

PYTHAGORAS

50 jaar

WISKUNDETIJDSCHRIFT VOOR JONGEREN

XXXXXX

**Navigatie:
van poolshoogte tot GPS**

**Jubileumprijsvraag
Een geldmachine op de IMO**

50ste JAARGANG - NUMMER 1 - SEPTEMBER 2010



Maak je verzameling compleet!



Ook de oude jaargangen van *Pythagoras* staan boordevol interessante artikelen.

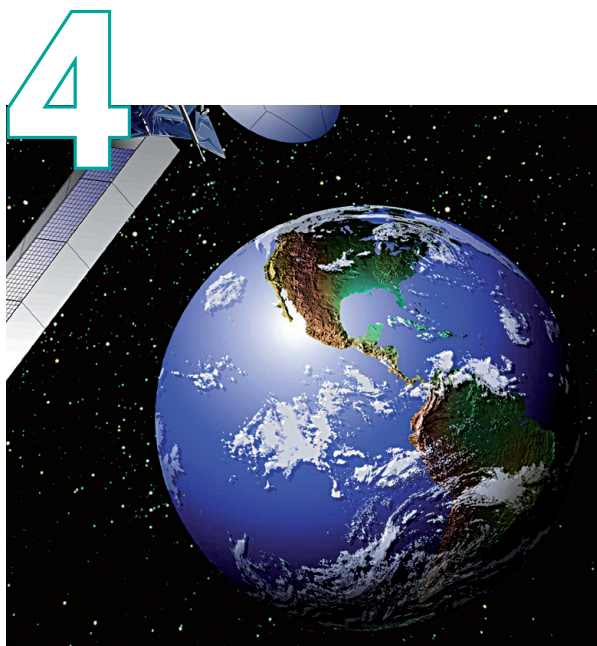
Ze zijn, voor zover voorradig, na te bestellen bij de abonneeadministratie.

De complete jaargang 49 kost € 18;
oudere jaargangen kosten € 12,50.

Bestellen kan telefonisch: 0522-855175 of
per e-mail: abonneeadministratie@pythagoras.nu.



INHOUD



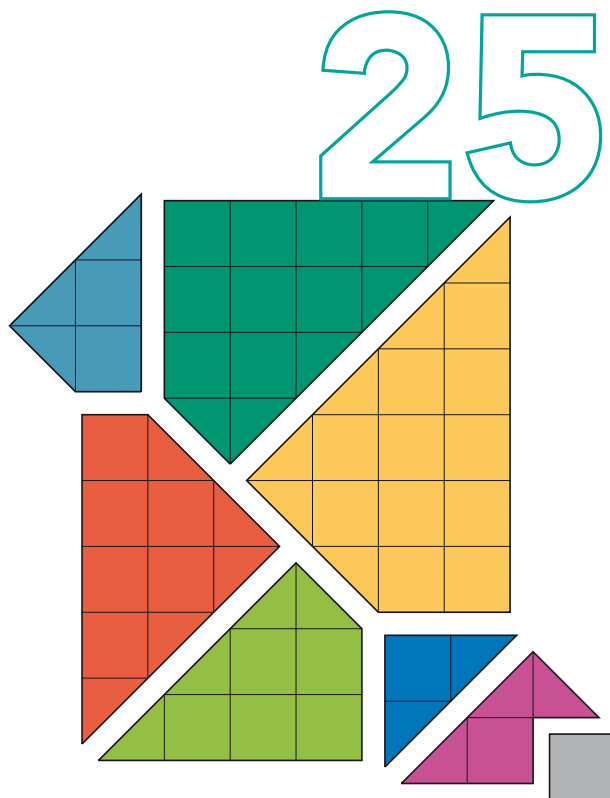
VAN POOLSHOOGTE TOT GPS

In zijn vijftigste jaargang gaat *Pythagoras* na welke vooruitgang er sinds de eerste jaargang geboekt is op onderwerpen waar iedereen mee te maken heeft, en waar wiskunde een sleutelrol bij speelt. Aflevering 1 van deze serie behandelt navigatie.



DE ELLIPS VAN BERNINI?

In onze nieuwe serie 'Op reis' nemen we je mee naar een plaats waar wiskundig iets te beleven valt. In dit nummer gaan we naar Vaticaanstad. Wat is eigenlijk de vorm van het Sint-Pietersplein?



VAN 49 NAAR 50

Deze jaargang staat de prijsvraag van *Pythagoras* in het teken van het vijftigjarig jubileum. In elk nummer vind je een puzzel met het getal 50 als thema. De eerste aflevering symboliseert de overgang van 49 naar 50.

EN VERDER

- 2 Kleine nootjes
- 10 Computerintelligentie – van *Boter, kaas en eieren* tot *Deep Blue*
- 13 Getalscrabble
- 14 Journaal
- 18 4×4 geomagisch vierkant met 8 complementaire paren
- 22 De logaritme van de logaritme, maar dat 2,5 keer
- 26 De geldmachine
- 30 Pythagoras Olympiade
- 33 Oplossingen Kleine nootjes nr. 6

■ **NIVEAUBALKJES** Pagina's met één of meer zwarte balkjes (onder de paginanummering) geven de moeilijkheidsgraad aan. Eén balkje: lastig. Twee balkjes: vereist wiskundekennis uit de vijfde of zesde klas. Drie balkjes: net iets moeilijker.



KLEINE NOOTJES

■ door Dick Beekman en Jan Guichelaar

VIER KEER DRIE IS TWAALF

Albert heeft 1000 euro aan beurs aandelen. De aandelen worden 3 jaar lang elk jaar 4% meer waard. De vier erop volgende jaren wordt zijn aandelenpakket elk jaar 3% minder waard. 'Ach,' zegt Albert, ' $3 \times 4 = 4 \times 3$, niks aan de hand, ik heb nog steeds het bedrag waarmee ik begonnen ben.' Is dat juist?



GEKLEURDE KNIKKERS

In een doos zitten 25 knikkers van 5 verschillende kleuren en verschillende aantallen per kleur. Altijd als je er 20 uit pakt, heb je er minstens 10 blauwe bij. Hoeveel knikkers zijn er van elke kleur?

R

B L



Kleine nootjes zijn eenvoudige opgaven die weinig of geen wiskundige voorkennis vereisen om opgelost te kunnen worden. De antwoorden vind je in het volgende nummer van Pythagoras.

HOE LAAT?

‘Een goedemorgen, meneer Hofmeester. Weet u misschien hoe laat het is?’ Meneer Hofmeester, die zijn antwoorden altijd als raadsel verpakt, antwoordt: ‘Jazeker, als u een kwart van de tijd van middernacht tot nu optelt bij de helft van de tijd van nu tot middernacht, heeft u precies de juiste tijd.’



PYTHAGOREÏSCHE KRONEN

Van de Pythagoreïsche Kroon bestaan tien soorten munten: 1 kroon, 2 kroon, 3 kroon, en zovoorts tot en met 10 kroon. Karen en Joost hebben ieder twee van zulke munten. Karen kan aan Joost elk bedrag van 1 tot en met 10 kroon betalen. Welke munten heeft Karen en welke munten heeft Joost?



O O D

W I T

A U W

+

VLAGREKENEN

Gelijke letters zijn gelijke cijfers, verschillende letters zijn verschillende cijfers. Welke cijfers stellen de letters in de vlag voor?

50 jaar



NAVIGATIE

In zijn vijftigste jaargang gaat *Pythagoras* na welke vooruitgang er sinds de eerste jaargang geboekt is op onderwerpen waar iedereen mee te maken heeft, en waar wiskunde een sleutelrol bij speelt. De eerste aflevering van deze serie behandelt navigatie.
door Jan Guichelaar

VAN POOLSHOOGTE TOT GPS

4

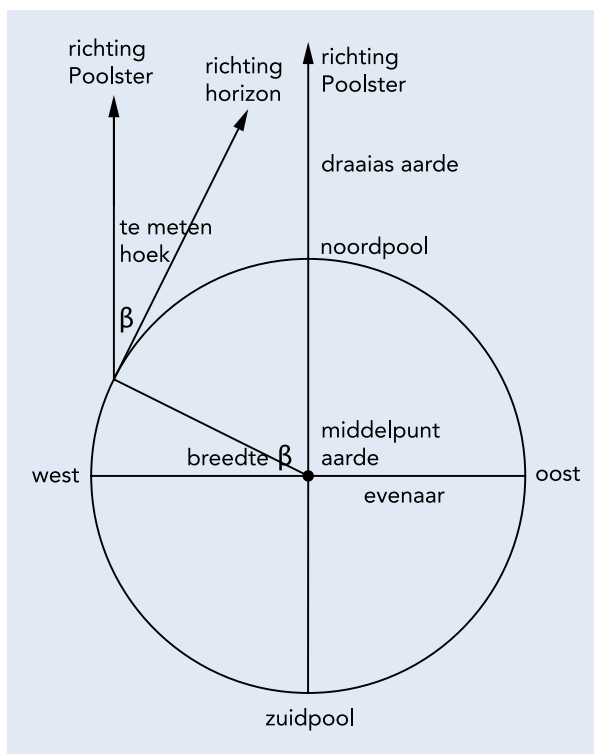
50 jaar

PYTHAGORAS

SEPTEMBER 2010

De technieken om op aarde de weg te vinden zijn juist de laatste vijftig jaren enorm verbeterd. Al snel nadat in de jaren zestig de eerste satellieten gelanceerd werden, zag men in dat die een revolutie in de navigatie zouden gaan ontketen. Maar eerst geven we een historisch overzicht van navigatietechnieken tot aan die tijd. Berekeningen en figuren in dit artikel zijn zoveel mogelijk gesimplificeerd om de essentie begrijpelijk te kunnen uitleggen. In werkelijkheid zijn er vele correcties en storende factoren, die de berekeningen en metingen veel gecompliceerder maken.

OUDESTEN METHODEN Voordat de Portugezen en Spanjaarden in de vijftiende en zestiende eeuw aan hun grote ontdekkingsreizen begonnen, werd meestal dicht onder de kust gevaren. Navigatie bestond



Figuur 1 Het meten van de hoek tussen horizon en Poolster

Het woord navigatie stamt uit het Latijn: *navis* = schip en *navigere* = varen.

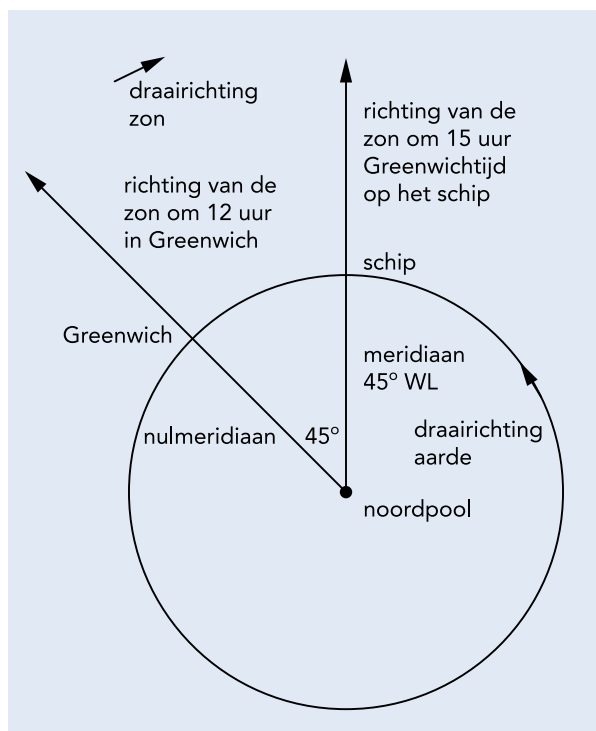
toen uit het waarnemen van herkenbare kenmerken op het land: bergtoppen, kerktorens of vuurtorens.

Pas na de ontdekking van Amerika en de lange zeiltochten naar India en Azië werd het maken van (nog zeer onnauwkeurige) wereldkaarten een noodzaak. De eerste handleiding voor het kompasvaren op zee was van de hand van de Spanjaard Pedro de Medina (1497-1567) en verscheen in 1545.

BREEDTE EN LENGTE OP DE AARDE Voor de oversteek naar Amerika en Azië was het ook noodzakelijk om je plaats op zee te bepalen als er dagenlang geen land in zicht was geweest. De coördinaten die toen op de aardbol werden ingevoerd en nu nog steeds gebruikt worden, waren de breedtecirkels en de meridianen. De breedtecirkels lopen parallel aan de evenaar. De evenaar is breedtecirkel 0, de noordpool ligt op 90 graden noorderbreedte (NB), de zuidpool op 90 graden zuiderbreedte (ZB). De meridianen zijn halve cirkels loodrecht op de evenaar, met hun uiteinden op de polen. De nulmeridiaan loopt door Greenwich bij Londen, de overige meridianen zijn naar het oosten genummerd van 0 tot 180 graden oosterlengte (OL), naar het westen van 0 tot 180 graden westerlengte (WL).

De bepaling van de breedtegraad was 's nachts altijd gemakkelijk, als er maar geen wolken waren. De draaiingsas van de aarde heeft namelijk een vaste stand in de ruimte en is altijd op de Poolster gericht. Door in noordelijke richting de hoek te meten tussen de horizon en de Poolster, wist men meteen op welke breedtegraad men voer. Vandaar de uitdrukking 'even poolshoogte nemen'. Zie figuur 1.

Maar veel moeilijker was het bepalen van de lengtegraad. In theorie kon het best, door gebruik te maken van het feit dat de zon overal op aarde 's middags om 12 uur zijn hoogste stand aan de hemel bereikt. Stel dat je een klok meeneemt op reis, die voor je vertrek op de nulmeridiaan door Greenwich precies op 12 uur 's middags is gezet toen de zon daar zijn hoogste punt bereikte. Als je weken later met je schip midden op de Atlantische Oceaan vaart en waarneemt dat de zon om 3 uur 's middags op die klok op zijn hoogste punt staat, dan heeft de zon dus 3/24-ste deel van een hele dag vanaf het hoogste punt boven Greenwich gedraaid om recht



Figuur 2 De aarde gezien vanuit de richting van de Poolster

boven het schip te komen. In 24 uur draait de zon 360 graden van oost naar west. In 3 uur dus 3/24-ste deel daarvan ofwel 45 graden. Het schip bevindt zich dan dus op 45 graden WL. Zie figuur 2.

6 KLOKKEN Het maken van een klok die op zee weken of zelfs maandenlang nauwkeurig gelijk bleef lopen, was echter een levensgroot probleem. De eerste in principe voldoende nauwkeurige klokken waren slingeruurwerken. Maar ja, een slingerklok gewoon in de kapiteinskajuit van een stampend schip neerzetten, dat wordt natuurlijk niks.

De befaamde Nederlandse geleerde Christiaan Huygens (1629-1695), uitvinder van het precisie slingeruurwerk, heeft veel moeite gedaan om zijn slingeruurwerk geschikt te maken voor de zeevaart, maar het lukte hem niet.

De eerste echt zeewaardige navigatieklok werd gemaakt door de Engelsman John Harrison (1693-1776), die er een door de regering uitgelopen prijs van 20.000 Engelse ponden voor kreeg, in die tijd een fortuin. De klok moest echt heel nauwkeurig zijn, want als hij – na maanden op zee – één minuut voor of achter liep, zat de lengtebepaling er al gauw een kilometer of twintig naast (de afwijking neemt af van de evenaar naar de polen).

RADIOSIGNALEN In het begin van de twintigste eeuw werden radiobakens bij de navigatie inge-

RELATIVITEITSTHEORIE Er bestaan nog steeds mensen die Einsteins relativiteitstheorie afwijzen, omdat die paradoxen zou bevatten. Als die mensen consequent waren, zouden ze niet op hun GPS-navigatiesysteem in de auto durven vertrouwen. Een GPS-computer brengt namelijk diverse effecten uit Einsteins relativiteitstheorie in rekening.

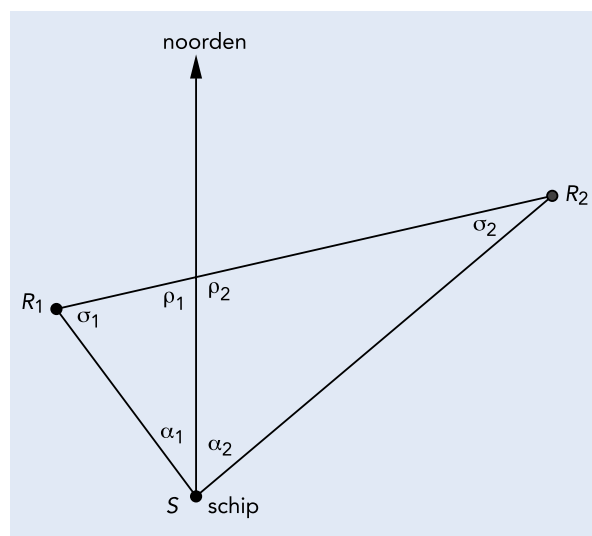
De ‘speciale’ relativiteitstheorie uit 1905 stelt onder meer dat een klok die ten opzichte van de waarnemer beweegt (in de satelliet) langzamer loopt dan wanneer hij ten opzichte van de waarnemer stil zou staan. Dit effect heet ‘tijddilatatie’.

De ‘algemene’ relativiteitstheorie uit 1915 beschrijft de zwaartekracht. Een klok in een satelliet, ver van de aarde en dus in een ‘zwak’ zwaartekrachtveld, loopt sneller dan een klok bij de waarnemer op het aardoppervlak, dus in een ‘sterk’ zwaartekrachtveld.

Zonder deze correcties te verrekenen, zou een GPS-systeem in de auto al gauw zulke afwijkingen in plaats en richting vertonen, dat er van de route-aanwijzingen niets meer klopt.

voerd. De signalen van bakens op bekende punten op aarde werden opgevangen door schepen en later vliegtuigen. De richting ten opzichte van het noorden werd bepaald met een radiorichtingzoekers (de richting met de sterkste ontvangst is de juiste). Met signalen van meerdere radiobakens kon via zogenaamde kruispeilingen de juiste plaats op de kaart bepaald worden. Zie figuur 3.

Met behulp van de hoeken σ_1 en σ_2 kan op de



Figuur 3 R_1 = radiobaken 1, R_2 = radiobaken 2, ρ_1 en ρ_2 aflezen op kaart, α_1 en α_2 meten met signalen, $\sigma_1 = \pi - \rho_1 - \alpha_1$, $\sigma_2 = \pi - \rho_2 - \alpha_2$

kaart op de basis R_1R_2 de driehoek R_1R_2S geconstrueerd worden, waarmee de positie op de kaart bepaald is. Deze methode was nog behoorlijk onnauwkeurig, omdat de richting waarin je de radiozender het sterkst ontvangt niet heel precies te bepalen is.

HET SATELLIETTIJDPERK, VANAF 1960 In 1960 werd de eerste satelliet bestemd voor plaatsbepaling op aarde gelanceerd door de Amerikaanse marine: de Transit IB (IA was mislukt). Na de lancering van de eerste Russische kunstmaan Sputnik, in 1957, werd de baan van deze kunstmaan vastgelegd door de signalen ervan op bekende punten op aarde te meten. Omgekeerd rees toen direct het idee om de signalen van een kunstmaan waarvan de baangegevens nauwkeurig bekend waren, te gebruiken om de positie op aarde te bepalen.

De plaatsbepaling op aarde met dit systeem maakte gebruik van het *Dopplereffect*. Iedereen kent dit wel als het om geluid gaat: als een politieauto met sirene aan op je af komt, klinkt de toon hoger dan wanneer hij je gepasseerd is en van je af beweegt. Geluid is een golfbeweging in de lucht, en de frequentie van die golfbeweging lijkt hoger als de geluidsbron op je af komt, en lager als de geluidsbron van je af beweegt.

Bij een radiozender in een kunstmaan treedt het Dopplereffect ook op: een radiosignaal is een elektromagnetische golf. Als de kunstmaan uitzendt met een precieze golflengte λ , zal de waarnemer op aarde een kleinere/grotere golflengte en dus een grotere/kleinere frequentie waarnemen, al naar gelang de kunstmaan in zijn baan om de aarde op je af komt of van je vandaan gaat.

In figuur 4 staat de berekening van de waargenomen frequentie f' als de kunstmaan je nadert:

$$f' = f \frac{c}{c - v}$$

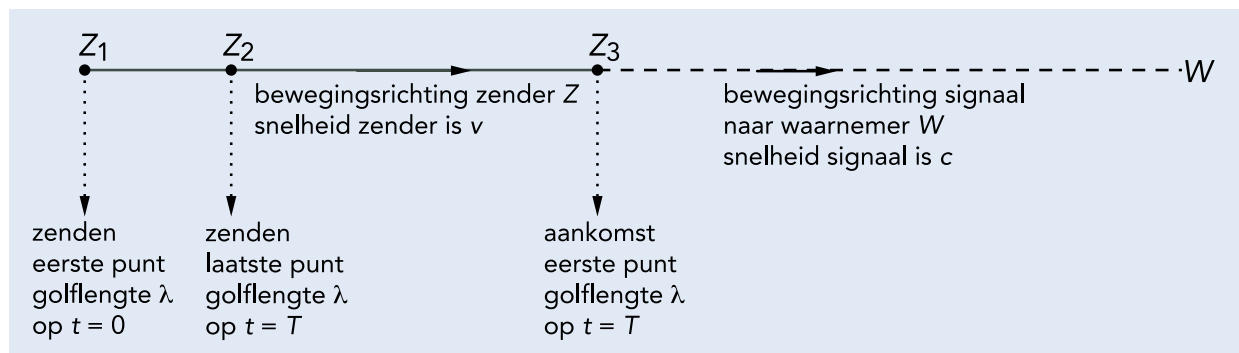
In figuur 4 is geen rekening gehouden met de relativiteitstheorie (zie het kader op pagina 6), die de formule iets ingewikkelder maakt.

Het is dan voor de waarnemer op aarde mogelijk om met behulp van interferentie (twee golven met f en f' samenbrengen en versterkingen en verzwakkingen meten) de frequentie f' te bepalen. Dan zijn in de formule voor f' drie grootheden bekend (f' , f en $c = 300.000$ km/sec) en kan de snelheid v berekend worden. Let wel: dit is de component van de totale snelheid in de richting van de waarnemer W . In figuur 5 staat de tekening waarmee de plaats op aarde bepaald kan worden.

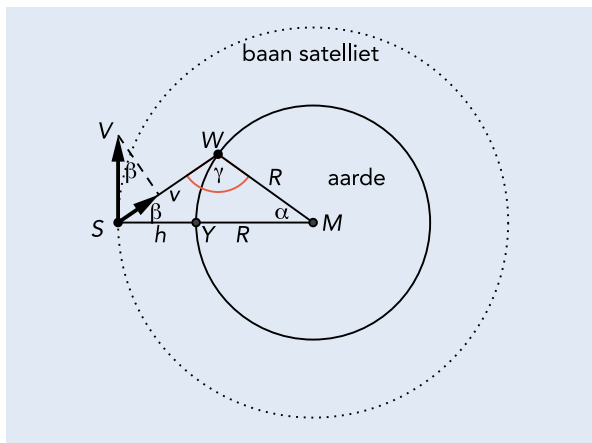
De bepaling van α uit de bekende gegevens R , h , V , Y en v gaat via de bepaling van β en γ (met de sinusregel):

$$\begin{aligned} \sin \beta &= \frac{v}{V} \\ \frac{R}{\sin \beta} &= \frac{h + R}{\sin \gamma} \\ \alpha &= \pi - \beta - \gamma \end{aligned}$$

De figuur geeft een tweedimensionaal geval. In werkelijkheid zijn de berekeningen complexer, omdat in drie dimensies de richting van v op een kegel rondom V ligt. Deze kegel snijdt het aardoppervlak volgens een kromme lijn. Op die lijn bevindt zich de waarnemer. Er is dus nog een waarneming aan een tweede satelliet nodig om een tweede lijn te vinden. De waarnemer bevindt zich dan op het snijpunt van de twee lijnen. Waarnemingen aan dezelfde satelliet op opeenvolgende tijdstippen geven ook een mogelijkheid om de juiste plaats te bepalen.



Figuur 4 Z = zender, W = waarnemer, v = snelheid van Z naar W , $\lambda = Z_1Z_3$ is golflengte als $v = 0$, $\lambda' = Z_2Z_3$ is golflengte die W passeert, $\Delta\lambda = \lambda - \lambda' = Z_1Z_2$ is de golflengtevermindering door de beweging van Z naar W , T = trillingstijd, T' = trillingstijd waargenomen door W , f = frequentie, f' = frequentie waargenomen door W , c = snelheid signaal (= snelheid licht), $\lambda = cT$, $\lambda' = cT'$, $\Delta\lambda = vT$, $f = 1/T$, $f' = 1/T'$, $f' = c/\lambda' = c/(\lambda - \Delta\lambda) = c/((c - v)T) = fc/(c - v)$



Figuur 5 S = satelliet, W = waarnemer, R = straal aarde, h = hoogte van S, Y onder S op tijdstip signaal, V = snelheid van S, v = snelheid naar W, α bepaalt W ten opzichte van Y

GPS In 1978 begon het Amerikaanse leger met het lanceren van een nieuwe generatie satellieten voor plaatsbepaling op aarde, bekend geworden als het *Global Positioning System* (GPS). In totaal bevat het systeem ongeveer dertig satellieten die permanent een volledige dekking van de aarde geven.

President Clinton gaf eind jaren negentig de opdracht om het systeem ook beschikbaar te stellen voor het algemene publiek. Eerst gebeurde dat nog met opzettelijk enigszins gestoorde signalen, die een beperkte nauwkeurigheid gaven, maar dat werd enige jaren later ook opgeheven.

Zo kwam het GPS beschikbaar voor de navigatie van schepen op zee, maar ook van vliegtuigen in de lucht en van auto's op de weg. Elke satelliet geeft elke twee minuten via zijn signalen zijn positie door, zodat een GPS-apparaat exact weet waar de satellieten die hij ontvangt zijn. Daarnaast geeft elke satelliet het exacte tijdstip door waarop hij een signaal verstuurt.

De tegenwoordige nauwkeurigheid is zo groot dat met het tijdstip van ontvangst precies de reistijd Δt van het signaal (met de snelheid van het licht) berekend kan worden. De afstand a tot de satelliet is dan dus gelijk aan $c \times \Delta t$. De plaats van de ontvanger ligt dan dus op een bol met straal a en de satelliet als middelpunt. De snijlijn van deze bol en de aardbol is een cirkel op het aardoppervlak. Een automobilist weet dan nog niet waar hij is. Waarneming aan een tweede satelliet geeft een andere cirkel op het aardoppervlak. Deze cirkels snijden elkaar in twee punten op aarde. Dan moet het GPS-apparaat in de auto met een meting aan een derde satelliet de keuze uit deze twee plaatsen bepalen.

In figuur 6 is 1 de aarde, 2 de bol van de eerste satelliet die een cirkel op het aardoppervlak bepaalt

en 3 de bol van de tweede satelliet die hierop twee punten vastlegt. De nauwkeurigheid kan verhoogd worden door nog meer satellieten te peilen. Deze extra nauwkeurigheid is ook vaak nodig, omdat de signalen kunnen weerkaatsen aan hoge gebouwen en op die manier 'te laat' of 'dubbel' binnenkomen en zo storingen geven.

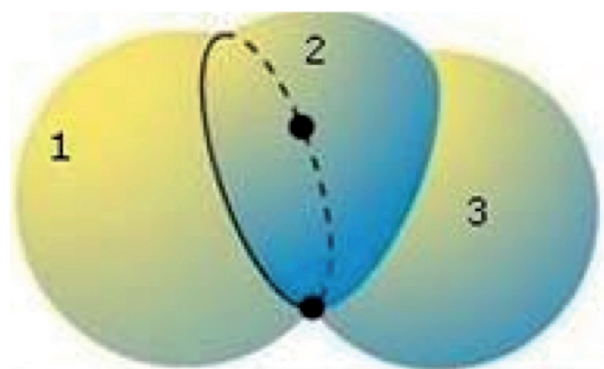
GEGEVENS VOOR NAVIGATIE OP DE WEG

In het geheugen van een GPS-apparaat met de kaarten van Europa en Rusland zitten vele miljoenen wegen, opgedeeld tussen kruisingen in weggedelen. Sommige weggedelen zijn tien meter lang en sommige tientallen kilometers. Op die manier kan een kaart getekend worden als een *graaf*: een geabstraheerd plaatje dat uit enkel punten (de kruisingen) en verbindingslinestukken (de weggedelen) bestaat.

Wat ook in het geheugen zit, is de redelijk te verwachten gemiddelde snelheid op elk wegdeel voor elke periode van 5 minuten in de 24 uren van een dag. Deze redelijke snelheden zijn verkregen door waarnemingen van vele automobilisten te verzamelen.

Van elk wegdeel is dus bekend: de lengte l en met intervallen van 5 minuten de benodigde tijd t . Met de eerste gegevens kan de kortste weg van beginpunt B naar eindpunt E in de graaf gevonden worden. Met de tweede set gegevens kan de kortste rijtijd van B naar E gevonden worden. De moderne software om al deze gegevens te manipuleren is heel efficiënt, zodat alles (gegevens en programmatuur) maar 4 gigabyte geheugen vergt.

ALGORITME VAN DIJKSTRA Om met al deze gegevens de kortste weg te vinden van B naar E, wordt het algoritme van de Nederlandse wiskundige en informaticus Edsger Dijkstra (1930-2002) gebruikt. De procedure gaat ongeveer als volgt. Neem de graaf in figuur 7 (een geabstraheerde versie van een wegenkaart, waarbij de punten kruisingen van



Figuur 6 De werking van GPS

wegen voorstellen en de lijnstukken de wegdelen). Bij elk lijnstuk staat een getal, dat de lengte van het betreffende wegdeel voorstelt.

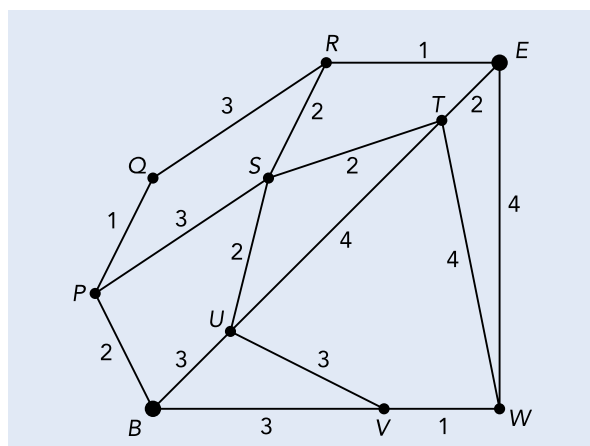
Ga als eerste stap in het algoritme van beginpunt B naar P , U en V . De afstanden zijn 2, 3 en 3; ken daarom aan P , U en V de waarden 2, 3 en 3 toe. Zie onderstaande tabel, eerste kolom, boven (wegen) en onder (waarden punten = afstanden van B ; van laag naar hoog).

Ga in stap twee van P , U en V naar alle mogelijke volgende punten en ken daaraan de totale afstand tot B toe (kolom 2). Teruggaan heeft geen zin. Schrap $BUS = 5$, omdat $BPS = 5$ er al is (*). Schrap ook $BUV = 6$, omdat $V = 3$ al een lagere waarde heeft. Als we voor een punt een waarde zouden vinden lager dan die er al staat in de vorige kolom, dan moet die vervangen worden in de nieuwe kolom.

Ga in stap drie verder met Q , S , T en W (kolom 3). Het eindpunt E is voor het eerst bereikt in drie stappen met totale afstand 8.

Ga in stap vier nu alleen nog verder met R (kolom 4). De waarde van E in de onderste kolom gaat van 8 naar 7. We hebben de kortste weg gevonden: $BPQRE = 7$.

$BP = 2$	$BPQ = 3$	$BPQR = 6$	$BPQRE = 7$ E
$BU = 3$	$BPS = 5$	$BPSR = 7$ *	$BPQES = 8$ *
$BV = 3$	$BUS = 5$ *	$BPST = 7$ *	
	$BUT = 7$	$BPSU = 7$ *	
	$BUV = 6$ *	$BUTS = 9$ *	
	$BVU = 6$ *	$BUTE = 9$ E *	
	$BVW = 4$	$BUTW = 11$ *	
		$BVWT = 8$ *	
		$BVWE = 8$ E	
$P = 2$	$P = 2$	$P = 2$	$P = 2$
$U = 3$	$Q = 3$	$Q = 3$	$Q = 3$
$V = 3$	$U = 3$	$U = 3$	$U = 3$
	$V = 3$	$V = 3$	$V = 3$
	$W = 4$	$W = 4$	$W = 4$
	$S = 5$	$S = 5$	$S = 5$
	$T = 7$	$R = 6$	$R = 6$
		$T = 7$	$T = 7$
		$E = 8$	$E = 7$



Figuur 7 Een graaf bestaande uit tien punten. Wat is de kortste route van B naar E ?

A*-VERBETERING Er zijn vele versnellingen in deze procedure aan te brengen. Een belangrijke is de volgende, bekend onder de naam A^* .

Ken eerst aan alle kruispunten op voorhand de waarde toe, die hemelsbreed de afstand is van dat punt tot het eindpunt E . Voer dan de procedure uit waarbij de waarde van een punt P niet alleen de afstand in stappen over de echte wegdelen is vanaf het beginpunt B , maar tel daarbij ook nog eens de hemelsbreedafstand tot E op. In feite heb je dan een ruwe schatting van de totale afstand van B tot E . Leg dan ook nog eens de eis op om bij elke volgende stap alleen verder te gaan met punten die voor de geschatte totale afstand binnen een bepaalde marge de laagste waarde hebben. Vind je dan uiteindelijk de kortste weg van B naar E , dan zou je een kortere overgeslagen kunnen hebben, maar je hebt wel veel rekentijd uitgespaard.

De afstanden hemelsbreed werken niet echt goed als er bijvoorbeeld een rivier tussen B en E stroomt met weinig bruggen, zodat flink omgerekend moet worden. Het is daarom van belang om de kolommen steeds te bewaren, zodat indien nodig vanaf een aantal stappen terug weer verder gegaan kan worden. De bovengenoemde marge wordt dan groter genomen. ■

Met dank aan dr. Heiko Schilling, werkzaam bij een grote Nederlandse fabrikant van autonavigatie-apparatuur.

Net zo oud als de computer is de vraag hoe intelligent deze dan wel is. Toen de speciaal gebouwde IBM-computer *Deep Blue* in 1996 de toenmalige wereldkampioen schaken Kasparov versloeg, werd deze vraag gedeeltelijk beantwoord: als je schaakvaardigheid als maat neemt voor intelligentie, dan was *Deep Blue* heel intelligent. Maar over de definitie van intelligentie valt uitvoerig te twisten. In dit artikel maken we een algoritme – een recept dat een computer kan uitvoeren – dat *Boter, kaas en eieren* speelt. Dit algoritme geeft een breder inzicht in de aard van computerintelligentie.

■ door Jos Groot

COMPUTERINTELLIGENTIE

VAN BOTER, KAAS EN EIEREN TOT DEEP BLUE

We gaan ervan uit dat je het spelletje *Boter, kaas en eieren* kent. Omdat in een computer alles door cijfers weergegeven wordt, nummeren we de vakjes van het 3×3 bord als volgt:

1	2	3
4	5	6
7	8	9

- 10 Verder geven we een X de waarde 1, een O de waarde -1 en een leeg vakje een 0. Hieronder zie je links een bordstand met rechts de bijbehorende computerrepresentatie.

X	O	X
X		
	O	

1	-1	1
1	0	0
0	-1	0

We gaan er in het vervolg van uit dat de tegenspeler van de computer als eerste een zet mag doen, en X als teken gebruikt. De computer is dus nu aan zet met een O.

EVALUATIEFUNCTIE Hoe kunnen we bepalen wat een goede zet is? Bekijk bovenstaande bordstand. De computer kan winnen door in vakje 5 een O te zetten. Vakje 5 zit in de tweede kolom. De som van de cijfers in deze kolom wordt dan -3 . We hebben dus een eerste regel:

Regel 1: kijk waar neerzetten van een O een som van -3 oplevert in een kolom, rij of diagonaal (dit noemen we een lijn; er zijn in totaal 8 lijnen).

Stel dat we om één of andere reden niet zouden willen winnen door een O in vakje 5 te zetten. Dan ligt het voor de hand om vakje 7 te bezetten. Zouden we dat niet doen, dan doet de tegenstander dat waarschijnlijk, en verliezen we. Dit geeft een tweede regel:

Regel 2: kijk waar twee X-en en een leeg vakje op één lijn staan: een som van 2.

Ten slotte willen we naar winst toewerken. Dat geeft regel 3:

Regel 3: kijk waar twee O's plus een leeg vakje op één lijn kunnen staan: een som van -2 .

We definiëren nu als volgt de *evaluatiefunctie* F :

$$F = p_{-3} \times n_{-3} + p_2 \times n_2 + p_{-2} \times n_{-2}.$$

Hierin zijn n_{-3} , n_2 en n_{-2} de aantallen lijnen die een som van -3 , 2 of -2 geven, bepaald volgens respectievelijk regels 1, 2 en 3. We noemen dit *kenmerken*. De waarden p_{-3} , p_2 en p_{-2} zijn getallen – ook wel *weegfactoren* of *parameters* genaamd – die de spelstrategie mede bepalen.

De evaluatiefunctie wordt gebruikt om een zet te bepalen. Dat gebeurt zo. Stel dat de computer aan zet is. Hij bekijkt dan elke mogelijke zet die hij kan doen, en berekent voor elk van die bordstanden de waarde van F . De zet met de grootste waarde wordt dan gekozen. Het zal duidelijk zijn, dat de waarde van de weegfactoren p_{-3} , p_2 en p_{-2} zo gekozen moet worden, dat het maximaliseren van F de best mogelijke spelstrategie oplevert. Hoe dat kan, leggen we nu uit.

DE ZELFLERENDE EVALUATIEFUNCTIE De formule voor de evaluatiefunctie hebben we zelf bedacht; het is eigenlijk een gok dat een dergelijke formule een goede spelstrategie oplevert. De formule had immers ook een som van slechts twee termen kunnen zijn, of kwadratische termen kunnen bevatten. We hebben ons hier echter beperkt tot een lineaire functie: er komen alleen termen van de vorm $p_i \times n_i$ in voor.

Zoals gezegd, we moeten nog de waarden voor p_3 , p_2 en p_1 zien te vinden die tot optimaal spel leiden, met een zoekalgoritme. Daar zijn er verschillende van, maar een heel elegante is de volgende, waarbij de computer tegen zichzelf speelt.

We beginnen dan met drie willekeurige waarden voor p_3 , p_2 en p_1 , zeg de set 1, 1, 1, en laten deze 'speler' het opnemen tegen een 'speler' met de set 2, 1, 1. Voor een mens is zoiets al gauw niet meer te doen (zeker bij een complexer spel dan *Boter, kaas en eieren*), maar een computer kan in korte tijd vele sets tegen elkaar uitproberen en dan de set selecteren die van zoveel mogelijk andere sets wint. Zo vinden we de set $p_3 = 8$, $p_2 = -2$ en $p_1 = 1$. Bekijk ter illustratie nog eens de bordstand van hiervoor:

X	O	X
X		
	O	

We berekenen de evaluatiefunctie F voor elk vakje waarin de computer nog een O kan zetten. Dat zijn de vakjes 5, 6, 7 en 9. Als de computer een O in het middelste vakje zet, geeft dat het volgende bord:

X	O	X
X	O	
	O	

Controleer zelf dat dan $n_3 = 1$, $n_2 = 1$ en $n_1 = 0$. Dus

$$F = 8 \times 1 - 2 \times 1 + 1 \times 0 = 6.$$

In het bord hieronder is voor alle open plekken de waarde van F ingevuld:

X	O	X
X	6	-1
2	O	0

F is het grootst in het middelste hokje, dus zal de computer daar een O plaatsen. Daarmee is meteen de wedstrijd gewonnen.

We kunnen nu ook de logica van de weegfactoren zien. De waarde $p_3 = 8$ is het grootst, dus zal het programma altijd de winnende zet doen als dat mogelijk is. Dankzij $p_2 = -2$ vindt hij het ook belangrijk om te voorkomen dat de tegenstander wint bij de volgende zet. Ten slotte, omdat $p_1 = 1$, streeft hij er naar om twee O's op één rij te krijgen, wat eventueel bij een volgende zet tot winst kan leiden.

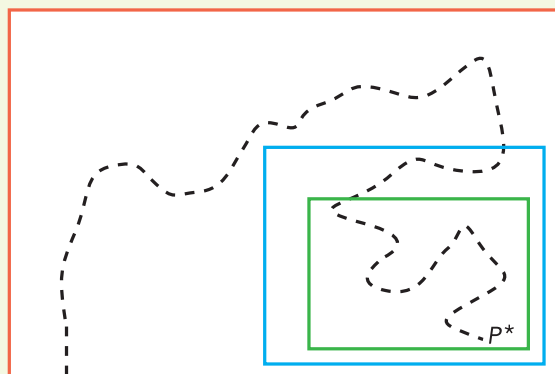
Je weet waarschijnlijk wel, dat als beide partijen goed opletten, een spelletje *Boter, kaas en eieren* altijd eindigt in gelijkspel. Dit is ook simpel te bewijzen. De hier gebruikte evaluatiefunctie is niet optimaal, want hij herkent bijvoorbeeld het onderstaande 'vorkje' niet:

X			X	O		X	O	
							X	
X	O		X	O		X	O	O
	X			X			X	
		O	X		O	X		O

Dit kunnen we voorkomen door aan F een term toe te voegen die hiermee rekening houdt. We doen dat hier niet voor, misschien heb je zelf een idee?

SLIMMIGHEID Zo kunnen we dus een programma maken dat met enig succes *Boter, kaas en eieren* speelt. De evaluatiefunctie vormt het hart van het programma. Daar zit het grootste deel van de slimheid in. De vorm hebben we zelf gekozen, maar de parameters hebben we bepaald door het programma tegen zichzelf te laten spelen.

Het programma heeft deze dus min of meer zelf geleerd. Leren is het beter worden in een taak door het opdoen van ervaring. Als een computer al zelf *Boter, kaas en eieren* lijkt te kunnen leren spelen, waar ligt dan de grens? Dat wordt verduidelijkt door onderstaand diagram.



De rode rechthoek bevat alle denkbare computerprogramma's. De stippellijn is de zoektocht die linksonder in rood start op het moment dat je een Boter-kaas-en-eieren-programma wilt maken. Je laat diverse bestaande programma's in gedachten de revue passeren, maar nee, die kunnen dit spel niet spelen. Zo beland je in de blauwe rechthoek, die een deel van deze programma's bevat, namelijk alle programma's die *Boter, kaas en eieren* kunnen spelen. Daar zitten ook hele slechte bij, zoals een programma dat een willekeurige zet doet. Je overdenkt verschillende strategieën en komt tot een lineaire evaluatiefunctie met de drie gewogen kenmerken: de groene rechthoek. De evaluatiefunctie specificeer je niet helemaal. De drie parameters van hiervoor laat je namelijk door de computer leren. Uiteindelijk vind je zo het programma P^* , met $p_3 = 8$, $p_2 = -2$ en $p_1 = 1$.

HOE INTELLIGENT IS EEN COMPUTER? We komen nog even terug op de vraag hoe intelligent een computer is. Na een lange zoektocht kan hij wel een intelligente taak uitvoeren. Maar het grootste gedeelte van de zoektocht, het rode en blauwe, doe je zelf. Alleen het laatste groene stukje doet de computer.

Daar komt de wiskunde om de hoek kijken in de vorm van een zoekalgoritme. Je kunt de computer meer laten doen door de groene rechthoek te vergroten, bijvoorbeeld door andere kenmerken en vormen van evaluatiefuncties toe te laten. Maar bedenk wel, dat hoe groter deze groene rechthoek is, hoe langer de computer ook moet zoeken naar een optimaal programma. Alleen daarom al is het nuttig als mens zoveel mogelijk intelligent voorwerk te doen, om de groene rechthoek klein te houden. Maar te klein is ook niet goed, omdat dan het optimale programma er misschien niet in zit (dit was het geval bij ons programma, dat het 'vorkje' immers niet herkende). Juist bij het voorwerk komt veel wiskunde kijken. Dat heeft geleid tot andere typen evaluatiefuncties, zoals neurale netwerken, fuzzy logic, etcetera.

Deep Blue, die in 1996 Kasparov versloeg, gebruikte een evaluatiefunctie met ongeveer 8000 kenmerken. De parameters van deze functie werden bepaald door computeranalyse van duizenden partijen van schaakmeesters, en sommige werden nog met de hand bijgesteld. *Deep Blue* verschilde dus niet wezenlijk van ons Boter-kaas-en-eieren-programma, maar toch staat of valt alles met het wiskundig voorwerk door de mens. Dat is minder makkelijk door een computer over te nemen. Zo komen we er in onze tijd langzamerhand achter waarin computer- en menselijke intelligentie van elkaar verschillen, en hoe ze elkaar aan kunnen vullen. ■

■ door Arnout Jaspers

De kunst is om zoveel mogelijk opeenvolgende getalwoorden in een zo klein mogelijke rechthoek te zetten volgens de scrableregels. De leesrichting is ‘van boven naar beneden’ of ‘van links naar rechts’. Hieronder zie je bijvoorbeeld de getallen nul tot en met vier in een 5×6 rechthoek.

	V		T		
	I		W		
	E		E	E	N
D	R	I	E		U
					L

$$D = \frac{0+1+2+3+4}{5 \times 6} = \frac{1}{3}.$$
$$D = \frac{1.000.000 + 1.000.001}{7 \times 10} = \frac{2.000.001}{70}.$$

M	I	L	J	O	E	N
I						
L						
J						
O						
E						
N						
E						
E						
N						

$$D = \frac{0+1}{7 \times 10} = \frac{1}{70}.$$
[illegible]

bovenstaande rechthoek; in dat geval geldt $D = \frac{3}{4}$ (de oplossing staat op pagina 14). Of het nog beter kan, zul je zelf moeten onderzoeken.

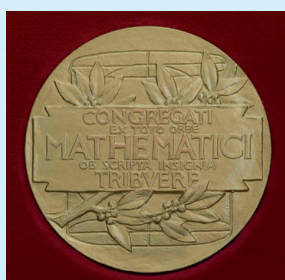
13

JOURNAAL

■ door Alex van den Brandhof

Fieldsmedailles: de Nobelprijs van de wiskunde

Op 19 augustus ontvingen vier wiskundigen de prestigieuze Fieldsmedaille tijdens het Internationaal Congres van Wiskundigen, dat eens in de vier jaar wordt georganiseerd, dit jaar in Hyderabad, India.



Veertig is een beladen leeftijd voor wiskundigen. De algemene opvatting luidt dat wiskundigen hun beste ideeën vóór hun veertigste hebben. De Fieldsmedaille – samen met de Abelprijs de hoogste onderscheiding in de wiskunde – wordt alleen toegekend aan wiskundigen onder deze leeftijd. De medailles worden eens in de vier jaar aan meestal vier wiskundigen uitgereikt.

Elon Lindenstrauss (1970) van de Hebreeuwse Universiteit van Jeruzalem kreeg de prijs (naast de medaille een geldbedrag van 15000 Canadese dollar, ongeveer 12000 euro – eigenlijk een klein bedrag voor een prijs die dezelfde status als de Nobelprijs heeft) voor zijn werk in de *ergodentheorie*. Stel je een oneindig groot schaakbord voor, waarop een kikker springt, startend in een hoekpunt van een veld, steeds in dezelfde richting, met sprongen van steeds dezelfde lengte. In de ergodentheorie gaat het om vragen als: hoe zijn de punten waarop de kikker terechtkomt verdeeld binnen de velden van het schaakbord, in het bijzonder: hoe dicht komen deze punten bij de hoekpunten en de randen van de schaakbordvelden? Lindenstrauss' werk heeft geleid tot nieuwe inzichten in het zogeheten *Littlewood-vermoeden*, dat betrekking heeft op hoe dicht de springende kikkers bij de randen van de schaakbordvelden komen.

Ngô Bảo Châu (1972) van de Université Paris-Sud in Orsay, Frankrijk, kreeg de Fieldsmedaille

voor zijn bewijs van het zogeheten *Fundamentele Lemma* uit het Langlandsprogramma. Robert Langlands is een Canadese wiskundige die in 1967 begon met het opstellen van een serie vermoedens die gezamenlijk bekend werden onder de naam Langlandsprogramma. Het betreft vermoedens die gaan over verbanden tussen getaltheorie, analyse, algebraïsche meetkunde en groepentheorie – verbanden tussen takken van wiskunde die op het eerste gezicht mijlenver uit elkaar staan. Dankzij Ngô's doorbraak – 'briljant', volgens de jury – krijgen wiskundigen meer vat op het ingewikkelde Langlandsprogramma.

Ten slotte werden Stanislav Smirnov (1970) van de Universiteit van Genève, Zwitserland, en Cedric Villani (1973) van het Henri Poincaré Institute in Parijs geëerd; zij hebben baanbrekende resultaten in de statistische fysica geboekt.

Oplossing Getalscrabble

Hieronder staat de oplossing van de getalscrabble-puzzel op pagina 13: de getallen nul tot en met negen in een rechthoek waarvoor geldt $D = \frac{45}{60} = \frac{3}{4}$.

		V	I	J	F
		I			
		E		N	
	D	R	I	E	
				G	
A			Z	E	S
C		E	E	N	
H			V		
T	W	E	E		
			N	U	L

Twintig is 'Gods getal'



Het aantal draaibewegingen dat nodig is om een Rubikkubus op te lossen, bedraagt nooit meer dan 20. Dat hebben wetenschappers uit de Verenigde Staten en Duitsland bewezen.

In de jaren tachtig van de vorige eeuw was de Rubikkubus een grote hit. Jong en oud draaide zich suf aan deze kubuspuzzel, die negen kleurrijke vakjes op elke zijde bevat. De kubus is opgelost als alle vakjes aan één kant dezelfde kleur hebben.

Wiskundigen hadden met deze puzzel stof tot nadenken: hoe vaak moet je maximaal draaien om een in de war gedraaide Rubikkubus opgelost te krijgen? In de beginjaren tachtig bedroeg de best bekende bovengrens 52 (dat wil zeggen: vanuit elke toestand kan de kubus met maximaal 52 draaibewegingen worden opgelost). Deze grenzen zijn later verbeterd. Vorig jaar werd de bovengrens verbeterd tot 22. Nu is deze grens verlaagd naar 20: de kubus kan altijd in ten hoogste 20 draaibewegingen worden opgelost. Lager wordt het niet: sommige standen van de kubus hebben echt 20 keer draaien nodig.

De wetenschappers maakten gebruik van servers die door Google beschikbaar waren gesteld, schreven ze op www.cube20.org. Ze noemen twintig *God's number*, omdat het het maximale aantal keer draaien is dat een alwetende nodig zou hebben voor de puzzel.

Tribute to Escher

Liefhebbers van de tekeningen van Maurits Cornelis Escher, de Nederlandse kunstenaar die zijn constructies baseerde op gezichtsbedrog, wiskunde en perspectief, opgelet: op de website *Tribute to Escher* (www.360cities.net/image/tribute-to-escher) kunnen fans zich een barstende hoofdpijn klikken in de beroemde trappenbrij waarin rijen mensen in oneindige lussen naar boven en beneden gaan.

Encryptie wordt plaatsgebonden

Dr. Serge Fehr van het Centrum Wiskunde & Informatica (CWI) in Amsterdam heeft een techniek bedacht om op basis van kwantummechanica gegevens locatiegebonden te versleutelen. Het netto-effect is, dat een bericht alleen op een bepaalde plaats te decrypten is.

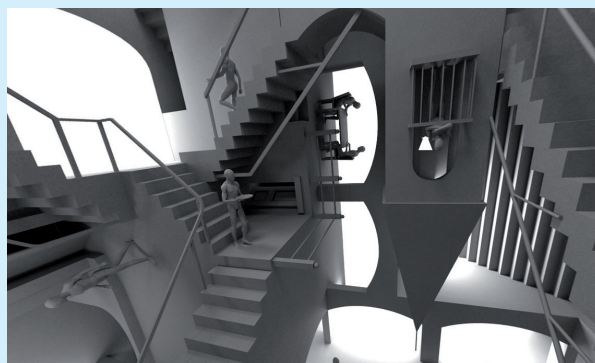
Het is soms van groot belang dat een boodschap alleen gedecodeerd kan worden op een specifieke locatie. Denk aan een bepaald gebouw zoals een ambassade. Het is uitgesloten dat een af luisteraar die zich op een andere locatie bevindt toegang heeft tot zo'n geheime boodschap.

Serge Fehr heeft met een aantal buitenlandse collega's een techniek bedacht waarvoor geen cryptografische sleutels nodig zijn. Die sleutels hoeven dan ook niet gedistribueerd te worden, met alle kansen dat onbevoegden er kennis van nemen.

De geografische positie van een persoon wordt gebruikt als sleutel tot beveiligde data en diensten. Er wordt gebruik gemaakt van kwantummechanische effecten. Op die manier is ook de locatie van de ontvanger van een versleuteld bericht bekend. Vroeger werd die locatie berekend door een driehoeksmeting, maar daar kon mee gerommeld worden. Met de nieuwe techniek is manipulatie niet meer mogelijk. Wordt er toch iets stiekem veranderd, dan is dat meteen zichtbaar.

Het onderzoek richt zich ook op andere cryptografische taken, zoals op locatie gebaseerde veilige communicatie. Fehr licht toe: 'Dit is een methode om een geheime boodschap te communiceren op een zodanige manier dat alleen de persoon op een specifieke locatie de boodschap kan lezen, maar niet een af luisteraar die zich elders bevindt.'

Bron: CWI / Automatisering Gids



Als toerist stuit je soms op verrassende wiskundige attracties. In onze nieuwe serie 'Op reis' nemen we je steeds mee naar een plaats waar wiskundig iets te beleven valt. In de eerste aflevering gaan we naar het dwergstaasje Vaticaanstad, waarvan het grondgebied geheel wordt omsloten door de stad Rome.

■ door Alex van den Brandhof

DE ELLIPS VAN BERNINI?

De Italiaan Gian Lorenzo Bernini (1598-1680) was een gevierd beeldhouwer en architect. In opdracht van Paus Alexander VII ontwierp hij het reusachtige Piazza San Pietro, het plein voor de Sint-Pieterskerk. Dit plein wordt aan twee kanten begrensd door een colonnade, elk bestaande uit vier rijen zuilen.

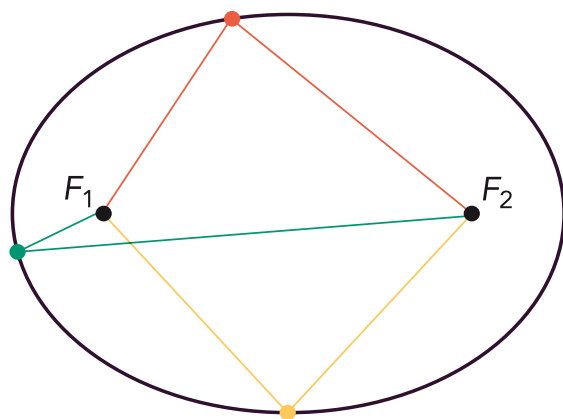
Het plein bevat twee gemarkeerde punten: ronde stenen met de tekst *centro del colonnato*; vanaf zo'n steen zie je niet vier rijen zuilen, maar slechts één, de voorste. Bernini plaatste de drie andere zuilenrijen zo, dat steeds vier zuilen in een rechte lijn vanaf het gemarkeerde punt staan.

16



ELLIPS In vrijwel elke toeristengids over Rome wordt geschreven dat Bernini een ellips koos als grondvorm van het Sint-Pietersplein. En: de twee op het plein gemarkeerde punten zijn precies de brandpunten van de ellips. Iedereen schrijft van elkaar over dat Bernini met de ellips en haar brandpunten de vorm van het plein en de plaatsing van de zuilen zo goed heeft doordacht. Doordacht is het zeker, maar is er überhaupt sprake van een ellips?

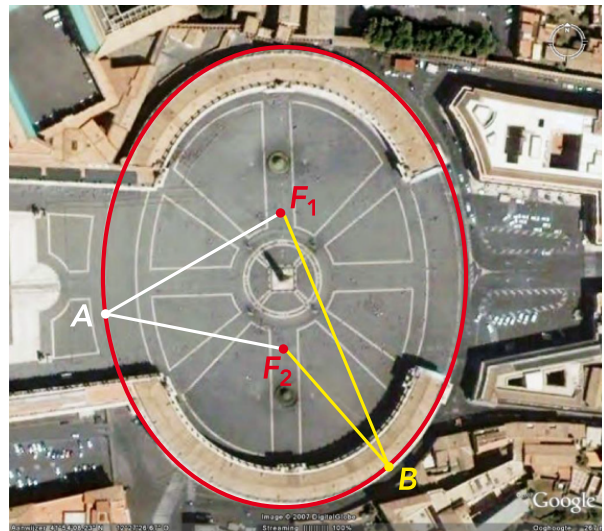
Een ellips is een tweedimensionale figuur die bestaat uit de verzameling van alle punten waarvoor geldt dat de som van de afstanden tot twee gekozen punten, de *brandpunten* (F_1 en F_2 in figuur 1), een vaste waarde heeft. In figuur 1 is de som van de twee rode lijnstukken dus gelijk aan de som van de twee gele lijnstukken, en ook gelijk aan de som van de twee groene lijnstukken. Welk punt op de ellips je ook kiest, de som van de afstanden tot F_1 en F_2 is altijd hetzelfde.



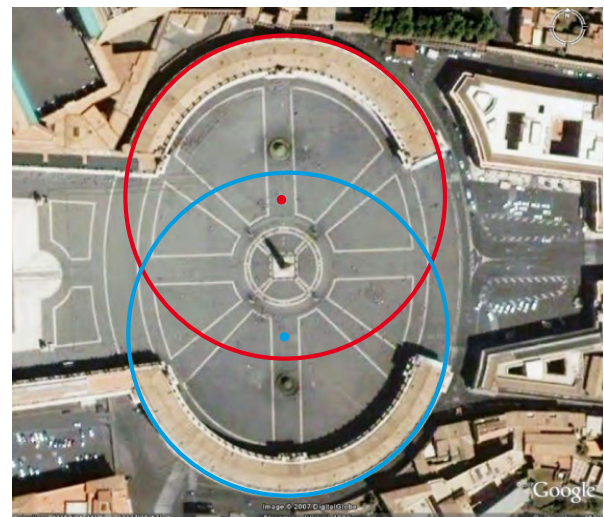
Figuur 1 Een ellips met brandpunten F_1 en F_2

Hoe zit het nu met de vorm van het Sint-Pietersplein? In figuur 2 zie je een Google-Earth-plaatje van het plein. De twee door Bernini gemarkeerde punten zijn F_1 en F_2 . Verder zijn er twee punten A en B op de omtrek van het plein getekend. Meet maar na: $|AF_1| + |AF_2| \neq |BF_1| + |BF_2|$. Het Sint-Pietersplein heeft dus níét de vorm van een ellips!

CIRKELS Hoe zit het dan wel? Bernini gebruikte geen ellips, maar cirkels! De zuilenrijen staan exact in delen van cirkels, zie figuur 3. De punten op het plein die hij met een marmeren steen markeerde, zijn precies de middelpunten van die cirkels; je ziet zo'n steen in figuur 4. Als je eens naar Rome gaat, ga er dan beslist even op staan en geniet van het effect dat Bernini vanaf dat punt creëert. ■



Figuur 2 Het grondplan van het Sint-Pietersplein is géén ellips: $|AF_1| + |AF_2| \neq |BF_1| + |BF_2|$



Figuur 3 Bernini plaatste de zuilenrijen op cirkels



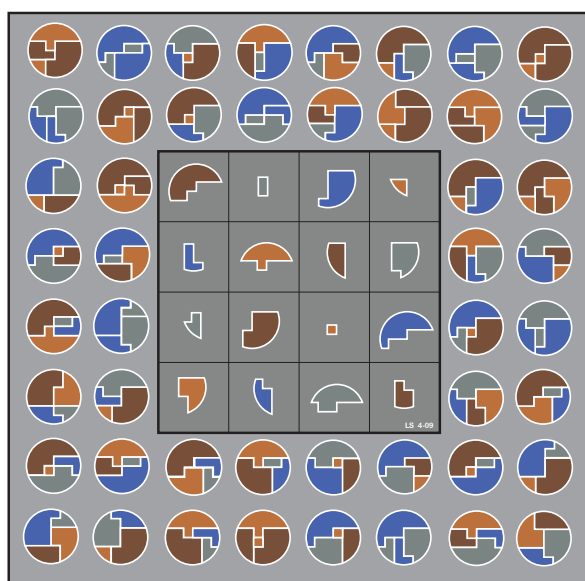
Figuur 4 De middelpunten van de cirkels waarin de zuilenrijen staan, zijn gemarkeerd met deze steen. Als je daarop staat, zie je alleen de voorste zuilenrij. Bernini plaatste de drie andere zuilenrijen zo, dat steeds vier zuilen in een rechte lijn vanaf het middelpunt van de cirkel staan.

De vorige jaargang sierde een serie geomagische vierkanten de achterkaf van *Pythagoras*. In dit nummer vertelt bedenker Lee Sallows meer over het laatste vierkant in de serie, dat op de achterkant van het juninummer stond.

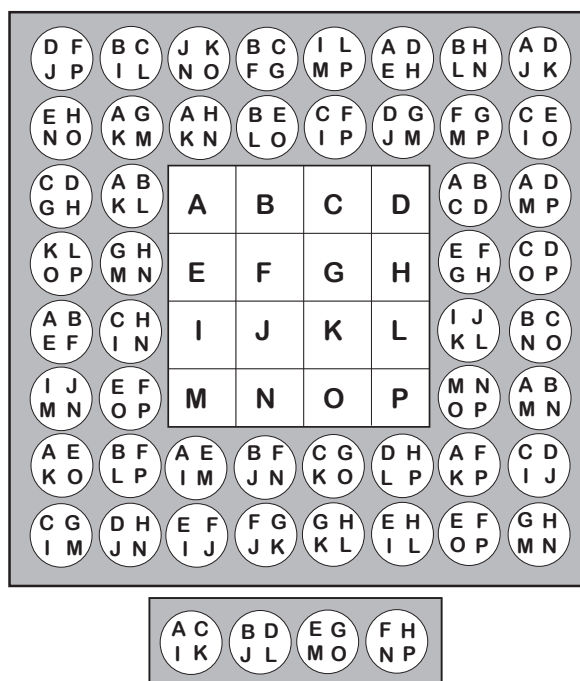
■ door Lee Sallows

4 × 4 GEOMAGISCH VIERKANT MET 8 COMPLEMENTAIRE PAREN

De achterkaf van het juninummer van *Pythagoras* liet een voorbeeld zien van wat ik al had beloofd in het februarinummer: een geomagisch vierkant dat naast panmagisch ook 'most perfect' is. Je ziet het vierkant nogmaals in figuur 1. Zowel alle 8 orthogonalen (rijen en kolommen) als alle 8 diagonalen, en ook alle 16 subvierkantjes van 2 × 2 hokjes bevatten vier stukken die het circulaire doel betegelen. Deze eigenschappen verklaren 32 van de 48 doelen die daar omheen te zien zijn. Met de sleutel in figuur 2 kan de compositie van de overblijvende 16 doelen snel geïdentificeerd worden, maar zelfs met deze 16 daarbij opgeteld is de lijst nog



Figuur 1 Een geomagisch vierkant met 8 complementaire paren © Lee Sallows



Figuur 2 De sleutel van de geomagische vierkanten in figuur 1 en 7

niet compleet. Er blijven nog vier groepen van vier stukken over die ook het doel kunnen betegelen: ACIK, BDJL, EGMO en FHNP. Dat maakt 52 doelen in totaal. Ik heb deze vier doelen weggelaten van de afbeelding om de vierkante symmetrie niet te verstoren.

52 is hier geen toevallig getal. Opnieuw kijkend naar de formule die de structuur van elk 4 × 4 numeriek panmagisch vierkant beschrijft (figuur 3),

$k + a + b$	$k - a + d$	$k - c - d$	$k - b + c$
$k - a - d$	$k + a - b$	$k + b + c$	$k - c + d$
$k + c + d$	$k + b - c$	$k - a - b$	$k + a - d$
$k - b - c$	$k + c - d$	$k + a + d$	$k - a + b$

Figuur 3 Algebraïsche generalisatie van 4×4 panmagische vierkanten

kunnen we ons afvragen hoeveel verschillende groepjes van vier algebraïsche termen de constante som $4k$ opleveren. Vlijtige lezers zullen kunnen nagaan dat het antwoord 52 is. En inderdaad, het zijn precies dezelfde 52 groepjes van vier die we vinden in het geomagische vierkant. Maar deze nauwe overeenkomst met figuur 3 gaat in feite nog verder.

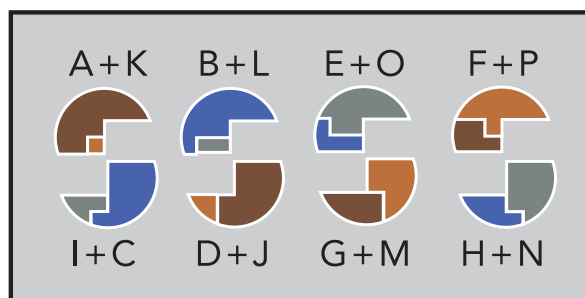
COMPLEMENTAIRE PAREN Kijk opnieuw naar de groepjes ACIK, BDJL, EGMO en FHNP. In figuur 3 hebben de algebraïsche termen die overeenkomen met A en K de som $2k$. Dit is de helft van de magische constante $4k$. Hetzelfde geldt (dus) voor C + I. Op gelijke wijze vinden we dat $B + L = D + J = E + O = G + M = F + P = H + N = 2k$. Men noemt een dergelijk stel met som $2k$ een *complementair paar*. Het is een frappante eigenschap van het geomagische vierkant in figuur 1 dat zijn corresponderende paren *ook* complementair zijn, maar nu in *geometrische* zin. Dat wil zeggen, elk van de 8 paren betegelt een constante vorm die één helft van het circulaire doel is, zie figuur 4.

De een-op-een correspondentie of het *isomorfisme* tussen figuur 3 en het geomagische vierkant heeft een interessant gevolg, want het betekent dat er voor elk magisch vierkant dat te maken is door herschikking van de 16 algebraïsche termen, een corresponderend geomagisch vierkant bestaat. Hoeveel vierkanten zijn dat? Het antwoord is een verbazingwekkende 528, rotaties en spiegelingen niet meegeteld.

Deze zijn niet allemaal panmagisch; van de 528

zijn dit er in feite 48. Echter, aangezien elk van de 528 wordt opgebouwd uit dezelfde 16 termen/stukken, moeten ze in zekere zin allemaal even ‘magisch’ zijn. Het is instructief om de onderlinge relaties van deze familie van magische vierkanten wat nader te bekijken.

GRAPHIC TYPES In 1910 publiceerde Henry Ernest Dudeney, in die tijd Englands bekendste uitvinder en schrijver op het gebied van de recreatieve wiskunde, een nieuwe classificatie van 4×4 magische vierkanten. Ik heb het hier over het traditionele magische vierkant, gebruikmakend van de getallen 1 tot en met 16. Al in 1693 had een Fransman, Bernard Frénicle de Bessy, alle verschillende 4×4 magische vierkanten geïdentificeerd. Dat waren er 880, rotaties en spiegelingen niet meegeteld. Het was Dudeney's idee om de 880 vierkanten te classificeren op basis van de distributie van hun 8 complementaire paren: 1 en 16, 2 en 15, ..., 8 en 9, elk



Figuur 4 De 8 geometrisch complementaire paren van figuur 1

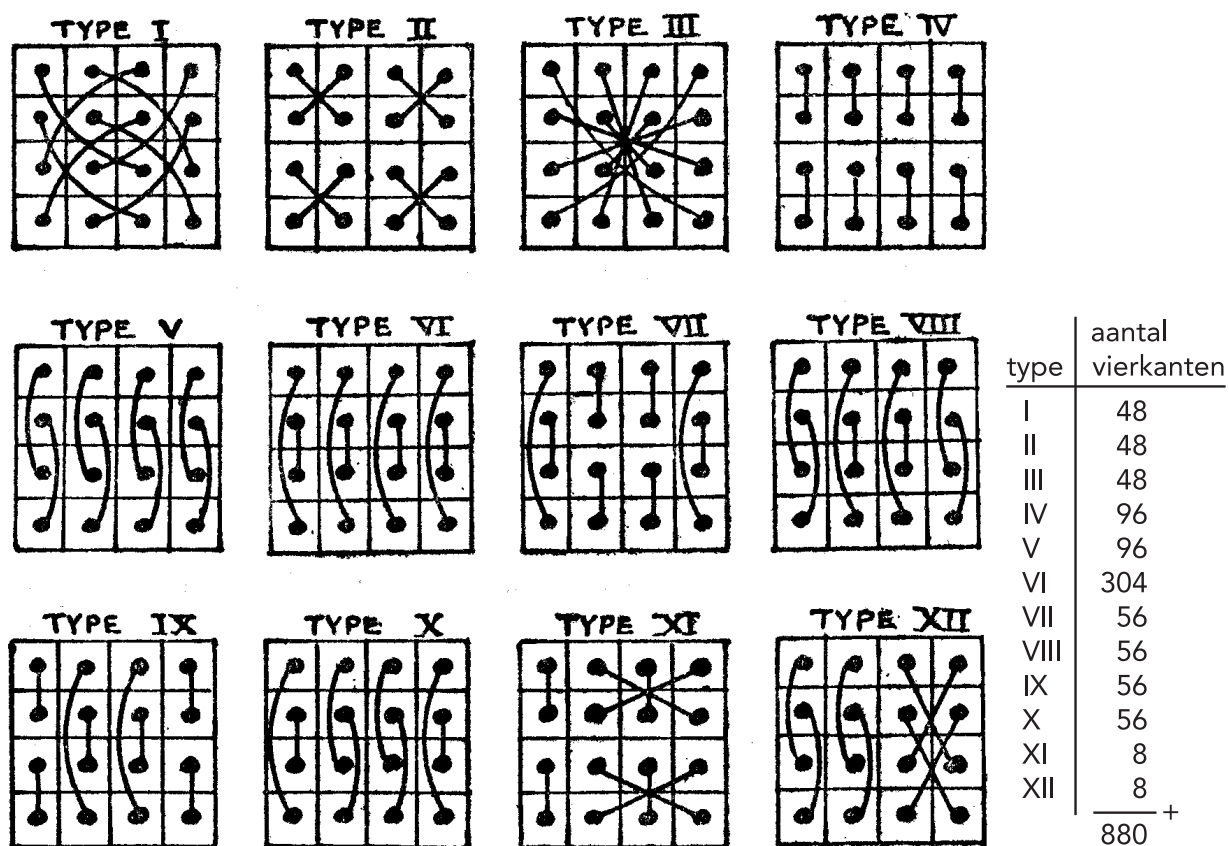
met de som $17 = 34/2$. Hij vond 12 *graphic types*; je ziet ze in figuur 5, waarin lijntjes de complementaire paren verbinden. De tabel rechts geeft het aantal magische vierkanten van elk type aan. Let op dat het hier gaat om *traditionele* vierkanten. Als we ook 4×4 magische vierkanten meerekenen met 16 getallen die geen rekenkundige rij vormen, *maar toch 8 complementaire paren bevatten*, dan blijken er nog 22 verdere types te bestaan.

Net zoals figuur 3 een formule is die de eigenschappen van panmagische vierkanten beschrijft, zo is het ook mogelijk om een soortgelijke formule te creëren op basis van elk van de 12 *graphic types*. Figuur 6 laat ze allemaal zien. Dergelijke formules kunnen op verschillende manieren worden geschreven; die in figuur 6 belichten bepaalde onderlinge relaties beter dan andere. Gemakshalve wordt uitgegaan van een constante som van nul, zodat de

variabele k weggelaten kan worden. Negatieve variabelen worden aangegeven met een bovenstreepje.

Het blijkt dat de formule voor type I identiek is aan figuur 3, een bewijs dat elk type I vierkant panmagisch is en vice versa. Echter, nog interessanter is dat de 16 algebraïsche termen die voorkomen in de types I tot en met V allemaal dezelfde zijn. Of, met andere woorden, wat magische vierkanten van deze types betreft, kunnen hun 16 elementen (getallen of geometrische vormen) altijd herschikt worden om nieuwe magische vierkanten van de resterende types te maken. Bovendien kun je ook vierkanten van type VI maken, een gevolg van het feit dat in het geval $e = -d$ de 16 termen in de formule voor type VI identiek worden aan die in types I tot en met V.

Zo gaat het dus ook met het geomagische vierkant waarmee wij hier te maken hebben. Door herschikking van de stukken kunnen nieuwe exem-



Figuur 5 Dudeney's oorspronkelijke diagrammen zoals deze verschenen in zijn boek *Amusements in Mathematics* uit 1917

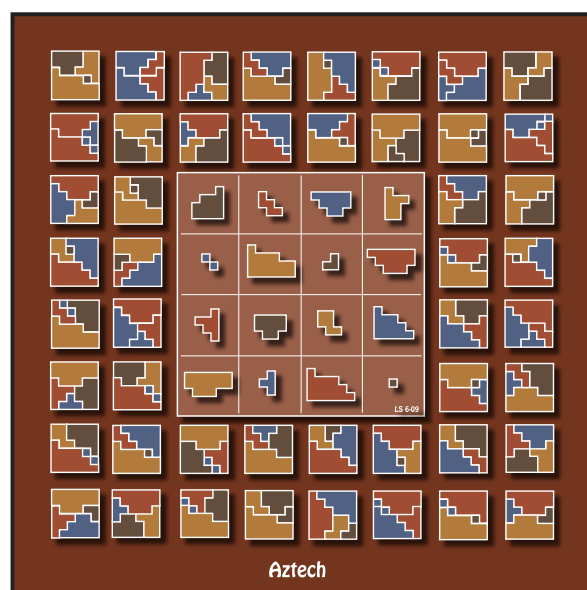
I				II				III				IV			
ab	$\bar{a}d$	$\bar{c}d$	$\bar{b}c$	ab	$\bar{c}d$	$\bar{a}d$	$\bar{b}c$	ab	$\bar{b}c$	$\bar{a}d$	cd	ab	$\bar{c}d$	$\bar{a}d$	$\bar{b}c$
$\bar{a}d$	$a\bar{b}$	bc	$\bar{c}d$	$\bar{c}d$	$\bar{a}b$	$b\bar{c}$	ad	$\bar{b}c$	$\bar{a}b$	$\bar{c}d$	$a\bar{d}$	$\bar{a}b$	$\bar{c}d$	ad	$b\bar{c}$
cd	$b\bar{c}$	$\bar{a}b$	$a\bar{d}$	$\bar{a}d$	bc	$a\bar{b}$	$\bar{c}d$	$\bar{a}d$	$\bar{c}d$	$a\bar{b}$	$b\bar{c}$	$a\bar{b}$	$\bar{c}d$	$\bar{a}d$	bc
$\bar{b}c$	$\bar{c}d$	ad	$\bar{a}b$	$\bar{b}c$	$a\bar{d}$	cd	$\bar{a}b$	$\bar{c}d$	ad	bc	$\bar{a}b$	$\bar{a}b$	cd	$a\bar{d}$	$\bar{b}c$
V				VI				VII				VIII			
ab	$\bar{b}c$	$\bar{a}b$	$\bar{b}c$	ab	$\bar{a}d$	$\bar{a}d$	$a\bar{b}$	a	$b\bar{c}$	$\bar{a}b$	c	ab	$\bar{c}d$	$\bar{a}d$	$\bar{b}c$
$\bar{c}d$	$\bar{a}d$	$\bar{c}d$	ad	ce	$\bar{b}c$	$b\bar{c}$	$c\bar{e}$	$\bar{a}d$	$\bar{b}c$	ab	$\bar{c}d$	$a\bar{b}$	$\bar{a}$	$\bar{c}$	bc
$\bar{a}b$	bc	$a\bar{b}$	$b\bar{c}$	$\bar{c}e$	bc	$\bar{b}c$	$\bar{c}e$	ad	$\bar{b}c$	$\bar{a}b$	$\bar{c}d$	$\bar{a}b$	a	c	$b\bar{c}$
$\bar{c}d$	$a\bar{d}$	cd	$\bar{a}d$	$\bar{a}b$	$a\bar{d}$	ad	$\bar{a}b$	$\bar{a}$	bc	$a\bar{b}$	$\bar{c}$	$\bar{a}b$	$\bar{c}d$	ad	$\bar{b}c$
IX				X				XI				XII			
ab	$\bar{c}d$	$\bar{a}d$	$\bar{b}c$	a	$\bar{a}b$	$\bar{b}c$	c	ab	$\bar{a}c$	$a\bar{b}$	c	ab	$a\bar{b}$	$\bar{a}c$	c
$\bar{a}b$	c	a	$b\bar{c}$	ad	$\bar{a}b$	$b\bar{c}$	$\bar{c}d$	$\bar{a}b$	$\bar{c}$	$\bar{a}b$	$2ac$	bc	$\bar{b}c$	a	$\bar{a}2c$
$a\bar{b}$	$\bar{c}$	$\bar{a}$	bc	$\bar{a}d$	$a\bar{b}$	bc	$\bar{c}d$	bc	a	$\bar{b}c$	$\bar{a}2c$	$\bar{a}b$	$\bar{a}b$	$\bar{c}$	$2ac$
$\bar{a}b$	$\bar{c}d$	ad	$\bar{b}c$	$\bar{a}$	ab	$\bar{b}c$	$\bar{c}$	$\bar{b}c$	$a2c$	$b\bar{c}$	$\bar{a}$	$\bar{b}c$	$b\bar{c}$	$a2c$	$\bar{a}$

Figuur 6 Algebraïsche generalisaties van Dudeney's 12 graphic types

plaren van types I tot en met VI gecreëerd worden, het aantal voor elk overeenkomstig met de tabel van figuur 5: $48 + 48 + 48 + 96 + 96 + 192$ (geval- len van de 304 waarin $e = -d$) = 528. Bestaat er een 4×4 geomagisch vierkant dat nog meer dan 528 nieuwe exemplaren kan produceren? Het antwoord is niet bekend. Misschien is dit een leuke uitdaging voor de slimme vogels onder de Pythagoraslezers. Figuur 7 toont een tweede voorbeeld van een 4×4 panmagisch, *most perfect* vierkant met 8 comple- mentaire paren.

TEN SLOTTE In het voorafgaande hebben we even gekeken naar de 880 'normale' magische vier- kanten gebruikmakend van de getallen 1 tot en met 16. Een goede vraag, die bij mijn weten nooit eer- der is gesteld, is: bestaan er misschien 16 getallen die *meer* dan 880 vierkanten opleveren? Een jaar of tien geleden heb ik het (unieke) antwoord gevon- den. Met de bijna-rekenkundige rij $-8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ (geen 0) kunnen 1040 verschillende magische vierkanten gemaakt worden, rotaties en spiegelingen niet meegeteld.

Geïnteresseerde lezers kunnen hiervan een volle- dige lijst ontvangen door een verzoek te sturen aan geomagie@gmail.com. ■



Figuur 7 Nog een geomagisch vierkant met 8 complementaire paren © Lee Sallows

DE LOGARITME VAN DE LOGARITME, MAAR DAT 2,5 KEER

EEN KLEINE VERKENNING VAN RECURSIEF GEDEFINIEERDE FUNCTIES

■ door Arnout Jaspers

Waarschijnlijk weet je al wat de *faculteit* van een positief geheel getal n is. Dit wordt geschreven als $n!$ en is gedefinieerd als

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (n-2)(n-1)n. \quad (1)$$

Maar je kunt $n!$ ook op een andere manier definiëren, namelijk door te eisen:

$$(n+1)! = (n+1) \cdot n! \quad \text{en} \quad 1! = 1. \quad (2)$$

22

Je ziet natuurlijk meteen dat (1) en (2) precies hetzelfde opleveren. Toch is er een wezenlijk verschil: in (1) zeg je voor elk getal n expliciet wat de faculteit van n is, terwijl (2) een recept geeft om de faculteit van een getal $n+1$ uit te rekenen, gegeven dat je de faculteit van het getal n al weet. Dit heet een *recursieve definitie*.

Recursieve definities lijken de logica te tarten: je definieert iets, met iets wat nog gedefinieerd moet worden. Het lijkt op jezelf aan je eigen haren uit het moeras trekken, maar toch zijn er veel bonafide recursieve definities en formules in de wiskunde.

Het bovenstaande was maar een voorbeeldje om het verschil tussen definities van type (1) en type (2) duidelijk te maken. In de schoolwiskunde werk je veel met functies zoals $f(x) = 2x + 3$, $f(x) = x^2 - 1$, $f(x) = \sin x$, enzovoort. Deze zijn allemaal van type (1): voor elk getal x krijg je een recept om $f(x)$ uit te rekenen. Maar kun je functies ook recursief definiëren, met een formule van type (2)? Ja, dat kan.

OPTELLEN Laten we bijvoorbeeld eens kijken naar een recept dat lijkt op de tweede !-definitie:

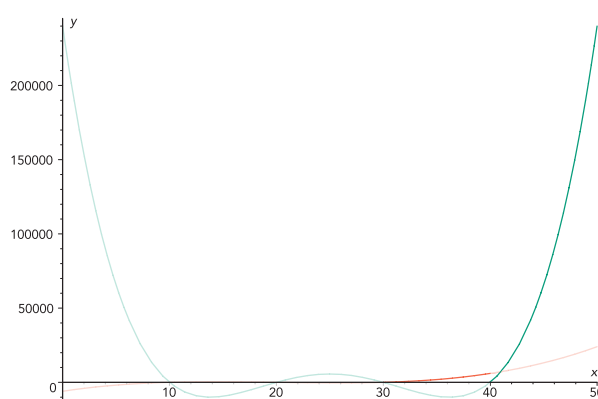
$$f(x+10) = x \cdot f(x).$$

Als je je de functie voorstelt als een grafiek, zegt dit recept: als ik langs de x -as opschuif van x naar $x+10$, komt de grafiek x maal zo hoog te liggen. Dus $f(20)$ moet 10 keer zo groot zijn als $f(10)$, $f(30)$ moet 20 keer zo groot zijn als $f(20)$, enzovoort.

Er is niks speciaals aan de waarde 10, we kunnen die net zo goed nog onbepaald laten en a noemen:

$$f(x+a) = x \cdot f(x). \quad (3)$$

Neem $x > a > 0$. Dan is $x = na + b$, met $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ en $0 \leq b < a$. Het getal n geeft dus het aantal keren dat a van x afgehaald kan worden, met rest b .



Figuur 1 De grafiek van $f(x) = (x-10)(x-20)\cdots(x-10n)$ voor $30 \leq x < 50$. Voor $30 \leq x < 40$ is $f(x) = (x-10)(x-20)(x-30)$ (rood) en voor $40 \leq x < 50$ is $f(x) = (x-10)(x-20)(x-30)(x-40)$ (groen). Er geldt: $f(x+10) = x \cdot f(x)$.

De getallen n en b zijn dus functies van de variabele x en de parameter a . Er geldt dan voor $f(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x - a + a) = (x - a)f(x - a) = \\ &= (x - a)f(x - 2a + a) = \\ &= (x - a)(x - 2a)f(x - 2a) = \dots = \\ &= (x - a)(x - 2a) \cdots (x - na)f(x - na) = \\ &= (x - a)(x - 2a) \cdots (x - na)f(b). \end{aligned}$$

De functie is door deze formule gedefinieerd voor $x > a$, maar dan moet $f(b)$ nog gedefinieerd worden, want $0 \leq b < a$. We zouden als bijzonder geval van deze functie $f(b) = 1$ kunnen nemen voor alle waarden van b met $0 \leq b < a$. Daarmee verdwijnt de afhankelijkheid van x van $f(b)$. Dan hebben we voor $x > a$ de volgende functie:

$$f(x) = (x - a)(x - 2a) \cdots (x - na).$$

Dit lijkt een beetje op de formule voor een faculteit, maar dan wel geldig voor elke x en stapjes a in plaats van 1. Nemen we $a = 1$ en kiezen we voor x de waarde $n + 1$, dan krijgen we de faculteitsfunctie:

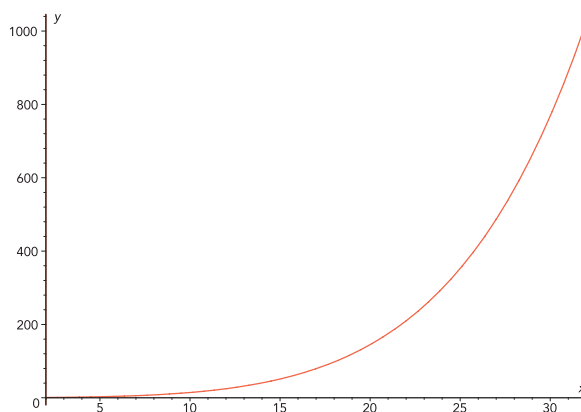
$$f(n + 1) = n(n - 1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

VERMENIGVULDIGEN We bekijken nu een andere recursierelatie:

$$f(ax) = x \cdot f(x). \quad (4)$$

Om hier een formule van type (1) van te maken, passen we bijna dezelfde truc toe als bij (3). We nemen $a > 1$ en $x \geq a$. Dan zoeken we een natuurlijk getal n met $x = a^n \cdot b$, met $1 \leq b < a$. Dan krijgen we voor $f(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= f\left(a \frac{x}{a}\right) = \frac{x}{a} f\left(\frac{x}{a}\right) = \\ &= \frac{x}{a} f\left(a \frac{x}{a^2}\right) = \frac{x}{a} \frac{x}{a^2} f\left(\frac{x}{a^2}\right) = \dots = \\ &= \frac{x}{a} \frac{x}{a^2} \cdots \frac{x}{a^n} f\left(\frac{x}{a^n}\right) = \frac{x^n}{a^{\frac{1}{2}n(n+1)}} f(b). \end{aligned}$$



Figuur 2 De grafiek van $f(x) = \sqrt{x^{2 \log x - 1}}$. Er geldt: $f(2x) = x \cdot f(x)$.

We hebben gebruik gemaakt van de som van een rekenkundige rij: $1 + 2 + 3 + \cdots + (n - 1) + n = \frac{1}{2}n(n + 1)$. Ook hier zijn n en b functies van x en a . Een eenvoudiger geval van deze wat onoverzichtelijke functie krijgen we door $f(b) = 1$ te nemen voor alle b met $1 \leq b < a$. Dan kunnen we voor $f(x)$ schrijven (na een hinderlijke rekenpartij) met gebruik van $x = a^n \cdot b$ en $n = {}^a \log(x/b)$:

$$f(x) = \frac{x^n}{a^{\frac{1}{2}n(n+1)}} = \sqrt{x^{a \log \frac{x}{b} - 1}} \sqrt{b^{a \log \frac{x}{b} + 1}}$$

Hierin is b nog steeds afhankelijk van x . Voor x mogen we wel alle waarden nemen met $x > a$.

Een speciaal geval van deze formule volgt, als we alleen maar die waarden van x nemen, waarvoor geldt dat $x = a^n$, dus $b = 1$. Dan krijgen we voor deze speciale selectie van waarden van x :

$$f(x) = \sqrt{x^{a \log x - 1}}$$

ofwel

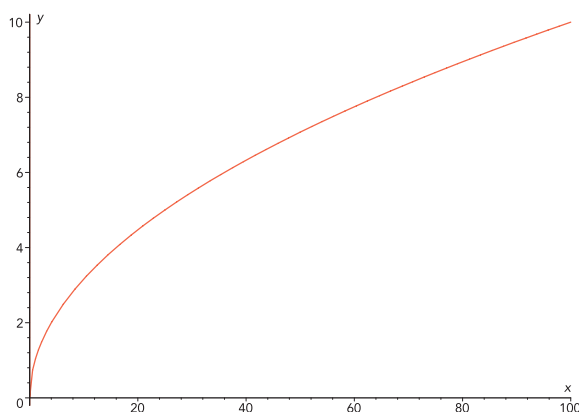
$$f(a^n) = \sqrt{(a^n)^{n-1}} = a^{\frac{1}{2}n(n-1)}$$

Vergelijk dit eens met de faculteitsfunctie uit de vorige paragraaf. Daar geldt voor de verhouding van twee opvolgende waarden:

$$\frac{f(n+1)}{f(n)} = \frac{n!}{(n-1)!} = n.$$

Voor deze paragraaf hebben we iets soortgelijks:

$$\frac{f(a^{n+1})}{f(a^n)} = \frac{a^{\frac{1}{2}(n+1)n}}{a^{\frac{1}{2}n(n-1)}} = a^n.$$



Figuur 3 De grafiek van $f(x) = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$.
Er geldt: $f(x^3) = x \cdot f(x)$.

MACHTSVERHEFFEN We hebben tot nu toe de x in $f(x)$ vervangen door $x + a$ (optelling) en door ax (vermenigvuldiging). Machtsverheffing is de volgende logische stap:

$$f(x^a) = x \cdot f(x). \quad (5)$$

We nemen $x > a > 1$. Welke functie voldoet hieraan? Op dezelfde manier vinden we:

$$\begin{aligned} f(x) &= f((x^{\frac{1}{a}})^a) = x^{\frac{1}{a}} f(x^{\frac{1}{a}}) = \\ &= x^{\frac{1}{a}} f((x^{\frac{1}{a^2}})^a) = x^{\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2}} f(x^{\frac{1}{a^2}}) = \\ &= x^{\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \dots + \frac{1}{a^n}} f(x^{\frac{1}{a^n}}). \end{aligned}$$

Voor $n \rightarrow \infty$ krijgen we

$$f(x) = x^{\frac{1/a}{1-1/a}} f(1) = x^{\frac{1}{a-1}} f(1)$$

We hebben gebruik gemaakt van de som van een meetkundige rij met reden $r = 1/a < 1$:
 $r + r^2 + r^3 + r^4 + \dots = r/(1 - r)$. Bovendien gaat a^n naar ∞ en dus gaat x^{1/a^n} naar $x^0 = 1$. Zo krijgen we met de beginwaarde $f(1) = 1$:

$$f(x) = x^{\frac{1}{a-1}}$$

LOGARITME Bij respectievelijk optellen, vermenigvuldigen en machtsverheffen met een constante a (mits groter dan 1) loop je als het ware steeds sneller de x -as af naar rechts. Maar wat gebeurt er als je dat juist steeds langzamer doet? Dat kan bijvoorbeeld door de logaritme van x te nemen:

$$f(\log x) = x \cdot f(x). \quad (6)$$

Ik weet niet of zo'n functie bestaat. Je krijgt een idee hoe hij eruitziet door naar een serie speciale punten op de x -as te kijken:

$$\begin{aligned} x_1 &= e (= 2,718...), \\ x_2 &= e^e (= 15,154...), \\ x_3 &= e^{(e^e)} (= 3814279,105...). \end{aligned}$$

Het is duidelijk dat $x_n = \log x_{n+1}$.

Bekijk $x_3 = e^{(e^e)}$, $\log x_3 = e^e$. Invullen in (6) geeft:

$$f(e^e) = e^{(e^e)} \cdot f(e^{(e^e)}).$$

Als we nu stellen

$$f(x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\log x} \cdot \frac{1}{\log(\log x)} \cdot \frac{1}{\log(\log(\log x))} \dots,$$

waarbij het aantal factoren en het maximaal aantal malen dat je de logaritme neemt, gelijk is aan i als je de functie in het punt x_i bekijkt, dan krijg je (links en rechts invullen):

$$\frac{1}{e^e} \cdot \frac{1}{e} \cdot 1 = e^{(e^e)} \cdot \left(\frac{1}{e^{(e^e)}} \cdot \frac{1}{e^e} \cdot \frac{1}{e} \cdot 1 \right)$$

en dit klopt, omdat de eerste twee factoren rechts van het =-teken samen 1 zijn.

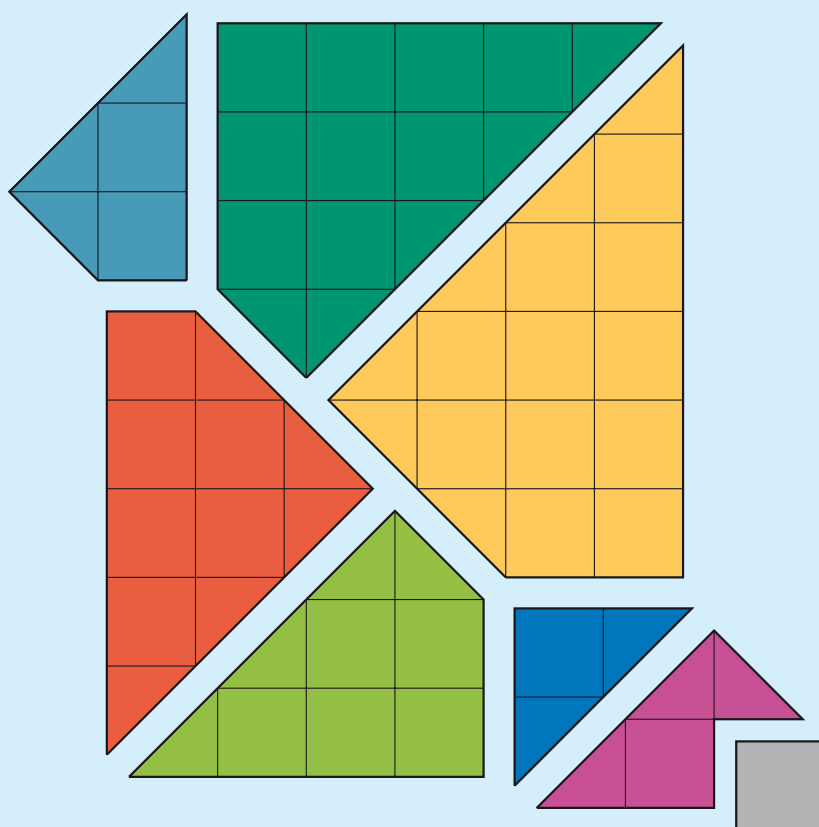
Maar goed, we hebben hier wel iets raars gedaan: f heeft alleen een waarde in speciale punten, en in elk punt is de formule voor f ietsje anders. Als je f ook tussen die speciale punten in zou willen weten, moet je iets verzinnen, dat overeenkomt met 'een niet geheel aantal malen de logaritme nemen'.

Dit hoeft niet onmogelijk te zijn; machtsverheffen kon ooit ook alleen maar een geheel aantal malen, door een getal x een aantal keer met zichzelf te vermenigvuldigen, zodat je kreeg $x, x^2, x^3, \dots$. Tegenwoordig kunnen we elk getal x tot elk ander getal y verheffen. Misschien is zoiets voor 'n keer de logaritme nemen' ook mogelijk. Wie vindt een functie f die aan (6) voldoet? Laat het ons weten via post@pythagoras.nu. ■

Deze jaargang staat de prijsvraag van *Pythagoras* in het teken van het vijftigjarig jubileum. In de eerste vijf afleveringen van deze jaargang verschijnt telkens een puzzel met het getal 50 als thema. In het laatste nummer van de jaargang geven we de oplossingen en worden de prijswinnaars bekend gemaakt.

■ door Matthijs Coster

VAN 49 NAAR 50



Aflevering 1 van de jubileumprijsvraag symboliseert de overgang van 49 naar 50. De totale oppervlakte van de hierboven getekende figuren is 50. Maar als je het grijze vierkantje rechtsonder niet meetelt, dan is de oppervlakte 49.

DE OPDRACHT Maak eerst een vierkant met de zeven figuren (zonder het vierkantje) met oppervlakte 49. Maak vervolgens een vierkant met oppervlakte 50 (dus inclusief het vierkantje).

Als je je *Pythagoras* niet wilt verknippen, download deze pagina dan van onze website www.pythagoras.nu. Over de te winnen prijzen in diverse categorieën lees je meer in het volgende nummer.

Stuur je oplossing naar prijsvraag@pythagoras.nu of eventueel per analoge post naar

K.P. Hart
Faculteit EWI
TU Delft
Postbus 5031
2600 GA Delft

Noteer in de linkerbovenhoek van de envelop 'Pythagoras Jubileumprijsvraag'. Vermeld je naam, adres, telefoonnummer, leeftijd en, als je scholier bent, ook je school en je klas. Je kunt ook met je hele klas meedoen; vermeld in dat geval ook de naam van de wiskundeleraar.

Je inzending moet bij ons binnen zijn vóór **1 december 2010**. ■

Van 5 tot 14 juli werd in de Kazachstaanse hoofdstad Astana de 51ste Internationale Wiskunde Olympiade gehouden, dé wiskundewedstrijd voor middelbare scholieren. Daar zetten 517 leerlingen uit 96 landen hun tanden in zes moeilijke wiskundeopgaven. Nederland was vertegenwoordigd door een sterk team: Guus Berkelmans, Harm Campmans, Madelon de Kemp, David Kok, Daniël Kroes en Merlijn Staps.

■ door Johan Konter en Sietske Tacoma

DE GELDMACHINE

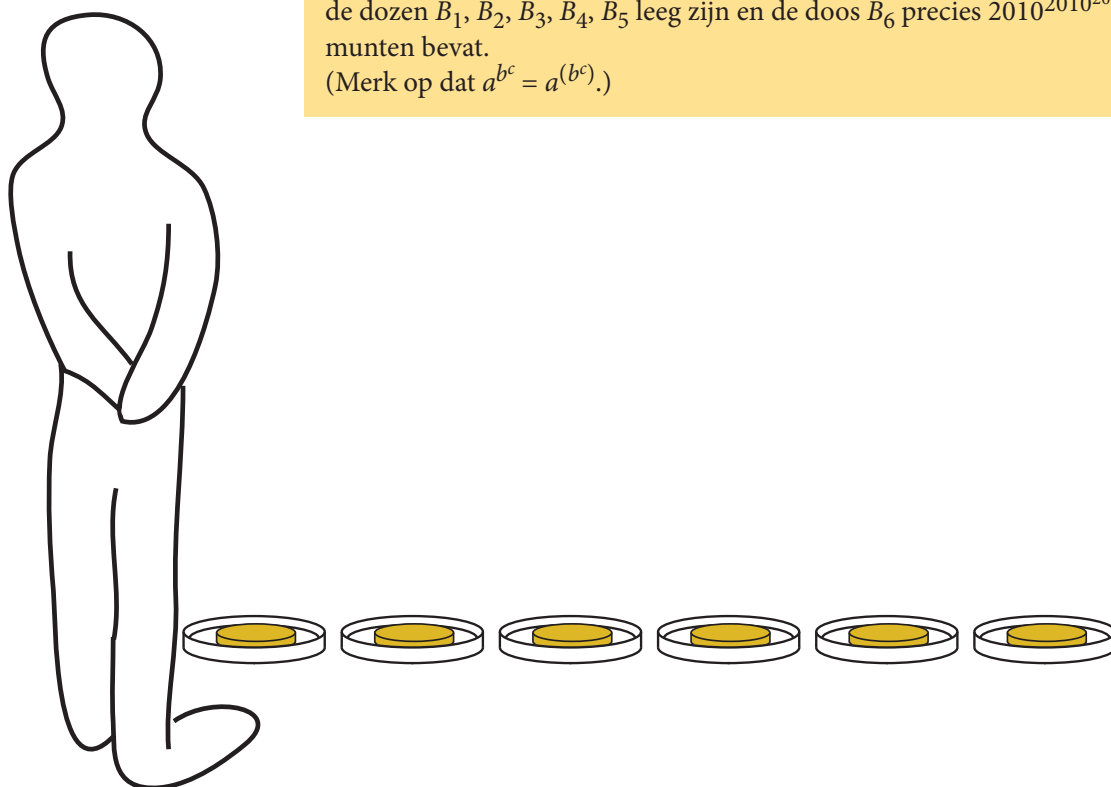
OPGAVE 5 (IMO 2010)

In elk van de zes dozen $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ zit oorspronkelijk één munt. Er zijn twee types handelingen toegestaan:

- Type 1:** Kies een niet-lege doos B_j met $1 \leq j \leq 5$.
Verwijder één munt uit B_j en voeg twee munten toe aan B_{j+1} .
- Type 2:** Kies een niet-lege doos B_k met $1 \leq k \leq 4$.
Verwijder één munt uit B_k en verwissel de inhoud van de (mogelijk lege) dozen B_{k+1} en B_{k+2} .

Bepaal of er een eindige rij van zulke handelingen bestaat, zo dat daarna de dozen B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 leeg zijn en de doos B_6 precies $2010^{2010^{2010}}$ munten bevat.
(Merk op dat $a^{b^c} = a^{(b^c)}$.)

26



AvdB

De opgaven voor de Internationale Wiskunde Olympiade (IMO) worden zorgvuldig geselecteerd. Dat ook één van de zes opgaven van Nederlandse origine was, is dan ook een hele eer. Deze opgave gaat over een geldmachine en is bedacht door Hans Zantema van de Technische Universiteit Eindhoven en de Radboud Universiteit Nijmegen. Zie het kader op pagina 26.

Hoe los je zo'n opgave op? Waar moet je beginnen? Het is verstandig eerst wat voorbeeldjes te proberen. Zo zou je de volgende serie handelingen kunnen doen. We zullen $\triangleright$ gebruiken voor een handeling van type 1 en $\blacktriangleright$ voor een handeling van type 2. We beginnen natuurlijk met zes enen.

$$\begin{aligned}(1, 1, 1, 1, 1, 1) &\triangleright (1, 1, 1, 1, 0, 3) \triangleright \\(1, 1, 1, 0, 2, 3) &\triangleright (1, 1, 1, 0, 1, 5) \triangleright \\(1, 1, 1, 0, 0, 7) &\end{aligned}$$

Nu kunnen we met de eerste drie enen precies hetzelfde doen als we met de laatste drie enen hebben gedaan, dan komen we uit op $(0, 0, 7, 0, 0, 7)$. Daarmee kunnen we als volgt verder gaan:

$$\begin{aligned}(0, 0, 7, 0, 0, 7) &\triangleright (0, 0, 6, 2, 0, 7) \blacktriangleright \\(0, 0, 6, 1, 7, 0) &\triangleright \dots \triangleright (0, 0, 6, 1, 0, 14) \blacktriangleright \\(0, 0, 6, 0, 14, 0) &\blacktriangleright (0, 0, 5, 14, 0, 0) \triangleright \dots \triangleright \\(0, 0, 5, 0, 28, 0) &\blacktriangleright (0, 0, 4, 28, 0, 0).\end{aligned}$$

Hier pauzeren we even, want we kunnen al een paar opmerkingen maken. Ten eerste kan het muntje in doos B_1 hoogstens één keer gebruikt worden en daarna blijft doos B_1 altijd leeg. Er is namelijk geen handeling die ervoor zorgt dat er munten in doos B_1 kunnen komen. Verder hebben we zojuist vanaf $(0, 0, 5, 14, 0, 0)$ de inhoud van doos B_4 verdubbeld door de volgende handelingen: eerst hebben we 14 keer een handeling van type 1 gedaan, waardoor we 14 munten uit doos B_4 hebben gehaald en daarvoor 28 munten in doos B_5 hebben teruggekregen. Daarna hebben we één muntje uit doos B_3 betaald om doos B_4 en B_5 om te wisselen. Het verdubbelen van de inhoud van doos B_4 heeft ons dus maar één muntje gekost, uit doos B_3 .

Deze serie van handelingen kunnen we nog eens doen:

$$\begin{aligned}(0, 0, 4, 28, 0, 0) &\triangleright \dots \triangleright (0, 0, 4, 0, 56, 0) \blacktriangleright \\(0, 0, 3, 56, 0, 0) &\end{aligned}$$

Nadat we dit nog drie keer hebben gedaan, komen we uit op $(0, 0, 0, 448, 0, 0)$, waar we $(0, 0, 0, 447, 2, 0)$ van kunnen maken. Net als hiervoor kunnen we nu de inhoud van doos B_5 net zo lang verdubbelen tot doos B_4 leeg is. Zo komen we bij $(0, 0, 0, 0, 2^{448}, 0)$, waar we met behulp van handelingen van type 1 ten slotte $(0, 0, 0, 0, 0, 2^{449})$ van maken. In deze laatste stappen hebben we de eerste drie dozen helemaal niet gebruikt.

We kunnen dus altijd de inhoud van drie opeenvolgende dozen veranderen van $(a, 0, 0)$ naar $(0, 2^a, 0)$, ongeacht hoeveel munten er in de andere dozen nog zitten; we zullen dit noteren als $(a, 0, 0) \rightarrow (0, 2^a, 0)$. Deze stap doen we door eerst één munt uit de eerste van de drie dozen te halen en daarvoor twee munten terug te stoppen in de tweede doos, dus $(a, 0, 0) \triangleright (a-1, 2, 0)$, en door vervolgens $a-1$ keer de 'verdubbelingstap' $(x, y, 0) \triangleright \dots \triangleright (x, 0, 2y) \blacktriangleright (x-1, 2y, 0)$ te doen. Dit betekent dat we al een behoorlijk groot aantal munten kunnen maken. Merk op dat we voor deze stap de derde doos, die aan het begin en aan het eind van de stap leeg is, wel echt hebben gebruikt in de handelingen die we hebben gedaan. Daarom kunnen we dezelfde truc niet nog een keer van doos B_5 naar doos B_6 doen.

ZOEKEN NAAR DE OPLOSSING Nu kunnen we gaan nadenken over een oplossing. Als er zo'n rij handelingen bestaat, dus als het antwoord 'ja' is, dan willen we een manier vinden om de eerste vijf dozen leeg te maken en in de zesde doos precies 2010^{2010} munten te krijgen. Als er echter geen rij handelingen bestaat die voldoet, en het antwoord 'nee' is, dan willen we een reden vinden waarom het niet kan. Hiervoor zijn twee technieken gebruikelijk.

Ten eerste kun je zoeken naar een *invariant*, een eigenschap van het aantal munten in één of meer dozen die bij alle toegelaten handelingen onveranderd blijft. Vervolgens kijk je wat de waarde van die invariant is in de begintoestand en in de vereiste eindtoestand. Zijn die waarden niet hetzelfde, dan heb je bewezen dat je nooit van de begin- naar

de eindtoestand kunt komen. Ten tweede kun je een *bovengrens* proberen te bepalen voor het aantal munten in een doos, en dan maar hopen dat die bovengrens kleiner is dan $2010^{2010^{2010}}$.

Aangezien we in het voorbeeld nog lang niet in de buurt kwamen van $2010^{2010^{2010}}$ munten in doos B_6 , kunnen we eerst eens kijken of we een bovengrens kunnen vinden. Als we alleen handelingen mogen doen van type 1, dan is het vinden van een bovengrens niet moeilijk. Elk muntje zorgt voor twee muntjes in de volgende doos. Het muntje dat oorspronkelijk in doos B_5 ligt, zorgt dus voor twee muntjes in doos B_6 . Het muntje dat oorspronkelijk in doos B_4 ligt, zorgt voor twee muntjes in doos B_5 , dus voor vier muntjes in doos B_6 . Zo vinden we ook dat het eerste muntje uit doos B_3 zorgt voor $2 \times 2 \times 2 = 8$ muntjes in doos B_6 . Ten slotte zorgt het muntje uit doos B_2 voor 16 en het muntje uit doos B_1 voor 32 muntjes in doos B_6 . In totaal zitten er aan het eind dus $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 63$ muntjes in doos B_6 .

Handelingen van type 2 maken het zoeken naar een bovengrens ingewikkelder. Sterker nog, we hebben gezien dat we met behulp van handelingen van type 2 al vrij grote tweemachten kunnen krijgen. We hebben net natuurlijk zomaar wat geprobeerd, misschien kunnen we toch wel nog veel grotere aantallen munten produceren. En dat helpt ons waarschijnlijk altijd verder, of we nou willen zoeken naar een bovengrens, of naar een manier om $2010^{2010^{2010}}$ munten in doos B_6 te krijgen. Óf het lukt om zoveel munten te verkrijgen en dan zijn we meteen klaar, óf het lukt niet en dan kunnen we met de nieuwe inzichten gericht gaan nadenken over waar het vast loopt.

TORENS BOUWEN Nu we iets nieuws gaan proberen, namelijk zo veel mogelijk munten krijgen, kijken we eerst weer even terug naar ons voorbeeld. We hebben gezien dat we drie opeenvolgende dozen met inhoud a , 0 en 0 kunnen kiezen en daar met de verdubbelingstap de inhoud 0 , 2^a en 0 van kunnen maken. Hierdoor konden we al behoorlijk grote getallen maken, maar 2^{449} is nog steeds wel een stuk kleiner dan $2010^{2010^{2010}}$. We moeten dus nog wat slims doen.

Om dat te doen bekijken we niet drie, maar

vier opeenvolgende dozen. Met behulp van de zojuist gevonden serie handelingen $(a, 0, 0) \rightarrow (0, 2^a, 0)$ vinden we namelijk dat $(b, a, 0, 0) \rightarrow (b, 0, 2^a, 0) \blacktriangleright (b-1, 2^a, 0, 0)$. Als we deze laatste combinatie van handelingen nu aanduiden met $\Rightarrow$ en beginnen met $(b, 0, 0, 0)$, dan kunnen we daar het volgende van maken:

$$(b, 0, 0, 0) \triangleright (b-1, 2, 0, 0) \Rightarrow (b-2, 2^2, 0, 0) \Rightarrow (b-3, 2^{2^2}, 0, 0) \Rightarrow \dots \Rightarrow (0, T_b, 0, 0).$$

Hierin gebruiken we de notatie T_n voor een ‘toren’ van n tweeën:

$$T_n = \underbrace{2^{2^{2^{\dots^2}}}}_{n \text{ keer}},$$

en we zullen deze combinatie noteren als $(b, 0, 0, 0) \Rightarrow (0, T_b, 0, 0)$.

We weten dat $2010 < 2048 = 2^{11}$, waarmee we kunnen afschatten dat

$$\begin{aligned} 2010^{2010^{2010}} &< (2^{11})^{2010^{2010}} = \\ &= 2^{11 \cdot 2010^{2010}} < 2^{2010^{2011}} < \\ &< 2^{2^{11 \cdot 2011}} < 2^{2^{11 \cdot 2^{11}}} < 2^{2^{2^4 \cdot 2^{11}}} = \\ &= 2^{2^{2^{15}}} < T_6. \end{aligned}$$

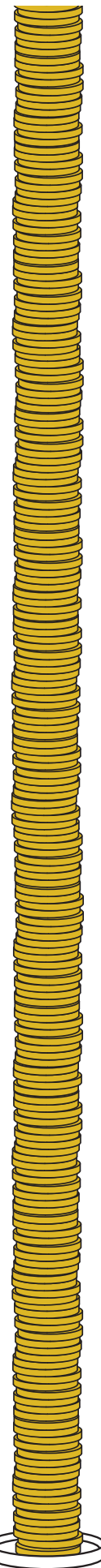
Nu maken we de volgende rij handelingen:

$$\begin{aligned} (1, 1, 1, 1, 1, 1) &\triangleright (1, 1, 1, 1, 0, 3) \blacktriangleright \\ (1, 1, 1, 0, 3, 0) &\blacktriangleright \dots \blacktriangleright (0, 3, 0, 0, 0, 0) \Rightarrow \\ (0, 0, T_3, 0, 0, 0) &= (0, 0, 16, 0, 0, 0) \Rightarrow \\ (0, 0, 0, T_{16}, 0, 0). \end{aligned}$$

Nu we zo ontzettend veel munten in doos B_4 hebben gekregen, is het niet moeilijk meer om het goede aantal munten in doos B_6 te krijgen. Eerst blijven we de laatste twee (lege) dozen omwisselen om munten uit B_4 te halen, totdat er in B_4 nog een kwart van $2010^{2010^{2010}}$ munten zitten. Met handelingen van type 1 kunnen we nu twee keer zo veel munten in doos B_5 krijgen en vervolgens vier keer zo veel munten in B_6 , precies wat we willen.

MOEILIJK! Nu hebben we gezien dat we wel degelijk zoveel munten in doos B_6 kunnen krijgen, dus dat het antwoord ‘ja’ is. Dit is tijdens de afgelopen IMO door maar 37 deelnemers helemaal correct bewezen. Het is dus geen makkelijke opgave. Veel mensen stonden op het verkeerde been en probeerden te bewijzen dat het níét kon. Zo ook het Nederlandse team. Gelukkig hebben ze dat meer dan goed gemaakt door op opgave 1 en 4 allemaal alle punten te pakken. Met maar liefst vijf bronzen medailles en een eervolle vermelding ging het Nederlandse team naar huis.

De geldmachine kan nog veel meer munten produceren en het is dan ook niet gek als je je nu afvraagt: ‘Als dit mijn geldmachine was, hoeveel munten zou ik dan kunnen krijgen?’ Met zulke belangrijke vragen willen we je natuurlijk niet laten zitten, daarom geven we een gedeeltelijk antwoord. Je kan in ieder geval $T_{T_{2^{14}}}$ munten krijgen. Dit is een enorm getal: stel je een toren van A tweeën voor, waarbij het getal A al een toren is van 2^{14} tweeën. Hoe je dit voor elkaar krijgt en of je nog hogere bedragen kunt produceren, blijft huiswerk. ■



PYTHAGORAS OLYMPIADE

■ door Matthijs Coster, Alexander van Hoorn en Eddie Nijholt

Doe mee met de Pythagoras Olympiade! Elke aflevering bevat vier opgaven. De eerste twee zijn wat eenvoudiger; onder de goede inzendingen van leerlingen uit de klassen 1, 2 en 3 wordt een Irisbon van 20 euro verloot. De laatste twee zijn echte breinbrekers; onder de goede inzendingen van leerlingen (tot en met klas 6) wordt een Irisbon van 20 euro verloot. Bovendien kun je je via deze breinbrekers plaatsen voor de finale van de Nederlandse Wiskunde Olympiade, mocht het via de voorronden niet lukken. Niet-leerlingen kunnen met de Pythagoras Olympiade meedoen voor de eer.



HOE IN TE ZENDEN? Inzendingen ontvangen we bij voorkeur per e-mail (getypt of een scan van een handgeschreven oplossing): pytholym@pythagoras.nu.

Eventueel kun je je oplossing sturen naar **Pythagoras Olympiade, Korteweg-de Vries Instituut, Universiteit van Amsterdam, Postbus 94248, 1090 GE Amsterdam.**

Voorzie het antwoord van een duidelijke toelichting (dat wil zeggen: een berekening of een bewijs). Vermeld je naam en adres; leerlingen moeten ook hun klas en de naam van hun school vermelden.

Je inzending moet bij ons binnen zijn vóór 31 oktober 2010.

DE GOEDE INZENDERS VAN APRIL 2010

186: Anthon van Dijk, Hoofddorp; Thijs van der Gugten (klas 4), GSG Guido de Brès, Amersfoort; Arie Heikoop, Kampen; Jan-Willem van Ittersum (klas 4), Keizer Karel College, Amstelveen; Peter van der Lecq, Utrecht; Pepijn de Maat (klas 1), Christelijk Gymnasium, Utrecht; Christian Nesenberend (klas 5), Alkwin Kollege, Uithoorn; Evi Pingnet (klas 3), Sint-Norbertusinstituut, Duffel; Michelle Sweering (klas 2), Erasmiaans Gymnasium, Rotterdam; Paul van de Veen, Enschede; Rob van der Waall, Huizen.

187: Stijn Cambie (klas 4), Vrij Technisch Instituut, Poperinge; Anthon van Dijk, Hoofddorp; Thijs van der Gugten (klas 4), GSG Guido de Brès, Amersfoort; Arie Heikoop, Kampen; Jan-Willem van Ittersum (klas 4), Keizer Karel College, Amstelveen; Christian Nesenberend (klas 5), Alkwin Kollege, Uithoorn; Michelle Sweering (klas 2), Erasmiaans Gymnasium, Rotterdam; Ian Vandelacluze, Ruiselede; Paul van de Veen, Enschede.

188: Kees Boersma, Vlissingen; Stijn Cambie (klas 4), Vrij Technisch Instituut, Poperinge; Anthon van Dijk, Hoofddorp; Thijs van der Gugten (klas 4), GSG Guido de Brès, Amersfoort; Arie Heikoop, Kampen; Peter van der

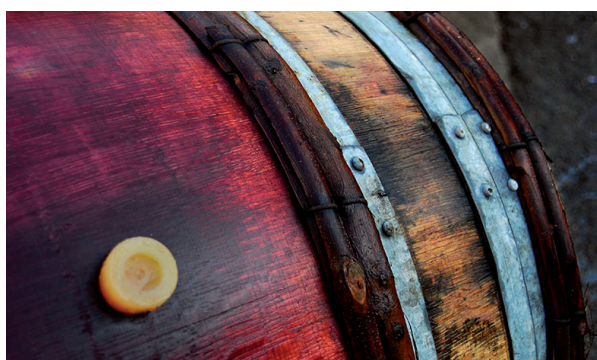
Lecq, Utrecht; Christian Nesenberend (klas 5), Alkwin Kollege, Uithoorn; Marcel Roggeband, Hoofddorp; Simon Vandeveld (klas 6), Edugo Campus de Toren, Oostakker; Paul van de Veen, Enschede; Rob van der Waall, Huizen.

189: Kees Boersma, Vlissingen; Stijn Cambie (klas 4), Vrij Technisch Instituut, Poperinge; Anthon van Dijk, Hoofddorp; Thijs van der Gugten (klas 4), GSG Guido de Brès, Amersfoort; Arie Heikoop, Kampen; Jan-Willem van Ittersum (klas 4), Keizer Karel College, Amstelveen; klas 3 van docent Odette de Meulemeester, KSO Glorieux, Ronse; Arie van der Kraan, Nuth; Peter van der Lecq, Utrecht; Christian Nesenberend (klas 5), Alkwin Kollege, Uithoorn; Marcel Roggeband, Hoofddorp; Camil Staps (klas 3), Corderius College, Amersfoort; Simon Vandeveld (klas 6), Edugo Campus de Toren, Oostakker; Paul van de Veen, Enschede; Rob van der Waall, Huizen.

De Irisbonnen gaan naar Michelle Sweering en Stijn Cambie.

OPGAVE 194

Een wijnhandelaar heeft drie vaten van respectievelijk 7 liter, 9 liter en 20 liter. Dit laatste vat is geheel gevuld, de andere twee vaten zijn leeg. Hoe kan hij zonder wijn te morsen precies één liter wijn afmeten, waarbij hij wijn mag overgieten tot het vat waaruit hij giet leeg is, of het vat waarnaar hij giet vol is?



OPGAVE 195

Toon aan dat $n^4 - 14n^3 + 35n^2 + 50n + 24$ voor elk positief geheel getal n deelbaar is door 24.

OPGAVE 196

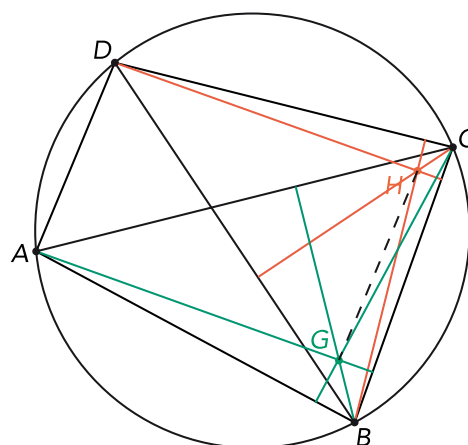
De rij $u_0, u_1, u_2, \dots$ voldoet aan de volgende recursieve formule:

$$u_n = \frac{(10u_{n-1} - 3(u_{n-2})^2)^2}{32},$$

met $u_0 = 4$ en $u_1 = 8$. Bewijs dat u_n een macht van 2 is voor elke n .

OPGAVE 197

De punten A, B, C en D liggen op een cirkel, zodanig dat de driehoeken ABC en BCD scherphoekig zijn. Als G en H hun respectievelijke hoogtepunten (snijpunten van de hoogtelijnen) zijn, bewijs dan dat $|GH| = |AD|$.



OPLOSSING 186

Neem het cijfer 1 en zet daar een even aantal drie- en achter: 133, 13333, 1333333, 133333333, enzovoorts. Waarom is dit nooit een priemgetal? (Een priemgetal is een getal dat alleen maar deelbaar is door 1 en zichzelf, zoals 13.)

Oplossing. Noteer met x_n het n -de getal van de gegeven vorm. Dan is $3x_n + 1 = 4 \cdot 10^{2n}$, dus is $x_n = \frac{1}{3}(4 \cdot 10^{2n} - 1) = A_n \cdot B_n$, waar $A_n = \frac{1}{3}(2 \cdot 10^n + 1)$ en $B_n = 2 \cdot 10^n - 1$. B_n is duidelijk geheel. De som van de cijfers van $2 \cdot 10^n + 1$ is 3, dus is $2 \cdot 10^n + 1$ deelbaar door 3. A_n is dus ook geheel; A_n en B_n zijn delers van x_n , dus is x_n geen priemgetal.

OPLOSSING 187

Je hebt een 2×3 bord met afwisselend witte en zwarte vakken. Je wilt dit bord veranderen in een 2×3 bord waarbij alle witte vakken zwart zijn geworden en omgekeerd. Voor elke stap gelden de volgende regels:

- precies twee aangrenzende vakken veranderen van kleur;
- hierbij wordt een zwart vak rood, een rood vak wordt wit, een wit vak wordt zwart.

Hoeveel stappen heb je minimaal nodig om de witte en zwarte vakken te verwisselen?

Oplossing. De drie vakken die op het begin zwart zijn, moeten elk minstens twee keer van kleur veranderen om wit te worden. Omdat deze vakken niet aan elkaar grenzen, zijn er in ieder geval $3 \times 2 = 6$ stappen nodig. Meer stappen zijn niet nodig, zoals blijkt uit de volgende oplossing:



OPLOSSING 188

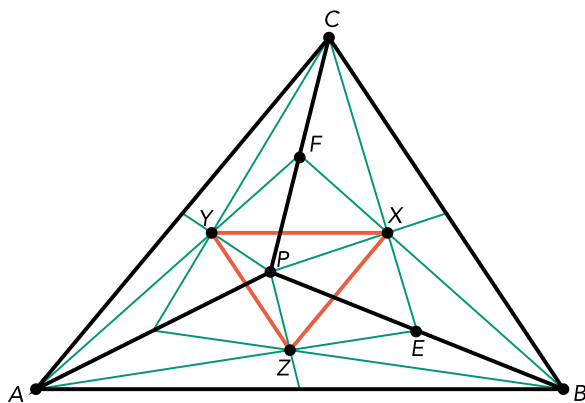
De rij van Fibonacci is 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ... In formulevorm: $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ met $F_0 = F_1 = 1$.

Als a en b twee opeenvolgende getallen van deze rij zijn, komt $a^2 + b^2$ ook voor in de rij. Bewijs dat.

Oplossing. Als a en b twee opeenvolgende getallen in de rij van Fibonacci zijn, dan loopt de rij verder als $a + b$, $a + 2b$, $2a + 3b$ enzovoorts. In het algemeen zijn het alle termen van de vorm $F_n a + F_{n+1} b$. Immers, $F_n a + F_{n+1} b$ en $F_{n+1} a + F_{n+2} b$ worden opgevolgd door $(F_n + F_{n+1})a + (F_{n+1} + F_{n+2})b = F_{n+2}a + F_{n+3}b$. Hieruit volgt dat ook $a^2 + b^2$ voorkomt.

OPLOSSING 189

We gaan uit van een willekeurige driehoek ABC met een punt P daarbinnen. De zwaartepunten van de driehoeken CPB , APC en BPA noemen we achtereenvolgens X , Y en Z . Toon aan dat driehoek XYZ gelijkvormig is met driehoek ABC .



Oplossing. Noteer met E het midden van BP en met F het midden van CP . Dan is EF een middenparallel in $\triangle BPC$. Wegens Z-hoeken is $\triangle FXE \sim \triangle BXC$ (hh), en dus geldt $|FX| : |BX| = |FE| : |BC| = 1 : 2$. Nu volgt $|XF| = \frac{1}{3}|BF|$. Op gelijke wijze vinden we $|YF| = \frac{1}{3}|AF|$, dus is $\triangle YFX \sim \triangle AFB$ (zhz), dus is $|XY| = \frac{1}{3}|AB|$. Helemaal analoog gaat het bewijs dat $|YZ| = \frac{1}{3}|BC|$ en dat $|ZX| = \frac{1}{3}|CA|$. Uit zzz volgt nu $\triangle XYZ \sim \triangle ABC$.

OPLOSSINGEN KLEINE NOOTJES NR. 6

VERSLETEN NUMMERS

De huizen met de zichtbare cijfers bevinden zich aan de even kant van de straat. De vijf cijfers 6, 8, 8, 4, 6 zitten op volgorde in de rij 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30. In de andere richting niet. Willem moet dus zijn bij het laatste huis aan de kant met zichtbare cijfers, als hij loopt in de richting 6, 8, 8, 4, 6.

BREUKEN

Grootste som: $\frac{9}{2} + \frac{8}{3} + \frac{7}{4} + \frac{6}{5} = 10\frac{7}{60}$.

Kleinste som: $\frac{2}{6} + \frac{3}{7} + \frac{4}{8} + \frac{5}{9} = 1\frac{103}{126}$.

NEGATIEVE BREUK?

Op z'n kop is het de som $99 = 6 \times 18 - \frac{81}{9}$.

MUNTSPEL

Per beurt zijn er 4 mogelijkheden, dus bij twee beurten zijn er 16 mogelijkheden. Mira wint bij de worpen (M2, K1), (K1, M2), (M1, M1), (M1, M2), (M2, M1), (M2, M2).

Dus de kans dat Mira wint, is $\frac{6}{16} = \frac{3}{8}$.

ÉÉN KEER WEGEN

Eén van de twee hopen is even in aantal (totaal 101). Pierre kiest deze en legt de helft op elke schaal. Als hij doorslaat, zit de knikker in de even hoop, anders in de oneven.

**PYTHA
GORAS**

50ste jaargang nummer 1
september 2010
ISSN 0033 4766

Pythagoras wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde en richt zich tot alle leerlingen van vwo en havo. *Pythagoras* stelt zich ten doel jongeren kennis te laten maken met de leuke en uitdagende kanten van wiskunde.

Internet www.pythagoras.nu

Hoofdredacteur Arnout Jaspers

Eindredacteur Alex van den Brandhof

Redactie Matthijs Coster,
Jeanine Daems, Jan Guichelaar,
Klaas Pieter Hart

Bladmanager Arnout Jaspers,
Mathematisch Instituut,
Universiteit Leiden,
Postbus 9512, 2300 RA Leiden.

Vormgeving Grafisch Team
Digipage BV, Leidschendam

Druk Drukkerij Ten Brink, Meppel

Uitgever Koninklijk Wiskundig
Genootschap

Verantwoordelijk uitgever Chris Zaai

Lezersreacties en kopij Bij voorkeur per e-mail; lezersreacties naar Jan Guichelaar, jan@pythagoras.nu en kopij naar Arnout Jaspers, arnout@pythagoras.nu. Eventueel per post naar Jan Guichelaar, Pedro de Medinallaan 162, 1086 XR Amsterdam.

Abonnementen, bestellingen en mutaties

Mirjam Worst, Drukkerij Ten Brink,
Postbus 41, 7940 AA Meppel.
Telefoon: 0522 855 175.
E-mail:
abonneeadministratie@pythagoras.nu.

Abonnementsprijs

(6 nummers per jaargang)
€ 25,00 (Nederland),
€ 28,00 (België),
€ 32,00 (overig buitenland),
€ 22,00 (leerlingabonnement Nederland),
€ 25,00 (leerlingabonnement België),
€ 15,00 (groepsabonnement Nederland),
€ 16,00 (groepsabonnement België).
Zie www.pythagoras.nu voor toelichtingen.

Aan dit nummer werkten mee

Dick Beekman, auteur van diverse breinbrekerboeken (d.beekman9@chello.nl), Alex van den Brandhof, docent wiskunde op het Vossiusgymnasium te Amsterdam (alex@pythagoras.nu), Matthijs Coster, wetenschappelijk onderzoeker bij het Ministerie van Defensie (matthijs@pythagoras.nu), Jeanine Daems, aio wiskunde aan de UL en docent wiskunde op het Rijnlands Lyceum te Sassenheim (jeanine@pythagoras.nu), Jos Groot, wetenschappelijk medewerker bij TNO te Den Haag (jos.groot@casema.nl), Jan Guichelaar, voormalig directeur van Interconfessionele Scholengroep Amsterdam (jan@pythagoras.nu), Klaas Pieter Hart, docent topologie aan de TU (kp@pythagoras.nu), Alexander van Hoorn, student wiskunde aan de UvA (alexander@pythagoras.nu), Arnout Jaspers, wetenschapsjournalist (arnout@pythagoras.nu), Johan Konter, student wiskunde aan de UU (konter@gmail.com), Eddie Nijholt, student wiskunde aan de UvA (eddie@pythagoras.nu), Lee Sallows, recreatief wiskundige (lee.sal@inter.nl.net), Sietske Tacoma, student Research and Development in Science Education aan de UU (konter@gmail.com).



49 JAAR GELEDEN

Pythagoras viert deze jaargang zijn vijftigjarig jubileum. Toegegeven, 50 jaar zijn we op dit moment eigenlijk nog niet: precies 49 jaar geleden verscheen de allereerste *Pythagoras*. De pagina's die je hier ziet, komen uit nummer 2 van de eerste jaargang.

