PYTHAGORAS

50 jaar

WISKUNDETIJDSCHRIFT VOOR JONGEREN

50 jaar geluidsdragers

Panmagische vierkanten

Wiskundige Valentijnsdag

50ste JAARGANG - NUMMER 4 - FEBRUARI 2011

PYTHAGORAS PRESENTEERT: DE PYTHAGORAS CODE

Pythagoras bestaat vijftig jaar en laat dat niet onopgemerkt voorbijgaan. Op 2 april verschijnt het boek *De Pythagoras Code – het beste uit een halve eeuw wiskunde voor liefhebbers*. Daarin is een selectie opgenomen van artikelen uit vijftig jaargangen *Pythagoras*. Een greep uit de onderwerpen: geomagische vierkanten, logische raadsels, superdoku's, sangaku's, onmogelijke figuren, platonische lichamen, Penrosetegels, kettingbreuken, wiskunst en uiteraard heel veel puzzels, van verrassend simpel tot breinbrekers die je een weekend of langer niet meer loslaten.

Op zaterdagmiddag 2 april* vindt de **boekpresentatie** plaats in het Amsterdamse Science Center NEMO. Dan overhandigen we het eerste exemplaar aan Bruno Ernst, de drijvende kracht achter *Pythagoras* tijdens de eerste dertig jaargangen. Verder zal redacteur Matthijs Coster een presentatie verzorgen over de diverse prijsvragen die de afgelopen jaren in *Pythagoras* hebben gestaan, en kun je je krachten beproeven op de laatste aflevering van de jubileumprijsvraag. Bovendien zijn er de hele dag tal van andere wiskunde-activiteiten in NEMO, onder andere verzorgd door Vierkant voor Wiskunde. Het museum is het hele weekend gratis toegankelijk.

De Pythagoras Code zal na 2 april ook in de boekhandels te koop zijn voor € 19,95.

ALS ABONNEE KUN JE AANWEZIG ZIJN BIJ DE PRESENTATIE

Aanmelden is verplicht, want het aantal plaatsen is beperkt. Als je het boek aan de zaal koopt, krijg je 12 euro korting op je Pythagoras-abonnement voor de volgende jaargang. In feite koop je het boek dus voor minder dan de helft van de prijs! Stuur een mail met je **naam, adres en telefoonnummer** naar hoofdredacteur Arnout Jaspers: arnout@pythagoras.nu. Doe dat vóór **15 maart 2011**.

Wat?
Presentatie *De Pythagoras Code*

Waar?
NEMO (Lumière Filmzaal),
Oosterdok 2, Amsterdam
(vlakbij Amsterdam Centraal)

Wanneer?
Zaterdag 2 april 2011,
15.45 - 17.00 uur

* In het januarinummer schreven we 1 april. Dat was niet bedoeld als grap, maar is toch onjuist.

INHOUD

4

VAN LP NAAR CD NAAR MP3

In zijn vijftigste jaargang gaat *Pythagoras* na, welke vooruitgang er sinds de eerste jaargang geboekt is op onderwerpen waarbij wiskunde een sleutelrol speelt. De derde aflevering van deze serie behandelt *geluidsdragers*. Tegenwoordig komt muziek op een veel wiskundiger manier in onze oren terecht dan vijf decennia geleden.

27

OP EN NEER MET DE ROLTRAP

De Nederlandse Wiskunde Olympiade bestaat net als *Pythagoras* vijftig jaar. Op 4 februari vond voor de vijftigste keer de eerste ronde van dit toernooi plaats. De set opgaven was weer lekker uitdagend; één ervan bespreken we in deze *Pythagoras*.

15

OVERLAPPENDE CIRKELS

In twee overlappende cirkels liggen drie begrensde gebieden, en in drie overlappende cirkels maximaal zeven, dat zie je meteen. Maar hoe gaat dit verder voor vier, vijf en nog meer cirkels?

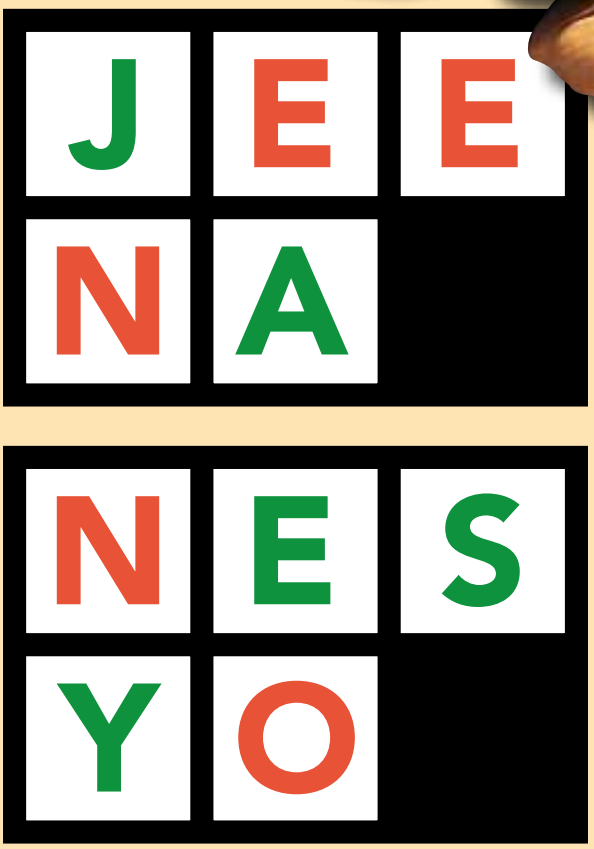
EN VERDER

2 Kleine nootjes
9 De post
10 25 tellers, 25 noemers
12 Effectief panmagische vierkanten maken
18 Eindeloze deelstrepen
23 Möbius in Toronto
24 Verstrengelde Möbiusharten
26 Journaal
30 Pythagoras Olympiade
33 Oplossingen Kleine nootjes nr. 3

NIVEAUBALKJES Pagina's met één of meer zwarte balkjes (onder de paginanummering) geven de moeilijkheidsgraad aan. Eén balkje: lastig. Twee balkjes: vereist wiskundekennis uit de vijfde of zesde klas. Drie balkjes: net iets moeilijker.

KLEINE NOOTJES

door Dick Beekman en Jan Guichelaar



USB-STICK VAN DOBBELSTENEN

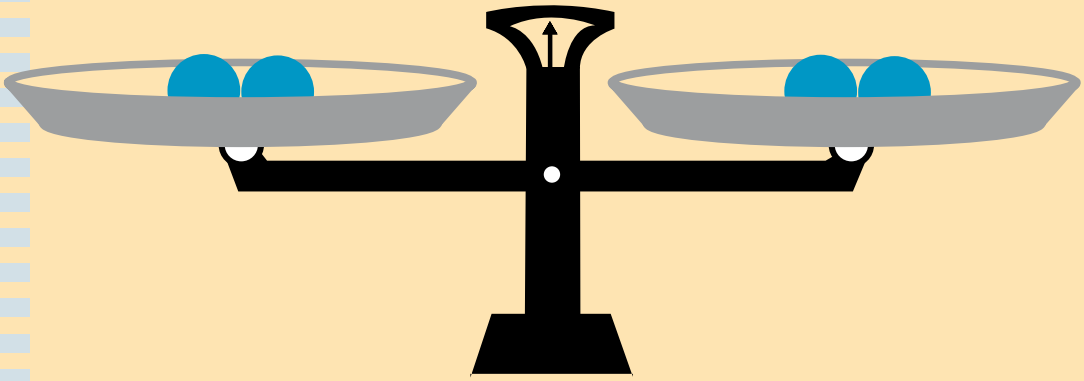
Een computerfabrikant brengt een usb-stick op de markt die 'verpakt' is in drie dobbelstenen. De stick zelf zit in twee dobbelstenen, de derde dobbelsteen is de dop. Als je gooit, valt hij altijd op een lange kant. Je gooit de som van de bovenste waarden. Als je met alleen de stick (dus twee aan elkaar geplakte dobbelstenen) gooit, wat gooi je dan gemiddeld, als je vaak gooit? En als de dop erop zit (dus drie aan elkaar geplakte dobbelstenen), wat gooi je dan gemiddeld?

SCHUIFPUZZELS

Hendrik heeft twee schuifpuzzels. Een blokje dat grenst aan het lege veld, kun je schuiven naar het lege veld. Kan Hendrik van de bovenste puzzel NEE-JA maken en van de onderste YES-NO?

KANSWEGEN

Zina heeft vier even zware knikkers en een balans. Elke knikker legt zij op de balans. Met een munt bepaalt zij of een knikker op de linker- of de rechterschaal komt te liggen. Wat is de kans dat de schaal met vier knikkers in evenwicht is?
En wat is die kans als er al een knikker op de linkerschaal ligt en Zina maar drie knikkers op de balans hoeft te leggen?



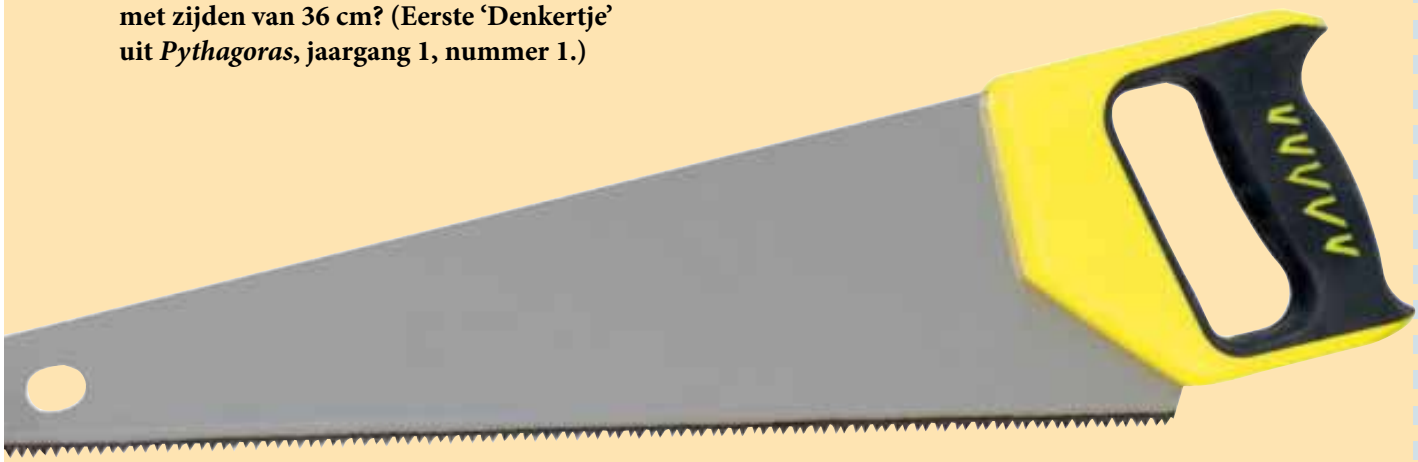
Kleine nootjes zijn eenvoudige opgaven die weinig of geen wiskundige voorkennis vereisen om opgelost te kunnen worden. De antwoorden vind je in het volgende nummer van Pythagoras.

LEEFTIJDEN

Een vader, moeder, dochter en zoon zijn samen 180 jaar oud. Hun leeftijden bevatten de cijfers 1 tot en met 8. Hoe oud zijn ze?

VIERKANTEN ZAGEN

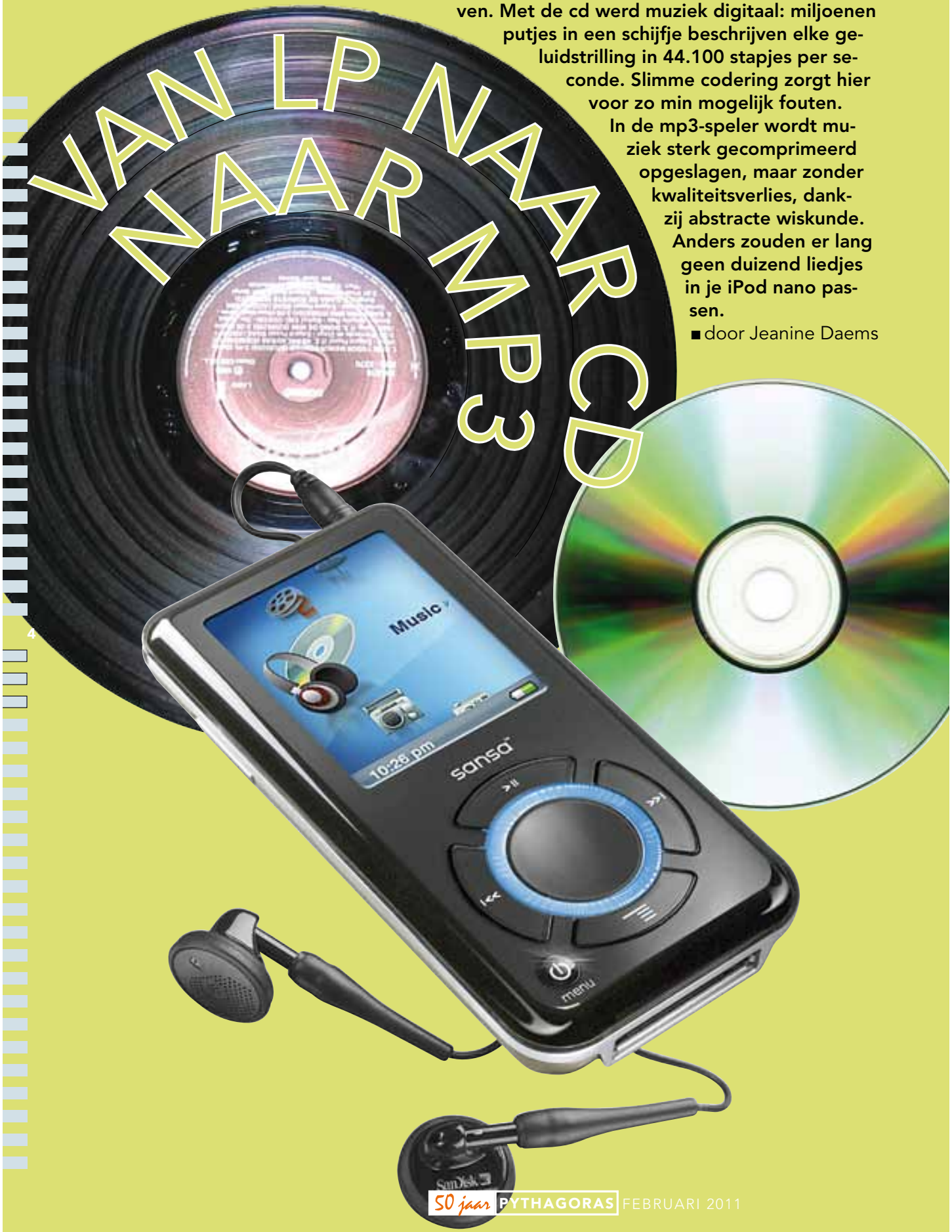
Hoeveel rechthoeken van 8 cm bij 5 cm kun je maximaal zagen uit een vierkante plaat met zijden van 36 cm? (Eerste 'Denkertje' uit *Pythagoras*, jaargang 1, nummer 1.)



VAN LP NAAR CD NAAR MP3

Muziek komt nu op een veel wiskundiger manier in onze oren terecht dan vijftig jaar geleden. De grammofoonplaat uit de jaren zestig is puur analoog: de bibberende groef voor de naald is bijna letterlijk een plaatje van de geluidsgolven. Met de cd werd muziek digitaal: miljoenen putjes in een schijfje beschrijven elke geluidstrilling in 44.100 stapjes per seconde. Slimme codering zorgt hier voor zo min mogelijk fouten. In de mp3-speler wordt muziek sterk gecomprimeerd opgeslagen, maar zonder kwaliteitsverlies, dankzij abstracte wiskunde. Anders zouden er lang geen duizend liedjes in je iPod nano passen.

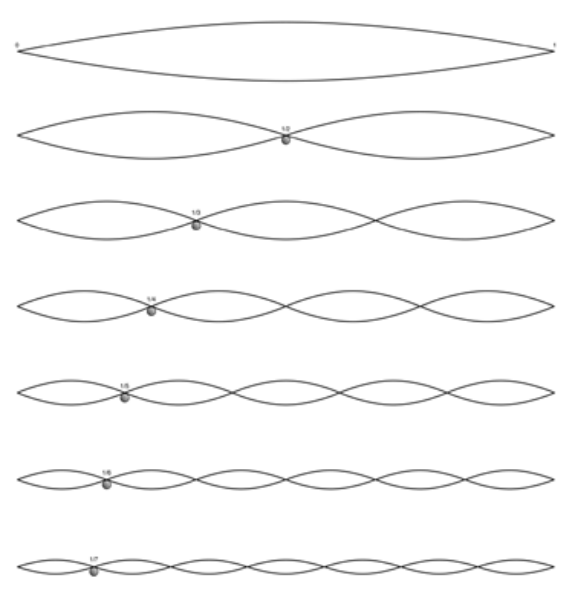
■ door Jeanine Daems



GELUID Alle geluid bestaat uit snelle drukfluctuaties, die zich voortplanten door de lucht of andere materialen (bijvoorbeeld de muur met de buren). In lucht zijn de trillingen *longitudinaal*, wat betekent dat de luchtmoleculen parallel heen en weer bewegen aan de richting waarin het geluid zich voortplant. Het effect van zelfs de meest complexe muziek op onze trommelvliezen is niet meer dan een simpele luchtdrukverandering, die zich met twee getallen (één voor elk oor) perfect laat weergeven. Die twee getallen veranderen wel heel snel in de tijd.

De toonhoogte die je hoort, hangt af van de frequentie van de trilling, die wordt uitgedrukt in *hertz* (Hz). Eén hertz is één trilling per seconde. De A waarop orkesten meestal afstemmen is de toon met een frequentie van 442 Hz. Mensen horen tonen tussen ongeveer 20 en 20.000 Hz, maar vooral de bovengrens daalt flink naarmate je ouder wordt, en al heel jong als je te vaak vooraan gaat staan bij popconcerten.

Geluid heeft bijna altijd een veel complexere vorm dan een sinusfunctie. Maar een stemvork brengt wél een zuivere sinus voort. Muziekinstrumenten trillen met meerdere frequenties tegelijk: de *grondtoon* en diverse *boventonen*. De grondtoon heeft de grootste amplitude en de laagste frequentie, f_0. De boventonen hebben altijd een frequentie van een geheel aantal malen f_0. De relatieve sterkte van de boventonen varieert per instrument, vandaar dat een viool en een fluit heel anders klinken, ook als ze dezelfde toon spelen. Als je het geluid van een instrument in een grafiek zet, zie je niet precies een sinusfunctie, maar de optelling van diverse sinus- en cosinusfuncties met verschillende frequenties.



DE LP De grammofoonplaat is een idee van Thomas Edison, die al in 1878 de 'fonograaf' uitvond. Ruim een eeuw lang, tot begin jaren tachtig van de vorige eeuw, kwam nieuwe muziek alleen op grammofoonplaten uit. Eerst op grote 78-toeren platen, later op een *singletje* (45 toeren per minuut) of op *lp* (langspeelplaat, 33 toeren).

Grammofoonplaten zijn gemaakt van de kunststof vinyl. Langspeelplaten hebben een diameter van 30 centimeter, singletjes van ongeveer 15 centimeter. Op een singletje paste maar één liedje, al kon je hem nog wel omdraaien, dan hoorde je de 'B-kant', meestal een muzikaal kliekje waar niemand echt warm voor liep. Op sommige lp's paste wel 30 minuten muziek per kant.

De muziek zit in één groef per kant, die in een spiraalvorm van buiten naar binnen loopt. De platenspeler heeft een naald van diamant of saffier, die de groef volgt terwijl de plaat ronddraait. De 'bibbers' in de groef brengen de naald in trilling, en die trillingen worden – na versterking – rechtstreeks vertaald in trillingen van de luidspreker.

Je kunt simpel uitrekenen hoe groot de kleinste bochtjes in de groef moeten zijn. Een lp draait met 33 toeren per minuut. Aan de buitenkant van de plaat loopt de naald dus door $\pi \times 300$ millimeter $\times$ 33/60 = 520 millimeter groef per seconde heen. Aan de binnenkant, tegen het eind, loopt dit terug tot $\pi \times 10 \times 33/60 = 170$ millimeter per seconde.

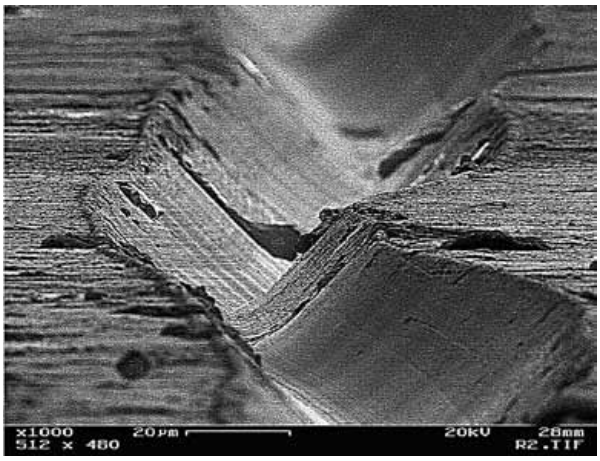
De hoogst hoorbare geluidsfrequentie is 20.000 Hz, 20.000 trillingen per seconde. Eén trilling kun je je voorstellen als een *sinusgolf*. In een groef op een plaat is dat dus een uitwijking de ene kant op, gevolgd door een uitwijking de andere kant op, ofwel twee bochtjes per trilling. Dus aan de buitenkant moet de groef bochtjes maken van $520/(2 \times 20.000) = 0{,}013$ millimeter, aan het eind van $170/(2 \times 20.000) = 0{,}0043$ millimeter.

Vooral tegen het eind is dit op de grens van wat je nog netjes kunt uitsnijden in een plaat vinyl. Kijk maar naar figuur 1, de groef van een 'moderne' lp: het maatbalkje onderaan is 20 micrometer, ofwel 0,002 millimeter. In oudere grammofoonplaten, gemaakt van schellak, ging dat helemaal niet, vandaar dat die op 78 toeren per minuut draaiden, dan doorloopt de naald per seconde meer millimeters van de groef.

Als je goed naar de v-vormige groef in figuur 1

kijkt, zie je dat de linker- en rechterkant ongelijk zijn. Enig idee waar dat goed voor is? Het helpt om je de groef gekanteld voor te stellen, zodat de linkerkant plat ligt en de rechterkant rechtop staat. Wat gebeurt er dan als je een naald door de groef laat lopen? De linkerkant zorgt ervoor dat de naald op en neer gaat, de rechterkant beweegt de naald van links naar rechts (de zwaartekracht duwt de naald terug naar beneden en naar rechts). De naald kan dus *twee onafhankelijke* signalen doorgeven, en dat is precies wat je nodig hebt voor stereo: aparte signalen voor de rechter en de linker geluidsbox.

De lp is niet helemaal uitgestorven: hij wordt nog gebruikt door dj's om handmatig mee te *scratchen*, en er zijn liefhebbers die stug volhouden dat een lp toch mooier klinkt dan elke digitale opname.



Figuur 1 De groef van een 'moderne' lp. Afbeelding: Chris Supranowitz, Institute of Optics, University of Rochester

HET CASSETTEBANDJE Behalve op lp's werd geluid sinds 1935 ook opgenomen op magnetische geluidsband. Op hetzelfde principe is het cassettebandje gebaseerd, in 1962 uitgevonden door Philips. Bij de opname veroorzaken de geluidsgolven een elektrisch stroompje door een spoeltje, wat een magnetisch veld opwekt. De band, die ijzeroxide bevat, loopt vlak langs deze elektromagneet, en het ijzeroxide wordt daarbij gemagnetiseerd: het verandert zelf in minuscule magneetjes met een bepaalde richting voor de noord- en zuidpool. Bij het afspelen loopt de gemagnetiseerde band langs de spoel, zodat het wisselende magnetisch veld een stroom in het spoeltje opwekt. Die stroom kan weer worden versterkt en een luidspreker aandrijven.

Het voordeel ten opzichte van de grammofoonplaat was uiteraard dat je hiermee ook zelf muziek kon opnemen. Sinds de opkomst van de cd is het cassettebandje langzaam van het toneel verdwenen.

DIGITALISEREN VAN GELUID De laatste vijfentwintig jaar wordt geluid altijd in een bepaalde fase digitaal opgeslagen, zelfs als het uiteindelijk nog op een analoog medium als de lp terechtkomt. Om een signaal digitaal op te slaan, moeten we de golven op de een of andere manier in getallen vertalen. Je kunt bijvoorbeeld de amplitude van een golf in een aantal niveaus verdelen. Als je met regelmatige tussenpozen kijkt tussen welke twee niveaus de amplitude op dat moment zit en die waarde opslaat, krijg je een soort staafdiagram dat de golfvorm benadert. Deze waarden heten *samples*.

Het is duidelijk dat je de echte golf beter benadert naarmate je vaker samples neemt, en naarmate er meer niveaus zijn om uit te kiezen. Vanaf een bepaalde hoeveelheid samples horen wij geen verschil meer tussen de benadering en de echte golf. Het blijkt dat de samplefrequentie minstens twee keer zo groot moet zijn als de maximale frequentie van het signaal. Daarom is voor cd-geluid de samplefrequentie ruim 2 × 20.000 Hz, namelijk 44.100 Hz.

Het aantal niveaus is natuurlijk ook van belang. Op een cd worden per sample 16 bits (oftewel 2 bytes) gebruikt. Daarin kun je 2^{16} = 65.536 niveaus coderen.

DE CD De compact disc (cd) heeft sinds de jaren tachtig de huiskamers overgenomen. Er zijn twee soorten cd's: audio-cd's voor muziek en cd's voor gegevens. In dit artikel beperken we ons tot de audio-cd's.

Een cd is gemaakt van plastic met daarop een dun laagje reflecterend aluminium en een beschermend laagje acryl. De cd is 12 cm in doorsnede, maar er past een behoorlijke hoeveelheid data op: 783 megabyte (MB). Het gat in het midden van een cd-schijfje heeft – niet geheel toevallig – precies het formaat van het oude Nederlandse dubbeltje. De cd is namelijk een deels Nederlandse uitvinding: in 1980 werd de standaard door Sony en Philips samen vastgelegd.

Bij de lp wordt de trilling van de naald direct omgezet in een elektrisch signaal. Bij de cd ligt dat heel anders:

- per seconde worden er 44.100 samples genomen, elk sample bestaat uit 2 bytes (= 16 bits);
- voor de linker- en rechterspeakers in een stereosysteem worden aparte samples opgeslagen.

Dat komt dus neer op 44.100 samples/seconde × 16 bits/sample × 2 kanalen = 1.411.200 bits per seconde, ofwel 176.400 bytes per seconde. Een liedje van drie minuten bestaat dus uit 3 × 60 × 176.400 = 31.752.000 bytes, ongeveer 32 MB. Op een cd van 783 MB past dus ruim zeventig minuten muziek, iets meer dan op een langspeelplaat.

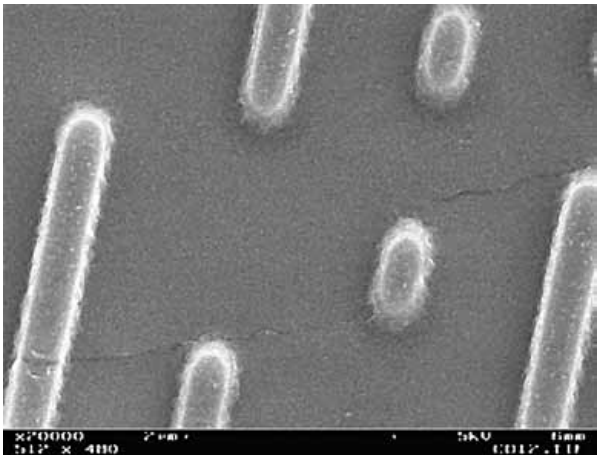
De data staan op de cd als een lange spiraal, die begint bij het midden en eindigt bij de rand. Die spiraal zou uitgerold wel vijf kilometer lang zijn! De spiraal is heel dun: 0,5 micrometer breed, met 1,6 micrometer tussen de sporen in. Het spoor bestaat uit een opeenvolging van langwerpige putjes (*pits*), zie figuur 2. Een laserstraal in de cd-speler volgt de putjes en weet daardoor hoe de spiraal precies loopt. Tegelijk wordt afgelezen waar de putjes zitten.

Je zou misschien denken dat een putje een 1 betekent en 'geen putje' een 0, of andersom, maar dat is niet zo. Op een cd betekent juist de *overgang* van een putje naar 'geen putje' of omgekeerd een 1, en als er niets verandert betekent dit een 0. Bovendien zijn niet alle mogelijke rijtjes nullen en enen heel handig op een cd: omdat de laser de putjes niet alleen als informatie gebruikt, maar ze ook nodig heeft om de spiraal te volgen, raakt hij het spoor kwijt als er veel nullen achter elkaar staan.

Daarom wordt elk blokje informatie van acht bits gecodeerd als een blokje van veertien nullen en enen, dat altijd voldoet aan de volgende eisen: tussen twee enen zitten altijd ten minste twee en ten hoogste tien nullen. Deze techniek heet *Eight-to-fourteen modulation* (EFM). Tussen twee van deze blokjes van veertien bits moet ook nog de juiste overgang zitten, zodat het eind van het ene en het begin van het volgende blok niet te veel aaneengesloten nullen bevatten. Uiteindelijk zijn er 17 fysieke bits nodig op de cd om 8 bits aan data erop te zetten. EFM-codering gebeurt niet met een mooie formule of iets dergelijks, het is gewoon een tabel waarin voor iedere combinatie van acht nullen en enen vastgelegd is welk rijtje van veertien nullen en enen erbij hoort. Niet elegant, wel praktisch.

Dit is niet de enige vorm van codering op cd's. Bij het aflezen treden wel eens fouten op, die automatisch worden hersteld door een zogeheten *foutencorrigerende code,* in dit geval de cross-interleaved Reed Solomon code (CIRC). In *Pythagoras* 48-5 (april 2009) verscheen het artikel 'Zelfreinigende boodschappen' over foutencorrigerende codes.

Behalve de wiskundige foutencorrectie zit er ook nog een ander trucje in de CIRC om fouten te herstellen. Als een cd een kras oploopt, raken meestal putjes dicht bij elkaar in de buurt beschadigd. Daarom worden de bits van één byte informatie niet naast elkaar, maar verspreid over het spoor opgeslagen. Een kras zal dan over het algemeen maar één of twee bits per byte beschadigen, en de foutcorrigerende code kan dan nog de hele byte reconstrueren. Dat lukt niet meer als vier of vijf bits van dezelfde byte onleesbaar zijn.



Figuur 2 De putjes (pits) op een cd

DE MP3 De mp3 is wiskundig gezien het interessantst. Technisch gesproken is mp3 geen geluidsdrager, maar een bestandsformaat. Mp3 is eigenlijk de uitgang van het bestandsformaat, net als .doc of .jpeg. Het formaat .mp3 wordt gebruikt voor het type file dat voluit *MPEG-1 Layer 3* of *MPEG-2 Layer 3* heet. Dit bestandsformaat voor audio is ontwikkeld door de *Moving Picture Experts Group*, waarbij een aantal verschillende onderzoeksgroepen betrokken waren, en de standaard is vastgelegd in 1992.

Het grote voordeel van mp3 is dat het relatief weinig opslagcapaciteit vergt. De mp3 comprimeert geluid zodanig dat het nog steeds goed bruikbaar is, maar uit wel tien tot veertien keer minder bytes bestaat dan dezelfde muziek op cd. Een liedje van 32 MB is dan nog maar zo'n 3 MB groot, zodat er veel meer op je telefoon of ipod passen, en je ze ook veel sneller kunt downloaden.

Bij mp3-compressie gaat wel informatie verloren, maar het slimme is dat je daar niets van merkt. Bepaalde geluiden die er wel zijn in de originele opname, hoor je in feite niet als je die opname beluistert. Die geluiden kun je dus gewoon weglaten bij het comprimeren. Maar wat voor geluiden zijn dat dan? Geluiden, bijvoorbeeld, die zo zacht zijn dat ze onder onze gehoordrempel liggen. En hier komt het complexe van de situatie goed naar voren: voor verschillende frequenties is onze gehoordrempel verschillend. Dat betekent dat je per frequentie apart moet weten hoe hard het geluid is. We willen dus het signaal uiteenrafelen in de frequenties met hun bijbehorende geluidssterktes. Dit heet *frequentieanalyse*.

FREQUENTIEANALYSE De Franse wis- en natuurkundige Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) bewees dat een periodieke functie altijd geschreven kan worden als een optelling van (eventueel oneindig veel) sinus- en cosinusfuncties; je

ziet de link met muziek al tevoorschijn komen! Zo'n som van sinussen en cosinussen heet de *Fourierreeks* van de functie.

Het sterke punt van de zogeheten *Fouriertransformatie* is dat het andersom ook lukt: gegeven een samengesteld signaal, dan is het mogelijk om de bijbehorende sinussen en cosinussen te bepalen. In het kader hiernaast zie je een voorbeeld. Dankzij de Fouriertransformatie kun je van een signaal van onbekende samenstelling een *frequentiespectrum* maken. Zo speelt een wiskundige stelling uit de negentiende eeuw een grote rol in technologie die we allemaal dagelijks gebruiken.

PSYCHOAKOUSTIEK Mp3-codering gebruikt *psychoakoustiek*: wat mensen niet kunnen horen, hoef je ook niet op te slaan. Nu we van elk signaal een frequentiespectrum kunnen maken, kunnen we alle frequenties onder de 20 Hz en boven de 20.000 Hz veilig weglaten. Die grenzen zijn nog ruim ook: veel mensen horen tonen hoger dan 15.000 Hz al niet meer. Binnen deze bandbreedte kun je nu per frequentiegebiedje bepalen of het geluid onder de gehoordrempel ligt, en dus ook kan worden weggelaten.

Een ander effect van onze oren dat mp3-codering uitbuit is *maskering*. Als je een signaal hoort van, zeg, 4000 Hz, en je hoort tegelijk een veel zachter signaal van 4002 Hz, dan hoor je dat zachtere signaal gewoon niet, ook niet als die toon op zich wel boven de gehoordrempel ligt; dit effect heeft *frequentiemaskering*.

Daarnaast bestaat ook nog *tijdelijke maskering*: een zachte toon die vlak voor of na een harde toon komt, wordt niet gehoord, en ook die kun je dus ongemerkt weglaten.

VERDERE CODERING Aan mp3 komen nog meer compressiestappen te pas, die we hier niet in detail behandelen. Je kunt bijvoorbeeld opslagruimte besparen door van opeenvolgende samples die veel op elkaar lijken, alleen de verschillen op te slaan.

Stel bijvoorbeeld, de samples van een signaal zijn achtereenvolgens: 10.124, 10.127, 10.121, 10.119, 10.123. Dan kost het veel minder bits om op te slaan: 10.124, +3, –6, –2, +4. Ook kun je stukjes die vaker voorkomen dan andere een kortere codering geven dan stukjes die bijna niet voorkomen, dat spaart ook een boel ruimte. Dit heet *Huffmancodering*.

Kortom: in je mp3-speler zit veel meer wiskunde dan je misschien dacht. Mooie smoes voor als je stiekem muziek zit te luisteren tijdens de wiskundeles! ■

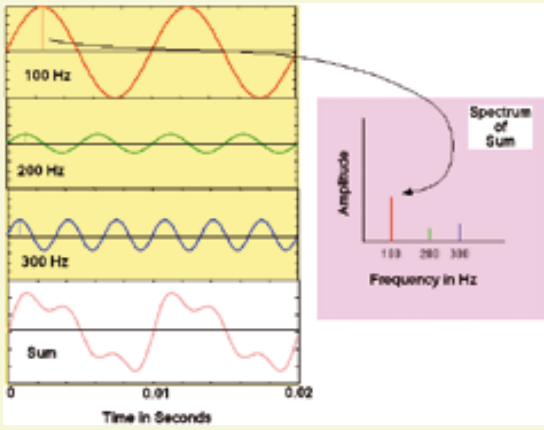
GEBRUIKTE LITERATUUR

- *De mp3-speler*: gecertificeerde NLT-module, gratis te downloaden via www.betavak-nlt.nl (aanrader!)
- Keith Devlin, 'The maths behind MP3', *The Guardian*, 4 april 2002
- Verschillende artikelen op www.howstuffworks.com
- Wikipedia over de compact disc, coderingen en mp3

FOURIERTRANSFORMATIE Stel dat we een muziekinstrument hebben dat een grondtoon met frequentie f_0 heeft. Het signaal dat wordt geproduceerd, $f(t)$, is dan een optelling van de sinussen en cosinussen met frequenties f_0, $2f_0$, $3f_0$ enzovoorts. De Fourierreeks die bij deze toon hoort, is dan

$$f(t) = a_0 + b_1\sin(2\pi f_0 t) + a_1\cos(2\pi f_0 t) + b_2\sin(4\pi f_0 t) + a_2\cos(4\pi f_0 t) + b_3\sin(6\pi f_0 t) + a_3\cos(6\pi f_0 t) + \ldots,$$

waarbij we aannemen dat $-\frac{1}{2}T \le t \le \frac{1}{2}T$, waarbij T de periode van de grondtoon is. De coëfficiënten a_i en b_i geven aan hoe sterk de bijbehorende sinus, respectievelijk cosinus in het signaal aanwezig is. De coëfficiënten zullen voor grotere i steeds kleiner worden, want de grondtoon is het sterkst en de boventonen worden steeds zachter. Bij zo'n reeks kun je een frequentiespectrum tekenen: een staafdiagram, waarin je voor elke frequentie aangeeft hoe sterk die voorkomt in het signaal. De sinus en cosinus met de coëfficiënten a_i respectievelijk b_i horen bij dezelfde frequentie, dus die a_i en b_i verwerken we in één staafje van het spectrum volgens $\sqrt{a_i^2 + b_i^2}$.



Frequentiespectrum van een signaal van onbekende samenstelling

DE POST

Heb je ook iets voor deze rubriek?
Mail naar post@pythagoras.nu

■ door Jan Guichelaar

De Tijsmaformule

Djurre Tijsma zit in de vierde klas van het Christelijk Gymnasium Beyers Naudé in Leeuwarden. Hij schreef ons over een door hem gevonden afleiding van een bijzondere somformule van een rekenkundige rij. Een rekenkundige rij bestaat uit de getallen a, $a + v$, $a + 2v$, $a + 3v$, …, waarin a de eerste term is en v het verschil tussen elk tweetal opvolgende termen.

Velen hebben al in de afgelopen eeuwen een formule voor S_n, de som van de eerste n termen, afgeleid. Als we de laatste term l noemen (dus $l = a + (n - 1)v$), dan krijgen we de beroemde 'formule van Gauss': $S_n = \frac{1}{2}n(a + l)$. Met $a = 2$, $v = 3$, $n = 6$ en $l = 17$ krijg je $S_6 = 2 + 5 + 8 + 11 + 14 + 17 = (2 + 17) + (5 + 14) + (8 + 11) = \frac{1}{2} \times 6 \times 19 = 57$.

Je ziet dat er vier grootheden een rol spelen: de eerste term a, de laatste term l, het aantal termen n en het verschil v. In de formule van Gauss gebruik je er maar drie van de vier. Je kunt S_n ook schrijven met alleen maar a, v en n in het rechterlid: $S_n = \frac{1}{2}n(2a + (n - 1)v)$.

Djurre heeft zelf een ongebruikelijke variant afgeleid door S_n uit te drukken in a, l en v. Zijn mooie resultaat, met kwadraten van a en l erin, is $S_n = \frac{1}{2v}(l^2 - a^2 + v(a + l))$. Er is natuurlijk nog een vierde mogelijkheid. Probeer die eens zelf te vinden.

De Damhuis-Leferinkrij

Rick Damhuis en Matthijs Leferink (5 havo) bekeken een rij getallen, die met een recurrente betrekking gegeven zijn:

$$m_k = \frac{m_{k-1}}{g} + g = \frac{m + g^2 + g^3 + \ldots + g^{k+1}}{g^k}$$

met $g > 1$ en $m_0 = m$ (m is een willekeurig getal). Voor de meetkundige rij $1, g, g^2, g^3, \ldots$ geldt dat de som van de eerste n termen gelijk is aan $(g^n - 1)/(g - 1)$. Daarmee krijgen we:

$$m_k = \frac{m(g-1) - g^2}{(g-1)g^k} + \frac{g^2}{g-1}.$$

Voor $g > 1$ zien we dat de eerste term voor $k \to \infty$ monotoon tot 0 nadert. De rij m_k nadert dan tot $g^2/(g - 1)$, onafhankelijk van m:

$$\lim_{k \to \infty} m_k = \frac{g^2}{g-1}.$$

Het kan ook zijn, bij een bijzonder verband tussen g en m, dat de eerste term gelijk is aan 0. In dat geval is $m_k = m$ voor elke k. Dan moeten m en g voldoen aan het verband $g^2 = m(g - 1)$.

Boter, kaas en eieren op de TI-84+

Naar aanleiding van het artikel 'Computerintelligentie – van *Boter, kaas en eieren* tot *Deep Blue*' van Jos Groot (*Pythagoras* 50-1, september 2010) schreef Simon Vandevelde van Edugo Campus de Toren te Oostakker (België) ons dat hij op zijn programmeerbare rekenmachine in TI-basic, geschikt voor de TI-84+, twee programma's van *Boter, kaas en eieren* heeft gemaakt. Deze programma's herkennen de strategie van de tegenspeler en doen vervolgens een tegenzet.

Bij het ene programma houdt de TI-84+ geen rekening met de zogenaamde 'vorkjes'. De rekenmachine kiest dan steeds het voordeligste vakje, maar het is nog vrij eenvoudig om van de rekenmachine te winnen. Bij het andere programma detecteert de rekenmachine de 'vorkjes', waardoor het onmogelijk wordt om te winnen.

Wie geïnteresseerd is in de scripts, kan Simon een e-mail sturen: astronautsimon@hotmail.com. Voor mensen die geen TI-84+ bezitten, heeft Simon een emulator beschikbaar om de programma's te testen.

Deze jaargang staat de prijsvraag van *Pythagoras* in het teken van het vijftigjarig jubileum. In de eerste vijf afleveringen verschijnt telkens een puzzel met het getal 50 als thema. In dit nummer vind je aflevering 4 en de oplossing van aflevering 2.

■ door Matthijs Coster

25 TELLERS, 25 NOEMERS

OPGAVE Met de getallen 1, 2, 3, 4, ..., 50 kun je 25 breuken maken, bijvoorbeeld $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \ldots, \frac{49}{50}$. De vraag is hoe je de 25 breuken moet kiezen zodat

1. de som zo groot mogelijk is;
2. de som zo klein mogelijk is;
3. de som geheel is;
4. de som zo groot mogelijk én geheel is;
5. de som zo klein mogelijk én geheel is.

INZENDEN Je hoeft absoluut niet op alle vijf de vragen een antwoord te hebben. Als je kunt programmeren, is het niet verboden daar gebruik van te maken. Stuur in dat geval wel je programma mee.

Stuur je oplossing(en) naar **prijsvraag@pythagoras.nu** of eventueel per analoge post naar **K.P. Hart, Faculteit EWI, TU Delft, Postbus 5031, 2600 GA Delft.** Noteer in de linkerbovenhoek van de envelop 'Pythagoras Jubileumprijsvraag'. Vermeld je naam, adres, telefoonnummer, leeftijd en, als je scholier bent, ook je school en je klas. Je kunt ook met je hele klas meedoen; vermeld in dat geval ook de naam van de wiskundedocent. Je inzending moet bij ons binnen zijn vóór **1 mei 2011.**

EXTRA PRIJZEN! We hebben goed nieuws, want behalve de reeds aangekondigde Irisbonnen van 20 euro, de geldprijzen van 100 en 50 euro en diverse boeken (*De Pythagoras Code* en *Pythagoras en de rechtvaardige rechters*) die je kunt winnen, geven we nog vier boekenbonnen ter waarde van € 25,- weg. Deze zijn beschikbaar gesteld door een lezer van *Pythagoras*, die graag anoniem blijft.

OPLOSSING AFLEVERING 2 De opgave van het novembernummer luidde als volgt. Kies vijf getallen die bij elkaar opgeteld 50 zijn. Je mag gebruik maken van de operaties +, –, × en : (en haakjes).

a. Probeer met de vijf gekozen getallen en vier operaties alle getallen van 1 tot en met 50 te maken.
b. Ga verder met de getallen 51, 52, 53, ... en probeer zo ver mogelijk te komen. Je stopt zodra je een getal niet kunt maken.

Onderdeel a bleek goed te doen. Vrijwel alle leerlingen die hierin slaagden stoomden door naar minimaal 100. De uitdaging zat dus vooral in onderdeel b. Het beste resultaat werd gevonden door Stijn Duijzer, Rob Grunefeld, Alexander Jaeger (met hulp van zijn vader), Ernst van de Kerkhof, Ruben Oost, Fred Schalekamp, Frank Tinkelenberg, Aad van de Wetering, de Drie Wisketiers (pseudoniem van drie wiskundestudenten) en de school KSO Glorieux uit Ronse (België): zij wisten met het vijftal 2, 4, 9, 12 en 23 alle getallen van 1 tot en met 318 te maken, zie pagina 11. De top-5 van hoogst behaalde getallen is: 318, 306 (met 2, 3, 12, 16, 17), 283 (met 2, 7, 12, 13, 16), 280 (met 2, 5, 6, 10, 27) en nog eens 280 (met 4, 5, 7, 10, 24).

Je ziet aan deze top-5 dat het getal 1 geen enkele keer onder de vijf gekozen getallen voorkomt. Toch kozen veel inzenders voor vijf getallen waaronder 1. Dat is begrijpelijk, omdat het de rekenpartij wat eenvoudiger maakt. Maar het hoogste resultaat dat je met de 1 erbij kunt bereiken, is 261, en wel met de getallen 1, 2, 4, 6 en 37. Als de 1 niet meedoet, kun je veel verder komen. Dat 318 haalbaar bleek, was voor de jury een grote verrassing.

De programmeurs waren in het voordeel ten opzichte van de ambachtelijke rekenaars. Zij maakten gebruik van een heel scala aan programmeertalen: C, Delphi, Fortran, Java, Prolog en R. Er viel heel wat te programmeren. Allereerst moet je vijf getallen met som 50 kiezen. Hiervoor zijn 2611 mogelijkheden. Vervolgens moet je met deze getallen en

de vier operaties +, –, × en : aan de slag. Je kunt de vijf getallen meestal op 5! = 120 mogelijke manieren plaatsen. Daartussen kunnen vier operaties geplaatst worden op 256 manieren. Ten slotte moet je nog haakjes plaatsen, want (1 + 2 + 3) × (4 + 40) is echt iets anders dan 1 + 2 + 3 × 4 + 40. Haakjes plaatsen kan op 14 manieren. Het totaal aantal berekeningen loopt dus snel op! Sommige programmeurs kwamen niet verder dan 271 doordat zij oplossingen waarin breuken voorkwamen ten onrechte verwierpen. Zij kwamen bij het vijftal 4, 10, 11, 12 en 13 niet verder dan 122. Maar 123 is ook te maken: 123 = 12 × (11 – (13 – 10)/4). We geven deze keer twee Irisbonnen weg: de bon voor het ambachtelijke rekenwerk gaat naar Tessa Vermeer (11 jaar) uit klas 1c van het Strabrechtcollege in Geldrop, die voor het programmeren gaat naar Stijn Duijzer, student wiskunde aan de Universiteit Twente. ■

1 = 2 + 12 + 23 – 4 × 9
2 = 9 × 4 + 12 – 2 × 23
3 = 9 × 4 – 12 + 2 – 23
4 = 4 + 23 – 9 – 2 – 12
5 = 4 – 12/(9 + 2 – 23)
6 = 9 – 4 + 12 × 2 – 23
7 = 4 × 12 – 23 – 2 × 9
8 = 4 + 23 – 9 + 2 – 12
9 = 23 – 12/4 – 2 – 9
10 = 9 + 4 × 12/2 – 23
11 = 4 × 12 – 23 × 2 + 9
12 = 4 + 23 + 9 – 2 × 12
13 = 23 – 4 – 9 × 2 + 12
14 = 4 × 12 – 23 – 2 – 9
15 = 12/4 + 23 – 2 – 9
16 = 23 – 4 + 12/2 – 9
17 = 23 – 4 × 9 × 2/12
18 = 4 × 12 – 23 + 2 – 9
19 = 9 × 4 + 12/2 – 23
20 = 23 – 4 – 9 – 2 + 12
21 = 4 + 23 – 9 × 2 + 12
22 = 4 + 23 + 9 – 2 – 12
23 = 9 × 4 + 12 – 2 – 23
24 = 4/12 × 9 – 2 + 23
25 = 23 – 4 + 9 × 2 – 12
26 = 4 + 23 + 9 + 2 – 12
27 = 9 × 4 + 12 + 2 – 23
28 = 4/12 × 9 + 2 + 23
29 = 4/12 × 9 × 2 + 23
30 = 4 + 23 – 12/2 + 9
31 = 9/4 × 12 × 2 – 23
32 = 4 + 23 – 9 + 2 + 12
33 = 4 + 23 + 9 × 2 – 12
34 = 9 – 4 + 12/2 + 23
35 = 9 × 4 – 12 × 2 + 23
36 = 4 × 12 – 23 + 2 + 9
37 = 9 × 4 + 12 × 2 – 23
38 = 4 × 23 – 9/2 × 12
39 = 9 – 4 + 23 × 2 – 12
40 = 12/4 + 23 × 2 – 9
41 = (4 × 12 – 23) × 2 – 9
42 = 4 + 23 – 9 + 2 × 12
43 = 4 × 12 – 23 + 2 × 9
44 = 12/4 + 9 × 2 + 23
45 = 9 × 4 – 12 – 2 + 23
46 = 4 + 23 + 9 – 2 + 12
47 = 9 + 4 – 12 + 2 × 23
48 = 9/4 × 12 – 2 + 23
49 = 4/12 × 9 + 2 × 23
50 = 4 + 23 + 9 + 2 + 12
51 = 12/4 × 23 – 2 × 9
52 = 9 – 4 + 12 × 2 + 23
53 = 4 + 12 + 23 × 2 – 9
54 = 9/(4 – 23 × 2/12)
55 = (4 × 12 – 9) × 2 – 23
56 = 9 + 4 × 12/2 + 23
57 = 4 + 23 + 9 × 2 + 12
58 = 12/4 + 9 + 2 × 23
59 = 4 × 23 – 9 – 2 × 12
60 = 4 + 23 + 9 + 2 × 12
61 = 12 + 4 × 9 × 2 – 23
62 = 4 × 23 – 9 × 2 – 12
63 = 9 – 4 + 12 + 2 × 23
64 = 4 × 12 + 23 + 2 – 9
65 = 9 × 4 + 12/2 + 23
66 = 9 × 12 + 4 – 2 × 23
67 = 9 + 4 × 23/2 + 12
68 = 4 × (23 – 9 × 2 + 12)
69 = 4 × 23 – 9 – 2 – 12
70 = 9 × 4 – 12 + 2 × 23
71 = 4 + 12 + 23 × 2 + 9
72 = 4 × (23 + 9 – 2 – 12)
73 = 4 × 23 – 9 + 2 – 12
74 = 12 × (9/4 + 2) + 23
75 = 4/12 × 9 × (2 + 23)
76 = 12/4 × 23 – 2 + 9
77 = 4 × 23 + 9 – 2 × 12
78 = 4 × 12 + 23 – 2 + 9
79 = 9 × 12 – 4 – 2 – 23
80 = 12/4 × 23 + 2 + 9
81 = 4 + 23 + 9/2 × 12
82 = 4 × 12 + 23 + 2 + 9
83 = 9 × 4 + 12 × 2 + 23
84 = (4 + 23 + 9) × 2 + 12
85 = 4 × 12 + 23 × 2 – 9
86 = 4 × 23 – 9 × 2 + 12
87 = 4 × 23 + 9 – 2 – 12
88 = 4 × (23 + 9 + 2 – 12)
89 = 4 × 12 + 23 + 2 × 9
90 = 12/4 × (9 – 2 + 23)
91 = 4 × 23 + 9 + 2 – 12
92 = 4 × (12 – 9 – 2) × 23
93 = 4 × 23 – 9 – 2 + 12
94 = 9 × 4 + 12 + 2 × 23
95 = 4 × 23 – 12/2 + 9
96 = 4 × (12 – 9 – 2 + 23)
97 = 4 × 23 – 9 + 2 + 12
98 = 4 × 23 + 9 × 2 – 12
99 = 4 × (12 + 9 – 2) + 23
100 = 4 × (23 – 9) × 2 – 12
101 = (4 × 12 – 9) × 2 + 23
102 = 12/2 × 23 – 4 × 9
103 = 4 × 12 + 23 × 2 + 9
104 = 4 × (23 + 9) – 2 × 12
105 = 4 × (12 + 9) – 2 + 23
106 = (9 – 4) × 12 + 2 × 23
107 = 4 × 23 – 9 + 2 × 12
108 = 4 × (23 + 9 – 2) – 12
109 = 4 × (12 + 9) + 2 + 23
110 = 23 + 4 × 12 × 2 – 9
111 = 4 × 23 + 9 – 2 + 12
112 = 4 × (12 – 9 + 2 + 23)
113 = 4 + 12 × (9 + 2) – 23
114 = 4 × (23 + 9) – 2 – 12
115 = 4 × 23 + 9 + 2 + 12
116 = 4 × (23 + 9 × 2 – 12)
117 = 4 + 23 – 9 × (2 – 12)
118 = 4 × (23 + 9) + 2 – 12
119 = 4 + (12 – 9 + 2) × 23
120 = 4 × 12 × (23/2 – 9)
121 = 4 – (12 – 23 – 2) × 9
122 = 4 × 23 + 9 × 2 + 12
123 = 9 × 12 – 4 × 2 + 23
124 = 2 × 9 × 12 – 4 × 23
125 = 4 × 23 + 9 + 2 × 12
126 = (23 – 4 – 12) × 2 × 9
127 = (12 × 23 – 4)/2 – 9
128 = 9 + 4 × 12 × 2 + 23
129 = 12/4 × 23 × 2 – 9
130 = 4 × (12 + 9) + 2 × 23
131 = (4 + 12 × 23)/2 – 9
132 = 4 × (23 + 9 – 2) + 12
133 = 4 + 12 × 23/2 – 9
134 = (12 – 9) × 23 × 2 – 4
135 = (9 + 4) × 12 + 2 – 23
136 = (2 × 23 – 9) × 4 – 12
137 = 9 × 12 + 4 + 2 + 23
138 = 4/12 × 9 × 2 × 23
139 = 9 × 12 + 4 × 2 + 23
140 = 12 × (23 – 9 – 2) – 4
141 = 4 × (12 + 23 – 2) + 9
142 = 4 – (12 – 9 × 2) × 23
143 = 9 – 4 + 12/2 × 23
144 = (23 – 4 – 9 + 2) × 12
145 = 4 × (12 + 9) × 2 – 23
146 = 4 × 23 + 9/2 × 12
147 = 12/4 × 23 × 2 + 9
148 = 4 – 12 × (9 + 2 – 23)
149 = (4 + 12 × 23)/2 + 9
150 = 9 × 12 – 4 + 2 × 23
151 = 4 + 12 × 23/2 + 9
152 = 4 × (23 – 9 + 2 × 12)
153 = 4 + 23 + 9 × (2 + 12)
154 = 9 × 12 + 4/2 × 23
155 = 12 × (4 + 9 – 2) + 23
156 = (4 × 9 + 12 × 23)/2
157 = 9 × 23 – 4 × 12 – 2
158 = 9 × 12 + 4 + 2 × 23
159 = 4 + 12 × (9 + 2) + 23
160 = 12 – 4 × (9 – 2 × 23)
161 = 2 + 9 × 23 – 4 × 12
162 = (23 – 12/4 – 2) × 9
163 = 2 × 4 × 23 – 9 – 12
164 = 12/4 + (9 – 2) × 23
165 = (4 + 12) × 9 – 2 + 23
166 = (12 – 4) × 23 – 2 × 9
167 = (12 – 4) × 9 × 2 + 23
168 = 4 × (12 + 9 – 2 + 23)
169 = (4 + 12) × 9 + 2 + 23
170 = (9 × 12 – 23)/2 × 4
171 = (4 + 23) × 12/2 + 9
172 = (2 × 23 + 9 – 12) × 4
173 = 12 – (4 – 9 – 2) × 23
174 = 9 × 4 + 12/2 × 23
175 = (4 + 12) × 23/2 – 9
176 = 4 × 23 + (9 – 2) × 12
177 = 4 + 12 + (9 – 2) × 23
178 = (4 × 23 – 9) × 2 + 12
179 = 9 × 23 – 4 – 2 × 12
180 = (9 × 4 – 23 + 2) × 12
181 = 9 + 4 × 23 × 2 – 12
182 = 4 × 23 – 9 × (2 – 12)
183 = 9 × 23 – 4/2 × 12
184 = 4 × (12 + 9 + 2 + 23)
185 = 9 × (4 + 12 + 2) + 23
186 = (23 – 4/12 – 2) × 9
187 = 4 + 23 × 9 – 2 × 12
188 = (9 + 23) × 12/2 – 4
189 = 9 × 23 – 4 – 2 – 12
190 = (4 + 12) × 9 + 2 × 23
191 = 4 × (12 + 9) × 2 + 23
192 = (4 + 23 – 9 – 2) × 12
193 = 4 × 12 × 9/2 – 23
194 = 9 × (23 – 12) × 2 – 4
195 = 9 + (4 + 23/2) × 12
196 = 4 – 12 × (9 – 2 – 23)
197 = 4 + 23 × 9 – 2 – 12
198 = 4 × 23 + 9 × 12 – 2
199 = (4 × 23 + 12) × 2 – 9
200 = 4 + (23 – 9) × (2 + 12)
201 = 4 + 23 × 9 + 2 – 12
202 = 2 + 4 × 23 + 9 × 12
203 = 9 × 23 + 4 × 2 – 12
204 = 12 × 23 – 4 × 2 × 9
205 = 9 + 4 × 23 × 2 + 12
206 = 2 + 9 × 23 – 12/4
207 = (4 + 12 – 9 + 2) × 23
208 = 12/4 + 9 × 23 – 2
209 = 9 × 23 + 12/2 – 4
210 = (23 – 4) × 12 – 2 × 9
211 = 9 × 23 – 4 × 2 + 12
212 = 2 + 12/4 + 9 × 23
213 = 9 × 23 – 4 – 2 + 12
214 = (4 × 23 + 9) × 2 + 12
215 = 9 × 23 + (4 + 12)/2
216 = (4 + 23 + 9)/2 × 12
217 = 9 × 23 – 4 + 2 + 12
218 = 4 × 23 + 9 × (2 + 12)
219 = (4 + 23) × 9 – 2 × 12
220 = (12 – 4) × (9/2 + 23)
221 = 4 + 23 × 9 – 2 + 12
222 = (23 – 4/12 + 2) × 9
223 = 4 × (12 + 23 × 2) – 9
224 = 4 × 23 + (9 + 2) × 12
225 = 4 + 23 × 9 + 2 + 12
226 = 4 – 12 × (9/2 – 23)
227 = 9 × 23 + 4 × 2 + 12
228 = (4/12 + 23 + 2) × 9
229 = (4 + 23) × 9 – 2 – 12
230 = (12/4 + 9 – 2) × 23
231 = 9 × 23 + 4/2 × 12
232 = 12 + 4 × (9 + 2 × 23)
233 = (4 + 23) × 9 + 2 – 12
234 = (4 – (12 – 23) × 2) × 9
235 = 4 + 23 × 9 + 2 × 12
236 = 2 + (12/4 + 23) × 9
237 = 4 × 12 – 9 × (2 – 23)
238 = 12 × 23 – 4 × 9 – 2
239 = 4 × 12 × 9/2 + 23
240 = 4 × (23 – 9 × 2) × 12
241 = 4 + 12 + 9 × (2 + 23)
242 = 2 + 12 × 23 – 4 × 9
243 = 4 + 23 + 9 × 2 × 12
244 = 4 × (23 + 9) × 2 – 12
245 = 4 + 23 × (9 + 2) – 12
246 = (23 – 4) × 12 + 2 × 9
247 = (4 + 12 × 9) × 2 + 23
248 = 4 × (12 × 9 – 2 × 23)
249 = 9 × (4 + 23 + 2) – 12
250 = 4 + 12 × (23/2 + 9)
251 = 2 – (9/4 – 23) × 12
252 = (12/4 + 23 + 2) × 9
253 = 4 × 12 + 9 × 23 – 2
254 = 12 × 23 – 4 – 2 × 9
255 = 12 × (23 – (9 – 2)/4)
256 = 12/4 + (9 + 2) × 23
257 = 2 + 4 × 12 + 9 × 23
258 = 12 × 23 – 4/2 × 9
259 = 12 × 23 – 4 × 2 – 9
260 = (23 + (9 + 12) × 2) × 4
261 = 12 × 23 – 4 – 2 – 9
262 = 4 + 12 × 23 – 2 × 9
263 = 9 × 23 + 4 × (2 + 12)
264 = (23 – 9 + 4 × 2) × 12
265 = 12 × 23 – 4 + 2 – 9
266 = 9 × 4 + (12 – 2) × 23
267 = (4 + 23) × 9 + 2 × 12
268 = 4 × (12 + 9 + 2 × 23)
269 = 4 + 12 × 23 – 2 – 9
270 = (4 + 23 – 9/2) × 12
271 = 4 × (12 + 23) × 2 – 9
272 = (12 – 4) × (9 + 2 + 23)
273 = 4 + 12 × 23 + 2 – 9
274 = 4 × (12 – 9) × 23 – 2
275 = 12 × 23 + 4 × 2 – 9
276 = (9 × 4 – 12 × 2) × 23
277 = 12 × 23 – 4 × 2 + 9
278 = 2 – 4 × (9 – 12) × 23
279 = 12 × 23 – 4 – 2 + 9
280 = (4 – 23 – 9) × (2 – 12)
281 = 2 – (4 – 12 – 23) × 9
282 = (23 – 4 + 9/2) × 12
283 = 12 × 23 – 4 + 2 + 9
284 = 12 × (23 + (4 + 2)/9)
285 = (9 + 4) × 23 – 2 – 12
286 = 2 × (9 – 4) + 12 × 23
287 = 4 + 12 × 23 – 2 + 9
288 = 9 × 4 – 12 × (2 – 23)
289 = 4 × (12 + 23) × 2 + 9
290 = 12 × 23 – 4 + 2 × 9
291 = 4 + 12 × 23 + 2 + 9
292 = 9 × 12 + 4 × 2 × 23
293 = 12 × 23 + 4 × 2 + 9
294 = 12 × 23 + 4/2 × 9
295 = 4 + 12 × (23 + 2) – 9
296 = (4 – 12) × (9 – 2 × 23)
297 = (4 + 23 + 12/2) × 9
298 = 4 + 12 × 23 + 2 × 9
299 = (9 + 12 – 4 × 2) × 23
300 = 4 × (12 – 9) × (2 + 23)
301 = 4 × 12 + (9 + 2) × 23
302 = 2 × (4 + 9) + 12 × 23
303 = 9 × 23 + 4 × 2 × 12
304 = 12 × 23 – 4 × (2 – 9)
305 = 9 – 4 + 12 × (2 + 23)
306 = (4 + 23) × 12 – 2 × 9
307 = 9 × (12 + 23) – 2 × 4
308 = 4 × 23 + 9 × 2 × 12
309 = 9 + (4 + 23 – 2) × 12
310 = 4 × 9 + 12 × 23 – 2
311 = (4 + 12) × 9 × 2 + 23
312 = (9 – 4 + 23 – 2) × 12
313 = 4 × 12 × (9 – 2) – 23
314 = 2 + 4 × 9 + 12 × 23
315 = (9 + 12) × (23 – 2 × 4)
316 = (9 + (12 + 23) × 2) × 4
317 = 4 + 23 × (12 + 2) – 9
318 = 2 × (9 × 23 – 4 × 12)

Dit artikel verklapt het geheim van de panmagische vierkanten. We presenteren een heel simpele methode om een panmagisch vierkant te maken, die werkt voor elk vierkant met een oneven grootte die geen veelvoud van drie is.

■ door Arie Breedijk

EFFECTIEF PANMAGISCHE VIERKANTEN MAKEN

In een $n \times n$ magisch vierkant staan n^2 getallen zodanig in de hokjes, dat de som van de getallen in elke kolom, elke rij en de twee hoofddiagonalen hetzelfde is. Dit heet de *magische som*. Het vierkant heet *zuiver magisch* als de getallen 1 tot en met n^2 gebruikt worden.

Er zijn allerlei varianten die aan nog meer eisen moeten voldoen. In een *panmagisch vierkant* is ook de som van de getallen in alle *gebroken diagonalen* of *pandiagonalen* gelijk aan de magische som. Pandiagonalen lopen evenwijdig aan de twee hoofddiagonalen, maar bestaan uit twee delen omdat ze tegen de randen aan lopen. Een voorbeeld van een panmagisch 5×5 vierkant zie je in figuur 1.

De magische som van een zuiver $n \times n$ magisch vierkant is altijd gelijk aan $n(1 + n^2)/2$. Voor oneven waarden van n komt dit neer op n keer het middelste getal van de reeks 1, 2, ..., n^2. Voor $n = 5$ is de magische som dus $5 \times 13 = 65$. In totaal zijn er maar liefst 2.202.441.792 verschillende manieren om een zuiver 5×5 magisch vierkant in te vullen. Hiervan zijn er 28.800 panmagisch, zie bijvoorbeeld de website www.gaspalou.fr/magic-squares/order-5.htm.

1	7	13	19	25
14	20	21	2	8
22	3	9	15	16
10	11	17	23	4
18	24	5	6	12

1	7	13	19	25
14	20	21	2	8
22	3	9	15	16
10	11	17	23	4
18	24	5	6	12

Figuur 1 Een panmagisch 5 × 5 vierkant. Met kleuren zijn de (gebroken) diagonalen aangegeven.

1	7	13	19	25	1	7	13	19	25
14	20	21	2	8	14	20	21	2	8
22	3	9	15	16	22	3	9	15	16
10	11	17	23	4	10	11	17	23	4
18	24	5	6	12	18	24	5	6	12
1	7	13	19	25	1	7	13	19	25
14	20	21	2	8	14	20	21	2	8
22	3	9	15	16	22	3	9	15	16
10	11	17	23	4	10	11	17	23	4
18	24	5	6	12	18	24	5	6	12

1	7	13	19	25	1	7	13	19	25
14	20	21	2	8	14	20	21	2	8
22	3	9	15	16	22	3	9	15	16
10	11	17	23	4	10	11	17	23	4
18	24	5	6	12	18	24	5	6	12
1	7	13	19	25	1	7	13	19	25
14	20	21	2	8	14	20	21	2	8
22	3	9	15	16	22	3	9	15	16
10	11	17	23	4	10	11	17	23	4
18	24	5	6	12	18	24	5	6	12

Figuur 2 Een 'tapijt' van vier identieke panmagische 5 × 5 vierkanten. Elk willekeurig op het tapijt gekozen 5 × 5 vierkant is opnieuw een panmagisch vierkant.

In panmagische 5 × 5 vierkanten is ook de som van de vijf getallen in elke pandiagonaal gelijk aan 65. In figuur 1 zijn de hoofddiagonalen geel en de pandiagonalen rood, blauw, grijs en groen. Het bijzondere van het panmagische vierkant is, dat je een 'tapijt' kan maken van twee dezelfde vierkanten naast elkaar en daaronder weer twee dezelfde vierkanten, zie figuur 2. Elk willekeurig op het tapijt gekozen 5 × 5 vierkant is panmagisch (met witte getallen is een voorbeeld aangegeven), dankzij de doorlopende (pan)diagonalen!

MAAR HOE MAAK JE ZE? Je kunt natuurlijk proberen een panmagisch vierkant te vinden door lukraak getallen in de hokjes in te vullen en dan te gaan puzzelen, maar het kan veel efficiënter. Kijk eerst eens naar het schema in figuur 3. In het linker vierkant zijn alleen de rijcoördinaten ingevuld, in het middelste vierkant alleen de kolomcoördinaten. Door bij de rijcoördinaat 5 keer de kolomcoördinaat op te tellen, nummer je de vakjes van 0 tot en met 24 (rechter vierkant). We gebruiken nu dus de getallen 0 tot en met 24 (in plaats van 1 tot en met 25), zodat de magische som 5 × 12 = 60 is.

Uiteraard hebben we nu nog geen panmagisch vierkant gemaakt. Daarvoor moeten in elke rij, elke kolom en elke (pan)diagonaal de rijcoördinaten 0, 1, 2, 3 en 4 en de kolomcoördinaten 0, 1, 2, 3 en 4 precies één keer voorkomen, zodat de getallen altijd optellen tot de magische som. Je moet er ook voor zorgen dat *alle* rij-/kolomcombinaties in het vierkant voorkomen, omdat *alle* getallen van 0 tot en met 24 precies één keer moeten voorkomen.

DE METHODE Vul de eerste rij van het eerste vierkant (bijvoorbeeld 01234) in. Er zijn in totaal 24 getallencombinaties die tot unieke oplossingen leiden (01234, 01243, 01324, 01342, 01423, 01432,

0	1	2	3	4
0	1	2	3	4
0	1	2	3	4
0	1	2	3	4
0	1	2	3	4

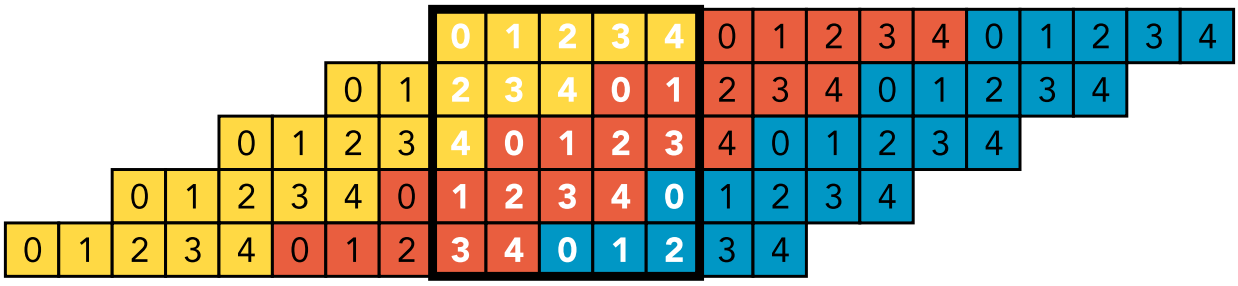
+ 5x

0	0	0	0	0
1	1	1	1	1
2	2	2	2	2
3	3	3	3	3
4	4	4	4	4

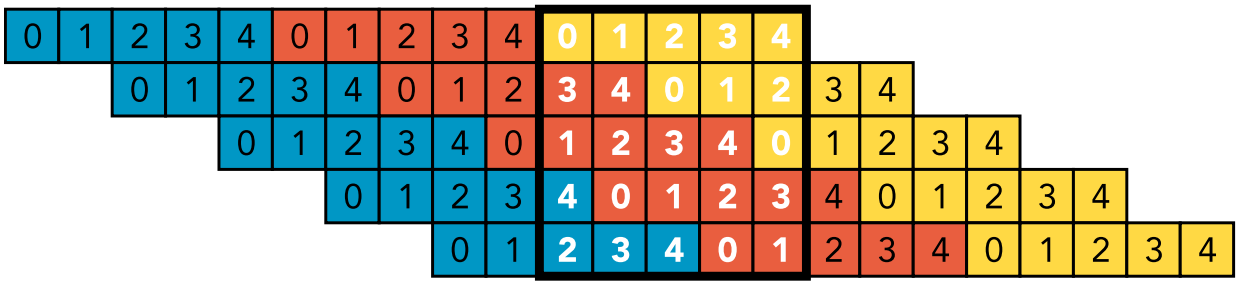
=

0	1	2	3	4
5	6	7	8	9
10	11	12	13	14
15	16	17	18	19
20	21	22	23	24

Figuur 3 Door bij de rijcoördinaten (links) 5 keer de kolomcoördinaten (midden) op te tellen, krijg je de getallen 0 tot en met 24 (rechts)



Figuur 4 De witte getallen vormen het eerste vierkant



Figuur 5 De witte getallen vormen het tweede vierkant

02134, 02143, 02314, 02341, 02413, 02431, 03124, 03142, 03214, 03241, 03412, 03421, 04123, 04132, 04213, 04232, 04312, 04321). Vul nu rij twee tot en met vijf in, door elke volgende rij steeds twee plaatsen naar links op te schuiven, zie figuur 4.

In het tweede vierkant is de eerste rij van het eerste vierkant overgenomen en wordt in de volgende rijen elke rij steeds twee plaatsen naar rechts opgeschoven, zie figuur 5.

Neem nu 5 keer het getal uit een vakje van het eerste vierkant en tel daar het getal uit hetzelfde vakje van het tweede vierkant bij op. Tel ten slotte bij elk getal 1 op. Het resultaat is een panmagisch vierkant, zie figuur 6.

Deze methode werkt voor alle oneven vierkanten die geen veelvoud van 3 zijn (dus 5 × 5, 7 × 7, 11 × 11, 13 × 13, 17 × 17, …). Voor bijvoorbeeld een 7 × 7 vierkant neem je als eerste rij de getallen 0, 1, 2, 3, 4, 5 en 6, en vermenigvuldig je een getal uit het eerste vierkant met 7.

EN VERDER… Je kunt niet alleen het magische 5 × 5 vierkant, maar een magisch vierkant van *elke willekeurige grootte* analyseren door het vierkant te splitsen in twee van deze Sudoku-achtige vierkanten: een vierkant met de rijcoördinaten en een vierkant met de kolomcoördinaten. Vanuit deze analyse is het mogelijk om nieuwe oplossingsmogelijkheden te vinden. Voorbeelden zijn te vinden op mijn website: www.magischvierkant.nl. ■

5x

0	1	2	3	4
2	3	4	0	1
4	0	1	2	3
1	2	3	4	0
3	4	0	1	2

+

0	1	2	3	4
3	4	0	1	2
1	2	3	4	0
4	0	1	2	3
2	3	4	0	1

+ 1 =

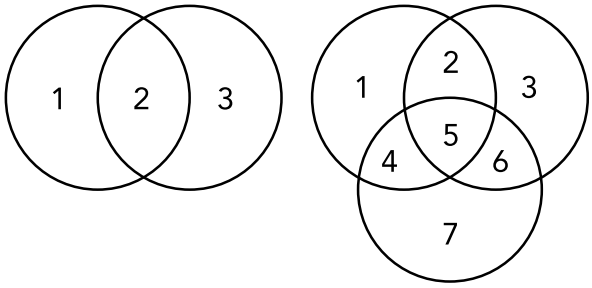
1	7	13	19	25
14	20	21	2	8
22	3	9	15	16
10	11	17	23	4
18	24	5	6	12

Figuur 6 De constructie voor een panmagisch 5 × 5 vierkant

In twee overlappende cirkels liggen drie begrensde gebieden, en in drie overlappende cirkels maximaal zeven, dat zie je meteen. Maar hoe gaat dit verder voor vier, vijf en nog meer cirkels?

■ door Arnout Jaspers

OVERLAPPENDE CIRKELS



Figuur 1 In twee cirkels die elkaar overlappen liggen drie begrensde gebieden. Drie overlappende cirkels leveren maximaal zeven begrensde gebieden.

De vraag naar de overlappende cirkels wierp ik op in de januari-prijsvraag van *NWT-magazine*, en er kwamen bijzonder fraaie inzendingen binnen. In zijn algemeenheid – als je de grootte en de plaats van de cirkels vrij mag kiezen – is dit probleem eerder bestudeerd en ook opgelost. Het maximaal aantal begrensde gebieden voor 1, 2, 3, ... overlappende cirkels vormt uiteraard een rij gehele getallen, en die komt voor in *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences* (OEIS), een website met vele duizenden getallenrijen uit een scala aan wiskundige vraagstukken.

De reeks voor de overlappende cirkels staat onder oeis.org/A014206 (met dank aan Lieven Marchand voor de tip, want via Google vond ik deze niet).

SNIJPUNTEN Het aantal begrensde gebieden wordt bepaald door het aantal snijpunten, en dat is veel makkelijker te bepalen. Aan de voorbeelden met twee en drie cirkels zie je dat er twee begrensde gebieden bijkomen, telkens als twee cirkels elkaar op twee verschillende punten snijden. Dit geldt trouwens voor elke gesloten kromme, ook vierkanten of onregelmatige vormen.

Stel je nu een figuur van n cirkels voor, die zodanig over elkaar heen liggen dat het maximale aantal begrensde gebieden Max(n) is gerealiseerd. Als je nu de (n + 1)-de cirkel er zó overheen kunt leggen dat hij alle n cirkels in 2 punten snijdt, dan komen er weer 2n gebieden bij. Dus

$$\text{Max}(n+1) = \text{Max}(n) + 2n. \qquad (1)$$

We weten al dat Max(1) = 1, Max(2) = 3, Max(3) = 7, dus we kunnen nu met (1) verder bouwen: Max(4) = 13, Max(5) = 21, enzovoort. Formule (1) kun je omzetten in een expliciete formule voor Max(n):

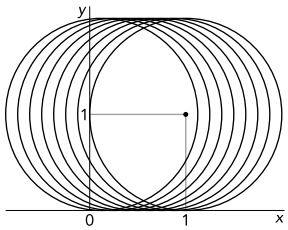
$$\text{Max}(n) = n^2 - n + 1. \qquad (2)$$

Je kunt simpel controleren dat dit overeenkomt met (1) door Max(n + 1) uit te schrijven volgens (2). Andersom is wat lastiger; hoe dat gaat, mag je zelf uitzoeken.

Belangrijker is de vraag: is het wel altijd mogelijk, om nóg een cirkel te leggen over een stel maximaal overlappende cirkels, zodanig dat deze 2 snijpunten met elke cirkel heeft? Figuur 2, ontleend aan de inzending van Johan Elzer, geeft het antwoord: ja, dat kan altijd. Bekijk n even grote cirkels met hun middelpunten op één lijn. Stel hun straal gelijk aan 1. De middelpunten leggen we dan neer op de punten (1/n, 1), (2/n, 1),(3/n, 1), ..., (((n – 1)/n, 1), (1, 1). In figuur 2 is dit uitgevoerd voor n = 8. Je ziet meteen in dat elke cirkel 2 snijpunten heeft met alle anderen, en dat dit goed gaat voor elke n.

GEHEELTALLIG De opgave in *NWT-magazine* zou dus geen opgave zijn zonder extra randvoorwaarden. Die waren: de stralen van de n cirkels moeten 1, 2, 3, ..., n zijn, en hun middelpunten moeten geheeltallige coördinaten hebben. Vertaald naar ruitjespapier: alle middelpunten moeten op het snijpunt van twee lijntjes liggen, en alle stralen moeten een geheel aantal eenheden groot zijn. Is het dan nog steeds mogelijk, om met elke nieuwe cirkel twee snijpunten met alle vorige cirkels te maken?

Voor je omslaat, wil je dit misschien zelf proberen voor 5 cirkels. Er is een fraaie, symmetrische oplossing die zich makkelijk laat uitbreiden naar veel meer cirkels, mits we de beperking voor de stralen iets versoepelen. In plaats van 1, 2, 3, ... te eisen, mag je een hoger begingetal r kiezen en dan doortellen: r, r + 1, r + 2, ...



Figuur 2 Acht cirkels met middelpunten (1/8, 1), (2/8, 1), ..., (7/8, 1), (1, 1).

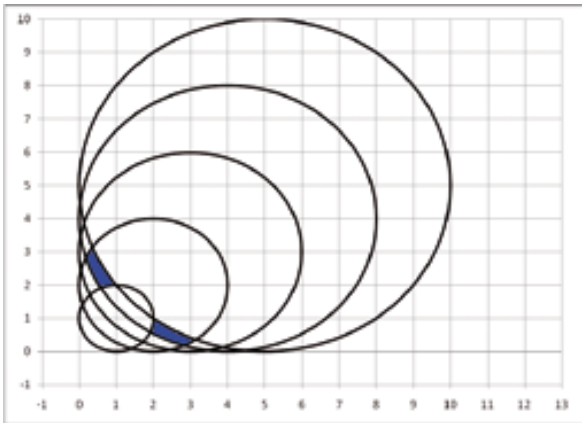
In figuur 3 zie je de symmetrische oplossing voor 5 cirkels met de maximale 21 gebieden. Als je hier nog een zesde cirkel met middelpunt (6, 6) bij zou zetten, heeft die geen snijpunten meer met de kleinste. Als je mag beginnen met een grotere cirkel, kun je wel meer dan vijf cirkels kwijt.

Kun je uitrekenen hoeveel dat er zijn als je cirkels met straal r, $r + 1$, $r + 2$, ... gebruikt? Bekijk daarvoor het grensgeval van een grote cirkel met middelpunt (R, R) en een kleine met middelpunt (r, r) die precies aan de grote cirkel raakt. (De oplossing staat in het kader op pagina 17.)

Inzender Pieter-Jan Vandenborn merkte op, dat in een symmetrische oplossing sommige gebiedjes niet uniek zijn, in de zin van: een doorsnede van een unieke deelverzameling cirkels. In figuur 3 zijn bijvoorbeeld de twee blauwe gebiedjes allebei een doorsnede van cirkels 2, 3 en 4. Hij zocht, en vond, oplossingen voor 5, 6 en 7 cirkels met respectievelijk de maximale 21, 31 en 43 gebiedjes die wel allemaal een unieke doorsnede zijn, zie figuur 4, 5 en 6.

COMPUTERPROGRAMMA Over het algemeen geldt: zodra je een dergelijk meetkundig probleem beperkt tot een rooster met geheeltallige coördinaten, wordt het veel moeilijker om door redeneren en het handig manipuleren van formules een oplossing te vinden. Daarentegen wordt het probleem geschikter voor een computer, aangezien die stuk voor stuk de (talrijke, maar eindig veel) mogelijkheden voor n cirkels kan uitproberen.

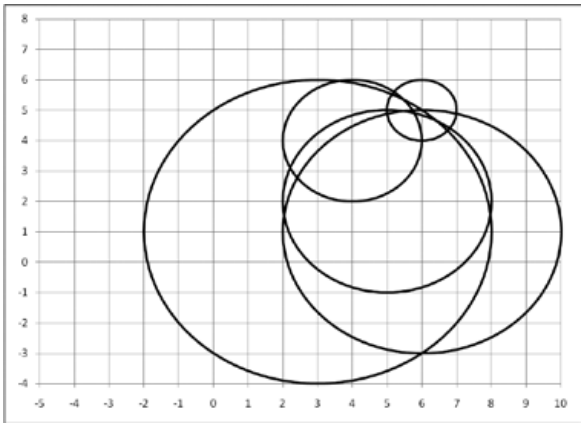
Inzender Henk van der Zee schreef daarom een computerprogramma dat zocht naar op ruitjespapier optimaal overlappende cirkels met straal 1, 2, 3, ..., n. Ook het programma vond de symmetrische oplossing voor $n = 5$, maar dat was slechts het begin: het programma stoomde door naar oplossingen voor $n = 20$ (figuur 7), $n = 250$ (figuur 8), $n = 300$ en liep pas bij $n = 800$ tegen de grenzen van de rekennauwkeurigheid van computer en tekenprogramma aan.



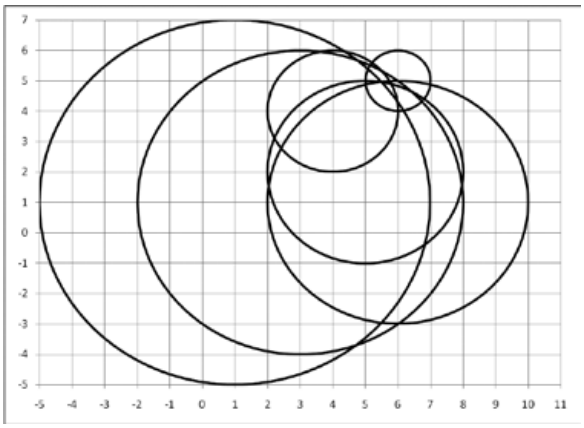
Figuur 3 Vijf cirkels met het maximale aantal van 21 gebieden.

In al deze gevallen blijken de ruitjespapierbeperkingen geen belemmering om net zo veel begrensde gebiedjes te creëren als in het algemene geval. Voor $n = 800$ zijn dat er dus 639.201! Van der Zee vermoedt dat n in feite onbegrensd is.

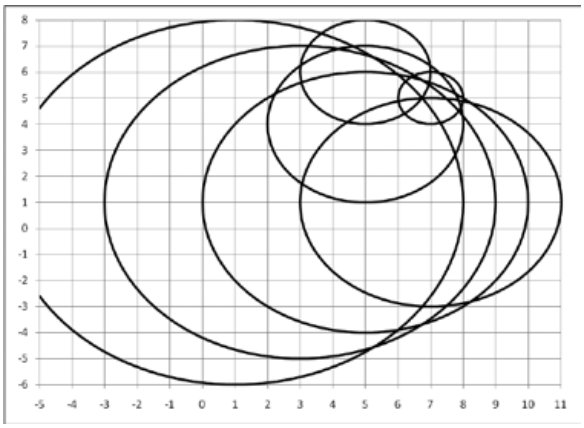
Voor zulke aantallen cirkels en snijpunten is er geen beginnen aan om dat nog met de hand na te rekenen, dus we vertrouwen er maar op dat het programma alles correct uitrekent. ■



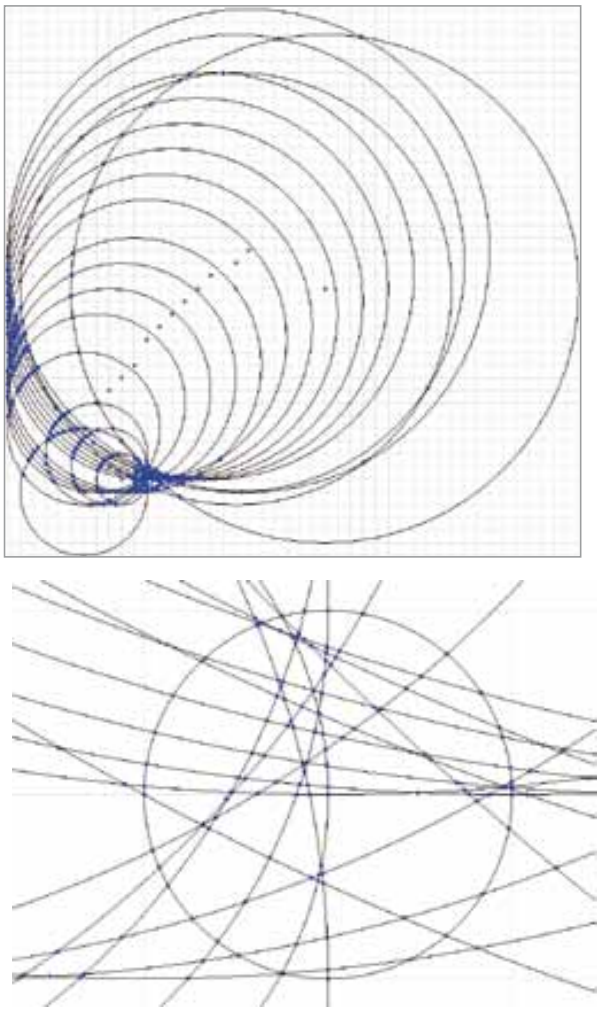
Figuur 4 Vijf cirkels met het maximale aantal van 21 gebieden.



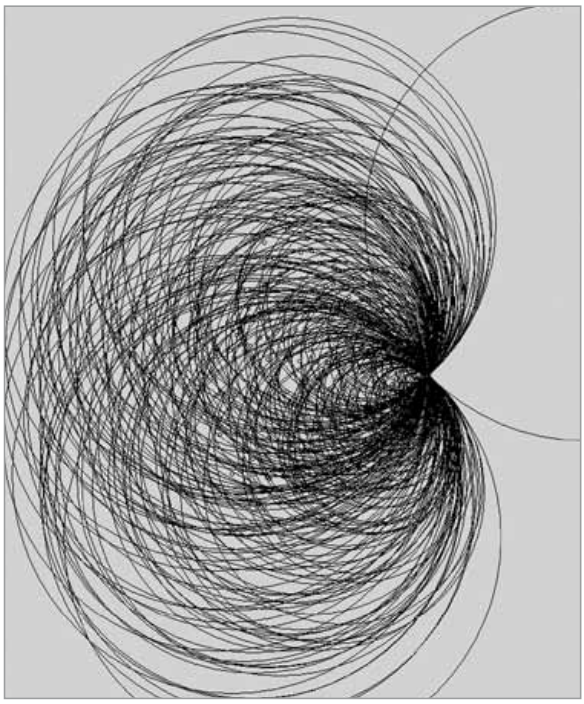
Figuur 5 Zes cirkels met het maximale aantal van 31 gebieden.



Figuur 6 Zeven cirkels met het maximale aantal van 43 gebieden.

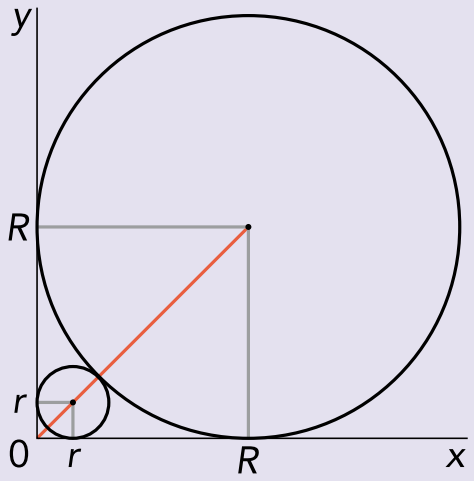


Figuur 7 Boven: de oplossing voor 20 optimaal overlappende cirkels met straal 1 t/m 20 en 381 begrensde gebiedjes. Onder is ingezoomd op de cirkel met straal 1, waar alle andere doorheen gaan.



Figuur 8 De oplossing voor $n = 250$ met 62.251 gebiedjes. Het plaatje is hier te klein afgedrukt om alle gebiedjes ook echt te kunnen onderscheiden.

Als je tegen een kleine cirkel met middelpunt (r, r) een grotere cirkel met middelpunt (R, R) zet, zodanig dat beide cirkels ook raken aan zowel de x- als de y-as, kun je R uitdrukken in r. Enerzijds is de afstand van (R, R) tot de oorsprong (het rode lijnstuk) gelijk aan $R\sqrt{2}$, anderzijds is deze afstand gelijk aan $R + r + r\sqrt{2}$. Dus $R\sqrt{2} = R + (1 + \sqrt{2})r$, dus $R(\sqrt{2} - 1) = (1 + \sqrt{2})r$ en daaruit volgt (deel links en rechts door $\sqrt{2} - 1$ en vermenigvuldig vervolgens teller en noemer met $\sqrt{2} + 1$) dat $R = (3 + 2\sqrt{2})r$.



Dus als je begint met een cirkel met straal r, overlappen de cirkels met straal $r + 1$, $r + 2$, ..., $[(3 + 2\sqrt{2})r]$ op de juiste manier. Hierbij staat $[x]$ voor de *entier* van x: het grootste gehele getal dat hooguit gelijk is aan x. Dus als $r = 1$, is $R \approx 5{,}83$, zodat de cirkels met straal 1, 2, 3, 4, 5 overlappen, maar de cirkel met straal 6 niet. Als je bij straal $r = 5$ begint, overlappen de cirkels tot en met straal 29, want $(3 + 2\sqrt{2})5 \approx 29{,}14$. Door je kleinste cirkel groot genoeg te kiezen, kun je dus willekeurig veel cirkels laten overlappen.

Ionica Smeets – columniste voor *de Volkskrant* en voorheen Wiskundemeisje – promoveerde afgelopen jaar aan de Leidse universiteit op kettingbreuken. Speciaal voor niet-wiskundigen schreef ze een samenvatting van haar proefschrift. In een interview met het universiteitsblad *Mare* vertelde Ionica dat zelfs veel wiskundigen het een obscuur onderwerp vinden. Zij is het er niet mee eens: 'Ik heb niets tegen toegepaste wiskunde, maar vind zuivere wiskunde zelf interessanter om te doen.'

■ door Ionica Smeets

EINDELOZE DEELSTREPEN

Motto: deze samenvatting is bedoeld voor mijn moeder – en alle andere lezers die niet veel van wiskunde weten, maar wel graag willen zien waar ik de afgelopen jaren aan heb gewerkt.

HOEVEEL DECIMALEN VAN π KEN JE?

Han, o lief, o zoete hartedief...

Deze dichtregel is niet alleen een liefdesverklaring, het is ook een ezelsbruggetje om de eerste decimalen van π = 3,14159265358... (de verhouding tussen de omtrek van een cirkel en zijn diameter) te onthouden. Tel maar eens het aantal letters van de woorden. Er zijn veel meer van dit soort ezelsbruggetjes in allerlei talen, zie figuur 1.

Eigenlijk heeft π oneindig veel decimalen achter de komma. Wat betekent het als je alleen de eerste vijf decimalen van π gebruikt? Je benadert π dan met $\frac{314159}{100000} = 3{,}14159$.

Misschien herinner je je een andere benadering van π die vaak gebruikt wordt op school: $\frac{22}{7} \approx 3{,}14285714$. Deze breuk met een heel kleine noemer (7) benadert de eerste twee decimalen van π. Archimedes gebruikte deze benadering al rond 200 voor Christus, maar het kan nog veel beter. Bijvoorbeeld met de breuk $\frac{355}{113}$. Die is ongeveer gelijk aan 3,14159292 en benadert π op maar liefst zes decimalen. Deze benadering is zo goed, dat geen enkele breuk met noemer kleiner dan 16604 dichter bij π ligt. Hulde dus voor de Chinese wiskundige Zu Chongzhi die in 480 (zo'n vier jaar na de val van het Romeinse rijk) met veel moeite deze benadering vond.

Archimedes en Chongzhi vonden hun benaderingen voor π door veelhoeken in cirkels te tekenen. Maar je kunt voor elk willekeurig getal goede benaderingen maken met *kettingbreuken*.

WAT IS EEN KETTINGBREUK? Een kettingbreuk is een breuk in een breuk in een breuk, enzovoorts. Zo ziet de kettingbreuk voor π er bijvoorbeeld uit:

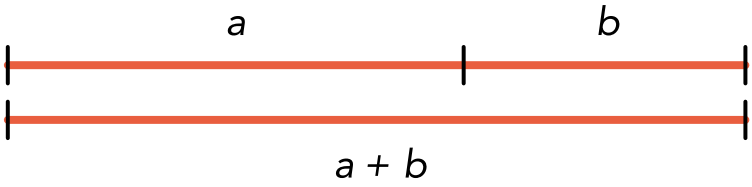
$$3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 + \ldots}}}}$$

In de breuk heb je steeds een 1, een deelstreep, een positief geheel getal en dan weer een nieuwe breuk die begint met een 1. Dit soort kettingbreuken noemen we *reguliere* kettingbreuken. We noteren het getal voor de breuk met a_0, voor π geldt dus $a_0 = 3$. De positieve gehele getallen in de breuk noteren we als $a_1, a_2, a_3, \ldots$. In het voorbeeld hierboven geldt $a_1 = 7$, $a_2 = 15$, $a_3 = 1$ en $a_4 = 292$.

Een getal dat geen breuk is, kun je op precies één manier schrijven als een oneindig lange ket-

How	*I*	*wish*	*I*	*could*	*recollect*	*pi*	*easily*	*today ...*			
Sol	*y*	*Luna*	*y*	*Cielo*	*proclaman*	*al*	*Divino*	*Autor*	*del*	*Cosmo ...*	
Wat	*u*	*door*	*'n*	*goede*	*ezelsbrug*	*te*	*kennen*	*immer*	*met*	*gemak*	*onthoudt ...*
How	*I*	*want*	*a*	*drink,*	*alcoholic*	*of*	*course,*	*after*	*the*	*heavy*	*lectures ...*
3	1	4	1	5	9	2	6	5	3	5	8 ...

Figuur 1 Ezelsbruggetjes om de eerste cijfers van pi te onthouden



$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a} = \phi \approx 1{,}618\ldots$$

Figuur 2 Bij een lijnstuk dat verdeeld is volgens de gulden snede verhoudt het grootste van de twee delen zich tot het kleinste, zoals het gehele lijnstuk zich verhoudt tot het grootste deel. Als we het langste stuk a noemen en het kortste b, dan hebben we $\phi = a/b = (a + b)/a$. We vinden dat $a = b\phi$ en invullen in $\phi = (a + b)/a$ geeft $\phi = (b\phi + b)/b\phi = (\phi + 1)/\phi$. Dus $\phi^2 - \phi - 1 = 0$. Oplossen van deze vergelijking (bijvoorbeeld met de *abc*-formule) geeft als enige positieve oplossing $\phi = (1 + \sqrt{5})/2 \approx 1{,}61803399$.

tingbreuk. Zulke getallen noemen we *irrationaal*. Het getal π is irrationaal, en $\sqrt{2}$ bijvoorbeeld ook.

HOE HAAL JE BENADERINGEN UIT EEN KETTINGBREUK? Als je de oneindig lange kettingbreuk afkapt, krijg je een *benaderingsbreuk*. Je neemt alleen het eerste deel en schrijft dat als een gewone breuk. Laten we eens kijken wat we dan vinden voor π. We noteren voortaan alleen de eerste acht cijfers achter de komma.

$\pi \approx \mathbf{3{,}14159265}$

1. $3+\frac{1}{7}=\frac{22}{7} \approx \mathbf{3{,}14}285714$

2. $3+\dfrac{1}{7+\frac{1}{15}}=\frac{333}{106} \approx \mathbf{3{,}1415}0943$

3. $3+\dfrac{1}{7+\dfrac{1}{15+\frac{1}{1}}}=\frac{355}{113} \approx \mathbf{3{,}14159}92$

We zien hier de twee eeuwenoude benaderingen $\frac{22}{7}$ en $\frac{355}{113}$ tevoorschijn komen.

Voor een willekeurig getal x schrijven we de benaderingen die we op deze manier vinden als $\frac{p_1}{q_1}$, $\frac{p_2}{q_2}$, ... In het algemeen noemen we de benadering die we vinden door de eerste n termen van de kettingbreuk te gebruiken $\frac{p_n}{q_n}$.

HOE MAAK JE ZO'N KETTINGBREUK? Neem een willekeurig irrationaal getal dat je wilt benaderen (zoals net bijvoorbeeld π = 3,14159265...). Het deel voor de komma is al een geheel getal, dus dat hoef je niet te benaderen. Noem het niet-gehele deel achter de komma x. Het recept om die kettingbreuk te maken is eenvoudiger dan dat voor saltimbocca:

Bereken $\frac{1}{x}$ en neem het gehele deel van $\frac{1}{x}$ als volgende getal a in je kettingbreuk. Zet $x = \frac{1}{x} - a$ en begin opnieuw.

Wiskundigen noemen zo'n recept een *algoritme*.

Als voorbeeld maken we de kettingbreuk voor π = 3,14159265... We ronden π af op honderd decimalen en passen het recept toe op $\pi - 3$ = 0,14159265...

Stap 1 geeft

$$\frac{1}{0{,}14159265\ldots}=7{,}06251330\ldots,$$

dus $a_1 = 7$. We zetten x = 0,06251330...

Stap 2 geeft

$$\frac{1}{0{,}06251330\ldots}=15{,}99659440\ldots,$$

dus $a_2 = 15$. We zetten x = 0,99659440...

Stap 3 geeft

$$\frac{1}{0{,}99659440\ldots}=1{,}00341723\ldots,$$

dus $a_3 = 1$. We zetten x = 0,00341709...

Enzovoorts.

We vinden

$$\pi = 3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\ldots}}}.$$

Je kunt dit voor elk irrationaal getal doen en nu bijvoorbeeld zelf narekenen dat voor $\sqrt{2} \approx 1{,}41421356$ de kettingbreuk wordt gegeven door

$$\sqrt{2} = 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ldots}}}.$$

WAAROM WERKT HET RECEPT OM KETTINGBREUKEN TE MAKEN? Wiskundigen gebruiken in plaats van het bovenstaande recept graag een functie $T(x)$. Je kunt het recept namelijk ook beschrijven als het steeds herhalen van $T(x)=\frac{1}{x}-a(x)$, oftewel $x = 1/(a(x) + T(x))$, waarbij $a(x)$ het gehele deel van $\frac{1}{x}$ is.

Voor de eerste stap geldt dus:

$$T(x)=\frac{1}{x}-a_1$$

oftewel

$$x=\frac{1}{a_1+T(x)}.$$

In de volgende stap pas je T toe op $T(x)$ en krijg je

$$T(T(x))=\frac{1}{T(x)}-a(T(x))=\frac{1}{\frac{1}{x}-a_1}-a_2$$

oftewel

$$x=\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+T(T(x))}}.$$

Zo ga je verder en je ziet hoe de kettingbreuk zich na elke stap een stukje verder uitrolt.

WAT IS EEN GOEDE BENADERING? In het voorbeeld hierboven kwam je met elke stap dichter bij π. Dat is altijd zo bij het kettingbreukalgoritme: elke benadering $\frac{p_n}{q_n}$ ligt dichter bij x dan de vorige benadering $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$. Of zoals wiskundigen het schrijven:

$$\left|x-\frac{p_n}{q_n}\right|<\left|x-\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right|,$$

waarbij | | staat voor het nemen van de *absolute waarde*. De limiet van de benaderingsbreuken $\frac{p_n}{q_n}$ is x.

Neem nu een willekeurige breuk $\frac{p}{q}$ die dicht bij x ligt. Wanneer noem je deze breuk een goede benadering van x? Het ligt voor de hand om de noemer van de breuk mee te nemen in de kwaliteit. Het is natuurlijk veel makkelijker om dicht bij x te komen als je een breuk met noemer 100.000.000 neemt, dan wanneer je een breuk met noemer 10 gebruikt.

Een veel gebruikte maat voor de kwaliteit van een benadering is de noemer in het kwadraat keer het verschil tussen x en de breuk $\frac{p}{q}$, in wiskundige notatie:

$$q^2\left|x-\frac{p}{q}\right|.$$

Een benadering is goed als de kwaliteit zo klein mogelijk is: dan heb je zowel een kleine noemer als een korte afstand tot x. In tegenstelling tot de Consumentenbond geven we dus breuken met een *lage* kwaliteit het predicaat 'beste keus'.

Het blijkt dat hoe groter een getal a in de kettingbreuk is, des te beter de benadering is die je krijgt door net daarvoor af te kappen. In het voorbeeld met π hebben we $a_2 = 15$, $a_3 = 1$ en $a_4 = 292$. Als we afkappen voor $a_2 = 15$, dan krijgen we als benadering $\frac{22}{7}$ met een kwaliteit van ongeveer 0,062. Afkappen voor $a_3 = 1$ geeft $\frac{333}{106}$ en die doet het met een kwaliteit van 0,94 minder goed. Als we afkappen voor de grote $a_4 = 292$, dan krijgen we Chongzi's benadering $\frac{355}{113}$ en die heeft een spectaculaire kwaliteit van 0,0034.

WAAR VIND JE DIE GOEDE BENADERINGEN? We zagen hierboven dat de kwaliteit van de benaderingen steeds tussen de 0 en 1 lag. Dit is altijd waar, voor elke kettingbreukbenadering van welk irrationaal getal dan ook. Het is helemaal niet zo vanzelfsprekend dat een benadering zo'n goede kwaliteit heeft. De benadering $\frac{314159}{100000}$ voor π heeft bijvoorbeeld kwaliteit 26535,9. Het is dus bijzonder dat het kettingbreukalgoritme alleen maar benaderingen met kwaliteit kleiner dan 1 vindt.

Kan het nu zo zijn dat er breuken bestaan die ontzettend goede benaderingen zijn, maar die het kettingbreukalgoritme per ongeluk níét vindt? Legendre bewees in 1798 (het jaar dat Napoleons troepen Egypte binnentrokken) dat dit niet kan.

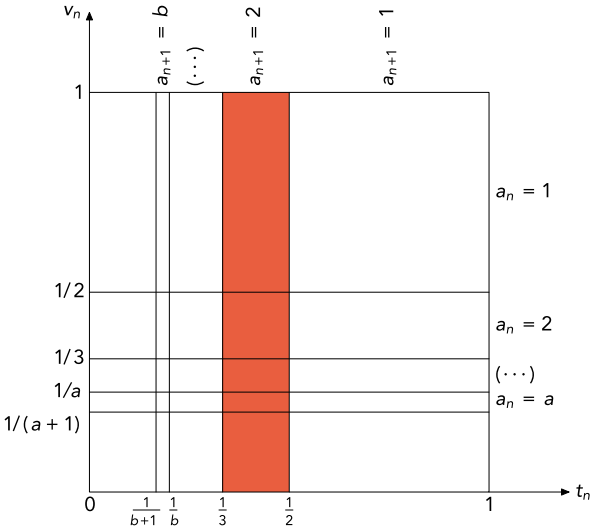
Stelling 1. Als $\frac{p}{q}$ een breuk is die x benadert met een kwaliteit van minder dan $\frac{1}{2}$, dan wordt deze breuk gevonden door het kettingbreukalgoritme.

Kortom: alle echt goede benaderingen worden gevonden door het kettingbreukalgoritme. Borel bewees in 1905 (het jaar waarin Albert Einstein zijn speciale relativiteitstheorie publiceerde) dat bovendien één in elke drie opeenvolgende benaderingen heel goed is.

Stelling 2. Voor elke irrationale x en voor elke drie willekeurige achtereenvolgende kettingbreukbenaderingen geldt dat het minimum van de drie bijbehorende kwaliteiten kleiner is dan $1/\sqrt{5} \approx 0{,}44721$. De constante kan niet vervangen worden door een kleinere.

Voor elke constante kleiner dan $1/\sqrt{5}$ bestaan er getallen x waarvoor je geen drie opeenvolgende benaderingen kunt aanwijzen die elk kwaliteit kleiner dan die constante hebben. De *gulden snede* ϕ is een voorbeeld van zo'n getal waarbij het dan misgaat. De gulden snede is de beroemde 'mooie' verdeling van een lijnstuk in twee stukken, zie figuur 2.

We kunnen de kettingbreuk voor de gulden snede zonder het kettingbreukenrecept maken. Uit de vergelijking $\phi^2 - \phi - 1 = 0$ concluderen we dat $\phi = 1 + 1/\phi$. Door aan de rechterkant herhaaldelijk $\phi = 1 + 1/\phi$ in te vullen, is de kettingbreuk van de gulden snede makkelijk te vinden:



Figuur 3 De natuurlijke uitbreiding voor reguliere kettingbreuken. Op de getekende horizontale strips is a_n constant, op elke verticale strip is a_{n+1} constant. In de rode strip geldt bijvoorbeeld dat $t_n = 1/(a_{n+1} + \ldots)$ groter is dan $\frac{1}{3}$ en kleiner dan $\frac{1}{2}$. Dus deze strip bevat alle punten (t_n, v_n) waarvoor $a_{n+1} = 2$.

$$\phi = 1+\frac{1}{\phi} = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\phi}} = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\phi}}}} = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cdots}}}}}}.$$

We zien dat de kettingbreuk van de gulden snede uit alleen maar enen bestaat, daarom zijn de benaderingen de slechtst mogelijke.

Hurwitz bewees in 1891 (het jaar waarin Stanford University zijn deuren opende) de volgende stelling.

Stelling 3. Voor elke irrationale x bestaan er oneindig veel breuken $\frac{p}{q}$ die x met kwaliteit kleiner dan $1/\sqrt{5}$ benaderen:

$$q^2\left|x-\frac{p}{q}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

De constante kan niet worden vervangen door een kleinere.

Merk op dat de stelling van Hurwitz direct volgt uit de resultaten van Legendre en Borel omdat $1/\sqrt{5} < \frac{1}{2}$.

IS DIT HÉT KETTINGBREUKALGORITME?

Hierboven maakten we de kettingbreuk voor x door steeds het gehele deel van $\frac{1}{x}$ te nemen. Maar we kunnen ook andere kettingbreuken maken. Bijvoorbeeld door $\frac{1}{x}$ af te ronden naar het dichtstbijzijnde gehele getal. Bij het benaderen van π kregen we in stap 2 bijvoorbeeld 1/0,06251330... $\approx$ 15,99659441, toen namen we $a_2 = 15$. Zou het niet logischer zijn om af te ronden naar 16? Als we dat consequent doen, dan krijgen we voor π de volgende dichtstbijzijnde-gehele-getallen-kettingbreuk:

$$\pi = 3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{16-\cfrac{1}{294+\ldots}}}.$$

Afkappen geeft als eerste benaderingen $\frac{22}{7}$, $\frac{355}{113}$ en $\frac{104348}{33215}$. Deze kettingbreuk slaat de slechte benadering $\frac{333}{106}$ over, maar elke benadering die wordt gevonden, is er één die het reguliere kettingbreukalgoritme ook vindt. Het reguliere kettingbreukalgoritme vindt dus meer benaderingen.

Wie wiskundigen kent, weet dat zij het liefste alles, altijd en overal generaliseren. Dit leidt tot een op het eerste gezicht wat bizarre versie van het kettingbreukalgoritme: *α-Rosen-kettingbreuken*. In plaats van $\frac{1}{x}$ af te ronden, nemen we hierbij het gehele deel van $\left|\frac{1}{\lambda x}\right|+1-\alpha$, waarbij $\lambda = 2\cos\frac{\pi}{q}$ (voor een geheel getal $q \leq 3$) en waarbij α een reëel getal is tussen $\frac{1}{2}$ en $\frac{1}{\lambda}$. In 1954 (het jaar dat zowel *Lord of the flies* als *Lord of the rings* uitkwamen) introduceerde David Rosen de naar hem genoemde Rosen-kettingbreuken (met $\alpha = \frac{1}{2}$) om eigenschappen van bepaalde groepen te bestuderen. De stap naar α-Rosen-kettingbreuken is veel recenter: deze breuken werden slechts twee jaar geleden voor het eerst onderzocht door Dajani, Kraaikamp en Steiner.

Het grote voordeel van α-Rosen-kettingbreuken is dat ze allerlei andere soorten kettingbreuken omvatten. Als je een eigenschap van α-Rosen-kettingbreuken bewijst, dan heb je die eigenschap bijvoorbeeld ook onmiddellijk bewezen voor gewone kettingbreuken.

HOE HOUD JE ALLE INFORMATIE BIJ?

We kijken vanaf nu alleen naar irrationale getallen tussen 0 en 1. We benaderen immers toch alleen het niet-gehele deel van een getal met een kettingbreuk. Omdat het wat onhandig is om

$$\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cfrac{1}{\cdots}}}}$$

te schrijven, introduceren we de kortere notatie $[a_1, a_2, a_3, \ldots]$.

Als je het kettingbreukalgoritme steeds herhaalt, dan zagen we hierboven hoe je één voor één de getallen a_i krijgt. Maar verder raak je alle informatie over de rest van de kettingbreuk kwijt. Daarom introduceren we twee kettingbreuken: de *toekomst* t_n en het *verleden* v_n op plaats n: $t_n = [a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}, \ldots]$ en $v_n = [a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1]$. De toekomst representeert alles wat er na a_n komt en omgekeerd representeert het verleden juist alles wat er tot en met a_n kwam.

We gebruiken een tweedimensionale functie $\mathcal{T}$ die (t_n, v_n) naar (t_{n+1}, v_{n+1}) stuurt. Zo blijft alle informatie bewaard: om van t_n naar t_{n+1} te gaan, hoef je alleen de eerste term a_{n+1} weg te gooien. Om van v_n naar v_{n+1} te gaan, moest je juist a_{n+1} aan het begin toevoegen.

In mijn proefschrift maak ik veel gebruik van een meetkundige methode op het grootste gebied waarop $\mathcal{T}$ netjes werkt. We noemen dit de *natuurlijke uitbreiding*. We tekenen de natuurlijke uitbreiding in een assenstelsel met t_n op de x-as en v_n op de y-as. Voor reguliere kettingbreuken is het een vierkant met zijde 1, zie figuur 3. Voor andere soorten kettingbreuken is de natuurlijke uitbreiding wat ingewikkelder.

HEB JE OOK KETTINGBREUKEN IN HOGERE DIMENSIES? Als je wiskundigen wilt uitdagen, dan kun je altijd vragen of hun resultaten nog zijn uit te breiden, bijvoorbeeld naar hogere dimensies. Bij kettingbreuken is dit een pijnlijk punt. Er zijn namelijk wel allerlei generalisaties voor hogere dimensies, maar die hebben lang niet zulke mooie eigenschappen als het reguliere kettingbreukalgoritme.

Bij reguliere kettingbreuken zoeken we voor een willekeurige x een breuk $\frac{p}{q}$ die dicht bij x ligt. In hogere dimensies kunnen we de volgende twee kanten op.

De eerste optie is om niet één maar meer getallen te benaderen met breuken met dezelfde noemer. Je hebt dan een aantal (zeg m) irrationale getallen $x_1, x_2, \ldots, x_m$ en zoekt $m + 1$ gehele getallen $p_1, p_2, \ldots, p_m$ en q zodat de breuk $\frac{p_1}{q}$ dicht bij x_1 ligt, $\frac{p_2}{q}$ dicht bij x_2 enzovoorts.

De tweede optie is om voor een aantal (zeg n) getallen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ in totaal $n + 1$ gehele getallen $p, q_1, \ldots, q_n$ te zoeken zodat $q_1x_1 + q_2x_2 + \ldots + q_nx_n$ dicht bij p ligt.

Je kunt de twee opties combineren door voor $m \times n$ gegeven getallen $x_{11}, \ldots, x_{mn}$ te zoeken naar $m + n$ gehele getallen $p_1, p_2, \ldots, p_m$ en $q_1, \ldots, q_n$ zodat de som $q_1x_{i1} + q_1x_{i2} + \ldots + q_1x_{in}$ dicht bij p_i ligt voor elke i tussen 1 en m. Meerdimensionale benaderingen hebben toepassingen van jpeg-compressie tot het oplossen van optimaliseringsproblemen.

Nu nemen we voor de kwaliteit het grootste verschil tussen één van de i sommen en de bijbehorende p_i, vermenigvuldigd met de grootste van de bij q_j's tot de macht m/n. Of zoals wiskundigen het schrijven:

$$q^{\frac{m}{n}} \max_i |q_1 x_{i1} + \ldots + q_m x_{im} - p_i|$$

waarbij $q = \max_j |q_j|$.

Een benadering heet weer goed als de kwaliteit klein is. Als $m = n = 1$, dan is dit precies de kwaliteit van een benadering die we eerder gebruikten.

In 1842 (het jaar dat *Nabucco* van Verdi in première ging) bewees Dirichlet het volgende:

Stelling 4. Voor elke gegeven $x_{11}, \ldots, x_{nm}$ bestaan er oneindig veel benaderingen met kwaliteit kleiner dan 1.

(Voor beroepswiskundigen die dit artikel lezen: we nemen aan dat er minstens één i is waarvoor 1, $x_{i1}, \ldots, x_{im}$ lineair onafhankelijk zijn over $\mathbf{Q}$.)

Dirichlet bewees deze stelling met zijn beroemde *ladenprincipe*: als je meer dan n balletjes verdeelt over n laden, dan is er minstens één lade met meer dan één balletje erin. Zijn bewijs geeft helaas geen goede methode om benaderingen met kwaliteit kleiner dan 1 te vinden. Ruim 150 jaar later hebben we nog steeds geen efficiënt algoritme gevonden om alle benaderingen met kwaliteit kleiner dan 1 te geven. Behalve als $m = n = 1$ natuurlijk, want dan kunnen we het kettingbreukalgoritme gebruiken. ■

Foto: Ivars Peterson

MÖBIUS IN TORONTO

Gelegen op een binnenplaats tussen twee wolkenkrabbers in de Canadese stad Toronto staat sinds 2008 'Möbius' van de in Servië geboren kunstenaar Lilly Otasevic. Zij maakte een 2,5 meter hoge variant van de Möbiusband.

■ door Alex van den Brandhof

In een binnenplaats tussen twee hoge torens aan de Yonge Street 2181-2191 in de Canadese stad Toronto staat een reusachtig glinsterend, golvend object. De titel van deze 2,5 meter hoge sculptuur van kunstenaar Lilly Otasevic is *Möbius*. Maar wie wel eens van een *Möbiusband* heeft gehoord, heeft die informatie niet nodig: als je om de sculptuur loopt, herken je al gauw het *eenzijdige oppervlak*.

AUGUST FERDINAND MÖBIUS Neem een strook papier, draai één uiteinde over 180 graden en plak de uiteinden aan elkaar. Het resultaat is een *Möbiusband*, genoemd naar de bedenker, de Duitse wiskundige August Ferdinand Möbius (1790-1868). Het is het standaardvoorbeeld van een *eenzijdig oppervlak*: als je met je vinger vanaf een willekeurig punt de band volgt, merk je dat je overal komt, zonder dat je met je vinger de rand hoeft te passeren! Met Möbiusbanden kun je leuke experimenten doen. Een mooi Valentijnsdagexperiment vind je op de volgende twee pagina's.

LILLY OTASEVIC Verschillende kunstenaars hebben zich laten inspireren door de Möbiusband. Heel beroemd zijn de Möbiusbanden van de Nederlandse graficus M.C. Escher. De Möbiusband leent zich ook uitstekend voor straatkunst, zoals de sculptuur van Lilly Otasevic bewijst. In haar eigen beschrijving van de sculptuur geeft ze aan dat de Möbiusband alomvertegenwoordigd is, verwijzend naar onder meer het recycling symbool (♻) dat je op diverse verpakkingen aantreft.

Op haar website schrijft Otasevic dat 'transformatie en tijdloze continuïteit van natuurlijke processen' het hoofdthema van haar Möbiussculptuur is. 'De sculptuur symboliseert evenwicht en vertegenwoordigt onze eenheid met de natuur'. Met diverse materialen, zoals roestvrij staal, hout, glas, kristal en zelfs levende planten maakt Otasevic kunstwerken die geïnspireerd zijn door de natuur en door natuurlijke processen. Een samenspel van licht en schaduw en de onderlinge verbondenheid van organisch en anorganisch materiaal zijn terugkerende thema's in al haar werken.

MEER INFORMATIE Lilly Otasevic heeft een eigen website: www.lillyotasevic.net. Meer informatie over haar sculptuur Möbius vind je op de blog van Ivars Peterson: mathtourist.blogspot.com/2010/10/mobius-in-toronto.html. ■

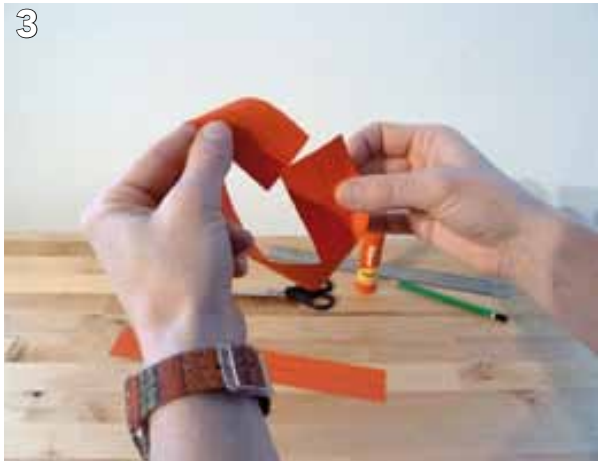
14 februari is het Valentijsdag. Met een rode roos maak je weinig indruk op je stille geliefde: te afgezaagd. Beter prepareer je een abstract kunstwerkje (zie de stappen 1 tot en met 6) met daarbij een korte instructie hoe je stille geliefde je bouwsel moet verknippen. Met het resultaat (zie stap 7 en 8) is een succesvolle verovering gegarandeerd!

■ door Alex van den Brandhof

VERSTRENGELDE

Je hebt nodig: een liniaal, een potlood, een schaar, lijm en twee stroken papier (knip van een vel A4 twee stroken met een breedte van 4 cm). Het is het leukst als de stroken papier rood zijn.

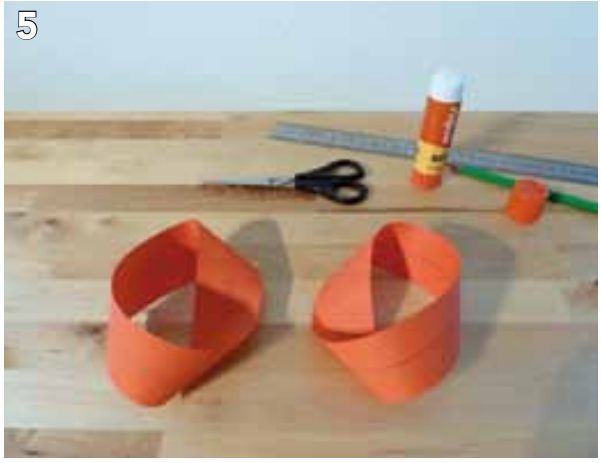
Teken op beide stroken aan beide kanten, evenwijdig met de lange zijden, door het midden een lijn.



Maak van beide stroken een *Möbiusband*. Breng de uiteinden van de ene strook bij elkaar en draai een van de uiteinden een halve slag naar *rechts*. Plak de uiteinden vervolgens op elkaar.

Breng de uiteinden van de andere strook bij elkaar en draai een van de uiteinden een halve slag naar *links*. Plak de uiteinden vervolgens op elkaar.

MÖBIUSHARTEN



Je hebt nu twee Möbiusbanden die er ten opzichte van elkaar gespiegeld uitzien.

Plak de twee Möbiusbanden aan elkaar. Doe het zó, dat op de plek van de lijm de twee stroken loodrecht op elkaar staan. Zorg ervoor dat het (vierkante) gedeelte waar de stroken op elkaar liggen, geheel met lijm bedekt is.

Laat je stille geliefde beide Möbiusbanden doorknippen langs de getekende lijnen. Let op: je moet *helemaal* doorknippen, ook daar waar de Möbiusbanden tegen elkaar vastgeplakt zitten! De eerste Möbiusband laat zich een beetje lastig knippen, omdat je eerst een gaatje moet prikken met de schaar. De tweede band gaat heel makkelijk.

Het resultaat: twee in elkaar verstrengelde harten. Een mooiere manier om iemands hart te stelen is ondenkbaar!

JOURNAAL

■ door Alex van den Brandhof

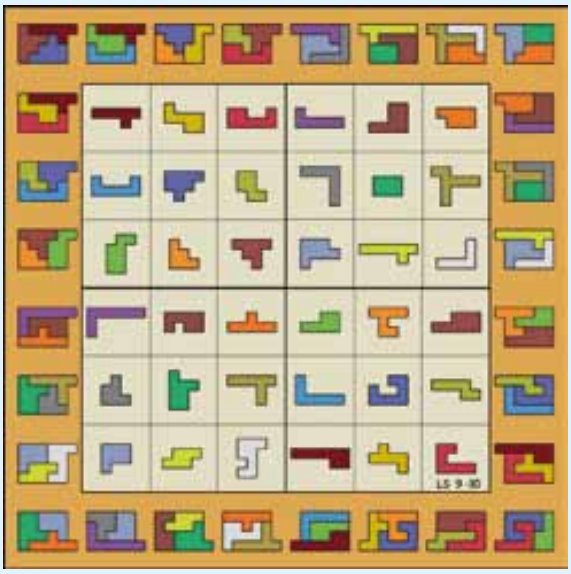
Website geomagische vierkanten gelanceerd

Vorige jaargang publiceerde *Pythagoras* op de achterkaft van elk nummer een *geomagisch vierkant*. Bedenker Lee Sallows heeft sinds kerst 2010 een website over geomagische vierkanten.

'Hello magicsquarians, recreational math buffs, or other curious visitors, my name is Lee Sallows. For some time now, friends and others have been encouraging me to create a website devoted to my brainchild *geometric magic squares*, or *geomagic squares*, for short. Here then, following endless prevarication, is the result.'

Zo luiden de eerste drie zinnen op de homepage over geomagische vierkanten. Een $n \times n$ geomagisch vierkant is een vierkant met n^2 vakjes. Elk vakje bevat een tekeningetje en de bedoeling is om met de figuurtjes in iedere kolom, rij en diagonaal dezelfde vorm (het doel) te leggen.

Het 6 × 6 geomagische vierkant dat je hier ziet, is heel bijzonder, want met de zes stukken in elke rij, kolom en diagonaal kun je *oneindig* veel doelen betegelen. Elke hoek van het vierkant bevat een *bijna-magisch* 3 × 3 geomagisch vierkant. Dat wil zeggen, de drie stukken betegelen steeds een 'half-doel' (behalve langs een diagonaal): een 'rechthoek-plus-neus', zoals Lee Sallows het zelf beschrijft. Dit betekent dat de zes stukken van elke rij, kolom en diagonaal van het 6 × 6 vierkant altijd *twee* van die half-doelen kunnen betegelen, *ongeacht waar ze liggen*: aan elkaar vast, los van elkaar, in welke houding dan ook. Er zijn dus oneindig veel verschillende doelen te construeren, gebruikmakend van de twee half-doelen.



© Lee Sallows

De website over geomagische vierkanten kun je vinden op www.geomagicsquares.com.

Notitieboeken van Ramanujan op microfilm

De universiteitsbibliotheek van Madras heeft een zeer waardevol document op microfilm gezet. Het gaat om de notitieboeken van de wiskundige Ramanujan.

De uit India afkomstige Srinivasa Ramanujan (1887-1920) was een wiskundig genie. Toen hij op 32-jarige leeftijd overleed, zadelde hij de wiskundige wereld op met schriften vol met bizarre formules. Zelfs nu vormen sommige van zijn aantekeningen, vooral die over getaltheorie, nog steeds een mysterie.

Dat Ramanujan echter geen onzinnige wiskundige symbolen noteerde, is wel duidelijk: de raadselachtige formules waar wiskundigen inmiddels wél grip op hebben, blijken diepe achterliggende theorieën te bevatten. Wiskundigen denken dat dat bij de nog niet opgeloste Ramanujan-krabbels ook zo zal zijn. De drie schriften vol met handgeschreven aantekeningen zijn nu op microfilm gezet door de universiteitsbibliotheek van Madras, die nu honderd jaar bestaat. Eén exemplaar van de notitieboeken op microfilm blijft, samen met het origineel, in deze bibliotheek. Kopieën van de microfilm gaan verder naar wiskunde-instituten zodat alle onderzoekers toegang hebben tot dit waardevolle manuscript. "Ramanujan schreef de ene na de andere formule in zijn schriften. Al zijn theorieën bewijzen, is zelfs voor moderne wiskundigen razend moeilijk. Je kunt je er alleen maar over verbazen, hoe Ramanujan als eerste grip leek te hebben op deze ingewikkelde materie", zegt K. Parthasarathy van het Ramanujan Institute for Advanced Study in Mathematics, onderdeel van de universiteit van Madras.

Op 4 februari vond de eerste ronde van de Wiskunde Olympiade voor de vijftigste keer plaats op diverse middelbare scholen. De wedstrijd bestond uit acht vijfkeuzevragen (2 punten per goed antwoord) en vier open vragen (5 punten per goed antwoord). De opgaven waren dusdanig uitdagend, dat het oplossen van een paar opgaven al een hele prestatie was. Uiteraard was het doel ook om met plezier aan interessante wiskunderaadsels te werken, en dat is ongetwijfeld gelukt. In dit artikel bekijken we een van de vier open vragen.

■ door Julian Lyczak

OP EN NEER MET DE ROLTRAP

NEDERLANDSE WISKUNDE OLYMPIADE 50 JAAR

Opgave B2 (NWO eerste ronde 2011):
In een warenhuis loopt een roltrap van de begane grond naar de eerste verdieping. Dion gaat met deze roltrap omhoog; hij zet hierbij zelf ook nog een aantal stappen in een vast tempo. Raymond loopt over dezelfde roltrap, tegen de richting in, van boven naar beneden en zet hierbij stappen in hetzelfde tempo als Dion. Ze nemen allebei één trede per stap. Dion is na precies 12 stappen boven; Raymond is na precies 60 stappen beneden.
Hoeveel stappen zou Dion nodig hebben om boven te komen als de roltrap stilstond?

Blijkbaar zit er zelfs wiskunde verstopt in het lopen op een roltrap... Een eerste gedachte is misschien dat het aantal stappen voor de stilstaande roltrap het gemiddelde is van de genoemde 12 en 60, dus $(12 + 60)/2 = 36$. Maar we zullen zien dat dit te simpel gedacht is.

TWEE VERGELIJKINGEN, TWEE ONBEKENDEN

We bekijken het probleem eerst eens van de andere kant, met verzonnen getallen. Neem bijvoorbeeld een roltrap met 45 treden. Dat is dus het aantal stappen dat nodig is om boven te komen als de roltrap stilstaat. We nemen verder aan dat de roltrap een zodanige snelheid heeft dat als Dion twee stappen heeft gezet, de roltrap één trede is opgeschoven met Dion mee. Dan hoeft hij dus voor iedere 3 treden die hij stijgt, maar 2 stappen te zetten. Hij zal dus in $45 \cdot \frac{2}{3} = 30$ stappen boven zijn.

Voor Raymond, die van boven naar beneden loopt, gaat de roltrap juist tegen zijn looprichting in. Voor iedere 2 stappen die hij zet, is hij eigenlijk maar 1 van de 45 treden gedaald. Hij zal dus wel $45 \cdot \frac{2}{1} = 90$ stappen nodig hebben. Het gemiddelde is $(30 + 90)/2 = 60$, maar de roltrap is toch echt slechts 45 treden lang. De vraag is hoe we nu van die 30 en 90 wél op 45 kunnen uitkomen.

Om dit te onderzoeken, voeren we variabelen in. Zoals we al in het probeersel hierboven zagen, is het misschien slim om het aantal treden van een stilstaande roltrap een naam te geven. We kiezen voor t, van treden. Verder hebben we nóg een parameter gebruikt: het aantal treden dat de roltrap opschuift in de tijd dat Dion of Raymond precies één stap doen. Deze parameter zullen we aangeven met v. In het verhaal hierboven was $v = \frac{1}{2}$.

Dion loopt met de roltrap mee en zal dus als hij 1 stap zet, $1 + v$ trede stijgen. Maar Raymond beweegt tegen de roltrap in, en daalt effectief slechts $1 - v$ trede per stap. Het aantal stappen dat nodig is om t treden te stijgen als je per stap $1 + v$ treden beweegt, is simpelweg $\frac{t}{1+v}$. Net zo zal Raymond precies $\frac{t}{1-v}$ stappen nodig hebben om weer beneden te komen. Deze aantallen waren gegeven in de opgave en we vinden dus het stelsel van vergelijkingen

$$\frac{t}{1+v} = 12 \quad \text{en} \quad \frac{t}{1-v} = 60. \qquad (1)$$

Uit beide vergelijkingen kunnen we v oplossen, wat

OM OVER NA TE DENKEN

1. Dion en Raymond komen nog bij een andere roltrap en doen daar hetzelfde: Dion loopt naar boven, Raymond in hetzelfde tempo naar beneden. Maar nu blijkt dat ze precies evenveel stappen nodig hebben. Wat is er met deze roltrap aan de hand?

2. Hoe zit dat eigenlijk als Dion juist meer stappen nodig heeft dan Raymond?

3. Bekijk weer een nieuwe roltrap, waarvoor geldt dat als Dion 1 stap zet, hij al 2 treden gestegen is. Als Dion weer 12 stappen nodig heeft om boven te komen, hoeveel stappen heeft Raymond dan nodig om beneden te komen? Hoeveel treden heeft de roltrap?

ANTWOORDEN

1. De roltrap staat stil.

2. De snelheid van de roltrap is dan eigenlijk negatief. Oftewel: de roltrap loopt niet van beneden naar boven, maar juist van boven naar beneden.

3. Raymond komt mooit beneden aan, want voor elke stap die hij naar beneden zet, stijgt de roltrap ook een trede. Raymonds snelheid $1 - v$ is hier dus gelijk aan 0. In formule (2) valt daarom de term $\frac{1}{60}$ (die gelijk is aan $\frac{1-v}{t}$) helemaal weg en krijgen we $t = 24$.

leidt tot

$$\frac{t}{12}-1=v=1-\frac{t}{60},$$

dus

$$t\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{60}\right)=\frac{t}{12}+\frac{t}{60}=2.$$

Hieruit volgt dat

$$t=\frac{2}{\frac{1}{12}+\frac{1}{60}}. \qquad (2)$$

Teller en noemer met 60 vermenigvuldigen levert $t = \frac{120}{5+1} = 20$. Hiermee hebben we de opgave opgelost!

BREUKEN OMDRAAIEN Een andere manier om v te elimineren, die in dit geval toevallig mooi werkt: draai alle breuken in (1) om:

$$\frac{1+v}{t}=\frac{1}{12} \quad \text{en} \quad \frac{1-v}{t}=\frac{1}{60}.$$

Als we deze twee vergelijkingen optellen, valt v weg:

$$\frac{2}{t}=\frac{1+v}{t}+\frac{1-v}{t}=\frac{1}{12}+\frac{1}{60},$$

waarmee we weer vinden dat

$$t=\frac{2}{\frac{1}{12}+\frac{1}{60}}=20.$$

Overigens hadden we ook eerst v kunnen bepalen en dan die waarde weer invullen om t te vinden. Als we de twee vergelijkingen (1) op elkaar delen, verliezen we direct de t:

$$\frac{1+v}{1-v}=\frac{\left(\frac{t}{1-v}\right)}{\left(\frac{t}{1+v}\right)}=\frac{60}{12}=5.$$

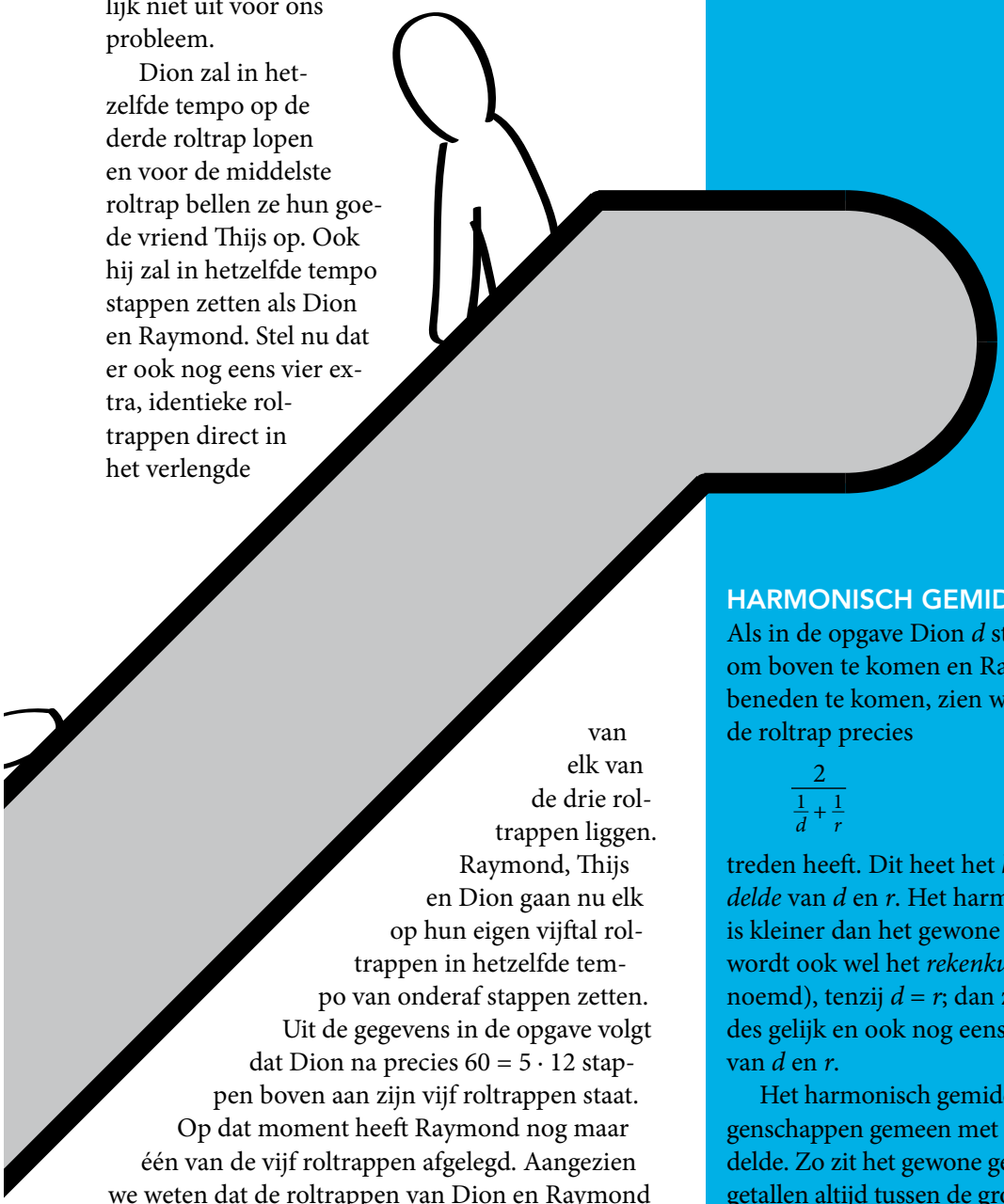
Hiermee krijgen we een eenvoudige lineaire vergelijking voor v: $1 + v = 5 - 5v$. Deze kunnen we herschrijven tot $6v = 4$ om te vinden $v = \frac{2}{3}$. Als we dit weer invullen in een van onze eerste vergelijkingen (1), bijvoorbeeld $t/(1 + v) = 12$, vinden we dat $t = 12 \cdot (1 + \frac{2}{3}) = 20$. Ter controle kunnen we nog nagaan of we dezelfde t krijgen als we $t/(1 - v) = 60$ hadden gekozen om onze v in in te vullen: $t = 60 \cdot (1 - \frac{2}{3}) = 20$. Gelukkig maar.

VIJFTIEN ROLTRAPPEN Toch kunnen we de opgave ook zonder al dit rekenwerk oplossen. Bekijk daarvoor drie identieke roltrappen naast elkaar. De eerste roltrap loopt naar beneden, de tweede staat stil en de derde loopt naar boven, even snel als de eerste roltrap naar beneden loopt.

We laten Raymond nu omhoog lopen, maar wel op de eerste roltrap, dus nog steeds tegen de roltraprichting in. Want of hij nou omlaag loopt over een roltrap die om-

hoog gaat, of omhoog over een roltrap die omlaag gaat, dat maakt natuurlijk niet uit voor ons probleem.

Dion zal in hetzelfde tempo op de derde roltrap lopen en voor de middelste roltrap bellen ze hun goede vriend Thijs op. Ook hij zal in hetzelfde tempo stappen zetten als Dion en Raymond. Stel nu dat er ook nog eens vier extra, identieke roltrappen direct in het verlengde van elk van de drie roltrappen liggen. Raymond, Thijs en Dion gaan nu elk op hun eigen vijftal roltrappen in hetzelfde tempo van onderaf stappen zetten. Uit de gegevens in de opgave volgt dat Dion na precies $60 = 5 \cdot 12$ stappen boven aan zijn vijf roltrappen staat. Op dat moment heeft Raymond nog maar één van de vijf roltrappen afgelegd. Aangezien we weten dat de roltrappen van Dion en Raymond even snel gaan, maar in tegengestelde richting, ligt de snelheid van Thijs precies tussen de snelheden van Dion en Raymond. Thijs zal zich dus na 60 stappen precies tussen Dion en Raymond bevinden. Hij heeft dus in 60 stappen drie stilstaande roltrappen beklommen. Voor één stilstaande roltrap zijn dus 20 stappen nodig. We vinden opnieuw dat de stilstaande roltrap uit 20 treden bestaat. ■



HARMONISCH GEMIDDELDE

Als in de opgave Dion d stappen nodig heeft om boven te komen en Raymond r stappen om beneden te komen, zien we dat in het algemeen de roltrap precies

$$\frac{2}{\frac{1}{d}+\frac{1}{r}}$$

treden heeft. Dit heet het *harmonisch gemiddelde* van d en r. Het harmonisch gemiddelde is kleiner dan het gewone gemiddelde $\frac{d+r}{2}$ (dit wordt ook wel het *rekenkundig gemiddelde* genoemd), tenzij $d = r$; dan zijn beide gemiddeldes gelijk en ook nog eens gelijk aan de waarde van d en r.

Het harmonisch gemiddelde heeft allerlei eigenschappen gemeen met het gewone gemiddelde. Zo zit het gewone gemiddelde van twee getallen altijd tussen de grootste en de kleinste van de twee; hetzelfde geldt voor het harmonisch gemiddelde. Ook geldt voor beide: als d en r met een bepaalde factor toenemen, dan neemt het gemiddelde van de twee getallen toe met diezelfde factor. Dus als Dion 120 stappen nodig had gehad en Raymond 600, kunnen we meteen zeggen dat de roltrap 200 treden hoog is.

PYTHAGORAS OLYMPIADE

■ door Matthijs Coster, Alexander van Hoorn en Eddie Nijholt

Doe mee met de Pythagoras Olympiade! Elke aflevering bevat vier opgaven. De eerste twee zijn wat eenvoudiger; onder de goede inzendingen van leerlingen uit de klassen 1, 2 en 3 wordt een Irisbon van 20 euro verloot. De laatste twee zijn echte breinbrekers; onder de goede inzendingen van leerlingen (tot en met klas 6) wordt een Irisbon van 20 euro verloot. Bovendien kun je je via deze breinbrekers plaatsen voor de finale van de Nederlandse Wiskunde Olympiade, mocht het via de voorronden niet lukken. Niet-leerlingen kunnen met de Pythagoras Olympiade meedoen voor de eer.

HOE IN TE ZENDEN? Inzendingen ontvangen we bij voorkeur per e-mail (getypt of een scan van een handgeschreven oplossing): pytholym@pythagoras.nu.

Eventueel kun je je oplossing sturen naar Pythagoras Olympiade, Korteweg-de Vries Instituut, Universiteit van Amsterdam, Postbus 94248, 1090 GE Amsterdam.

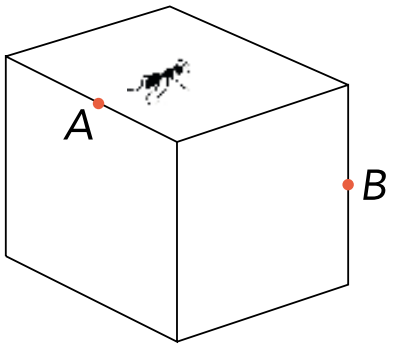
Voorzie het antwoord van een duidelijke toelichting (dat wil zeggen: een berekening of een bewijs). Vermeld je naam en adres; leerlingen moeten ook hun klas en de naam van hun school vermelden.
Je inzending moet bij ons binnen zijn vóór 30 april 2011.

DE GOEDE INZENDERS VAN NOVEMBER 2010

198: Tysger Boelens (klas 3), RSG Ter Apel; Stijn Cambie (klas 5), VTI Poperinge; Thijs van der Gugten (klas 5), GSG Guido de Brès, Amersfoort; Kai Hugtenburg (klas 3), Barlaeusgymnasium, Amsterdam; Jan-Willem van Ittersum (klas 5), Keizer Karel College, Amstelveen; Marcel Roggeband, Hoofddorp; Michelle Sweering (klas 3), Erasmiaans Gymnasium, Rotterdam; Djurre Tijsma (klas 4), Christelijk Gymnasium Beyers Naudé, Leeuwarden.
199: Stijn Cambie (klas 5), VTI Poperinge; Rick Damhuis (klas 5), Twents Carmel College locatie Lyceumstraat, Oldenzaal; Thijs van der Gugten (klas 5), GSG Guido de Brès, Amersfoort; Jan-Willem van Ittersum (klas 5), Keizer Karel College, Amstelveen; Edward van Kervel, Oldenzaal; Lorenzo van Ramselaar (klas 3), Het Goese Lyceum locatie van Dusseldorpstraat; Marcel Roggeband, Hoofddorp; Dean Salwegter (klas 5), Dalton Lyceum locatie Kapteynweg, Dordrecht; Michelle Sweering (klas 3), Erasmiaans Gymnasium, Rotterdam; Djurre Tijsma (klas 4), Christelijk Gymnasium Beyers Naudé, Leeuwarden; Paul van de Veen, Enschede.
200: Kees Boersma, Vlissingen; Stijn Cambie (klas 5), VTI Poperinge; Thijs van der Gugten (klas 5), GSG Guido de Brès, Amersfoort; Jan-Willem van Ittersum (klas 5), Keizer Karel College, Amstelveen; Edward van Kervel, Oldenzaal; Stefan Klootwijk (klas 6), Bonhoeffer College locatie Van der Waalslaan, Enschede; Peter van der Lecq, Utrecht; Marcel Roggeband, Hoofddorp; Michelle Sweering (klas 3), Erasmiaans Gymnasium, Rotterdam; Djurre Tijsma (klas 4), Christelijk Gymnasium Beyers Naudé, Leeuwarden; Paul van de Veen, Enschede.
201: Tysger Boelens (klas 3), RSG Ter Apel; Kees Boersma, Vlissingen; Stijn Cambie (klas 5), VTI Poperinge; Thijs van der Gugten (klas 5), GSG Guido de Brès, Amersfoort; Jan-Willem van Ittersum (klas 5), Keizer Karel College, Amstelveen; Edward van Kervel, Oldenzaal; Stefan Klootwijk (klas 6), Bonhoeffer College locatie Van der Waalslaan, Enschede; Marcel Roggeband, Hoofddorp; Michelle Sweering (klas 3), Erasmiaans Gymnasium, Rotterdam; Paul van de Veen, Enschede.
De Irisbonnen gaan naar Tysger Boelens en Jan-Willem van Ittersum.

OPGAVE 206

Hieronder zie je een (massieve) kubus waarvan de ribben lengte 10 hebben. De punten A en B liggen op de middens van een ribbe. Een mier wandelt via een zo kort mogelijke weg van A naar B.
Wat is de afstand die de mier aflegt?



OPGAVE 207

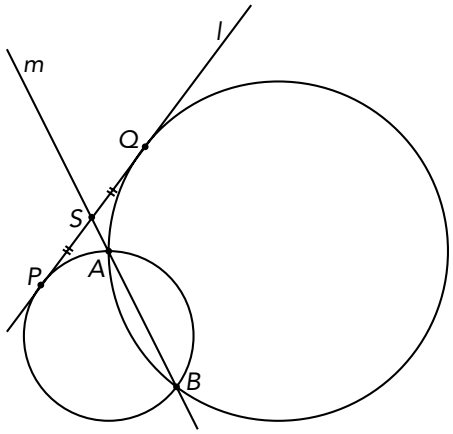
Bekijk de volgende figuur bestaande uit 7×7 getallen:

1	0	–1	–2	–1	0	1
2	1	0	–1	0	1	2
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
2	1	0	–1	0	1	2
1	0	–1	–2	–1	0	1

We breiden deze figuur uit tot een figuur bestaande uit 2011×2011 getallen, waarbij we er voor zorgen dat de rode 1 in het midden blijft. Bepaal de som van alle getallen in die figuur.

OPGAVE 208

Twee cirkels snijden elkaar in de punten A en B. De lijn door A en B noemen we m. Eén van de twee gemeenschappelijke raaklijnen van de cirkels noemen we l; de raakpunten noemen we P en Q. Als S het snijpunt is van m en l, bewijs dan dat $|PS| = |QS|$.



OPGAVE 209

Gegeven is de verzameling $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ en een operatie ♥ met de volgende eigenschappen:

1. Voor $x, y \in V$ is x ♥ y opnieuw een element van V.
2. Voor $x, y \in V$ geldt x ♥ $y = y$ ♥ x.
3. Voor $x, y, z \in V$ geldt x ♥ (y ♥ z) = (x ♥ y) ♥ z.
4. Voor $x, y \in V$ is er altijd een $z \in V$ zodat x ♥ $z = y$, bovendien is z altijd uniek.
5. Specifieke bewerkingen:
   1 ♥ 2 = 3; 2 ♥ 3 = 4; 1 ♥ 5 ≠ 4.

Bepaal 3 ♥ 5.

OPLOSSING 198

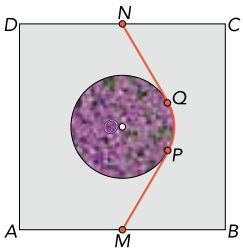
Een kubus van 8 bij 8 bij 8 is opgebouwd uit 8 × 8 × 8 = 512 kleine kubusjes van 1 × 1 × 1. In de kleine kubusjes plaatsen we schaaktorens, op zo'n manier dat twee ervan niet in eenzelfde rij zitten. Hoeveel torens kun je op deze manier maximaal in de kubus van 8 bij 8 bij 8 plaatsen?

Oplossing. Omdat er 64 kolommen (verticale rijen) zijn, kunnen we in ieder geval niet meer dan 64 torens kwijt. Dat we er wel 64 kunnen plaatsen, is te zien in onderstaand schema, dat een bovenaanzicht van de kubus voorstelt. Per kolom vertelt het getal op welke hoogte we de toren plaatsen.

1	2	3	4	5	6	7	8
8	1	2	3	4	5	6	7
7	8	1	2	3	4	5	6
6	7	8	1	2	3	4	5
5	6	7	8	1	2	3	4
4	5	6	7	8	1	2	3
3	4	5	6	7	8	1	2
2	3	4	5	6	7	8	1

OPLOSSING 199

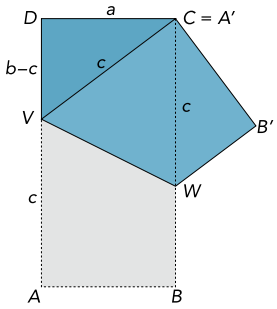
De school van Leah heeft een vierkant binnenpleintje (*ABCD* in onderstaande figuur) van 40 bij 40 meter. Dit binnenpleintje kun je vanuit twee deuren betreden; die deuren bevinden zich in de middens *M* en *N* van *AB* respectievelijk *CD*. In het midden van het plein is een rond bloemperkje met een straal van 10 meter. Hoe lang is de kortste route die Leah kan lopen van *M* naar *N*, zonder dat zij daarvoor de bloemen in het perkje tot moes hoeft te stampen?



Oplossing. De kortste route bestaat uit drie delen: de lijnstukken *MP* en *QN* die de cirkel raken, en de cirkelboog *PQ* die deze lijnstukken verbindt. Omdat *P* een raakpunt is, geldt $\angle MPO = 90°$, waarbij *O* het middelpunt van de cirkel is. De stelling van Pythagoras vertelt ons dat $|MP|^2 = |MO|^2 - |OP|^2 = 20^2 - 10^2$, dus $|MP| = 10\sqrt{3}$. Uit $\cos \angle MOP = |OP|/|OM| = \frac{1}{2}$ volgt $\angle MOP = 60°$. Aan de andere kant volgt uit dezelfde redenering dat ook $|QN| = 10\sqrt{3}$ en $\angle QON = 60°$. Nu weten we dat $\angle POQ = 180° - 60° - 60° = 60°$, zodat boog $PQ = \frac{60°}{360°} \times 2\pi \times 10 = 10\pi/3$. De totale lengte komt dus uit op $20\sqrt{3} + 10\pi/3$ meter (dat is ruim 45 meter).

OPLOSSING 200

We hebben een rechthoekig vel papier *ABCD*. De oppervlakte van deze rechthoek noemen we *O*. We vouwen punt *A* naar punt *C*. De oppervlakte van het papier dat zo ontstaat (het blauwe deel in de figuur) noemen we *O'*. Wat zijn de mogelijke verhoudingen waarmee de oppervlakte van het papier op deze manier afneemt? Met andere woorden: vind alle mogelijke waarden van $r = O'/O$.



Oplossing. Als het papier vierkant is, is de vouwlijn precies de diagonaal en geldt $r = \frac{1}{2}$. Zo niet, neem dan aan dat $|CD| = a$ en $|AD| = b$ met $a < b$. Dan is $O = ab$. Laat *VW* de vouwlijn zijn en zij $c = |AV| = |CV|$. Uit de symmetrie volgt dan ook $|CW| = c$. In ΔCDV geeft de stelling van Pythagoras: $a^2 + (b - c)^2 = c^2$ met als oplossing $c = (a^2 + b^2)/2b$. Verder is $|CD| = a$ de hoogte van ΔVWC behorende bij basis $|CW| = c$, dus is $\text{opp}(\Delta VWC) = \frac{1}{2}ac = (a(a^2 + b^2))/4b$. De oppervlakte waarmee de figuur afneemt, is de oppervlakte van het gebied waar het papier dubbel komt te liggen, dus $O' = O - \text{opp}(\Delta VWC) = ab - a(a^2 + b^2)/4b$. We vinden dus $r = 1 - (a^2 + b^2)/4b^2 = \frac{3}{4} - \frac{a^2}{4b^2}$. Als we *b* nou heel groot maken, dan komt *r* willekeurig dicht bij $\frac{3}{4}$ te liggen en als $b \approx a$, dan komt *r* dicht bij $\frac{1}{2}$. Er geldt dus: $\frac{1}{2} \le r < \frac{3}{4}$.

OPLOSSING 201

We noemen een geheel getal *breekbaar* als het aan de volgende eisen voldoet:

- als *a* en *b* breekbaar zijn, dan is $a + b$ ook breekbaar;
- als *a* breekbaar is, dan is $-a$ dit ook.

Bewijs: als $n - 1$ breekbaar is, dan is $n^{2010} - 1$ ook breekbaar.

Oplossing. Uit de eerste eigenschap volgt dat als *a* breekbaar is, $ka = a + a + \ldots + a$ [*k* termen *a*] ook breekbaar is voor alle gehele $k \ge 1$. Wegens de tweede eigenschap is $a + (-a) = 0$ ook breekbaar, en dus ook $0 + (-a) + (-a) + \ldots + (-a)$ [*k* termen $-a$] $= -ka$ voor alle gehele $k \ge 1$. In het algemeen is elk veelvoud van *a* breekbaar. Omdat $n^{2010} - 1 = (1 + n + n^2 + \ldots + n^{2009})(n - 1)$, is dit een veelvoud van $n - 1$ en dus breekbaar.

OPLOSSINGEN KLEINE NOOTJES NR. 3

JUBELJAAR IN MUNTEN

Splits de acht munten als volgt: (1, 50), (2, 100) en (5, 10, 20, 200). Het jubeljaar 50 kun je nu drie keer als volgt maken: $1 \times 50 = 50$, $100 : 2 = 50$ en $200 : 5 + 20 - 10 = 50$.

OVERGIETEN

Het lukt met zeven overgietingen:
8, 0, 0 → 3, 5, 0 → 3, 2, 3 → 6, 2, 0 →
6, 0, 2 → 1, 5, 2 → 1, 4, 3 → 4, 4, 0.

GROOTSTE PRODUCT

Het grootst haalbare product is 36.
Splits 10 als $4 + 3 + 3$ of als $2 + 2 + 3 + 3$.
Dat levert $4 \times 3 \times 3 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 36$.

DAMMEN

Er moeten 9 partijen worden gespeeld.
Het kan op meerdere manieren, bijvoorbeeld:
ronde 1: 5 partijen, over 5 spelers;
ronde 2: 2 partijen, over 3 spelers;
ronde 3: 1 partij, over 2 spelers;
ronde 4 (finale): 1 partij.

VIERKANT LEGGEN

Als we het aantal puzzelstukjes a noemen, dan geldt dat $a \times 60 = a \times 2 \times 2 \times 3 \times 5$ en dat moet een kwadraat zijn. De kleinste waarde van a waarvoor dat geldt, is $a = 3 \times 5 = 15$. Rangschik de 15 puzzelstukjes zo, dat je een vierkant krijgt met zijden 3×10 en 5×6.

PYTHAGORAS
50ste jaargang nummer 4
februari 2011
ISSN 0033 4766

***Pythagoras* stelt zich ten doel jongeren kennis te laten maken met de leuke en uitdagende kanten van wiskunde. *Pythagoras* richt zich tot leerlingen van vwo en havo en alle anderen die jong van geest zijn.**

Internet www.pythagoras.nu

Hoofdredacteur Arnout Jaspers

Eindredacteur Alex van den Brandhof

Redactie Matthijs Coster, Jeanine Daems, Jan Guichelaar, Klaas Pieter Hart

Bladmanager Arnout Jaspers
Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
Postbus 9512, 2300 RA Leiden

Vormgeving Grafisch Team
Digipage BV, Leidschendam

Druk Drukkerij Ten Brink, Meppel

Uitgever Koninklijk Wiskundig Genootschap

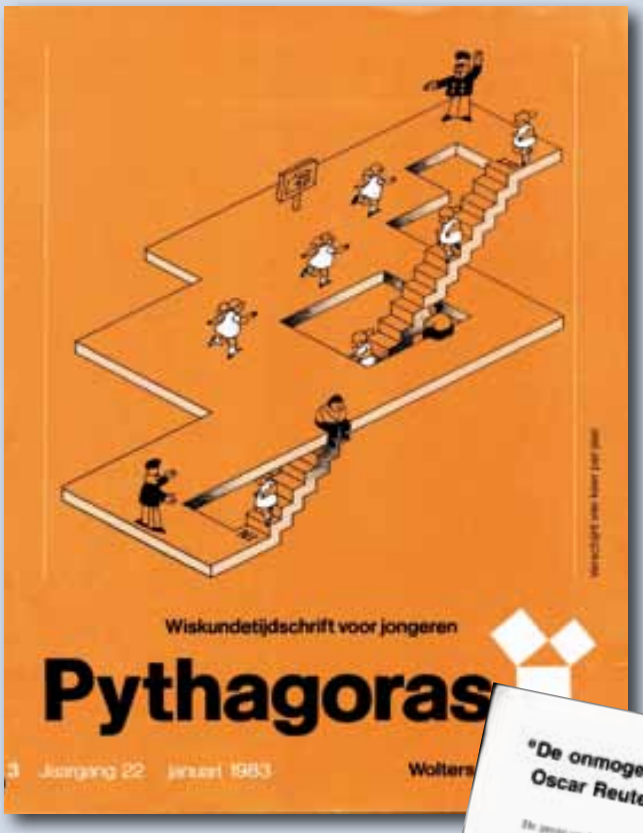
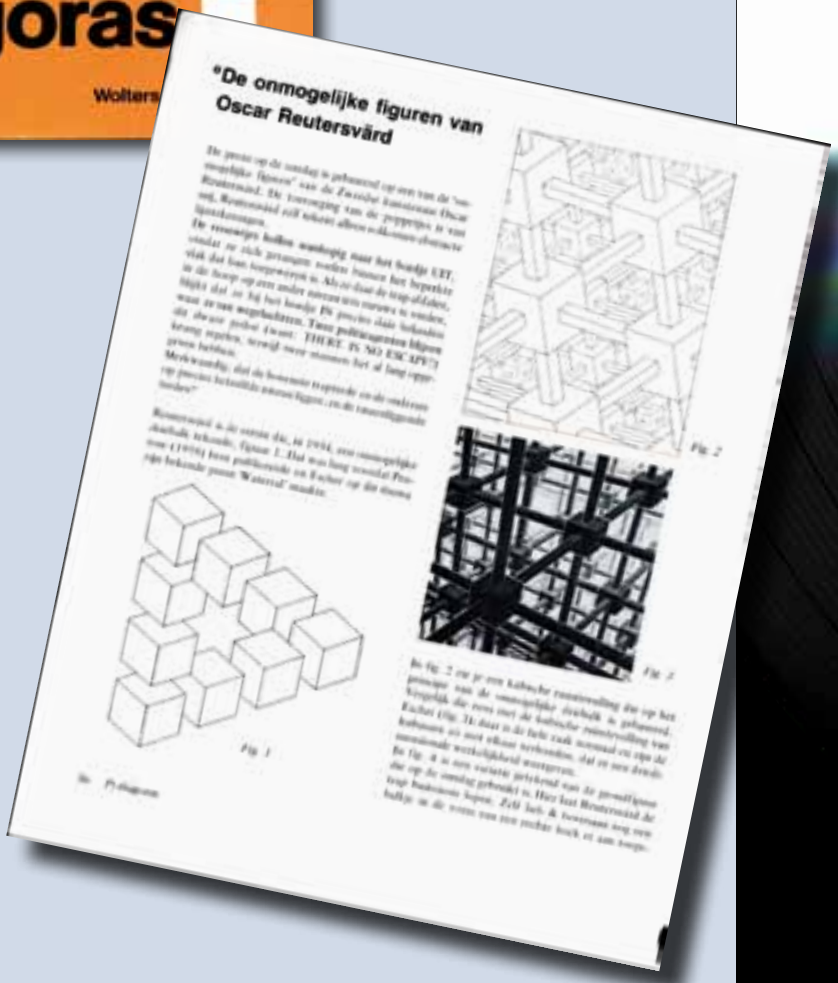
Verantwoordelijk uitgever Chris Zaal

Lezersreacties en kopij
Bij voorkeur per e-mail; lezersreacties naar Jan Guichelaar, jan@pythagoras.nu en kopij naar Arnout Jaspers, arnout@pythagoras.nu. Eventueel per post naar Jan Guichelaar, Pedro de Medinalaan 162, 1086 XR Amsterdam.

Abonnementen, bestellingen en mutaties
Drukkerij Ten Brink
Abonnementenadministratie
Postbus 41
7940 AA Meppel
Telefoon: 0522 855 175
E-mail:
abonnementen@pythagoras.nu

Abonnementsprijs
(6 nummers per jaargang)
€ 25,00 (Nederland),
€ 28,00 (België),
€ 32,00 (overig buitenland),
€ 22,00 (leerlingabonnement Nederland),
€ 25,00 (leerlingabonnement België),
€ 15,00 (groepsabonnement Nederland),
€ 16,00 (groepsabonnement België).
Zie www.pythagoras.nu voor toelichtingen.

Aan dit nummer werkten mee
Dick Beekman, auteur van diverse breinbrekerboeken (d.beekman9@chello.nl), Alex van den Brandhof, docent wiskunde op het Vossiusgymnasium te Amsterdam (alex@pythagoras.nu), Arie Breedijk, budgetbeheerder bij het Ministerie van OCW (arie47breedijk@hetnet.nl), Matthijs Coster, wetenschappelijk onderzoeker bij het Ministerie van Defensie (matthijs@pythagoras.nu), Jeanine Daems, aio wiskunde aan de UL en docent wiskunde op het Rijnlands Lyceum te Sassenheim (jeanine@pythagoras.nu), Jan Guichelaar, wetenschapshistoricus (jan@pythagoras.nu), Klaas Pieter Hart, docent topologie aan de TUD (kp@pythagoras.nu), Alexander van Hoorn, student wiskunde aan de UvA (alexander@pythagoras.nu), Arnout Jaspers, wetenschapsjournalist (arnout@pythagoras.nu), Julian Lyczak, student wis-, natuur- en sterrenkunde aan de UU (julian_lyczak@hotmail.com), Eddie Nijholt, student wiskunde aan de UvA (eddie@pythagoras.nu), Ionica Smeets, wiskundige en wetenschapsjournalist (ionica.smeets@gmail.com).

28 JAAR GELEDEN

Op de achterkanten van deze vijftigste jaargang van *Pythagoras* laten we je zien hoe het tijdschrift in de loop der jaren is veranderd. Hier zie je het omslag en een pagina uit het binnenwerk van het januarinummer 1983 (jaargang 22 nummer 3), over de 'onmogelijke figuren' van de Zweedse kunstenaar Oscar Reutersvärd (1915-2002).