde klas), dus ook onderbouwleerlingen maken een goede kans.

De allereerste halve finale van de Nederlandse Wiskunde Olympiade zal op 26 maart 2010 op tien universiteiten tegelijk plaatsvinden. De opgaven van deze wedstrijd zijn deels open-antwoordvragen, zoals de B-vragen van de eerste ronde, en deels redeneeropgaven, zoals die van de huidige finale. Iets pittiger dus dan de eerste ronde, maar net zo leuk en uitdagend! De 130 winnaars van de halve finale uit de verschillende categorieën gaan door naar de landelijke finale in september 2010 in Eindhoven – en maken uiteindelijk kans op een plaatsje in het Nederlandse team voor de Internationale Wiskunde Olympiade.

Kortom, er zijn nu nog meer redenen om je op te geven voor de eerste ronde op 29 januari 2010. Mobiliseer je medeleerlingen en vraag aan je wiskundeleraar om je op te geven. Mocht je school onverhoopt niet meedoen, stuur dan een e-mail naar Melanie.Steentjes@cito.nl zodat je bij een andere school mee kan doen.

Verschiede soorten onzekerheid spelen een rol bij schaken, poker, Yahtzee en nog veel meer spelen. Toch kun je die onzekerheid voor een groot deel uitsluiten als er veel potjes gespeeld worden. Verrassend is wel, dat toeval dan toch nodig kan zijn voor een zo goed mogelijke strategie. En soms is het belangrijker dat je een redelijk voorspelbaar resultaat behaalt, dan een op de lange termijn optimaal resultaat.

■ door Tom Verhoeff

SPELEN MET VARIANTIE



Figuur 1 Classificatie van spelen naar bron van onzekerheid

Spelletjes hebben een grote aantrekkingskracht, zeker op wiskundigen. Goedgedefinieerde regels nodigen uit tot formele analyse, soms met verrassende resultaten. Jörg Bewersdorff schreef een aanbevelenswaardig boek over de toepassing van wiskunde bij het analyseren van spelen: *Mit Glück, Logik und Bluff: Mathematik im Spiel – Methoden, Ergebnisse und Grenzen* (in het Engels vertaald onder de titel *Luck, Logic, and White Lies: The Mathematics of Games*). Bewersdorff deelt spelen in naar de bronnen van onzekerheid waarmee de spelers te maken krijgen, zie figuur 1.

Bij *combinatorische spelen* beschikken alle spelers over volledige informatie. Denk aan boterkaas-en-eieren, schaken en het Oosterse bordspel go. De onzekerheid ontstaat hier door het grote aantal manieren waarop zetten gecombineerd kunnen worden. Daardoor is het niet eenvoudig om goede keuzes te maken, ook al weet je alles. Voor dit soort spelen is wat algemene wiskundige theorie, maar elk spel is toch weer anders.

Bij *kansspelen* komt de onzekerheid door een *stochastisch element*, zoals werpen van dobbelstenen en schudden van kaarten. In tegenstelling tot

combinatorische spelen gaat het hier om fundamentele onwetendheid: je kunt niet voorspellen hoe een dobbelsteen valt. Bij vaker werpen valt er echter wel iets over te zeggen, omdat de dobbelsteen geen boosaardige tegenstander is maar een neutraal ding. De basis voor het wiskundige vakgebied van de *kansrekening* werd in de zeventiende eeuw gelegd, toen men kansspelen systematisch ging analyseren.

Bij *strategische spelen* hebben spelers geheimen voor elkaar. Denk aan steen-papier-schaar, waarbij beide spelers gelijktijdig een object kiezen zonder de keuze van de ander te kennen. De onzekerheid ontstaat dus door geheimen van de tegenspeler(s). In tegenstelling tot dobbelstenen werken de tegenspelers wel opzettelijk tegen. Het wiskundige vakgebied van de *speltheorie* houdt zich met dit soort spelen bezig. Er is geen Nobelprijs voor Wiskunde, maar wiskundigen hebben verscheidene Nobelprijzen voor Economie in de wacht gesleept met hun werk aan de speltheorie, die een belangrijke rol vervult in economische modellen.

Veel spelen vallen niet in één klasse, maar zijn een mengsel. Zo zitten in het kaartspel poker alle drie de vormen van onzekerheid: kaarten worden geschud (geluk), spelers kennen de kaarten en keuzes van de tegenspelers niet (geheimen) en keuzes kunnen op veel manieren gecombineerd worden (logica). Poker is dan ook een erg moeilijk spel, zeker om het wiskundig te analyseren.

Een spel wordt gespeeld door een of meer spelers die 'zetten' doen om zo het doel van het spel te bereiken. De regels bepalen wanneer spelers mo-

gen zetten, welke opties ze hebben en wat het doel is. Dat doel kan gewoon zijn om te winnen (binaire uitkomst) of om een opbrengst te maximaliseren (discrete of continue uitkomst).

Wiskundig interessante vragen zijn: Gegeven de speltoestand, hoe bepaal je de beste zet? Welke speler kan de beste uitkomst afdwingen vanuit de begintoestand? Wat is de optimale uitkomst, eventueel op langere termijn?

EEN STRATEGISCH MUNTSPEL We analyseren een eenvoudig muntspel wat uitgebreider. De twee spelers Alice en Bob kiezen gelijktijdig elk 0 (kop) of 1 (munt) door, onzichtbaar voor de ander, een munt onder hun hand neer te leggen (de Faculteit Wiskunde & Informatica van de TU/e heeft zulke binaire munten uitgegeven). Na hun keuzes vastgelegd te hebben, laten ze deze aan elkaar zien en wordt de uitbetaling bepaald met de tabel in figuur 2.

Alice ontvangt € 2 van Bob wanneer hun keuzes verschillen. Wanneer beiden 0 gekozen hebben, ontvangt Bob € 1 van Alice; met beiden 1 ontvangt hij € 3. Dit is een zogenaamd *nulsom spel*, omdat de winst van de ene speler gelijk is aan het verlies van de ander. Het doel is om de totale opbrengst te maximaliseren bij herhaald spelen.

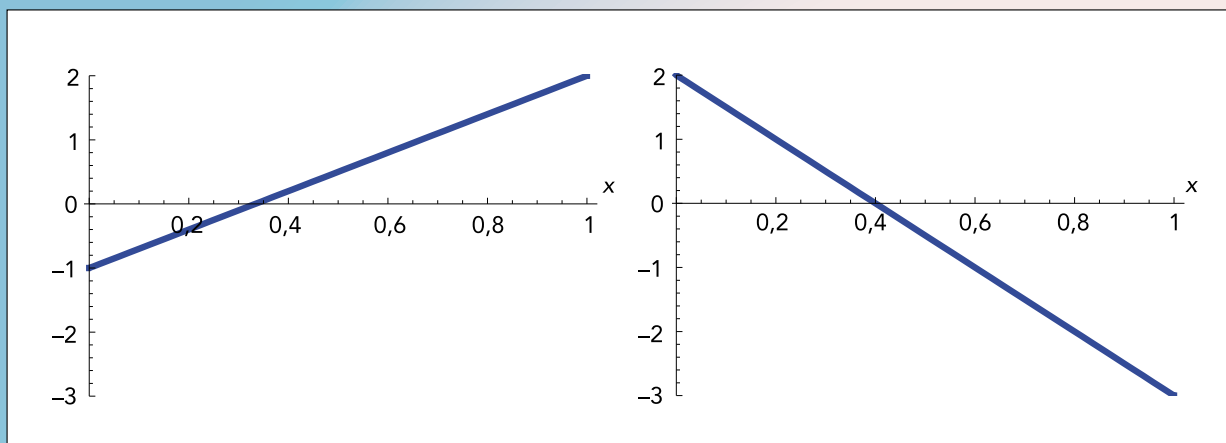
Met een gemiddelde opbrengst per beurt van $(-1 + 2 + 2 - 3)/4 = 0$ lijkt dit een eerlijk spel. Maar schijn bedriegt. Welke speler zou je het liefst zijn? Dat ligt niet meteen voor de hand.

Alice kan Bob verschalken met een *toevalsstrategie*, die ervoor zorgt dat Bob haar niet kan uitbuiten en dat ze gemiddeld het net iets beter doet. De analyse verloopt als volgt. Stel Alice kiest 1 met kans x , waarbij ze x nog slim kan bepalen. Met $x = 0,5$ is haar verwachte opbrengst per beurt $(-1 + 2)/2 = +0,5$ als Bob 0 kiest en $(2 - 3)/2 = -0,5$ als hij 1 kiest. Als Bob weet dat Alice $x = 0,5$ hanteert, zal hij altijd 1 kiezen en zo toch flink aan Alice verdienen.

Alice kan voor elke x haar verwachte opbrengst als volgt bepalen. Als Bob 0 kiest, dan heeft ze een opbrengst van € 2 met kans x (wanneer haar keuze 1 blijkt te zijn) en een verlies van € 1 met kans $1 - x$ (wanneer haar keuze 0 blijkt te zijn). In dit geval is dus de verwachte opbrengst $x \times 2 + (1 - x) \times -1 = 3x - 1$ (in €). Dit is een rechte lijn tussen -1 (voor

		Bob kiest	
		0	1
Alice kiest	0	↑ 1	← 2
	1	← 2	↑ 3

Figuur 2 Uitbetalingstabel voor een muntspel



Figuur 3 Verwachte opbrengst voor Alice als ze 1 kiest met kans x en Bob 0 kiest (links) of 1 (rechts)

$x = 0$) en 2 (voor $x = 1$), zie de linkergrafiek in figuur 3.

Als Bob 1 kiest, dan is het verlies € 3 met kans x en de opbrengst € 2 met kans $1 - x$. Dat komt neer op een verwachte opbrengst van $x \times -3 + (1 - x) \times 2 = -5x + 2$, de rechte lijn tussen 2 en -3.

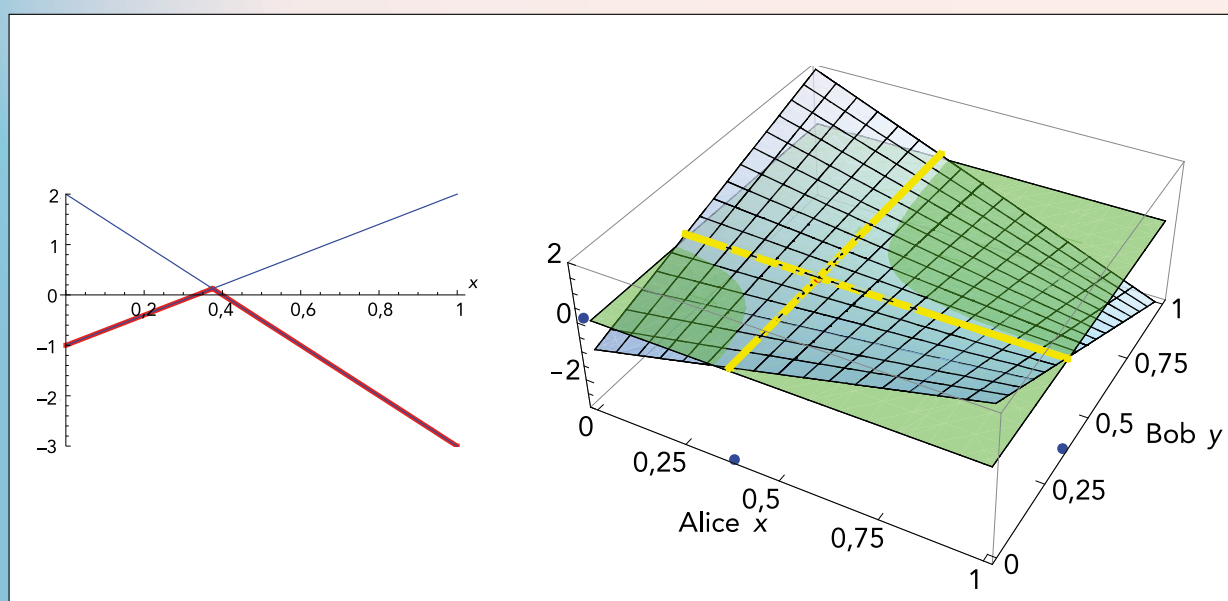
Alice weet natuurlijk niet wat Bob doet. Rekening houdend met het ergste neemt ze aan dat Bob haar x kent en hij zelf zijn keuze zo maakt dat hij er het meeste aan over houdt en Alice dus het minste. Bob kent natuurlijk de keuze van Alice niet, vanwege haar toevalsstrategie (tenzij $x = 0$ of $x = 1$), maar hij kan natuurlijk ook de grafieken maken en zijn opbrengst maximaliseren door die van Alice te minimaliseren. Dit is te zien in figuur 4, waar de rode grafiek links het beste is voor Bob. Gelukkig voor Alice is er een klein hoekje met een positieve opbrengst, die piekt op $x = 3/8$. Haar verwachte winst is dan $1/8 = 0,125$, ofwel 6,25%

van de gemiddelde inzet van € 2 per beurt (niet gek deze dagen).

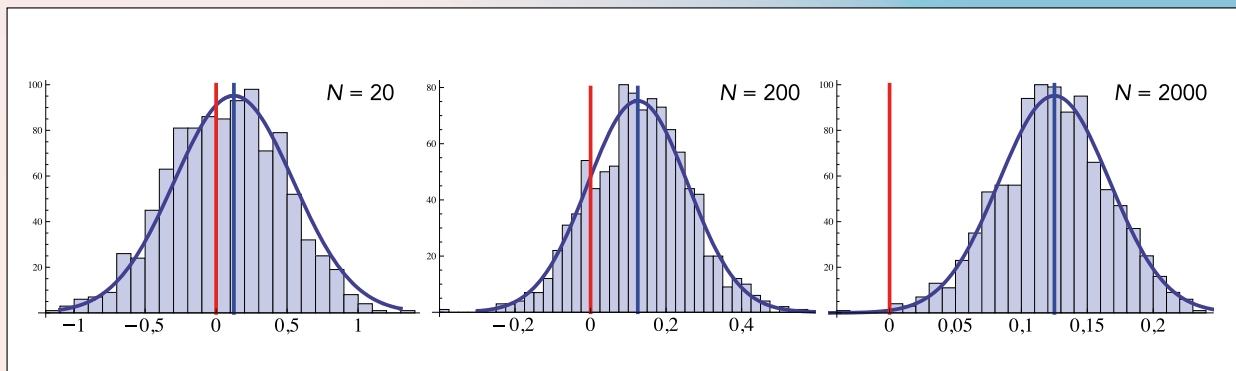
Het is aardig om op te merken dat met de keuze $x = 3/8$ de verwachte opbrengst van Alice onafhankelijk is geworden van wat Bob doet, zelfs als hij ook een toevalsstrategie toepast. Beide grafieken snijden elkaar immers bij $x = 3/8$. Deze optimale toevalsstrategie van Alice is immuun voor Bobs keuze.

De rechtergrafiek in figuur 4 toont de verwachte opbrengst als beide spelers elk een eigen toevalsstrategie hanteren. Bij het optimum voor Alice op $x = 3/8$ is de grafiek vlak en net zo voor Bobs optimum (de gele lijnen). Dit zogenaamde *Nash-evenwicht* is immuun voor de strategie van de ander. Als spelers drie of meer opties hebben om uit te kiezen, dan wordt het lastiger optimale strategieën te bepalen. John Nash bewees dat zulke optimale strategieën altijd bestaan, zelfs voor niet-nulsom spelen.

Dit is allemaal mooi en aardig, en kan zelfs



Figuur 4 Verwachte opbrengst voor Alice als ze 1 kiest met kans x en Bob zijn keuze optimaliseert (onderste grafiek in rood, links); of 1 kiest met kans y (rechts)



Figuur 5 Verdeling van de 'opbrengst na een reeks van N beurten' als Alice en Bob optimale toevalsstrategieën toepassen, op basis van 1000 gesimuleerde reeksen; de blauwe lijn markeert 0,125 (de verwachting), de rode lijn markeert 0. Merk op dat de horizontale schaal in de drie grafiekjes telkens anders is.

praktische waarde hebben. Maar er zit nog een ader onder het gras. Als ze dit spel 20 beurten spelen (beide spelers gebruiken een optimale toevalsstrategie), dan is de gemiddelde verwachte opbrengst per spel voor Alice inderdaad $\mu = 0,125$. Maar de spreiding (standaarddeviatie) is overweldigend: $\sigma = 0,42$. Zie figuur 5 (links), waaruit blijkt dat in ruwweg 38% van de reeksen van 20 beurten Alice toch negatief eindigt (links van de verticale rode lijn).

Met reeksen van 200 beurten neemt de standaarddeviatie af met een factor $\sqrt{10}$ tot $\sigma = 0,13$. Zie figuur 5 (midden), waar Alice nog altijd in 17% van de reeksen in de min eindigt. Pas bij reeksen van 2000 beurten neemt de standaarddeviatie af tot $\sigma = 0,04$ en eindigt nog maar 0,1% van de reeksen negatief voor Alice. Als ze maar één beurt per werkdag spelen, is Alice pas na zo'n 10 jaar redelijk zeker van haar winst.

Zoals al eerder opgemerkt, kan Bob niets aan die verwachte winst van Alice doen, als zij gebruik maakt van de optimale toevalsstrategie. Het is echter eenvoudig in te zien dat Bob wel de spreiding kan beïnvloeden. Als hij bijvoorbeeld altijd 1 kiest (in plaats van volgens zijn eigen optimale toevalsstrategie), dan gaat de standaarddeviatie bij reeksen van 20 beurten omhoog van $\sigma = 0,42$ naar $\sigma = 0,54$. In dat geval moet Alice meer dan 3000 beurten spelen (15 jaar met één beurt per werkdag) om 99,9% zeker te zijn van haar winst. Uiteraard kan ze er dan ook voor kiezen om af te wijken van de optimale toevalsstrategie en altijd 0 kiezen. Maar Bob gaat er dan misschien ook weer anders over denken. Al met al een subtiel spel.

SOLITAIRE YAHTZEE: EEN KANSSPEL Een voorbeeld van een puur kansspel is solitaire Yahtzee, dat gespeeld wordt met vijf dobbelstenen en een scorekaart met dertien basiscategorieën (gemarkeerd met * in figuur 6). Bij iedere beurt werpt

de speler de vijf dobbelstenen en hij mag tot twee keer toe een deelverzameling naar keuze (0, 1, 2, 3, 4, 5 dobbelstenen) opnieuw werpen. Op het einde van de beurt moet de worp in een van de vrije basiscategorieën gescoord worden. De score hangt af van de categorie en de worp, volgens regels die te maken hebben met patronen in de worp maar die we hier niet verder uitleggen.

Elk spel bevat 38 keuzemomenten: welke deelverzameling opnieuw te werpen ($26 \times$) en in welke basiscategorie te scoren ($12 \times$). Merk op dat na de laatste worp nog maar één vrije basiscategorie resteert en er dus geen keuze nodig is. Een zorgvuldige analyse leert je dat er iets meer dan 10^9 essentieel verschillende speltoestanden zijn om in te kiezen.

Omdat alle kansen bekend zijn, is het mogelijk om de keuzes te optimaliseren voor de hoogste verwachte eindscore. We modelleren daartoe het spel Yahtzee als een zogenaamd *Markov beslissingsproces*. In 1999 schreef ik een computerprogramma dat alle berekeningen hiervoor uitvoerde (het is te vinden op mijn website, zie het einde van het artikel). Later dat jaar werden de resultaten hiervan gebruikt in een *Optimale Solitaire Yahtzee Adviseur*, waaraan je een speltoestand kan voorleggen om de beste keus te bepalen. Op de website kun je ook een *Yahtzee vaardigheidstest* doen, waarbij je een partijtje Yahtzee speelt en je keuzes vergeleken worden met optimale keuzes.

Bij optimaal spel (volgens de officiële regels) is de verwachte eindscore iets meer dan 254 punten. Menselijke spelers kunnen daar moeilijk aan tippen met hun eindscore als die gemiddeld wordt over veel partijtjes. Figuur 6 toont wat meer karakteristieken van optimaal spel. Zo valt op dat in tweederde van de optimale potjes de Yahtzee (vijf gelijken) toch nul punten scoort (66,26 in de kolom % 0), en dus in eenderde wel 50 scoort. Terwijl de Kleine Straat vrijwel nooit met nul wordt afgedaan, wat goed is voor gemiddeld 29,46 punten per spel. De

grootste bijdrage komt echter van de Grote Straat (32,71). Ook blijkt dat bij optimaal spel er bijna om het andere potje vijf gelijke waarden verzameld worden (gemiddeld 0,46 per spel).

Helaas biedt een optimale strategie maar beperkt garantie op succes. Je kan de dobbelstenen niet beïnvloeden. Alweer gooit variantie roet in het eten. In figuur 6 staat in kolom SD wat de standaardafwijking is. Met name is te zien dat op de eindscore onder optimaal spel een spreiding van bijna 60 punten zit. Om 99,9% (3σ) zeker te zijn dat de gemiddelde eindscore boven 250 punten komt, moet de optimale speler zo'n 2000 partijtjes spelen. (Dit aantal vind je uit $3 \cdot 60 / \sqrt{N} \leq 254 - 250$. In 14% van de partijtjes eindigt de optimale strategie boven de 300 punten, maar net zo vaak ook onder de 200 punten.

SLOTOPMERKINGEN Het 'echte' leven lijkt op het spelen van een spel, in die zin dat er voor beide een noodzaak is om goede beslissingen te nemen in onzekere situaties. Het zal dan ook niet verbazen dat hiervoor dezelfde wiskundige technieken toepasbaar zijn.

Bij combinatorische spelen is recent veel voortgang geboekt door slimmere algoritmen en snellere computers. De wereldkampioen schaken is al eens verslagen door een computer. Via Monte-Carlo methoden (die gebruik maken van toevalsstrategieën) is de computer ook bij het bordspel go aan een opmars begonnen.

Het kan als een verrassing komen dat bij herhaalde strategische beslissingen, zoals bij het muntspel, een optimale keuze gebaseerd moet worden op een toevalsstrategie (door tossen van een geschikte 'munt'). De gemengde Nash-strategie vermijdt voorspelbaarheid en daarmee dat men uitgebuit wordt. Slim toepassen van het toeval kan rendabel zijn.

Bij herhaalde geluksbeproevingen kan een vaste optimale keuze bepaald worden door middel van Markov beslissingsprocessen. Maar als toeval in het spel komt, dan moet de rol van variantie niet onderschat worden. Een grote standaarddeviatie vereist veel geduld, in de vorm van een tegenintuïtief groot aantal herhalingen dat nodig is om je zekerheid te verhogen. Dat komt doordat bij N herha-

Categorie	E	SD	% 0
* Enen	1,88	1,22	10,84
* Tweeën	5,28	2,00	1,80
* Drieën	8,57	2,71	0,95
* Vieren	12,16	3,29	0,60
* Vijven	15,69	3,85	0,50
* Zessen	19,19	4,64	0,53
Bovenste Helft Bonus	23,84	16,31	31,88
* Three of a Kind	21,66	5,62	3,26
* Carré	13,10	11,07	36,34
* Full House	22,59	7,38	9,63
* Kleine Straat	29,46	3,99	1,80
* Grote Straat	32,71	15,44	18,22
* Yahtzee	16,87	23,64	66,26
* Chance	22,01	2,54	0,00
Extra Yahtzee Bonus	9,58	34,08	91,76
TOTAAL GENERAAL	254,59	59,61	0,00
Yahtzees Geworpen	0,46	0,69	63,24
Jokers Gebruikt	0,04	0,19	96,30

Figuur 6 Optimaal solitaire Yahtzee: verwachting (E), standaarddeviatie (SD) en percentage nulscores (% 0), per categorie

lingen de spreiding niet met een factor N verkleind wordt, maar slechts met een factor $\sqrt{N}$. De spreiding reduceren met een factor 10 vereist dus 100 keer zoveel herhalingen.

Een grotere spreiding reduceert voorspelbaarheid en hindert daarom het maken van toekomstplannen, zoals begrotingen voor onderhoudsuitgaven. Bij bestrijden van het fileprobleem is het veel beter om je te richten op het reduceren van de spreiding in de reistijd (verhogen van voorspelbaarheid) dan op het minimaliseren van de verwachte reistijd. Dat laatste gaat juist vaak de gepaard met verhogen van de spreiding. Gelukkig zijn de filebestrijders daar enige tijd geleden ook achtergekomen, zoals te lezen is in de *Nota Mobiliteit* op www.notamobiliteit.nl.

VERDER LEZEN Naast het al genoemde *Luck, Logic, and White Lies: The Mathematics of Games* van J. Bewersdorff is het monumentale en onderhoudende *Winning Ways for Your Mathematical Plays* van E.R. Berlekamp, J.H. Conway en R.K. Guy een inspirerend naslagwerk voor combinatorische spelen. De website van de auteur: www.win.tue.nl/~wstomv. ■

In het vorige nummer presenteerden we de prijsvraag die draait om *magische wiskunde*. De zeven opgaven zijn ook te vinden op onze website: www.pythagoras.nu. Verder gaven we drie oefenopgaven, waarvan we nu de oplossingen geven.

■ door Matthijs Coster

WEES EEN MAGIËR

DE ANTWOORDEN VAN DE OEFENOPGAVEN VAN DE PRIJSVRAAG

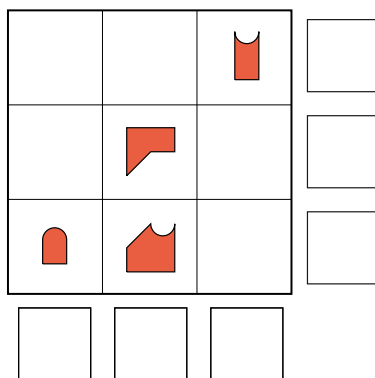
OEFENOPGAVE 1

			15	7
		9	1	23
	3		17	
22	19	11		
13	10			

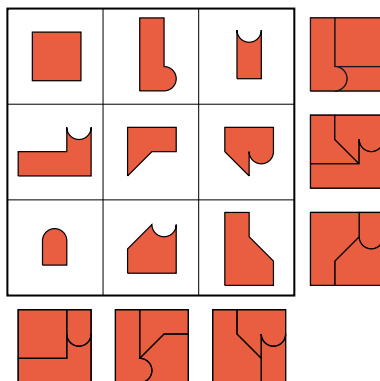
Een *panmagisch vierkant* is een magisch vierkant met de volgende eigenschap: als één of meer kolommen van de voorzijde naar de achterzijde wordt verplaatst, dan ontstaat er opnieuw een magisch vierkant (dus hebben opnieuw de diagonalen dezelfde som als de rijen en kolommen). Hierboven zie je het begin van een panmagisch vierkant. De complete invulling zie je hieronder.

4	21	18	15	7
20	12	9	1	23
6	3	25	17	14
22	19	11	8	5
13	10	2	24	16

OEFENOPGAVE 2



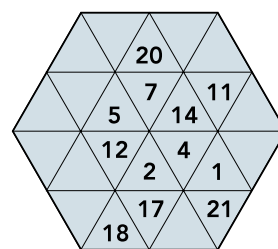
In een geomagisch vierkant staan geen getallen, maar tweedimensionale figuren. Het is de bedoeling om met de figuurtjes die in één rij, kolom of diagonaal staan, steeds dezelfde vorm te leggen. Je mag de figuren desgewenst *draaien* (roteren) en *omkeren* (spiegelen). Hierboven zie je het begin van een semi geomagisch vierkant (semi, omdat met de drie figuren in elke rij en in elke kolom het doel kan worden gevormd, maar *niet* met de drie figuren op een diagonaal). De oplossing zie je hieronder.



OEFENOPGAVE 3

In een geomagisch vierkant van $3 \times 3 = 9$ figuren is de oppervlakte van de middelste figuur altijd eenderde deel van de oppervlakte van het doel. Om in te zien dat dat zo is, tel je de twee diagonalen en de middelste rij bij elkaar op; dit zijn in totaal drie rijssommen. We hebben de elementen van de eerste en laatste kolom eenmaal geteld en het middelste element driemaal geteld. Trek nu de eerste en laatste kolom er van af (dit zijn twee rijssommen). We houden driemaal het middelste element over, corresponderend met eenmaal een rijssom. Blijkbaar correspondeert het middelste element met een derde van een rijssom.

CORRECTIE PRIJSVRAAG

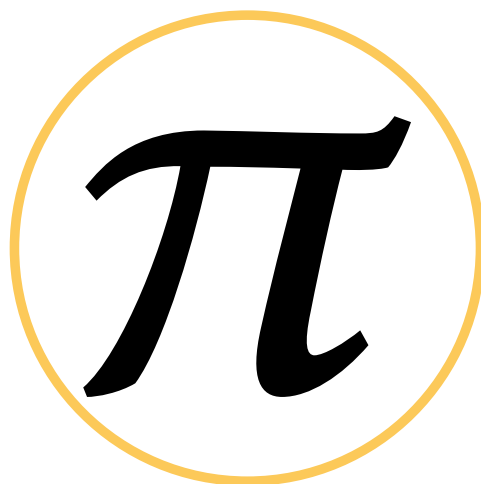


Opgave 3 van de prijsvraag is het afmaken van deze *magische zeshoek*. In het vorige nummer schreven we dat alle getallen van 1 tot en met 26 erin moeten voorkomen, maar dat moeten natuurlijk alle getallen van **1 tot en met 24** zijn. De som van de getallen die op één lijn staan, moet steeds hetzelfde zijn.

Ludolph van Ceulen had met enorm veel rekenwerk onder- en bovengrenzen voor π bepaald die pas in het 35ste cijfer achter de komma verschilden. Dit feit werd op zijn grafsteen in de Leidse Pieterskerk vermeld. In zijn boek *Vanden Cirkel* ging hij iets minder ver: daarin beschrijft hij hoe hij twintig decimalen vindt. Die methode leggen we uit in dit artikel.

■ door Steven Wepster

HOE VAN CEULEN



INSLOOT

26

Van het getal π , de verhouding tussen omtrek en diameter van een cirkel, zijn tegenwoordig meer dan 10^{12} decimalen bekend. In de tijd van Ludolph van Ceulen (1540-1610) was dat wel anders: het was toen een hele prestatie om enkele tientallen decimalen uit te rekenen.

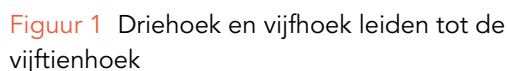
Van Ceulen gebruikte een klassieke methode die ook de Griekse geleerde Archimedes (ca. 250 v. Chr.) had gebruikt. Het idee is dat je de cirkelomtrek insluit tussen twee regelmatige veelhoeken: een ingeschreven in de cirkel en de andere omgeschreven. Je ziet direct in dat de cirkelomtrek langer is dan de som van de zijden van de ingeschreven veelhoek, en tegelijk korter dan de som van de zijden van de omgeschreven veelhoek. Hoe meer hoeken je neemt, hoe kleiner het verschil tussen de in- en omgeschreven veelhoek en zo krijg je dus een goede π -benadering.

Archimedes gebruikte 963 hoeken en sloot π in tussen, afgerond, $3\frac{10}{71}$ en $3\frac{1}{7}$. In de tijd van Archimedes rekende nog niemand met de Hindu-Arabische cijfers die we nu gebruiken, laat staan met decimalen achter de komma, dus zo'n benadering met

breuken was wel praktisch.

Om π nauwkeuriger uit te rekenen, heb je meer hoeken nodig. Hoe kom je daaraan? De eenvoudigste manier is door steeds te verdubbelen. Dat is ook wat Archimedes deed: $96 = 6 \times 2^4$. Van een ingeschreven regelmatige zeshoek weet je dat de omtrek even lang is als 3 keer de diameter van de cirkel. De omgeschreven zeshoek heeft zijden die $2/\sqrt{3}$ keer zo lang zijn, dus de totale omtrek is $6/\sqrt{3} \approx 3,46$ keer die diameter. Dat is nog niet zo'n beste benadering. Maar als je steeds het aantal zijden verdubbelt, krijg je een twaalfhoek, een 24-hoek, een 48-hoek en ten slotte een 96-hoek. Van Ceulen deed het iets anders. Voor de 20 decimalen die in *Vanden Cirkel* staan, begon hij met een 15-hoek en hij verdubbelde 31 keer, waardoor hij een 32.212.254.720-hoek kreeg.

We gaan nu eerst kijken hoe je een zijde van de 15-hoek berekent en daarna hoe je de zijde berekent van een $2n$ -hoek als je die van een n -hoek weet. We nemen vanaf nu steeds een cirkel met straal 1.



Nu de vijfhoek, die is een stuk lastiger. Noem de lengte van de zijden x , de lengte van de diagonalen s , en noem $CH = HD = t$ (dit zijn zijden van een regelmatige tienhoek). Kijk nu naar de driehoeken ABQ en ACD en ga na dat ze gelijkvormig en gelijkbenig zijn. Daardoor volgt dat $AB : BQ = AC : CD$ en dus, als je de zijden invult en kruiselings vermenigvuldigt, $x^2 = s(s - x)$. Als je deze kwadratische vergelijking oplost voor s , dan vind je

Er is ook een negatieve wortel, maar die doet er

$$\begin{aligned} FR &= \frac{1}{2}(FG - CD) \\ &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{3} - \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}}\right) \\ &= \sqrt{\frac{3}{4}} - \sqrt{\frac{5}{8} - \sqrt{\frac{5}{64}}}. \end{aligned}$$

Het kwadraat hiervan is

$$FR^2 = 1\frac{3}{8} - \sqrt{\frac{5}{64}} - \sqrt{1\frac{7}{8} - \sqrt{\frac{45}{64}}}.$$

Ook hebben we $RC = HP - HN$.

Hierin is $HP = \frac{1}{2}$, want de hoogte van driehoek AFG is $\frac{3}{2}$. Uit de gelijkvormigheid van de driehoeken HCN en HAC volgt verder $HN = HC^2/HA = t^2/2 = \frac{3}{4} - \sqrt{\frac{5}{16}}$. Dus $RC = \sqrt{\frac{5}{16}} - \frac{1}{4}$. Het kwadraat is

$$RC^2 = \frac{3}{8} - \sqrt{\frac{5}{64}}.$$

Nu kunnen we dus $FC^2 = FR^2 + RC^2$ uitrekenen en de wortel uit het resultaat trekken. Zo vinden we voor de lengte van een zijde van de 15-hoek

$$\sqrt{1\frac{3}{4} - \sqrt{\frac{5}{16}} - \sqrt{1\frac{7}{8} - \sqrt{\frac{45}{64}}}}.$$

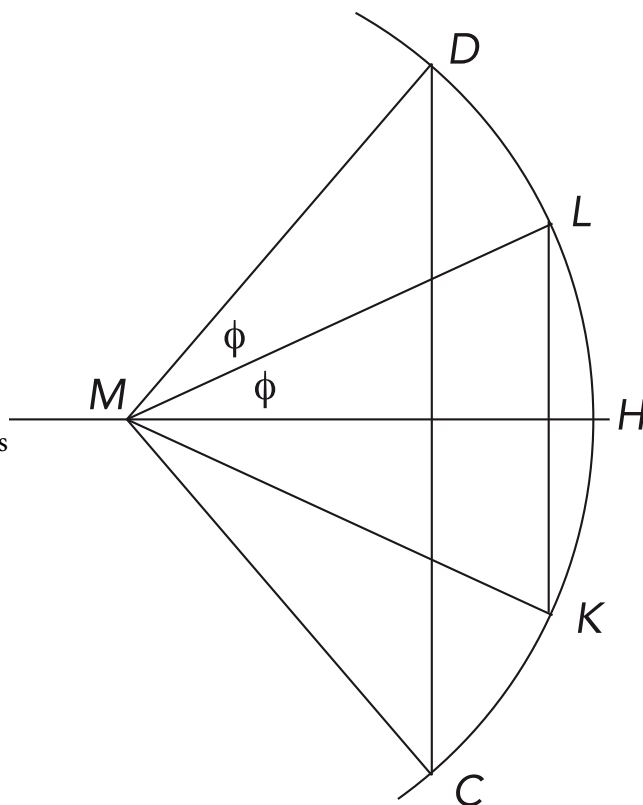
VERDUBBELING Nu gaan we de zijde van een $2n$ -hoek berekenen aan de hand van de zijde van een n -hoek. We volgen niet Ludolph, want die had voor zijn resultaat een (zelfs voor die tijd) onnodig ingewikkeld bewijs gegeven. We zullen zijn resultaat afleiden op een manier die veel beter bij de tegenwoordige vwo-kennis past, namelijk uitgaande van de goniometrische formule $\cos 2\varphi = 1 - 2\sin^2 \varphi$. Die kun je ook schrijven als $2\sin^2 \varphi = 1 - \cos 2\varphi$. Als je nu gebruikt dat $\cos 2\varphi = \sqrt{1 - \sin^2 2\varphi}$ en alles met 2 vermenigvuldigt, krijg je $(2\sin \varphi)^2 = 2 - \sqrt{4 - (2\sin 2\varphi)^2}$.

Deze kennis passen we nu toe in figuur 2, waarin je een deel van de cirkelboog ziet met middelpunt M , en twee koorden CD en KL . Beide koorden snijden de straal MH loodrecht. Verder is $\angle DMH = \varphi$ en $\angle LMH = \varphi$. Koorde CD staat dus over een twee keer zo grote boog als koorde KL . Als CD de zijde van een n -hoek is, dan is KL de zijde van een $2n$ -hoek. Er geldt dat $CD = 2\sin 2\varphi$ en $KL = 2\sin \varphi$. Volgens de zojuist afgeleide verdubbelingsformule geldt dus $KL^2 = 2 - \sqrt{4 - CD^2}$. Laten we zeggen dat de zijde van de n -hoek x is, dan is de zijde van de $2n$ -hoek $\sqrt{2 - \sqrt{4 - x^2}}$,

van de $4n$ -hoek $\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{4 - x^2}}}$,

van de $8n$ -hoek $\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{4 - x^2}}}}$,
etcetera. Je kunt nu makkelijk zelf de formule voor de 15×2^{31} -hoek opschrijven.

TERUG NAAR π We weten nu hoe je de zijde van een ingeschreven regelmatige 15×2^n -hoek uitrekent en als je die met $15 \times 2^{n-1}$ vermenigvuldigt,



Figuur 2 Van de n -hoek naar de $2n$ -hoek

heb je de halve omtrek die (bij een cirkel met straal 1) iets kleiner is dan π . Vanaf de bovenkant kun je π benaderen met een omgeschreven 15×2^n -hoek.

Om te begrijpen hoe je het makkelijkst aan de maten van de omgeschreven veelhoeken komt, keren we terug naar figuur 1. Daarin is HD een zijde van de ingeschreven tienhoek; wat er nu komt geldt echter voor elke $2n$ -hoek. Omdat er een even aantal hoeken is, is A een hoekpunt recht tegenover H . De koorde AD staat loodrecht op HD en ook loodrecht op de tegenoverliggende zijde bij A . Een cirkel met diameter AD zou precies in de tienhoek passen. Andersom kun je de hele tienhoek met een factor $1/AD$ vergroten zodat hij precies om de cirkel met straal 1 past. Maar er geldt $AD = \sqrt{4 - HD^2}$, dus de vergrotingsfactor volgt gewoon uit de laatst berekende zijde van de ingeschreven figuur. De zijde van de omgeschreven figuur vind je dus met slechts één wortel extra.

Voordat er rekenmachines bestonden, rekende iedereen met potlood en papier. Tegenwoordig zijn er niet zo veel mensen die nog met de hand kunnen worteltrekken. Meester Ludolph had daar helemaal geen problemen mee. Voor het kwadraat van de zijde van een 15-hoek hoefde hij maar 3 wortels te trekken en totaal met alle verdubbelingen had hij 36 wortels nodig voor de in- en omgeschreven 15×2^{31} -hoeken. Om aan het eind nog 20 significante cijfers over te houden, moest hij beginnen met iets meer dan 40 cijfers achter de komma. Hier moet hij toch wel een paar weken mee bezig zijn geweest. ■

DE WERKING VAN EEN HELDERZIEND VIERKANT

■ door Arnout Jaspers

In het vorige nummer lieten we een spelletje voor de Nintendo DS zien, *Deep Psyche*. Eerst schrijf je zelf een getal op het touchscreen. De spelcomputer schotelt je dan een vierkant met zestien getallen voor. Je kiest daaruit een getal en schrapt alle andere getallen die in dezelfde rij en kolom staan. Deze procedure herhaal je, totdat je vier getallen overhoudt. De som van die vier getallen blijkt steeds het aanvankelijk gekozen getal te zijn. Hieronder zie je hoe het werkt met begingetal 109.



HOE FLIKT DE COMPUTER DAT? Kijk eens goed naar de selectie van de ‘willekeurige’ getallen. De procedure is: ‘kies een getal, schrap de overige getallen in dezelfde rij en kolom’ en herhaal dit drie keer. Het effect is dat je altijd precies één getal in elke rij en in elke kolom overhoudt.

Vervolgens leggen we het getallenvierkant op de snijtafel. We noemen de getallen in de meest linkse kolom achtereenvolgens a , b , c en d (in dit voorbeeld: 25, 33, 20, 29) en bepalen per rij het verschil. Je krijgt dan het volgende vierkant:

a	$a+2$	$a-1$	$a+1$
b	$b+2$	$b-1$	$b+1$
c	$c+2$	$c-1$	$c+1$
d	$d+2$	$d-1$	$d+1$

Als je nu uit elke rij en elke kolom één getal moet kiezen, krijg je onvermijdelijk de som

$$a + b + c + d + 0 + 2 - 1 + 1 = a + b + c + d + 2.$$

(Je kunt in plaats van een kolom ook de getallen van een *rij* nemen en vervolgens de verschillen per kolom bepalen, dan krijg je een soortgelijke structuur.)

Het geheim van *Deep Psyche* is al opgelost: je gaf van tevoren een getal op (hier 109) en de computer koos vier getallen zodat $a + b + c + d = 107$. Natuurlijk willen we dat a , b , c en d allemaal verschillend zijn, net als de overige twaalf getallen. Kijk nog eens naar het schema: het grootste verschil per rij is 3 (want $a + 2 - (a - 1) = 3$). Dus als a , b , c en d allemaal minstens 4 van elkaar verschillen, liggen de rijen ‘los van elkaar’ en zijn geen twee getallen in het helderziende vierkant hetzelfde.

Er is niks bijzonders aan de kolomverschillen 2, -1 en 1. De meest algemene vorm voor een helderziend vierkant is:

$a+p$	$a+q$	$a+r$	$a+s$
$b+p$	$b+q$	$b+r$	$b+s$
$c+p$	$c+q$	$c+r$	$c+s$
$d+p$	$d+q$	$d+r$	$d+s$

Hierin mogen de getallen ook negatief of 0 zijn, of zelfs breuken. Met de regel ‘één getal uit elke rij en kolom’ is de som altijd

$$a + b + c + d + p + q + r + s.$$

Als je de garantie wilt dat alle getallen in het vierkant verschillend zijn, is het voldoende om ervoor te zorgen dat het minimale verschil tussen de getallen a , b , c en d groter is dan het maximale verschil tussen de getallen p , q , r en s . ■

PYTHAGORAS OLYMPIADE

■ door Matthijs Coster, Alexander van Hoorn, Eddie Nijholt en Tijmen Veltman

Doe mee met de Pythagoras Olympiade! Elke aflevering bevat vier opgaven. De eerste twee zijn wat eenvoudiger; onder de goede inzendingen van leerlingen uit de klassen 1, 2 en 3 wordt een Irisbon van 20 euro verloot. De laatste twee zijn echte breinbrekers; onder de goede inzendingen van leerlingen (tot en met klas 6) wordt een Irisbon van 20 euro verloot. Bovendien kun je je via deze breinbrekers plaatsen voor de tweede ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade, mocht het via de eerste ronde niet lukken. Niet-leerlingen kunnen met de Pythagoras Olympiade meedoen voor de eer.



HOE IN TE ZENDEN? Inzendingen ontvangen we bij voorkeur per e-mail (getypt of een scan van een handgeschreven oplossing): pytholym@pythagoras.nu.

Eventueel kun je je oplossing sturen naar **Pythagoras Olympiade, Korteweg-de Vries Instituut, Universiteit van Amsterdam, Postbus 94248, 1090 GE Amsterdam.**

Voorzie het antwoord van een duidelijke toelichting (dat wil zeggen: een berekening of een bewijs). Vermeld je naam en adres; leerlingen moeten ook hun klas en de naam van hun school vermelden.

Je inzending moet bij ons binnen zijn vóór 28 februari 2010.

DE GOEDE INZENDERS VAN SEPTEMBER 2009

170: Bernard Asselbergs, Leersum; Anthon van Dijk, Hoofddorp; Arie Heikoop, Kampen; Olivier Schnitzeler, Sint-Michielsgestel; Ian Vandelacuze, Ruiselede.

171: Anthon van Dijk, Hoofddorp; Arie Heikoop, Kampen; Jeroen Huijben, Theresialyceum (klas 3), Tilburg; Pepijn de Maat, Christelijk Gymnasium (klas 1), Utrecht; Olivier Schnitzeler, Sint-Michielsgestel.

172: Kees Boersma, Vlissingen; Anthon van Dijk, Hoofddorp; Nikita Hanning, Scheldemond College (klas 5), Vlissingen; Arie Heikoop, Kampen; Stefan Klootwijk,

Bonhoeffer College (klas 5), Enschede; Arie van der Kraan, Nuth; Simon Vandeveld, Edugo Campus de Toren (klas 5), Oostakker.

173: Kees Boersma, Vlissingen; Nikita Hanning, Scheldemond College (klas 5), Vlissingen; Arie Heikoop, Kampen; Stefan Klootwijk, Bonhoeffer College (klas 5), Enschede; Simon Vandeveld, Edugo Campus de Toren (klas 5), Oostakker.

De Irisbonnen gaan naar Pepijn de Maat en Nikita Hanning.

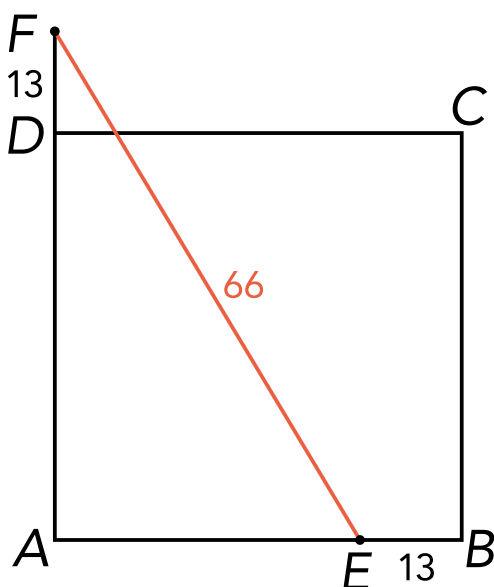
OPGAVE 178

Kies een positief geheel getal dat deelbaar is door 17. Haal het laatste cijfer weg en trek het vijfmaal van het overgeblevene af. Waarom is het resultaat altijd weer deelbaar door 17?

(Een voorbeeld: kies het getal 442, dat is deelbaar door 17. Laat de 2 weg en trek dat vijfmaal van 44 af: $44 - 5 \times 2 = 34$. Inderdaad is 34 weer deelbaar door 17.)

OPGAVE 179

Gegeven is een vierkant $ABCD$. Op de zijde AB ligt het punt E en op het verlengde van AD ligt het punt F (aan de kant van D). Er geldt: $|BE| = |DF| = 13$ en $|EF| = 66$. Bereken de oppervlakte van $ABCD$.



OPGAVE 180

Vier violisten, twee altisten en twee cellisten willen op een vaste weekavond (dus geen zaterdag- of zondagavond) het octet van Mendelssohn gaan repeteren. Nu hebben die acht muzikanten, onafhankelijk van elkaar, elk één weekavond waarop ze absoluut niet kunnen. Wat is de kans dat ze toch een gemeenschappelijke wekelijkse repetitieavond kunnen vinden?



OPGAVE 181

Bewijs dat voor elk positief geheel getal n geldt dat $n^{15} - n^3$ deelbaar is door 32760.

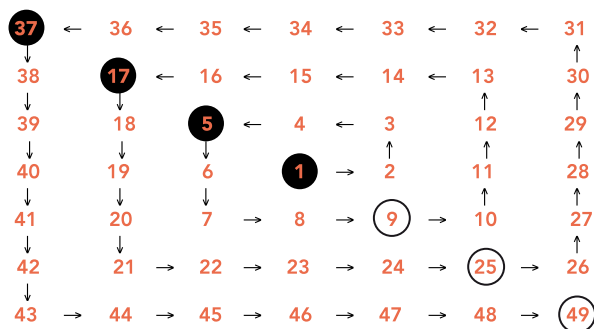
OPLOSSING 170

Gegeven zijn twee gehele, positieve getallen a en b . Het aantal cijfers van de negen getallen $a, ab, ab^2, ab^3, ab^4, \dots, ab^8$ is achtereenvolgens 1, 2, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Wat zijn de waarden van a en b ?

Oplossing. Omdat a uit één cijfer bestaat, is $a < 10$ en aangezien ab^2 uit even veel cijfers bestaat als ab , is $b < 10$. Nu volgt uit $ab \geq 10$ dat $a > 1$. Stel eens dat $b \geq 8$, dan is $ab^2 \geq 2 \cdot 8^2 = 128$. Dit kan niet, omdat ab^2 uit twee cijfers bestaat, dus volgt $b < 8$. Verder is gegeven dat $ab^2 < 10^2$ en $ab^8 \geq 10^7$. Delen we deze ongelijkheden door elkaar, dan zien we dat $b^6 > 10^5$, dus $b > 5$, waaruit volgt dat b gelijk aan 6 of 7 is. Nu moet a wel gelijk zijn aan 2, want als $a \geq 3$, is $ab^2 \geq 3 \cdot 6^2 = 108$. Als $b = 6$, bestaat $ab^6 = 2 \cdot 6^6 = 93312$ maar uit 5 cijfers. Dus moet $b = 7$ en vinden we het rijtje 2, 14, 98, 686, 4802, 33614, 235298, 1647086, 11529602. Dit rijtje voldoet.

OPLOSSING 171

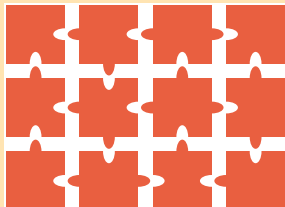
We kunnen in gedachte de 1 op een vel papier schrijven, met rechts daarvan de 2, daarboven de 3 en zo tegen de klok in uitspiraliserend alle natuurlijke getallen. Bekijk de 'halve' diagonaal die vanaf 1 naar linksboven voert. Wat is het 100ste getal op deze diagonaal?



OPLOSSINGEN KLEINE NOOTJES NR. 2

PUZZELSTUKJES

Er zijn 12 puzzelstukjes:



NULLEN OP JE WEKKER

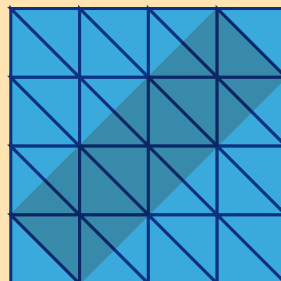
Om 11 uur, 11 minuten en 11 seconden 's morgens.

MIER OP TOPSNELHEID?

De snelheid v op de heenweg is gelijk aan de afstand a gedeeld door de tijd t , dus $v = a/t$. Alleen als de snelheid van de auto oneindig zou zijn en de reistijd dus nul, zou de gemiddelde snelheid $2a/(t + 0) = 2v$ zijn. Het lukt dus nooit!

RECHTHOEK IN VIERKANT

Er zijn 32 blauwe driehoekjes nodig:



GRABBELTON

De grabbelton bevat eerst 10% prijsjes, ofwel 10 liter. Nadat de grabbelton weer is aangevuld, is die 10 liter 20% van de totale inhoud. In totaal bevat de grabbelton dan dus 5 liter; de helft van de beginhoeveelheid!



49ste jaargang nummer 3
januari 2010
ISSN 0033 4766

Pythagoras wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde en richt zich tot alle leerlingen van vwo en havo. *Pythagoras* stelt zich ten doel jongeren kennis te laten maken met de leuke en uitdagende kanten van wiskunde.

Internet www.pythagoras.nu

Hoofdredacteur Arnout Jaspers

Eindredacteur Alex van den Brandhof

Redactie Matthijs Coster,
Jeanine Daems, Jan Guichelaar,
Klaas Pieter Hart

Bladmanager Tilman Grünwald,
Mathematisch Instituut,
Universiteit Leiden,
Postbus 9512, 2300 RA Leiden.

Vormgeving Grafisch Team
Digipage BV, Leidschendam

Druk Drukkerij Ten Brink, Meppel

Uitgever Koninklijk Wiskundig
Genootschap

Verantwoordelijk uitgever Chris Zaal

Lezersreacties en kopij Bij voorkeur per e-mail; lezersreacties naar Jan Guichelaar, jan@pythagoras.nu en kopij naar Arnout Jaspers, arnout@pythagoras.nu. Eventueel per post naar Jan Guichelaar, Pedro de Medinallaan 162, 1086 XR Amsterdam.

Abonnementen, bestellingen en mutaties

Mirjam Worst, Drukkerij Ten Brink,
Postbus 41,
7940 AA Meppel.
Telefoon 0522 855 175,
fax 0522 855 175.

Abonnementsprijs

(6 nummers per jaargang)
€ 22,00 (Nederland),
€ 24,00 (België),
€ 28,00 (overig buitenland),
€ 18,00 (leerlingabonnement
Nederland),
€ 20,00 (leerlingabonnement België),
€ 12,00 (groepsabonnement
Nederland),
€ 14,00 (groepsabonnement België).
Zie www.pythagoras.nu voor toelichtingen.

Aan dit nummer werkten mee

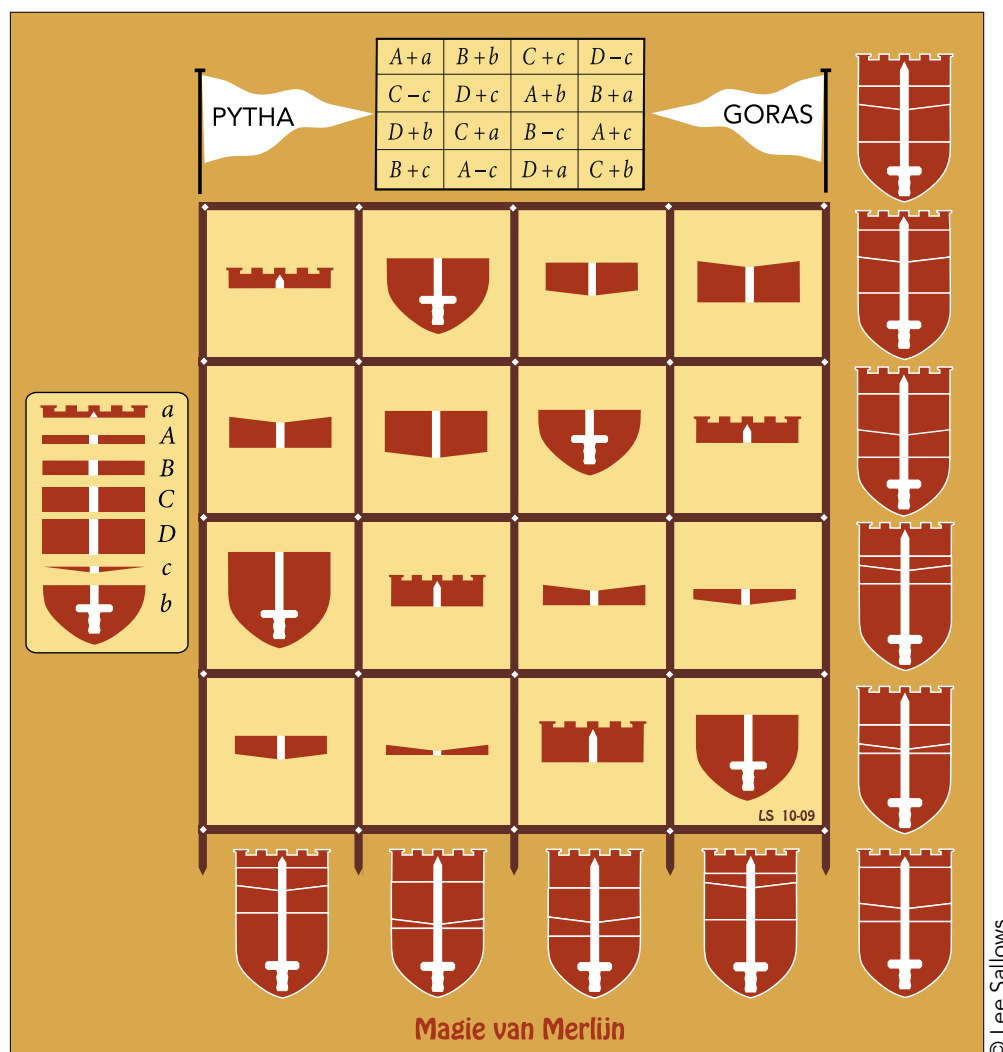
Dick Beekman, auteur van diverse breinbrekerboeken (d.beekman9@chello.nl), Alex van den Brandhof, docent wiskunde op het Vossiusgymnasium te Amsterdam (alex@pythagoras.nu), Matthijs Coster, wetenschappelijk onderzoeker bij het Ministerie van Defensie (matthijs@pythagoras.nu), Jan Guichelaar, voormalig directeur van Interconfessionele Scholengroep Amsterdam (jan@pythagoras.nu), Klaas Pieter Hart, docent topologie aan de TUD (kp@pythagoras.nu), Alexander van Hoorn, student wiskunde aan de UvA (alexander@pythagoras.nu), Arnout Jaspers, wetenschapsjournalist (arnout@pythagoras.nu), Relinde Jurrius, aio wiskunde aan de TUE (r.p.m.j.jurrius@tue.nl), Robbert van der Kruk, design & engineering manager bij Bosch Rexroth (robbertvdkruk@live.nl), Eddie Nijholt, student wiskunde aan de UvA (eddie@pythagoras.nu), Quintijn Puite, docent wiskunde aan de TUE en de Hogeschool Utrecht (g.w.q.puite@tue.nl), Lee Sallows, recreatief wiskundige (lee.sall@inter.nl.net), Tijmen Veltman, student wiskunde aan de UvA (tijmen@pythagoras.nu), Tom Verhoeff, wiskundig informaticus aan de TUE (t.verhoeff@tue.nl), Steven Wepster, historicus van de wiskunde aan de UU (s.a.wepster@gmail.com)



GEOMAGISCH VIERKANT

■ door Lee Sallows

In een magisch vierkant is de som van de getallen in alle rijen, kolommen en de twee diagonalen hetzelfde. In een geomagisch vierkant staan geen getallen, maar figuren. Met de figuren in iedere kolom, rij en diagonaal moet steeds dezelfde vorm worden gelegd.



Magische vierkanten hebben veel te maken met *Latijnse vierkanten*. In een Latijns vierkant bevat elke rij en kolom verschillende symbolen (zoals bij een sudoku). De hoofdletters in het algebraïsche vierkant bovenaan laten een voorbeeld van een 4 x 4 *diagonaal* Latijns vierkant zien, d.w.z.: de vier elementen A , B , C en D verschijnen ook in de twee hoofd diagonalen. De kleine letters zorgen ervoor dat de inhoud van elk vakje slechts één keer voorkomt, terwijl de som van elke rij, kolom en diagonaal hetzelfde blijft.