

PYTHA GORAS

WISKUNDETIJDSCHRIFT VOOR JONGEREN



Uitslag jubileumprijsvraag

IMO in Nederland

50 jaar rekenapparaten

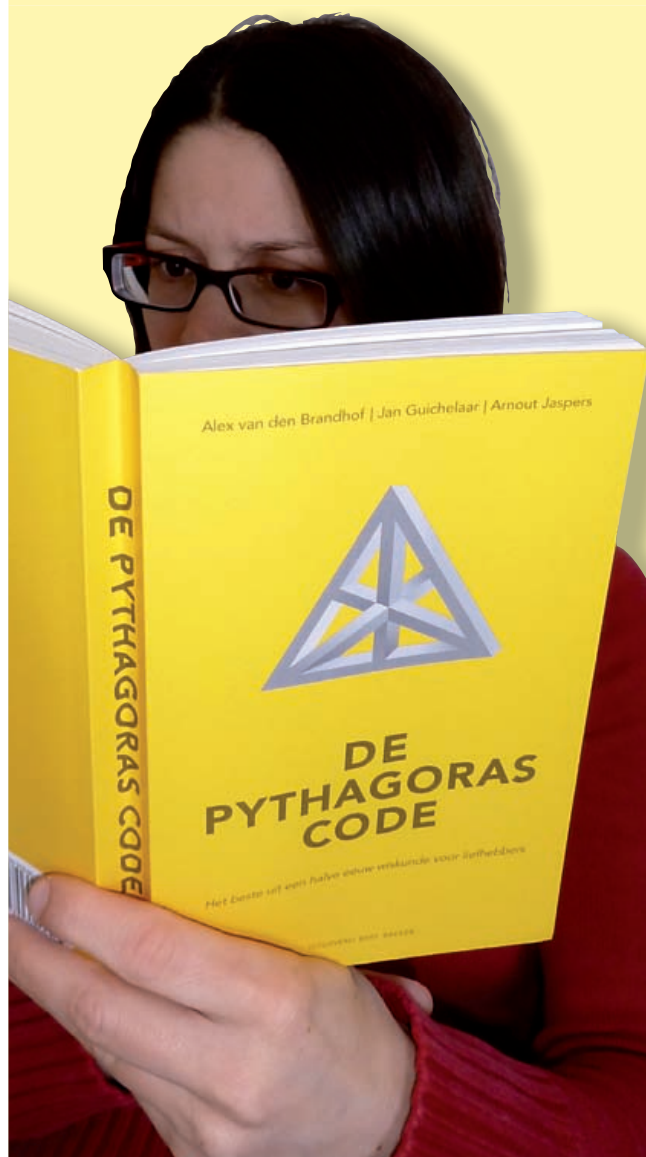
EEN VLIEGENDE START

Tijdens een drukbezochte en gewaardeerde boekpresentatie, op 2 april in Science Center NEMO, nam Bruno Ernst, hoofdredacteur van *Pythagoras* tijdens de eerste dertig jaargangen, het nulde exemplaar van *De Pythagoras Code* in ontvangst (foto rechts). Robbert Dijkgraaf, president van de KNAW en bekend wetenschapspopularisator, kreeg vervolgens het eerste exemplaar (foto onder). 'Vanaf nu zal niemand zich meer tevreden stellen met een eerste exemplaar, als er ook een nulde exemplaar is,' voorspelde hij.



Het jubileumboek van *Pythagoras*, met de beste puzzels en artikelen uit vijftig jaargangen, is een enorm succes. Al na een paar weken was de eerste druk volledig uitverkocht en verscheen er een tweede druk.

De Pythagoras Code – het beste uit een halve eeuw wiskunde voor liefhebbers. Samenstelling Alex van den Brandhof, Jan Guichelaar en Arnout Jaspers. Bert Bakker, 271 pagina's, € 19,95.



INHOUD

4



UITGEREKEND!

In de laatste aflevering over het thema '50 jaar' lees je over de ontwikkeling van rekenapparaten. In hetzelfde jaar dat de allereerste *Pythagoras* verscheen, kwam ook de eerste elektronische rekenmachine op de markt. Die was echter nog niet zo klein en licht als de zakjapanners van nu.

16



BEELD UIT EEN PRINTER

In het beeldenpark Arte Sella in Noord-Italië staat een twee meter hoog object van de Nederlandse wiskundige en kunstenaar Rinus Roelofs. Het beeld is gemaakt met een 3D-printer: een gigantisch apparaat waarmee vanuit een digitaal ontwerp betonnen objecten gemaakt kunnen worden.

26



NEDERLAND KLAAR VOOR THUISWEDSTRIJD

Van 16 tot 24 juli zal Amsterdam van alle steden op de wereld het meeste wiskundetalent binnen de stadsgrenzen hebben. Dan wordt hier namelijk de *International Mathematical Olympiad* (IMO) gehouden. Wat komt er zoal kijken bij de organisatie van zo'n groots evenement?

EN VERDER

- 2 Kleine nootjes
- 10 Om te jubelen
- 14 Journaal
- 15 De post
- 18 Volmaakte getallen in het oude Egypte
- 22 De kinderen van Femke
- 29 Brokkelige getallen
- 30 Pythagoras Olympiade
- 33 Oplossingen Kleine nootjes nr. 5

Figuur omslag: invulling van de polyomino-puzzel (aflevering 5 van de jubileumprijsvraag) door Liesbet Deconinck. Symmetrische delen zijn blauw gekleurd. In totaal zijn er 256 symmetrieën!

■ **NIVEAUBALKJES** Pagina's met één of meer zwarte balkjes (onder de paginanummering) geven de moeilijkheidsgraad aan. Eén balkje: lastig. Twee balkjes: vereist wiskundekennis uit de vijfde of zesde klas. Drie balkjes: net iets moeilijker.

KLEINE NOOTJES

■ door Jan Guichelaar

BROODSUDOKU

De sudoku is overal doorgedrongen: het plaatje hiernaast komt van een menukaart van een Italiaans restaurant in Dublin. Maar een echte sudoku is het niet. Los de half ingevulde nep-sudoku op en maak er een Latijns vierkant van (in elke rij en kolom vier verschillende broden). Hoeveel broden moet je minimaal verplaatsen om er een echte sudoku van te maken (met ook vier 2×2 -vierkantjes waar alle vier broden in staan)? Maak deze ook af.



GELD HALEN

Een man haalt een bedrag van de Commerzbank. De bankmedewerker wil het gevraagde bedrag uitkeren in een 500 eurobiljet en een aantal 100 eurobiljetten. Maar door zijn onoplettendheid verwisselt hij de 100 en de 500 eurobiljetten. De man komt daar pas thuis achter en merkt dat hij drie keer zo veel heeft gekregen als waarom hij gevraagd heeft. Welk bedrag had de man eigenlijk gevraagd? Trouwens, wat is er bijzonder aan het logo van de Commerzbank?



Kleine nootjes zijn eenvoudige opgaven die weinig of geen wiskundige voorkennis vereisen om opgelost te kunnen worden. De antwoorden vind je in het volgende nummer van Pythagoras.

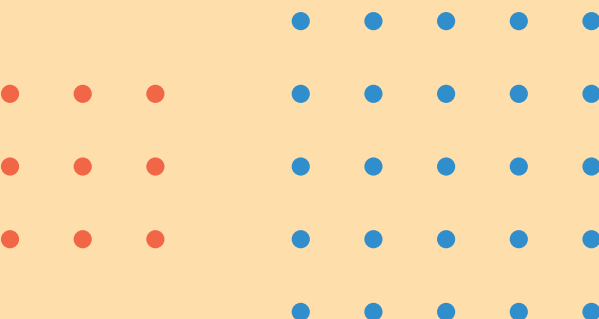
LANGZAAM EN SNEL

Lena rijdt een tijdje met een vaste snelheid, daarna de drievoudige tijd met de drievoudige snelheid. Dan keert zij om en rijdt met de dubbele beginsnelheid terug om precies na anderhalf uur terug te zijn. Hoe lang duurde haar eerste stuk?



SPAARVARKEN

Kees haalt een derde deel van het geld uit zijn spaarvarken. Een week later haalt hij er een kwart uit. Weer een week later een vijfde deel. Dan heeft hij nog 40 euro over. Hoeveel had hij eerst in zijn spaarvarken?



PEN OP PAPIER

Lukt het jou om in vier lijnen alle negen punten van een roostervierkant te bereiken, zónder je pen van het papier te nemen? En kan het met dubbel zoveel lijnen ook voor een roostervierkant van 25 punten?



Toen het eerste nummer van *Pythagoras* verscheen, gebeurde het meeste rekenwerk nog ongeveer als in de twee eeuwen daarvoor: met pen, papier en logaritmetafels. Alleen voor heel omslachtige rekenklussen waren er logge, mechanische rekenmachines. Maar in 1961 kwam de eerste elektronische tafelrekenmachine op de markt, in de jaren '70 werd de zakrekenmachine populair en nu heeft elke middelbare scholier een grafische rekenmachine. Via internet kun je zelfs met een muisklik differentiaalvergelijkingen oplossen.

■ door Alex van den Brandhof en Jan Guichelaar

UITGEREKENEND!

Voor een berekening als $7324^4 \times 23,6^3 : 0,0348^3$ pak je tegenwoordig natuurlijk de rekenmachine of mobiele telefoon. Iedereen boven de veertig (en zelfs sommigen die jonger zijn:-)) kan dit nog met pen en papier uitrekenen, maar dat duurt al gauw een half uur, althans, als je redelijk zeker wilt weten dat je geen rekenfout hebt gemaakt. Meestal echter hoeft het antwoord maar tot op twee of drie decimalen nauwkeurig te zijn, en dan kan het veel sneller, door logaritmes te gebruiken.

TABELLENBOEK In het pre-rekenmachinetijdperk zocht je logaritmes op in dikke tabellenboeken. Door hun speciale eigenschappen (zie kader 'Wat is een logaritme?') versimpelt het vermenigvuldigen en delen van getallen tot het optellen en aftrekken van hun logaritmes. Net zo versimpelen machtsverheffen en worteltrekken tot vermenigvuldigen en delen. Dat was precies de reden voor de Schot John Napier (1550-1617) om de logaritmes te ontwikkelen.

In een logaritmetafel staan voor een groot aantal getallen de logaritmes bij het grondtal 10. Wat is bijvoorbeeld $\log 2$? Per definitie geldt $10^{\log 2} = 2$, dus $\log 2$ ligt tussen 0 en 1 (want $10^0 = 1 < 2$ en $10^1 = 10 > 2$). Proberen: $\frac{1}{2}$ is te groot, want $10^{1/2} = \sqrt{10} > 3$; $\frac{1}{4}$ is te klein, want $10^{1/4} = \sqrt[4]{10} < 2$.

Veel proberen en rekenen geeft de benadering: $\log 2 \approx 0,30103$. Je ziet: het met de hand uitrekenen van logaritmes was vroeger een helse klus, maar het werd toch vlijtig gedaan, tot wel zes of meer cijfers achter de komma nauwkeurig. In figuur 1 zie je een pagina uit een logaritmetafel. Zo'n tafel geeft alleen logaritmes voor de getallen van 1 tot en met 9,999. Meer is niet nodig, zoals je straks zult zien.

Zoek bijvoorbeeld de logaritme van 7,526. De mantisse van deze logaritme (de vier cijfers achter de komma) is 8762 voor de logaritme van 7,52. Voor de laatste 6 kijken we naar de laatste negen kolommen. In de kolom onder de 6 zien we het cijfer 3. Dat komt erbij. Dus $\log 7,526 = 0,8762 + 0,0003 = 0,8765$, met andere woorden: $10^{0,8765} \approx 7,526$.

WAT IS EEN LOGARITME? Kijk eens naar de vergelijking $2^x = 8$. Je ziet waarschijnlijk al snel dat $x = 3$. Maar hoe zit dat bij $2^x = 6$? Je kunt x niet met de operaties $+$, $-$, $\times$, $:$ of door middel van worteltrekken vinden, zoals dat wel kan bij vergelijkingen als $2 + x = 6$ ($x = 4$), of $x^2 = 6$ ($x = \pm\sqrt{6}$).

Daarom voeren we de *logaritme* in: de oplossing van $g^x = a$ is per definitie $x = {}^g\log a$. In woorden: ${}^g\log a$ is de macht waartoe je het grondtal g moet verheffen om a te krijgen. Dus $2^x = 6$ heeft $x = {}^2\log 6$ (ongeveer 2,58) als oplossing.

De logaritmetafels die vroeger gebruikt werden, gingen impliciet uit van het grondtal 10, dus met $\log a$ werd ${}^{10}\log a$ bedoeld. Bij de rekenma-

chines van tegenwoordig is dat nog steeds zo. Er geldt dus: $10^{\log a} = a$.

Een paar eigenschappen van logaritmes:

- $10^{\log a} = a$ (per definitie).
- $10^{\log a + \log b} = 10^{\log a} \times 10^{\log b} = ab = 10^{\log ab}$, dus $\log ab = \log a + \log b$.
- $\log(1) = 0$, want $10^0 = 1$.
- $0 = \log 1 = \log \frac{a}{a} = \log a + \log \frac{1}{a}$, dus $\log \frac{1}{a} = -\log a$.
- $\log \frac{a}{b} = \log a + \log \frac{1}{b} = \log a - \log b$.
- $\log a^n = \log a + \dots + \log a = n \log a$.
- $\log a = \log (\sqrt[n]{a})^n = n \times \log \sqrt[n]{a}$, dus $\log \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \log a$.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	-0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374	4	8	12	17	21	25	29	33	37	55	-7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474
11	-0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	4	8	11	15	19	23	26	30	34	56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
12	-0828	0868	0904	0939	0974	1009	1043	1077	1110	1143	3	7	10	14	17	21	24	28	31	57	7559	7566	7574	7582	7590	7597	7604	7612	7619	7627
13	-1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430	3	6	10	13	16	19	23	26	29	58	-7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
14	-1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732	3	6	9	12	15	18	21	24	27	59	-7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
15	-1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014	3	6	8	11	14	17	20	22	25	60	-7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
16	-2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279	3	5	8	11	13	16	18	21	24	61	-7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
17	-2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529	2	5	7	10	12	15	17	20	22	62	-7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
18	-2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765	2	5	7	9	12	14	16	19	21	63	-7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
19	-2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989	2	4	7	9	11	13	16	18	20	64	-8062	8069	8076	8083	8090	8096	8102	8109	8116	8122
20	-3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	2	4	6	8	10	12	15	17	19	65	-8169	8176	8183	8190	8196	8203	8209	8216	8222	8228
21	-3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	2	4	6	8	10	12	14	16	18	66	-8222	8229	8236	8243	8250	8256	8263	8269	8276	8282
22	-3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	2	4	6	8	10	12	14	15	17	67	-8261	8267	8274	8281	8287	8294	8301	8307	8314	8320
23	-3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	2	4	6	7	9	11	13	15	17	68	-8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
24	-3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	2	4	5	7	9	11	13	14	16	69	-8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445
25	-3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	2	3	5	7	9	10	12	14	15	70	-8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
26	-4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	2	3	5	7	8	10	11	13	15	71	-8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
27	-4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	2	3	5	6	8	9	11	13	14	72	-8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
28	-4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	2	3	5	6	8	9	11	12	14	73	-8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
29	-4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	1	3	4	6	7	9	10	12	13	74	-8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
30	-4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	1	3	4	6	7	9	10	11	13	75	-8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
31	-4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	1	3	4	6	7	8	10	11	12	76	-8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
32	-5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	1	3	4	5	7	8	9	11	12	77	-8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
33	-5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	1	3	4	5	6	8	9	10	12	78	-8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
34	-5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	1	3	4	5	6	8	9	10	11	79	-8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025
35	-5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	1	2	4	5	6	7	9	10	11	80	-9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
36	-5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	1	2	4	5	6	7	8	10	11	81	-9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
37	-5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	1	2	3	5	6	7	8	9	10	82	-9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186
38	-5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	1	2	3	5	6	7	8	9	10	83	-9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
39	-5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	1	2	3	4	5	7	8	9	10	84	-9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
40	-6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	1	2	3	4	5	6	8	9	10	85	-9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
41	-6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	1	2	3	4	5	6	7	8	9	86	-9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
42	-6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	1	2	3	4	5	6	7	8	9	87	-9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
43	-6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	1	2	3	4	5	6	7	8	9	88	-9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489
44	-6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	1	2	3	4	5	6	7	8	9	89	-9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
45	-6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	1	2	3	4	5	6	7	8	9	90	-9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
46	-6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	1	2	3	4	5	6	7	8	9	91	-9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633
47	-6721	6730	6739	6748	6757	6767	6776	6785	6794	6803	1	2	3	4	5	6	7	8	9	92	-9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
48	-6812	6821	6830	6839	6848	6857	6867	6875	6884	6893	1	2	3	4	5	6	7	8	9	93	-9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
49	-6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	1	2	3	4	5	6	7	8	9	94	-9721	9726	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763
50	-6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	1	2	3	4	5	6	7	8	9	95	-9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
51	-7076	7084	7092	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	1	2	3	4	5	6	7	8	9	96	-9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
52	-7160	7169	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	1	2	3	4	5	6	7	8	9	97	-9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
53	-7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7301	7308	7316	1	2	3	4	5	6	7	8	9	98	-9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
54	-7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	1	2	3	4	5	6	7	8	9	99	-9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996

Figuur 1 Een pagina uit het boek *De consequenties van 1 = 1* van Lancelot Hogben, met logaritmetafels. Wit omcirkeld zijn de waarden om de logaritme van 7,526 te vinden.

VERMENIGVULDIGEN Nu gaan we met de logaritmetafel in figuur 1 een berekening doen. Bijvoorbeeld $p = 7324 \times 23,6 : 0,0348 = 7,324 \times 10^3 \times 2,36 \times 10^{-1} : (3,48 \times 10^{-2}) = (7,324 \times 2,36 : 3,48) \times 10^6$. Het gegoochel met de machten van 10 is nodig, omdat de tabel alleen logaritmes geeft van getallen 1,000 tot 9,999. Gebruik uit het kader de eigenschappen 2 (maar dan met drie factoren) en 5: $\log abc = \log a + \log b + \log c$ en $\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$. Dan volgt: $\log p = \log 7,324 + \log 2,36 - \log 3,48 + \log 10^6 = 0,8647 + 0,3729 - 0,5416 + 6 = 6,6960$. Dus: $p = 10^{6,6960} = 10^6 \times 10^{0,6960}$.

Nu moeten we de mantisse 6960 in de logaritmetafel opzoeken. Omdat 6960 niet voorkomt, kijken we naar de mantisse die er net onder

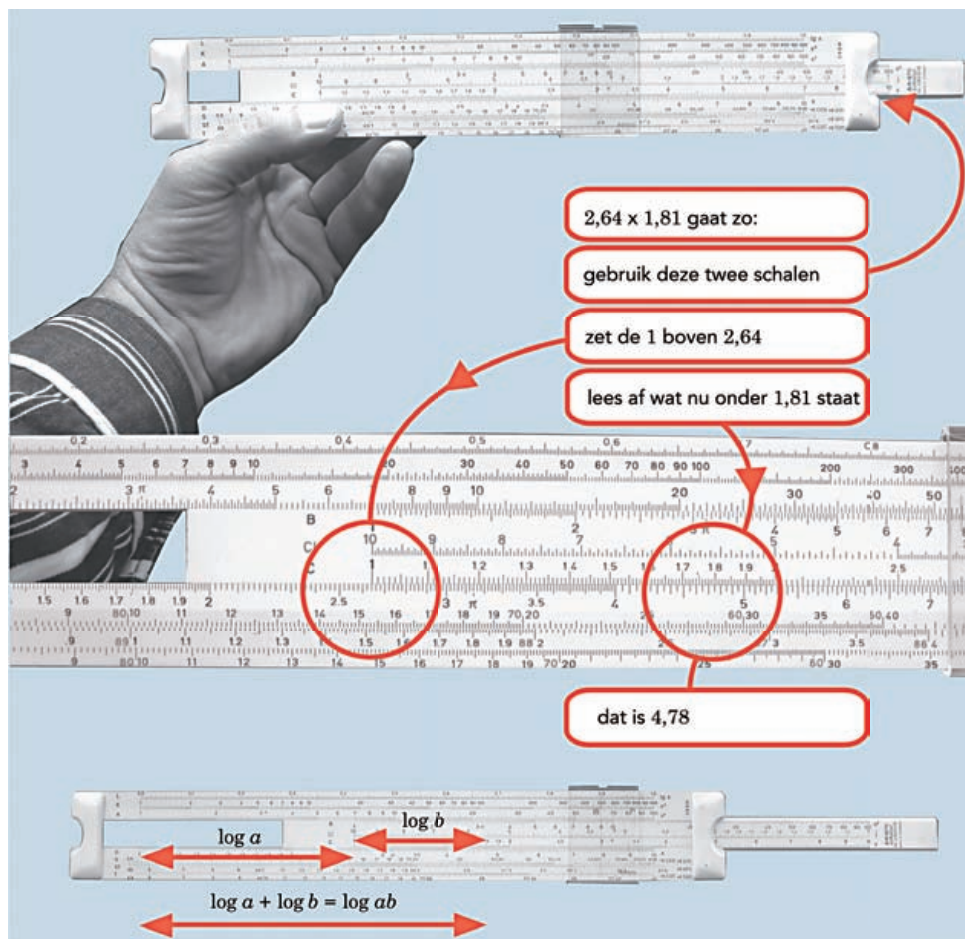
REKENLINIAAL De rekenliniaal verving voor berekeningen die niet heel nauwkeurig hoefden de logaritmetafels. Hij was net zo groot als een gewone liniaal, dus lang niet zo log als de mechanische rekenmachines (zie het kader hieronder). Tot begin jaren zeventig bezat elke student in de vakken natuurkunde en scheikunde een rekenliniaal om de berekeningen van de practica te kunnen uitvoeren. En ook sommige middelbare scholieren moesten, afhankelijk van hun leraar, er één aanschaffen.

Hoe doe je met een rekenliniaal een lastige vermenigvuldiging? In figuur 2 zie je hoe je $2,64 \times 1,81$ uitrekent. De rekenliniaal bestaat uit een boven- en onderkant, met daartussen een verschuifbaar gedeelte. Daar overheen loopt een doorzichtig plastic rechthoekje met een haarlijntje, om de diverse schaalverdelingen op hetzelfde punt af te kunnen lezen.

De schalen zijn logaritmisch; dat wil zeggen dat de afstand van 1 tot 2,64 gelijk is aan $\log 2,64$, en die van 1 tot 1,81 is $\log 1,81$. Bij het schuiven leg je de twee afstanden aan elkaar, dus krijg je $\log 2,64 + \log 1,81$, oftewel $\log(2,64 \times 1,81)$, en je leest af welk getal daarbij hoort: 4,78. Met wat oefening kun je ook met getallen van drie decimalen rekenen. Omgekeerd kun je met de rekenliniaal ook delingen uitvoeren, ga zelf na hoe precies.

Maar er is meer. Je ziet het getal π staan en op de schalen boven zie je de kwadraten. Zo kun je gemakkelijk oppervlaktes van cirkels uitrekenen. Aparte schaalverdelingen gaven waarden voor de sinus en tangens. Rekenlinialen werden ook 'op maat gemaakt' voor speciale doelgroepen die andere schalen nodig hadden.

ELEKTRONISCHE REKENMACHINES De eerste elektronische rekenmachines moesten concurreren met de al bestaande mechanische machines. Zo'n apparaat kostte enorm veel geld, dus het moest wel meer voordelen bieden dan alleen geruisloos



Figuur 2 Een vermenigvuldiging met de rekenliniaal (illustratie Marco Swaen)

MECHANISCHE REKENMACHINES

In 1623 bouwde Wilhelm Schickard (1592-1635) de eerste mechanische rekenmachine die getallen van zes cijfers kon optellen en aftrekken. Twintig jaar later heeft Blaise Pascal (1623-1662) de zogeheten *Pascaline* ontworpen en gebouwd. De machine kon optellen en aftrekken via een telmechanisme met een aantal naast elkaar liggende, van cijfers voorziene, tandwielen. Na Pascal begon het bouwen van mechanische rekenmachines pas echt. Een zeer geavanceerd exemplaar was de *Lebendige Rechenbank* van Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716).



De Pascaline is te zien in het Musée des Arts et Métiers in Parijs (foto David Monniaux)

te werken. Een van de extra's is dat hij kan worteltrekken. De eerste elektronische rekenmachine kwam in 1961 op de markt: *Anita* van de Engelse Bell Punch Company. Een paar jaar later lanceerde Toshiba de *Toscal*, je ziet hem in figuur 3. Het gaat hier om tafelmodellen: in een tas neem je ze niet zomaar mee, ze zijn loodzwaar. De cijfers in het uitleesscherms zijn elk gemaakt van meerdere lampjes.

Elke plaats bevat trouwens alle tien cijfers achter elkaar. Vandaar dat voor verschillende cijfers de niet brandende lampjes het beeld verstoren. Het afgebeelde model is in de jaren zestig en zeventig van de vorige eeuw gebruikt om de salarissen van de personeelsleden van het Waterlant College in Amsterdam-Noord, een grote middelbare school, mee uit te rekenen.

In het begin van de jaren zeventig kwamen de eerste elektronische zakrekenmachines op de markt. De wetenschappelijke versies (met sinus, cosinus, tangens, logaritmes, hyperbolische functies, e-machten en wortels) waren erg duur. Figuur 4 toont een foto van de Texas Instruments SR-50, uitgebracht in 1974. De letters SR staan voor *slide rule*, het Engelse woord voor rekenliniaal. Jan Guichelaar, een van de schrijvers van dit artikel, kreeg deze 'elektronische rekenliniaal' cadeau bij zijn promotie eind 1974. De kosten waren destijds 850 gulden (ongeveer 400 euro). Bij het huidige prijspeil zou dat ongeveer 1000 euro zijn!

GEHEUGENS De Texas Instruments SR-50 had drie geheugens: twee werkgeheugens, x (zichtbaar in de uitlezing) en y , en een Memorygeheugen toegankelijk met **STO** (store = opslaan) en **RCL** (recall = terugroepen naar x , waarbij de inhoud van x verloren ging). In totaal kon dus met drie getallen worden gerekend. Niet zelden moest daarom een tussenresultaat in een complexe berekening even opgeschreven worden om vervolgens weer te worden ingetypt. Tegenwoordig kun je werken met zoveel haakjes als je wilt, wat betekent dat alle tussenresultaten in evenzovele geheugens bewaard blijven.

De knop $x \rightleftharpoons y$ was belangrijk, om de getallen in x en y te verwisselen, zodat een bewerking gedaan kon worden op het getal in de uitlezing (bijvoorbeeld kwadrateren of de cosinus nemen). Deze knop kom je op de rekenmachines van nu niet meer tegen.

REVERSE POLISH NOTATION Uit dezelfde periode (1972) dateert de Hewlett-Packard zakrekenmachine HP-35, zie figuur 5. Als je het aantal knopjes op deze machine telt, begrijp je waarom hij HP-35 heet. Deze had vier geheugens in een zoge-



Figuur 3 Elektronische tafelrekenmachine van Toshiba (collectie Jan Guichelaar)

naamde *stack*, 'boven elkaar': x, y, z, t . Als je twee getallen a en b intypte (na elke invoer een druk op Enter), kwam de a eerst in de uitlezing x , vervolgens schoof de a naar y en kwam de b in x . Met vier getallen kwamen a in t , b in z , c in y en d in x . Bij nog een getal verdween de a uit t .

Het bijzondere was nu dat als je op $+$ drukte, het antwoord $c + d$ verscheen in x , terwijl b 'zakte' van z naar y en a zakte van t naar z . Bij deze notatie voerde je dus eerst de twee getallen in die je wilde optellen en vervolgens paste je de bewerking toe door op de $+$ te drukken. Dit heet RPN (Reverse Polish Notation, ofwel omgekeerde Poolse notatie). De HP-35 was de eerste rekenmachine die RPN gebruikte. Voordeel van RPN was dat er minder toetsaanslagen nodig zijn. Onder studenten in de jaren zeventig gaf een HP-35 daarom een iets hogere status. Bovendien was de HP-35 compact en hij had een 'snelle' vormgeving. Al snel was het apparaat zo succesvol, dat het in een paar jaar tijd de logaritmetafel en de rekenliniaal uit onderwijs en wetenschap verdreef.



Figuur 4 De Texas Instruments SR-50 uit 1974



Figuur 5 De HP-35 uit 1972: een enorm succes

STEEDS EXACTER De wetenschappelijke zakrekenmachine liet toch nog wat handarbeid over: op $\frac{1}{3} + \frac{2}{5}$ gaven de vroegere modellen als antwoord 0,733..., terwijl de wiskundeleraar natuurlijk $\frac{11}{15}$ wou zien. Sinds de jaren negentig is ook dit gebrek opgelost en bevatten rekenmachines een breukenknop.

Wat moest er dan wél nog uit het hoofd gebeuren? In elk geval het rekenen met irrationale getallen: $\sqrt{2} \times \sqrt{6}$ was voor de rekenmachine 3,464... en $\sin \frac{1}{3}\pi = 0,866...$ Maar inmiddels is ook dat verleden tijd: bijvoorbeeld de TI-30XS geeft bij $\sqrt{2} \times \sqrt{6}$ keurig $2\sqrt{3}$ als antwoord en $\sin \frac{1}{3}\pi$ is gelijk aan $\frac{1}{2}\sqrt{3}$. Handig natuurlijk, maar voor sommige leraren een gruwel: wat moeten leerlingen zélf nog kunnen?

GRAFISCHE REKENMACHINE Elke bovenbouwleerling van havo en vwo heeft sinds de invoering van de Tweede Fase, eind jaren negentig, een grafische rekenmachine. Grafiekjes tekenen, het schrijven van computerprogramma's in TI-ba-

sic, het kan daarop allemaal. In jaargang 45 schreef Henk Pfaltzgraff de serie 'Haal meer uit je GR' over programmeren op de TI-83 of TI-84 (te vinden in het archief op www.pythagoras.nu). Daarentegen kan de grafische rekenmachine niet exact met wortels rekenen.

De grafische rekenmachine berekent de nulpunten, snijpunten, extreme waarden, hellingen en de oppervlakte onder een grafiek van functies. Toch zijn algebraïsche vaardigheden nog niet overbodig, want de GR geeft geen exacte antwoorden. En de benaderingen zitten er soms pijnlijk ver naast. Wie de helling in het punt 0,001 wil weten van de grafiek van $f(x) = \sqrt{x}$, krijgt van de TI-84 als antwoord 22,36068. De werkelijke waarde is echter $f'(0,001) = 1/(2\sqrt{0,001})$, ongeveer 15,811. De GR berekent namelijk geen afgeleide, maar een differentiequotiënt op een klein interval. De grafiek van $f(x) = \sqrt{x}$ is erg steil in 0,001 en dat is waarschijnlijk de oorzaak van het foute antwoord van de GR.



Figuur 6 De calculator van Google

COMPUTER Ook de evolutie van de computer heeft het rekenen ingrijpend veranderd. Al in de jaren zestig waren er computers die perfect konden rekenen, door talen als FORTRAN, ALGOL en COBOL. Met de opmars van de pc kwam ook een groot aanbod aan rekenprogramma's, variërend van gratis software en het goedkope Derive, tot dure, krachtige pakketten als Maple, Mathematica en MathCad. Maple, sinds 1980 ontwikkeld aan de universiteit van Waterloo in Ontario, Canada, rekt exact: $\int \cos x \, dx$ wordt $\sin x$, en voor het berekenen van een helling wordt echt de afgeleide bepaald. De nieuwste studentenversie van Maple kost zo'n 100 euro.

DE ANTWOORDMACHINE Naast zoekmachines zoals Google bestaat er sinds 2009 ook een *antwoordmachine*: Wolfram Alpha (www.wolframalpha.com). In tegenstelling tot Google verwijst Wolfram Alpha niet door naar andere websites, maar probeert je onmiddellijk het antwoord te geven. De website ziet er ongeveer uit als de site van Google: slechts één veld om een vraag in te vullen en een logootje erboven. De

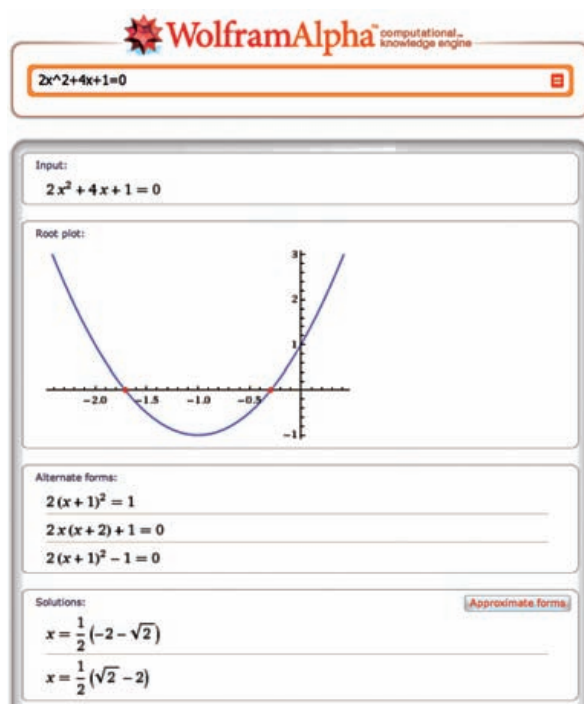
site werkt nog niet zo goed in het Nederlands, maar in het Engels is Wolfram Alpha verbluffend goed. Wie vraagt 'What is the capital of the Netherlands?' krijgt het juiste antwoord met een kaartje, en wat cijfertjes over Amsterdam. En ook op wiskundige vragen heeft Wolfram Alpha een antwoord. Wat wil je ook: de site is bedacht door Stephen Wolfram, de ontwerper van het wetenschappelijke softwareprogramma Mathematica.

POLDERWISKUNDE Niet alleen de rekenapparaten hebben in de afgelopen vijftig jaar een stormachtige ontwikkeling doorgemaakt. Ook in het rekenonderwijs heeft een ware revolutie plaatsgevonden. De verhaaltjessommen die langzaam aan terrein wonnen, hebben een eigen naam gekregen: ‘realistisch rekenen’. Daarbij ligt de nadruk op inzicht en niet op het inoefenen van rekenregels en rekenprocedures. Vanaf 1970 sloop deze nieuwe, typisch Nederlandse, filosofie de schoolboeken in. ‘In 1986 was 65 procent van de basisschoolboeken van de nieuwe filosofie door-drenkt. Nu is dat 99 procent,’ schreef *Het Parool* op 11 december 2001.

Ook op de middelbare school moest de belevingswereld van leerlingen centraal staan; de grote doorbraak kwam in 1987 met de introductie van het vak Wiskunde A.

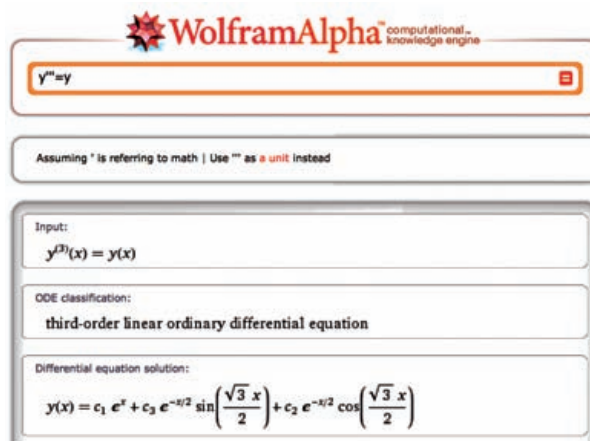
In de afgelopen jaren is de stemming over het realistisch rekenen omgeslagen. ‘We moeten weer terug naar het aanleren van routines,’ is de laatste jaren met enige regelmaat te lezen op de opiniëpagina’s van kranten. Dat de rekenvaardigheid van leerlingen is afgenomen, daarover zijn de meesten het wel eens. Maar de stammenstrijd onder wiskundigen woedt nog steeds: de bedenkers van het realistisch rekenen vinden het onterecht om hun methode de schuld te geven.

Maar met internet kan ook veel gratis. De zoekbalk van Google accepteert sommetjes als $2+3*4$ (met de haakjes uiteraard op de goede plek), zie figuur 6. Veel spannender is Wolfram Alpha (zie



Figuur 7 Wolfram Alpha lost een vergelijking met gemak op

kader ‘De antwoordmachine’). Wie in Google $\sqrt{2} * \sqrt{6}$ intikt, krijgt een benadering, terwijl Wolfram Alpha een exact antwoord geeft. Het lost ook vergelijkingen op, tik maar eens in: $2x^2 + 4x + 1 = 0$. Wolfram Alpha geeft een grafiek van $y = 2x^2 + 4x + 1$ en de twee oplossingen van de vergelijking; geen benaderingen, maar exacte uitdrukkingen, zie figuur 7. Het kan allemaal nóg geavanceerder: Wolfram Alpha draait ook voor differentiaalvergelijkingen zijn hand niet om. Tik in $y''' = y$ en je weet welke functies gelijk zijn aan hun derde afgeleiden, zie figuur 8. ■



Figuur 8 Ook differentiaalvergelijkingen zijn voor Wolfram Alpha geen probleem

REKENEN IN WETENSCHAP EN TECHNIEK Door de komst van de computer is er een breed scala aan toepassingen van het rekenen bijgekomen. In de statistiek is veel meer mogelijk dan vroeger, en voor ingenieurs zijn er nieuwe mogelijkheden om bijzondere constructies door te rekenen. Ook de Large Hadron Collider bij Genève zou zonder bliksemsnel rekenwerk geen

informatie kunnen destilleren uit de zondvloed aan data die zijn deeltjesdetectors produceren. Voor de sterrenkunde geldt net zo iets. Dit zijn maar een paar voorbeelden. In jaargang 43 van *Pythagoras* was het thema ‘Rekenwerk’. De artikelen, over onder meer rekenwerk bij het KNMI en het verifiëren van bewijzen met de computer, zijn te vinden in het archief op www.pythagoras.nu.

De jubileumprijsvraag zit er op. Vijf nummers lang verscheen in *Pythagoras* een prijsvraag met het getal 50 als thema. Sommige opgaven waren goed te doen, voor andere vraagstukken was flink wat doorzettingsvermogen nodig. Dat er lezers zijn die daar van houden, is wel gebleken. Elke aflevering weer ontvingen we inzendingen die beter of mooier waren dan we hadden verwacht. In dit laatste nummer van deze vijftigste jaargang geven we de oplossingen van aflevering 4 en 5, en maken we de winnaars bekend.

■ door Matthijs Coster

OM TE JUBELEN

OPLOSSING AFLEVERING 4 In het februari-nummer ging de prijsvraag over 25 breuken, die gemaakt zijn met de getallen 1, 2, 3, 4, ..., 50, bijvoorbeeld $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \dots, \frac{49}{50}$. De vraag was hoe je de 25 breuken moet kiezen zodat

1. de som zo groot mogelijk is;
2. de som zo klein mogelijk is;
3. de som geheel is;
4. de som zo groot mogelijk én geheel is;
5. de som zo klein mogelijk én geheel is.

De eerste twee vragen leverden niet al te veel problemen; de antwoorden zijn

$$S_{\max} = \frac{50}{1} + \frac{49}{2} + \frac{48}{3} + \dots + \frac{28}{23} + \frac{27}{24} + \frac{26}{25} \\ = 169 \frac{107.411.267}{174.974.800} \\ \approx 169,614$$

en

$$S_{\min} = \frac{1}{26} + \frac{2}{27} + \frac{3}{28} + \dots + \frac{23}{48} + \frac{24}{49} + \frac{25}{50} \\ = \frac{981.631.146.221.515.418.647}{123.961.780.169.839.868.256} \\ \approx 7,919.$$

Met de kennis dat $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \approx \ln n + \gamma$ (hierbij is $\gamma \approx 0,5772$, *Eulers constante*) kun je het maximum afschatten:

$$\frac{50}{1} + \frac{49}{2} + \frac{48}{3} + \dots + \frac{28}{23} + \frac{27}{24} + \frac{26}{25} = \\ = 51(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{25}) - 25 \approx 51(\ln 25 + \gamma) - 25 \approx 169, \text{ en het minimum:}$$

$$\frac{1}{26} + \frac{2}{27} + \frac{3}{28} + \dots + \frac{23}{48} + \frac{24}{49} + \frac{25}{50} = \\ 25 - 25(\frac{1}{26} + \frac{1}{27} + \frac{1}{28} + \dots + \frac{1}{50}) \approx \\ 25 - 25(\ln 50 - \ln 25) \approx 7,7.$$

Maar om vervolgens een som van 25 breuken te vinden die *geheel* is, is een stuk lastiger! Bij vraag 3 hoefde de som niet zo groot of zo klein mogelijk te zijn, waardoor je zelf getallen kon combineren. Zo kon je $\frac{46}{23}$ kiezen en $\frac{34}{17}$, waardoor je de lastige priemgetallen 23 en 17 kwijt was. Maar ook: $\frac{50}{25}, \frac{49}{7}, \frac{48}{24}, \frac{45}{9}, \frac{42}{21}, \frac{40}{20}, \frac{38}{19}, \frac{32}{16}, \frac{31}{1}, \frac{30}{15}$ en $\frac{28}{14}$.

Wat je dan overhoudt valt mee: 47, 44, 43, 41, 39, 37, 36, 35, 33, 29, 27, 26, 22, 18, 13, 12, 11, 10, 8, 6, 5, 4, 3 en 2. Het komt erop neer dat je dan breuken gaat combineren waarvan de som een geheel getal is: $\frac{47}{3} + \frac{36}{27}, \frac{43}{2} + \frac{26}{4}, \frac{41}{5} + \frac{8}{10}, \frac{35}{22} + \frac{18}{44}, \frac{29}{11} + \frac{12}{33}$ en

$$S_{\max, \text{ geheel}} = \frac{50}{1} + \frac{49}{2} + \frac{48}{3} + \dots + \frac{39}{12} + \frac{31}{13} + \frac{37}{14} + \frac{36}{15} + \frac{32}{16} + \frac{34}{17} + \frac{27}{18} + \frac{38}{19}$$

Figuur 1 De oplossing van vraag 4

$$S_{\min, \text{ geheel}} = \frac{1}{18} + \frac{2}{20} + \frac{7}{21} + \frac{5}{22} + \frac{8}{24} + \frac{4}{25} + \frac{3}{26} + \frac{6}{27} + \frac{13}{28} + \frac{11}{30} + \frac{10}{32} + \frac{12}{33}$$

Figuur 2 De oplossing van vraag 5

$\frac{37}{13} + \frac{6}{39}$. In dit geval wordt de totale som 125.

Ik heb hier naar het antwoord toegewerkt door niet $\frac{47}{1}$ te kiezen, maar $\frac{31}{1}$, en niet direct al $\frac{44}{22}$ apart te zetten.

Veel lastiger zijn de laatste twee vragen waarbij gevraagd wordt naar de grootste en kleinste gehele som. Vrijwel alle inzenders maakten gebruik van een computer. Rob en Sandra van Wijk stuurden een Pascalprogramma op met een toelichting van tien pagina's. Zij onderzochten het probleem om de getallen 1, 2, ..., $2N$ te schrijven als N breuken, en na te gaan hoeveel sommen van breuken een geheel getal opleveren, en welke gehele getallen kunnen worden gerealiseerd.

Los van het programmeerwerk moest er ook slim worden nagedacht, omdat er heel veel mogelijkheden zijn. Een simpel rekensommetje leert dat je ruim 10^{39} mogelijkheden zou moeten nalopen! Maar dit aantal kan aanzienlijk worden gereduceerd, want als de noemer 23 voorkomt, dan moet de teller 46 zijn, of dan moet ook 46 als noemer voorkomen en dan moet de som van deze twee breuken geheel zijn of geheel plus $\frac{1}{2}$. Het aantal mogelijkheden neemt weliswaar af, maar het programma dat moet worden geschreven wordt niet eenvoudig. Uiteraard moeten het minimum en maximum vallen tussen de grenzen die we hierboven al hadden berekend. Dus het minimum is niet kleiner dan 8 en het maximum is niet groter dan 169.

Het maximum 169 kan daadwerkelijk bereikt worden, zie figuur 1. Twee inzenders vonden dit maximum: Ernst van de Kerkhof en Frank Tinke-

lenberg. De ondergrens kan worden opgerekt door de priemgetallen groter dan 25 in de noemers te schrappen. We vinden dan als minimum de waarde 11, zie figuur 2. Ernst van de Kerkhof was de enige die dit minimum vond!

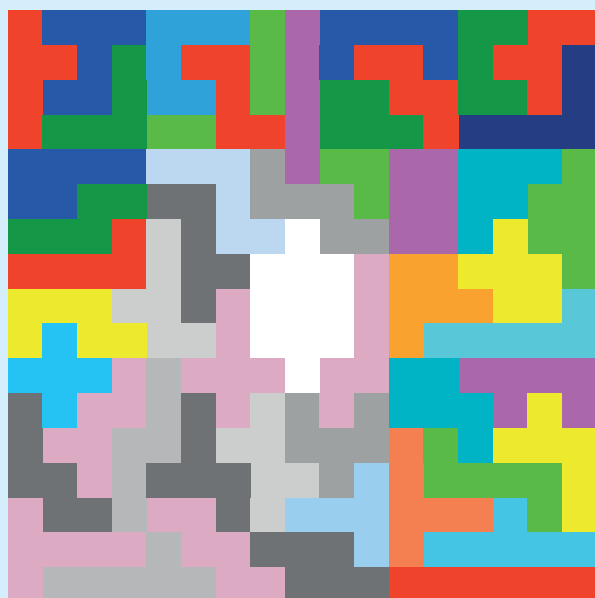
Ernst van de Kerkhof en Odette De Meulemeester lieten tevens zien dat alle gehele getallen tussen 11 en 169 eveneens met de breuken bestaande uit de getallen 1 tot en met 50 kunnen worden gemaakt.

OPLOSSING AFLEVERING 5 In het aprilnummer stond de laatste aflevering van de jubileumprijsvraag; er moest een polyomino-puzzel worden gelegd. Er was al aangegeven dat er minimaal een miljard oplossingen zouden zijn. Gelukkig heeft de redactie geen stapels met miljoenen oplossingen ontvangen. De opdracht bleek toch wel lastiger dan we hadden verwacht. De truc is om met de meest grillige stukjes te beginnen en de relatief gemakkelijke stukjes op het einde neer te leggen.

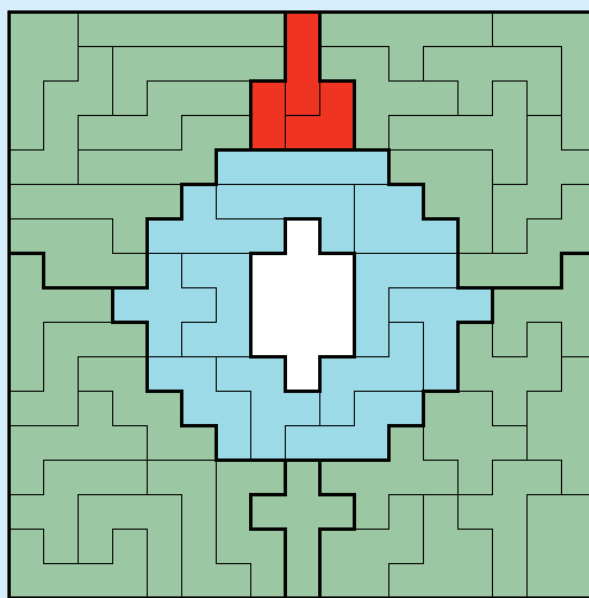
Het zoeken naar symmetrieën was een extra uitdaging. Inzenders merkten op dat het uitwisselen van delen van de puzzel geen echte symmetrie is; daar hadden ze gelijk in. Wellicht hadden we moeten spreken over *isogenieën*. Om symmetrieën te vinden, was het niet voldoende om de stukjes lukraak neer te leggen. Je kon het beste vooraf al een aantal symmetrieën neerleggen, en dan de puzzel vullen met de overige stukjes. Op deze manier vond bijvoorbeeld Liesbet Deconinck vijf groepjes van stukjes die spiegelsymmetrisch waren. Dat leverde een aantal van 32 symmetrieën op.

$$+\frac{28}{20} + \frac{33}{21} + \frac{30}{22} + \frac{23}{24} + \frac{35}{25} + \frac{29}{26} = 169$$

$$+\frac{17}{34} + \frac{16}{35} + \frac{9}{36} + \frac{19}{38} + \frac{15}{39} + \frac{31}{40} + \frac{41}{42} + \frac{29}{44} + \frac{37}{45} + \frac{23}{46} + \frac{43}{48} + \frac{14}{49} + \frac{47}{50} = 11$$



Figuur 3 Invulling van de polyomino-puzzel door Philip Both



Figuur 4 Invulling van de polyomino-puzzel door Aad van de Wetering

Echt professioneel werk werd geleverd door Philip Both. Hij schreef een programma waarmee hij 2000 oplossingen per dag genereerde. Om veel symmetrieën te vinden, koos hij voor vijf vierkanten van 4×4 . Elk van die vierkanten kan op acht manieren worden teruggelegd. Dat levert samen 8^5 mogelijkheden. Maar je kunt vervolgens de vierkanten ook nog uitwisselen. Dat kan op $5! = 120$ manieren. Dit alles levert $3.932.160$ mogelijkheden. Daarnaast kon hij tweemaal zes hexomino's samenvoegen tot een vierkant van 6×6 , hetgeen nog eens $2 \times 8^2 = 128$ mogelijkheden oplevert. Dit alles levert $8^5 \times 5! \times 2 \times 8^2 \times 2 \times 3 = 3.019.898.880$ mogelijkheden op (ruim drie miljard). Eén daarvan zie je in figuur 3.

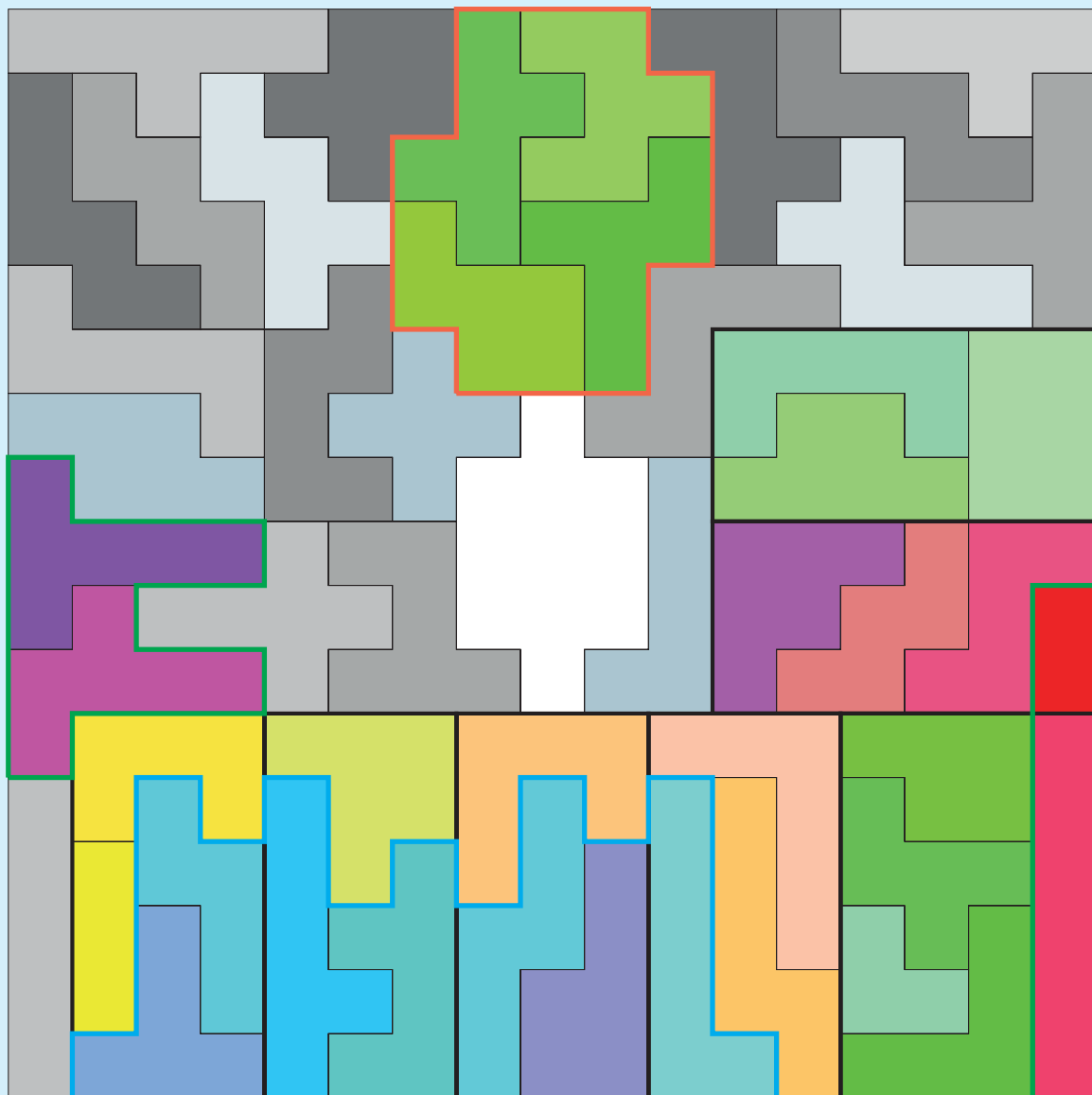
De redactie vond dit aantal al indrukwekkend. Dit werd echter overtroffen door het aantal symmetrieën waarmee Edo Timmermans aan kwam. In figuur 5 staat één van zijn oplossingen. Om te beginnen koos hij voor zeven rechthoeken van

3×6 . Elke rechthoek heeft vier symmetrieën. De zeven rechthoeken kunnen op $7! = 5040$ manieren worden geplaatst. Dit alleen al levert $4^7 \times 7! = 82.575.360$ mogelijkheden. In de figuur zijn diverse symmetrieën gemarkeerd. Een probleem is dat niet alle symmetrieën tegelijkertijd zichtbaar zijn. Maar in een toelichting beschrijft Edo nog vele andere symmetrieën. Hij komt uit op $1.170.845.466.624$ oplossingen (ruim een biljoen!). Eén van de voorbeelden van symmetrie is de blauw gemarkeerde figuur onderin het plaatje. Als de spiegeling wordt gerealiseerd, dan zijn er veel minder resterende symmetrieën mogelijk.

Tot slot zie je in figuur 4 nog een oogstrelende oplossing van Aad van de Wetering.

PRIJZEN De Irisbon voor aflevering 4 gaat naar Rob en Sandra van Wijk, die voor aflevering 5 naar Edo Timmermans.

Verder heeft de jury de totaalbalans van alle in-



Figuur 5 Invulling van de polyomino-puzzel door Edo Timmermans

zendingen opgemaakt. Er zijn vier geldprijzen: twee van honderd euro en twee van vijftig euro. Liesbet Deconinck en KSO Glorieux in Ronse (België) winnen elk 100 euro. Liesbet deed vijf maal trouw mee aan de prijsvraag en leverde enkele opmerkelijke prestaties. Zo stuurde ze bij de laatste aflevering een fraaie oplossing in met vijf verschillende symmetrieën (zie omslag). De leerlingen van KSO Glorieux (docent Odette De Meulemeester) hebben, zoals elk jaar, ook een enorme inzet getoond. Van elke aflevering ontving de jury oplossingen, en met name hun inzending van aflevering 2, toen er gerekend moest worden met vijf getallen waarvan de som 50 is, was een grootse prestatie.

Aad van de Wetering en Michelle Sweering ontvingen elk 50 euro. Vier boekenbonnen, elk ter waarde van 25 euro, gaan naar Scholengemeenschap Cambium in Zaltbommel, De Drie Wisketters uit Delft, Clara en Jan-Willem van Ittersum, en Marieke van der Wegen.

Vervolgens geven we nog twintig boeken weg: tien keer *De Pythagoras Code*, vijf keer *Het mysterie van Pythagoras* en vijf keer *Pythagoras en de rechtvaardige rechters* (met dank aan Jan Helmer). De boeken gaan naar De Driesprong in Sittard (2 keer), Twickel College in Hengelo, Linge College in Tiel, Van Lodenstein College in Amersfoort, Rythovius College in Eersel (2 keer), College Hageveld in Heemstede (3 keer), Alexander Jaeger, Djurre Tijsma, Arie Heikoop, Peter Helwerda, Fred Schalekamp, Pieter Spaas, Rob en Sandra van Wijk, Peter Wokke, Jan Verbakel en Messelink & Kramer.

Ten slotte zijn er nog 15 kaartspele (rond het magische getal 10, het heilige getal 6 en het Pythagoreïsche drietal 3-4-5) voor de volgende leerlingen: Hannah Ackermans, Teun Huijben, Danielle Kamstra, Jordy Klei, Bas Musters, Ruben Oost, Evi Pingnet, Stef de Rijk, Resi Schoonderwoerd, Tisja Smits, Sander Verhaeren, Tessa Vermeer, Egbert de Waal en Clara en Wander Wierda. ■

JOURNAAL

■ door Alex van den Brandhof

Blokken stapelen is geen kinderspel

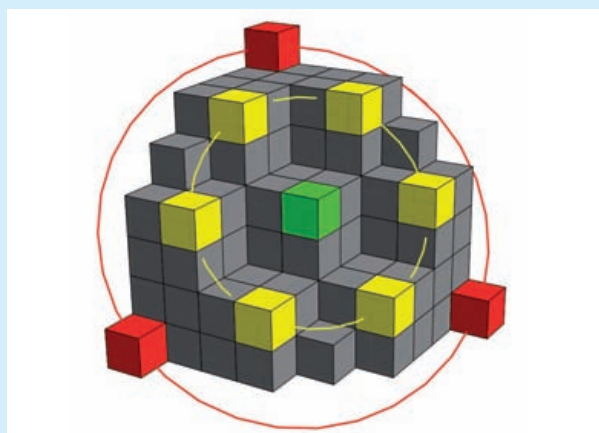
Neem een vierkant oppervlak dat onderverdeeld is in kleinere vierkantjes van gelijke grootte, zoals een schaak- of dambord. De spelregels: een stapel blokken mag niet hoger zijn dan het aantal vierkantjes langs de zijde van het oppervlak (bij een schaakbord 8, bij een dambord 10), en ook niet hoger dan een stapel blokken achter of links van de stapel.

Het aantal mogelijkheden om onder deze voorwaarden de blokken te stapelen, is relatief eenvoudig uit te rekenen. Knap lastiger wordt de vraag als

de blokkenstapels bovendien aan bepaalde symmetrie-eisen moeten voldoen. In de afgelopen decennia werden al formules opgesteld waarmee deze vraag beantwoord kan worden. Van geen van die formules was de juistheid echter bewezen. Het waren vermoedens en niet meer dan dat.

Een van die formules berekent het aantal mogelijke stapelingen waarbij er sprake is van 'volmaakte symmetrie'. De correctheid van die formule, in de jaren 1980 opgesteld door George Andrews en David Robbins, is nu bewezen door Christoph Koutschan en Manuel Kauers van het Research Institute for Symbolic Computation van de Johannes Kepler Universität in Linz, Oostenrijk.

Het probleem bleef bijna dertig jaar lang onopgelost. Het bewijs werd uiteindelijk 'automatisch bewezen', wat aangeeft dat moderne computerprogramma's in staat zijn om iets te kraken wat ons mensen niet lukt. De belangrijkste stap was om het Andrews-Robbins-vermoeden te vertalen in een geschikte vorm zodat de computer in staat is het bewijs te leveren. Het resultaat van de computer zou op papier een miljoen A4-pagina's omvatten!

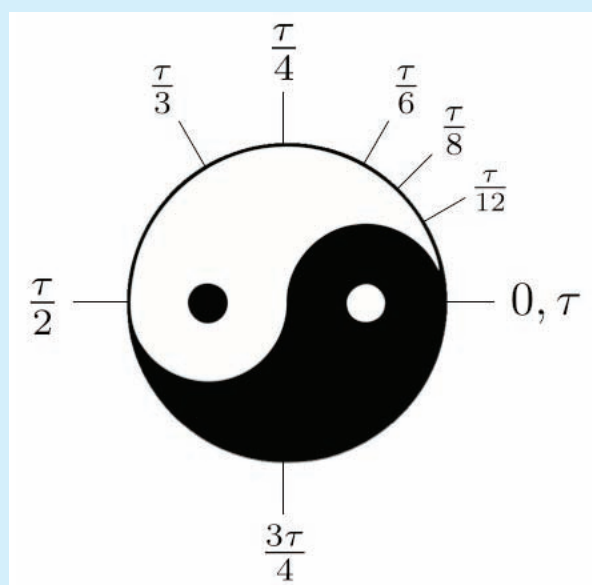


28 juni: tau-dag!

Op 14 maart was het weer π -dag. Toen waren er zoals elk jaar weer talloze π -festiviteiten en werden er thuis π -koekjes gebakken. Waarom 14 maart? Dat heeft te maken met de Amerikaanse schrijfwijze van deze datum: 3/14, of liever nog: 3.14, *et voilà*: daar staat de waarde van π in twee decimalen.

Vorig jaar is er een beweging gestart die graag wil dat 2π een aparte letter krijgt. De initiatiefnemers stellen τ (tau) voor. Zij vinden dat τ veel formules intuïtiever maakt, en verwarring tegengaat zoals 'een kwart cirkel = een half π radialen'. Veel meer voordelen van τ zijn te lezen op de site van *The Tau Manifesto*: tauday.com.

Een bijkomend voordeel is dat we er een nieuwe feestdag verkrijgen: 28 juni, een datum waarop het gemiddeld mooier weer is om creatieve dingen te doen.



■ door Jan Guichelaar

Wiskundestrip in het Nederlands

Hannah Ackermans zit in 6vwo van de Rijks-scholengemeenschap Pantarijn in Wageningen. Nadat ze vorig jaar op de weblog wiskundemeisjes.nl een bericht las over vertalingen van wiskundestripboeken, wist ze wat ze voor haar profielwerkstuk zou gaan doen.

Zelf schrijft Hannah: 'Ik ben een alfaleerling met interesse voor wiskunde. Ik heb het stripboek *Le Géométricon* (over verschillende soorten ruimte) vertaald in het Nederlands en het staat nu ook online.'

Voor wiskundig geïnteresseerden is de strip erg leuk om te lezen. Hiernaast staat een voorproefje. De hele strip is te downloaden via www.savoir-sans-frontieres.com (klik op het Nederlandse vlaggetje en vervolgens op 'Download Page').



Het 24-mysterie

Jules Ummels, voormalig wiskundedocent op het Henric van Veldeke College in Maastricht, kwam erachter dat het verschil van de kwadraten van twee priemgetallen (groter dan 3) altijd een vierentwintigvoud blijkt te zijn. Hij vroeg zich af of zijn vermoeden een reeds bestaande stelling is.

Een kleine analyse geeft het volgende antwoord. Het vermoeden is inderdaad waar, en was ook al bekend. Om de juistheid ervan aan te tonen, merken we eerst op dat elk geheel getal is te schrijven als $6n - 1$, $6n$, $6n + 1$, $6n + 2$, $6n + 3$ of $6n + 4$. Het tweede, vierde en zesde getal is deelbaar door 2 en het vijfde door 3. Een priemgetal kan dus alleen de vorm $6n - 1$ of $6n + 1$ hebben. Priem zijn bijvoorbeeld $6 \times 3 - 1 = 17$ en $6 \times 2 + 1 = 13$. Maar niet alle getallen van deze vorm zijn priem, zoals $6 \times 4 + 1 = 25 = 5 \times 5$.

Dan nu het bewijs van de stelling. Neem twee priemgetallen p en q ($p > q$) met $p = 6m + 1$ en $q = 6n + 1$. Dan geldt: $p^2 - q^2 = 36(m^2 - n^2) + 12(m - n) = 12(m - n)(3m + 3n + 1)$. Als m en n beide even of

beide oneven zijn, is $m - n$ even, en als van m en n er precies één oneven is, dan is $3m + 3n + 1$ even. In alle gevallen is het product $(m - n)(3m + 3n + 1)$ dus even, en dus $p^2 - q^2$ een veelvoud van $12 \times 2 = 24$.

De plustekens in p en q kunnen beide ook - zijn, of één + en één -. Met twee mintekens krijgen we: $p^2 - q^2 = 36(m^2 - n^2) - 12(m - n) = 12(m - n)(3m + 3n - 1)$.

Met + en - krijgen we: $p^2 - q^2 = 36(m^2 - n^2) + 12(m + n) = 12(m + n)(3m - 3n + 1)$.

Met - en + krijgen we: $p^2 - q^2 = 36(m^2 - n^2) - 12(m + n) = 12(m + n)(3m - 3n - 1)$.

In alle gevallen bevat $p^2 - q^2$ naast de factor 12 nog ten minste een factor 2, waarmee het bewijs rond is. Op de site www.murderousmaths.co.uk/games/primcal.htm staat een bewijs dat voor elk priemgetal $p > 3$ geldt dat $p^2 - 1$ deelbaar is door 24. Ook daarmee is de bovenstaande stelling eenvoudig te bewijzen.

OP REIS NAAR ► **BORGIO VALSUGANA**

BEELD UIT EEN

16



PRINTER

In de gemeente Borgo Valsugana in Noord-Italië is het beeldenpark Arte Sella te bewonderen. De collectie bevat sinds kort een beeld van de Nederlandse 'wiskunstenaar' Rinus Roelofs.

■ door Rinus Roelofs

3D-printers beginnen zo langzaamaan gemeengoed te worden. In diverse steden vind je al de zogenaamde *fablabs* ('fablab' staat voor 'fabrication laboratory', zie www.fablab.nl), plekken waar je je eigen digitale ontwerpen tot realiteit kunt brengen, en op een aantal van deze fablabs kun je zelf met een 3D-printer aan het werk. Maar ook op het internet vind je diverse 3D-printshops waar je een 'afdruk' van je ontwerp kunt bestellen. Een voorbeeld hiervan is www.shapeways.com.

De modellen die je op deze manier krijgt zijn veelal van kunststof en meestal nogal klein. Maar sinds kort bestaat er ook een 3D-printer waarmee vanuit een digitaal ontwerp betonnen objecten gemaakt kunnen worden van groot formaat. Met die printer, die een groot deel van de ruimte van een fabriekshal inneemt, is het beeld dat je op de foto ziet gemaakt. Het beeld is ongeveer twee meter hoog en staat in het beeldenpark Arte Sella (www.artesella.it/eng) in Noord-Italië.

SPIRAALVORMIGE GATEN Behalve het productieproces is ook de structuur van het beeld zelf interessant. Wanneer je dit beeld goed bekijkt kun je zien dat het eigenlijk één doorlopend vlak is. Een vlak met gaten. En de vorm van de gaten maken dit beeld bijzonder: het zijn spiraalvormige gaten.

Spiralen komen in de natuur op veel verschillende manieren voor. Je zou kunnen zeggen dat dit beeld is gemaakt vanuit een raster van spiralen waartussen dan weer een vlak is gespannen. Zoals een vlies kan ontstaan wanneer je een draadfiguur in een zeepoplossing dompelt. Het resultaat in dit geval is dat de spiralen in het beeld aanwezig zijn als de randen van het vlak, als de gaten dus.

Wil je meer weten over dit soort objecten, kijk dan op www.rinusroelofs.nl. ■

Door de speciale manier waarop de oude Egyptenaren getallen vermenigvuldigden, moesten ze al vertrouwd geweest zijn met het begrip 'volmaakt getal', betoogt Theo Arosius, hoewel het in de *Rhind-papyrus* niet expliciet genoemd wordt.

■ door Theo Arosius

VOLMAAKTE



18

Theo Arosius publiceerde dit jaar bij uitgeverij Aspekt een boek over de Egyptische rekenkunde in de tijd dat de piramiden gebouwd werden. In *De geheimen van Gizeh* legt hij onder meer aan de hand van de befaamde *Rhind-papyrus* uit hoe de Egyptenaren rekenden met breuken.

De Egyptenaren waren heel praktisch ingesteld, en niet, zoals de oude Grieken, geïnteresseerd in het bewijzen van algemene eigenschappen van getallen of meetkundige figuren. Zo omzeilden ze 'onmogelijke' problemen als de kwadratuur van de cirkel en de verdubbeling van de kubus simpelweg door berekeningen die een redelijk goede benadering opleverden.

In het verlengde daarvan onderzoekt Arosius of de piramidebouwers speciale getalsverhoudingen tot uiting brachten in de afmetingen van hun bouwwerken. Hoewel hij ruim aandacht schenkt aan speculatieve theorieën hierover – van anderen of van hemzelf – bespreekt hij die op nuchtere toon en laat hij de conclusies aan de lezer.

Theo Arosius, *De geheimen van Gizeh – de mysterieuze betekenis van getallen*, Uitgeverij Aspekt, ISBN 978 90 5911 973 4

GETALLEN

IN HET OUDE EGYPTE

Al eeuwenlang bestaat in de wiskunde het begrip 'volmaakte getallen' (ook wel 'perfecte getallen' geheten). Dat zijn de getallen waarvan de som van de delers (uitgezonderd het getal zelf) precies even groot is als het getal zelf. Het kleinste volmaakte getal is 6: zijn delers zijn 1, 2 en 3 en inderdaad is $1 + 2 + 3 = 6$. Leonhard Euler bewees in de achttiende eeuw dat alle even volmaakte getallen beschreven worden door de formule $2^{n-1} \times (2^n - 1)$ waarbij $2^n - 1$ een priemgetal moet zijn. Niemand weet of er ook oneven volmaakte getallen bestaan.

Met de formule kun je eenvoudig de eerste volmaakte getallen berekenen. Voor $n = 2$ ontstaat het getal 6, voor $n = 3$ krijg je 28, voor $n = 5$ het derde volmaakte getal 496 en voor het $n = 7$ het vierde volmaakte getal 8.128.

In dit artikel wordt betoogd dat ook de Egyptenaren duizenden jaren geleden al vertrouwd waren met volmaakte getallen, maar daar op een andere manier tegen aankeken. Het geeft ook antwoord op de vraag waarom aan deze getallen het kenmerk 'volmaakt' werd gegeven.

In een beschouwing op Wikipedia over de geschiedenis van de volmaakte getallen kun je lezen dat Hudalrichus Regius in 1536 het vijfde volmaakte getal vond: $2^{12} \times (2^{13} - 1) = 33.550.336$. In 1603 vond Pietro Cataldi het zesde volmaakte getal $2^{16} \times (2^{17} - 1) = 8.589.869.056$ en ook het zevende volmaakte getal $2^{18} \times (2^{19} - 1) = 137.438.691.328$. Cataldi claimde nog een viertal andere volmaakte getallen gevonden te hebben, maar later werd aangetoond dat slechts één van deze vier getallen juist

was. Het probleem was, dat de factor $2^n - 1$ priem moet zijn, en in die tijd zonder rekenmachines of computers zag je maar al te makkelijk een deler van $2^n - 1$ over het hoofd zodra n wat groter is.

In dezelfde beschouwing staat ook dat de oude Egyptenaren al studies van volmaakte getallen maakten. Het is bekend dat Pythagoras volmaakte getallen onderzocht. Volmaakte getallen hadden in die tijd een religieuze status. Volgens de mythe was Pythagoras op zijn beurt in de leer geweest bij Egyptische wiskundigen. Hieronder geef ik een analyse van de wiskunde waarmee het wereldwonder van de piramiden werd gebouwd. Omdat daaruit blijkt hoe zij op een charmante, eenvoudige wijze de samenstelling van volmaakte getallen konden construeren, volgt hier tot lering en vermaak van de moderne wiskundigen een weergave van die methode.

REKENEN DOOR VERDUBBELEN Van een zekere Ahmes is een rekenboek bewaard gebleven, dat vooral bekend is als de *Rhind-papyrus*. Ahmes rekende anders dan wij plegen te doen, maar hoe rekende hij dan? Feit is dat hij alleen maar met 2 kon vermenigvuldigen, dus een getal verdubbelen. Dat belette hem niet om grote getallen met elkaar te vermenigvuldigen. Hij maakte daarbij gebruik van de eigenschap dat elk getal kan worden geschreven als de som van machten van 2 (waarbij $2^0 = 1$), bijvoorbeeld $19 = 1 + 2 + 16$ of $26 = 2 + 8 + 16$.

Als voorbeeld voor zijn manier van rekenen laten we zien hoe hij 41 vermenigvuldigt met 59. Hij

begint met zowel het getal 1 als het getal 59 te verdubbelen en die handeling steeds te herhalen. We krijgen het volgende staatje:

1	59
2	118
4	236
8	472
16	944
32	1888

Het volgende getal in de linkerkolom is 64 en dat is groter dan 41. Daarom hoeven we niet verder te gaan. Vervolgens berekent Ahmes dat $41 = 32 + 8 + 1$. Dan telt hij de bijbehorende getallen in de tweede kolom bij elkaar op: $59 + 472 + 1888 = 2419$ en dat is de uitkomst van 41×59 .

In onze moderne notatie rekenen we dus uit:
 $41 \times 59 = (1 + 8 + 32) \times 59 = 1 \times 59 + 8 \times 59 + 32 \times 59 = 59 + 472 + 1888 = 2419$. De hele berekening wordt uitgevoerd door alleen maar getallen te verdubbelen, dus met twee te vermenigvuldigen.

Het zal de Egyptische rekenaar niet zijn ontgaan dat de getallen in de eerste kolom altijd opgeteld in dezelfde vorm geschreven kunnen worden: $2^n - 1$. Daar kan een volgende ontdekking op gevolgd zijn. Als je in de rechterkolom begint met zo'n zelfde type getal, bijvoorbeeld $2^3 - 1 = 7$, dan schrijft hij:

1	7
2	14
4	28

En dan ziet hij dat 28 precies even groot is als de som van alle andere opgeschreven getallen. Dit is altijd waar. Kijk maar hoe hij begint met $31 = 2^5 - 1$:

1	31
2	62
4	124
8	248
16	496

Ook hier zien we dat $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248 = 496$.

Waarom werkt dit? Ten eerste geldt voor elke

waarde van n :

$$1 + 2 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1 \quad (*)$$

In de rechterkolom komen dan de volgende waarden te staan: $2^n - 1$, $2(2^n - 1)$, $4(2^n - 1)$, ..., $2^{n-1}(2^n - 1)$. We willen nu bewijzen dat het laatste getal in de rechterkolom, $2^{n-1}(2^n - 1)$, gelijk is aan de som van alle overige getallen.

In de linkerkolom hadden we in totaal $2^n - 1$. Te bewijzen is dus:

$$2^n - 1 + [2^n - 1 + 2(2^n - 1) + 4(2^n - 1) + \dots + 2^{n-2}(2^n - 1)] = 2^{n-1}(2^n - 1).$$

Aangezien alle termen een factor $2^n - 1$ bevatten, delen we die eruit:

$$1 + [1 + 2 + 4 + \dots + 2^{n-2}] = 2^{n-1}.$$

Eigenlijk staat het er nu al:

$$[1 + 2 + 4 + \dots + 2^{n-2}] = 2^{n-1} - 1,$$

dezelfde relatie als (*), maar dan met $n - 1$ in plaats van n . We zien ook dat het laatste getal in de rechterkolom, $2^{n-1}(2^n - 1)$, precies de formule is voor een volmaakt getal.

PRIEMGETAL Het volgende volmaakte getal kunnen we ook uitschrijven.

1	127
2	254
4	508
8	1016
16	2032
32	4064
64	8128

Ook in dit geval is het vetgedrukte volmaakte getal gelijk aan de som van alle andere getallen in dit staatje.

Het foefje gaat uiteraard alleen maar op als $2^n - 1$ een priemgetal is. Als $2^n - 1$ zelf ook een deler a heeft, heeft $2^{n-1}(2^n - 1)$ namelijk ook delers die niet in de linker- of rechterkolom staan

(a , $2a$, $a(2^n - 1)$, enzovoort). Die moet je meetellen in de som van alle factoren, en dan kom je hoger uit dan $2^{n-1}(2^n - 1)$.

Je kunt dus niet beginnen met $15 = 2^4 - 1$, omdat het door 3 en 5 deelbaar is. Evenmin lukt het met $2^8 - 1 = 255$ (deelbaar door 5), $2^9 - 1 = 511$ (deelbaar door 7), $2^{10} - 1 = 1023$ (deelbaar door 3), $2^{11} - 1 = 2047$ (deelbaar door 23), $2^{12} - 1 = 4095$ (deelbaar door 5). Pas met het priemgetal $2^{13} - 1 = 8191$ kunnen we het vijfde volmaakte getal berekenen. De uitkomst is 33.550.336:

1	8191
2	16382
4	32764
8	65528
16	131056
32	262112
64	524224
128	1048448
256	2096896
512	4193792
1024	8387584
2048	16775168
4096	33550336

Ook in dit geval is het vetgedrukte volmaakte getal gelijk aan de som van alle andere getallen in dit staatje. Het is een eenvoudige, charmante methode om volmaakte getallen met al hun factoren uit te schrijven. Kennelijk waren de westerse wiskundigen in de zestiende eeuw met deze methode niet vertrouwd.

Op dezelfde manier kunnen we het zesde, zevende en achtste volmaakte getal uitschrijven in zijn samenstellende factoren. Als uitgangspunt heb je dan achtereenvolgens nodig: $2^{17} - 1 = 131.071$, $2^{19} - 1 = 524.287$ en $2^{31} - 1 = 2.147.483.647$.

HEILIGE GETALLEN Vermoedelijk schreven die Egyptische priesters de formule voor volmaakte getallen anders dan men tegenwoordig gewend is en wel als de som van een reeks machten van 2.

Om te laten zien hoe dat zou kunnen, herhaal ik een van bovenstaande berekeningen met een

kleine aanpassing:

1	$2^5 - 1$
2	$2^6 - 2$
4	$2^7 - 4$
8	$2^8 - 8$
2^4	496

Links en rechts vallen getallen tegen elkaar weg. Wat overblijft is een rij opeenvolgende machten van 2. We schrijven dus:

$$\begin{aligned} 2 + 2^2 &= 6, \\ 2^2 + 2^3 + 2^4 &= 28, \\ 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8 &= 496, \\ 2^6 + 2^7 + 2^8 + 2^9 + 2^{10} + 2^{11} + 2^{12} &= 8.128, \\ 2^{12} + 2^{13} + 2^{14} + 2^{15} + 2^{16} + 2^{17} + 2^{18} + 2^{19} + \\ + 2^{20} + 2^{21} + 2^{22} + 2^{23} + 2^{24} &= 33.550.336. \end{aligned}$$

Als je hebt vastgesteld dat $2^n - 1$ een priemgetal is, kun je dus het bij n passende volmaakte getal ook berekenen als de som van precies n opeenvolgende machten van 2 die begint met 2^{n-1} . Die som kan echter ook worden geschreven als een verschil en wel op de volgende manier:

$$\begin{aligned} 2^3 - 2 &= 6, \\ 2^5 - 2^2 &= 28, \\ 2^9 - 2^4 &= 496, \\ 2^{13} - 2^6 &= 8.128, \\ 2^{25} - 2^{12} &= 33.550.336. \end{aligned}$$

Deze verschillen laten zich uiteraard eenvoudig herleiden tot de algemeen gebruikte formule: $2^{n-1} \times (2^n - 1)$ waarbij $2^n - 1$ priem moet zijn.

Volgens de priesters van het oude Egypte vormde het getal 2 niet alleen de basis voor hun rekenkunde, het vertegenwoordigde in hun ogen de basis van de schepping. Zagen ze volmaakte getallen wellicht als heilige getallen? Pythagoras heeft ze misschien op zijn studiereis naar Egypte leren kennen. Het woord 'volmaakt' verwijst mogelijk naar deze religieuze achtergrond en klinkt wellicht een echo van dat geloof nog door in het scheppingsverhaal dat God de wereld schiep in zes dagen. ■

Femke heeft twee kinderen, waarvan minstens één zoon die op een dinsdag is geboren. Hoe groot is de kans dat Femke twee zonen heeft? Een veel gehoord antwoord is: die kans is $\frac{1}{2}$, want het tweede kind is een meisje of een jongen. Iemand anders antwoordt wellicht: die kans is $\frac{1}{3}$, want van de vier mogelijkheden jongen-jongen, jongen-meisje, meisje-jongen en meisje-meisje vervalt de laatste en van de drie overgebleven opties is er één goed. In dit artikel laten we zien dat het toch iets anders ligt.

■ door Alex van den Brandhof en Jan Guichelaar

DE KINDEREN VAN FEMKE

Kansrekening is een verraderlijk vak. Geen ander deelgebied van de wiskunde leidt tot zoveel ophef en discussie. In *Pythagoras* 39-6 (augustus 2000) schreef Ronald Meester, hoogleraar kansrekening aan de VU, een artikel over een ogenschijnlijk simpel vraagstuk over een vader met twee kinderen. In *Pythagoras* 40-3 (februari 2001) verscheen een vervolgartikel van Meester, dat begon met: 'Het artikel in het augustusnummer was bedoeld om een langsepende discussie af te ronden. Dat lijkt niet te zijn gelukt, gezien de reacties van onder andere ...' En ook op dát artikel werd weer gereageerd.

Vorig jaar werd een nieuwe variant van het 'kinderenprobleem' gepresenteerd, en wel tijdens het symposium *Gathering 4 Gardner*, dat elke twee jaar wordt georganiseerd ter ere van 's werelds beroemdste persoon van de recreatieve wiskunde: Martin Gardner. En ook toen liepen de meningen weer uiteen...

1. Femke heeft twee kinderen. Wat is de kans dat zij twee zonen heeft?

Deze vraag is de simpelste versie van het kinde-

renprobleem uit de kansrekening. We weten alleen dat Femke twee kinderen heeft; verdere informatie over die kinderen is niet gegeven. Er zijn dan in volgorde van geboorte vier mogelijkheden: jongen-jongen, jongen-meisje, meisje-jongen en meisje-meisje.

In figuur 1 zie je een tabelletje met verticaal de mogelijkheden voor het oudste kind en horizontaal die voor het jongste kind. In totaal zijn er vier mogelijkheden. De vier mogelijkheden hebben gelijke kans. We willen de kans weten dat Femke twee zonen heeft; deze mogelijkheid is groen gekleurd. De gevraagde kans is dus $\frac{1}{4}$.

2. Femke heeft twee kinderen, waarvan minstens één zoon. Wat is de kans dat Femke twee zonen heeft?

Aanvankelijk waren er vier mogelijkheden, maar door het gegeven 'minstens één zoon' komt meisje-meisje nu te vervallen; in figuur 2 staat op die plek daarom een 0. De drie overgebleven mogelijkheden zijn alle even waarschijnlijk. Dus de kans op twee zonen is $\frac{1}{3}$.

oudste kind \ jongste kind	jongen	meisje
	jongen	meisje
jongen	1	1
meisje	1	1

Figuur 1

oudste kind \ jongste kind	jongen	meisje
	jongen	meisje
jongen	1	1
meisje	1	0

Figuur 2

AANNAMES Als je geboortestatistieken bekijkt, blijkt dat er iets meer jongens dan meisjes worden geboren. En in de weekenden worden relatief iets minder kinderen geboren dan op doordeweekse dagen. In dit artikel verwaarlozen we deze kleine verschillen en gaan we uit van gelijke kansen: de kans op een jongen is gelijk aan $\frac{1}{2}$, en de kans dat een kind op een maandag wordt geboren, is gelijk aan $\frac{1}{7}$ (en idem voor een willekeurige andere dag).



3. Femke heeft twee kinderen. Wat is de kans dat die allebei op een dinsdag zijn geboren?

Per kind zijn er nu zeven mogelijkheden in plaats van twee: dinsdag of een van de overige zes dagen. Dat leidt tot de tabel in figuur 3. In totaal zijn er $7^2 = 49$ mogelijkheden met gelijke kans, waarvan er slechts één goed is. De kans op twee kinderen die allebei op dinsdag zijn geboren, is dus $\frac{1}{49}$.

4. Femke heeft twee kinderen, waarvan er minstens één op een dinsdag is geboren. Wat is de kans dat beide kinderen op een dinsdag zijn geboren?

Van de 49 mogelijkheden in figuur 3 vervallen nu alle 36 mogelijkheden in het vakje rechtsonder, zie figuur 4. De gezochte kans is dus $\frac{1}{13}$.

5. Femke heeft twee kinderen. Wat is de kans dat zij twee zonen heeft die allebei niet op een dinsdag zijn geboren?

Voor geslacht plus geboortedag zijn er nu 14 mogelijkheden voor het eerste kind en 14 voor het tweede. De aantallen in de tabel sommeren dan dus tot

$14^2 = 196$, zie figuur 5. Er zijn nu 36 goede mogelijkheden. De gevraagde kans is dus $\frac{36}{196} = \frac{9}{49}$.

6. Femke heeft twee kinderen, waarvan minstens één zoon die op een dinsdag is geboren. Wat is de kans dat Femke twee zonen heeft?

Zelfs op het congres *Gathering 4 Gardner* vorig jaar, waarbij veel wiskundigen aanwezig waren, geloofden velen dat het dinsdagaspect bij de gegevens er niets toe doet. Als dat waar zou zijn, is de kans natuurlijk $\frac{1}{3}$, zie opgave 2. Maar het blijkt toch echt anders te zijn. Het totaal aantal mogelijkheden wordt van 196 (figuur 5) gereduceerd tot 27 (figuur 6). In de vakjes *zonder* een jongen die op dinsdag is geboren komen immers nullen te staan. Van de 27 mogelijkheden zijn er 13 waarbij twee jongens voorkomen. Dus de gezochte kans is $\frac{13}{27}$.

Zonder het dinsdagaspect in de opgave (maar wel met het gegeven dat er minstens één zoon is) is de kans $\frac{1}{3}$, zoals we eerder zagen. Met die schijnbaar irrelevante informatie *stijgt* de kans tot $\frac{13}{27}$ (ongeveer 0,48)!

jongste kind \ oudste kind		
	op dinsdag geboren	niet op dinsdag geboren
op dinsdag geboren	1	6
niet op dinsdag geboren	6	36

Figuur 3

jongste kind \ oudste kind		
	op dinsdag geboren	niet op dinsdag geboren
op dinsdag geboren	1	6
niet op dinsdag geboren	6	0

Figuur 4

STERRENBEELDEN ZONDER KWAK-ZALVERIJ

Zijn er nog meer eigenschappen dan geslacht (2 mogelijkheden) en geboortedag (7 mogelijkheden) te bedenken? Het moeten natuurlijk wel eigenschappen zijn die een eindig aantal mogelijkheden hebben en los van alles even waarschijnlijk zijn. Wat dacht je van ster-

renbeelden? Daarvan zijn er twaalf (de tekens van de sterrenbeelden in de dierenriem). De zon doorloopt, gezien vanuit de aarde, in een jaar de gehele dierenriem en passeert zo de twaalf tekens erin. Neem nu even aan dat de kans om geboren te worden in elk teken even groot is; dat is bij benadering juist.

7. Femke heeft twee kinderen, waarvan minstens één zoon met sterrenbeeld Leeuw. Wat is de kans dat Femke twee zonen heeft?

Er zijn voor een kind nu $2 \times 12 = 24$ mogelijkheden. In de tabel komen in totaal $24^2 = 576$ gelijke mogelijkheden voor, zie figuur 7. Het gegeven dat er minstens één jongen met sterrenbeeld Leeuw is, leidt tot figuur 8. In totaal blijven er 47 gevallen over, waarvan er 23 voldoen aan de eis: twee jongens. De kans is dus $\frac{23}{47}$.

ALGEMEEN Neem twee eigenschappen A en B van een kind: de eerste heeft met gelijke kans m waarden en de andere n . Bijvoorbeeld $m = 2$ voor het geslacht, $n = 7$ voor de geboortedag.

oudste kind \ jongste kind			
	jongen, op dinsdag geboren	jongen, niet op dinsdag geboren	meisje, op willekeurige dag geboren
jongen, op dinsdag geboren	1	6	7
jongen, niet op dinsdag geboren	6	36	42
meisje, op willekeurige dag geboren	7	42	49

Figuur 5

oudste kind \ jongste kind			
	jongen, op dinsdag geboren	jongen, niet op dinsdag geboren	meisje, op willekeurige dag geboren
jongen, op dinsdag geboren	1	6	7
jongen, niet op dinsdag geboren	6	0	0
meisje, op willekeurige dag geboren	7	0	0

Figuur 6

oudste kind \ jongste kind			
	jongen, sterrenbeeld Leeuw	jongen, ander sterrenbeeld	meisje, willekeurig sterrenbeeld
jongen, sterrenbeeld Leeuw	1	11	12
jongen, ander sterrenbeeld	11	121	132
meisje, willekeurig sterrenbeeld	12	132	144

Figuur 7

8. Femke heeft twee kinderen, waarvan minstens één met a (één van de waarden van A) en b (één van de waarden van B). Wat is de kans dat Femke twee kinderen met a heeft?

De 'basistabel' zie je in figuur 9, met de volgende betekenissen:

- $a + b$: het kind heeft waarde a (een specifieke mogelijkheid van A) en b (een specifieke mogelijkheid van B);
- $a + (B \setminus b)$: het kind heeft waarde a en een willekeurige waarde uit B behalve b ;
- $(A \setminus a) + B$: het kind heeft een willekeurige waarde uit A behalve a en een willekeurige waarde uit B .

De som van de aantallen in de tabel is, zoals gemakkelijk is te controleren, gelijk aan $(mn)^2$.

Met het gegeven dat minstens één kind de waarden a en b heeft, komen er nullen in de tabel, zie figuur 10. Nu zijn er in totaal nog maar $2mn - 1$ mogelijkheden met gelijke kans over. Hiervan zijn de mogelijkheden waarbij beide kinderen waarde a hebben, groen gekleurd. De kans p daarop is dus

$$p = \frac{2n - 1}{2mn - 1}.$$

Hiermee kunnen we de uitkomsten uit de opgaven in dit artikel controleren. Voor opgave 2 geldt $m = 2$ en $n = 1$; dan is $p = \frac{1}{3}$. Voor opgave 6 geldt $m = 2$ en $n = 7$; dan is $p = \frac{13}{27}$. En voor opgave 7 geldt $m = 2$ en $n = 12$; dan is $p = \frac{23}{47}$. Voor grote waarden van n komt p steeds dichterbij $\frac{1}{m}$ te liggen. In het geval $m = 2$ dus dicht bij $\frac{1}{2}$. ■

jongste kind \ oudste kind			
	$a + b$	$a + (B \setminus b)$	$(A \setminus a) + B$
$a + b$	1	$n - 1$	$(m - 1)n$
$a + (B \setminus b)$	$n - 1$	$(n - 1)^2$	$(n - 1)n(m - 1)$
$(A \setminus a) + B$	$(m - 1)n$	$(m - 1)n(n - 1)$	$(m - 1)^2 n^2$

Figuur 9

jongste kind \ oudste kind			
	jongen, sterrenbeeld Leeuw	jongen, ander sterrenbeeld	meisje, willekeurig sterrenbeeld
jongen, sterrenbeeld Leeuw	1	11	12
jongen, ander sterrenbeeld	11	0	0
meisje, willekeurig sterrenbeeld	12	0	0

Figuur 8

jongste kind \ oudste kind			
	$a + b$	$a + (B \setminus b)$	$(A \setminus a) + B$
$a + b$	1	$n - 1$	$(m - 1)n$
$a + (B \setminus b)$	$n - 1$	0	0
$(A \setminus a) + B$	$(m - 1)n$	0	0

Figuur 10

Van 16 tot 24 juli zal Amsterdam van alle steden op de wereld het meeste wiskundetalent binnen de stadsgrenzen hebben. Dan wordt hier namelijk de 52ste *International Mathematical Olympiad* (IMO) gehouden. Het is een prestigieuze wedstrijd voor middelbare scholieren, de oudste en grootste van de internationale wetenschapsolympiades. Veel beroemde wiskundigen maakten ooit deel uit van het IMO-team van hun land. Milan Lopuhaä, zelf deelnemer in 2007 en 2008 en nu lid van de excursiecommissie van IMO2011, blikt vooruit.
■ door Milan Lopuhaä

NEDERLAND KLAAR VOOR THUISWEDSTRIJD



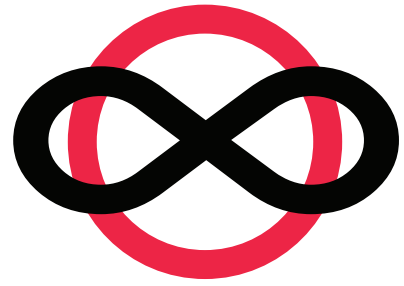
De eerste *International Mathematical Olympiad* vond plaats in Roemenië in 1959. Aan dit jaarlijkse evenement doen tegenwoordig zo'n honderd landen mee. Telkens heeft een ander land de eer om de IMO te organiseren en dit jaar is Nederland voor het eerst gastland. Elk land stuurt een team in van maximaal zes leerlingen, die meestal geselecteerd zijn in landelijke voorrondes. In Nederland wordt het team altijd geselecteerd uit de beste finalisten van de Nederlandse Wiskunde Olympiade, die na de finale, van november tot juli, een speciaal IMO-trainingsprogramma doorlopen.

Het organiseren van een meerdaags evenement voor 600 scholieren en 300 begeleiders uit honderd landen plus 300 Nederlandse vrijwilligers is natuurlijk geen kleinigheid. Voor de overnachtingen zijn alle 13 verdiepingen

van het Novotel Hotel in Amsterdam afgehuurd, maar zelfs dat is niet genoeg: een deel van de gasten zit aan de overkant in het Holiday Inn Hotel. Er wordt voor gezorgd dat er genoeg te doen is. Ruimtes met computers en met spelletjes als schaken en go zullen niet ontbreken.

Elk team krijgt een gids toegewezen, meestal een student wiskunde of een talenstudent uit Nederland. Deze is de hele week bij het team om hen te begeleiden en te helpen. Omdat niet alle deelnemers goed Engels kennen, hebben we ook gidsen gezocht die bijvoorbeeld Litouws of Mongools spreken. De honderd gidsen moeten natuurlijk precies weten hoe de IMO in elkaar zit, en daarom is er een gidsenweekend geweest waarop ze hiervoor werden klaargestoomd.





40.000 BLAADJES PAPIER Op 17 juli is de openingsceremonie in de RAI, waar de teams zich presenteren tijdens de teamparade. Hierna zijn de leerlingen vrij, maar de meesten zullen vroeg naar bed gaan, want de volgende dag is de eerste wedstrijddag.

Er zijn twee wedstrijddagen van 4,5 uur, waarin de leerlingen drie pittige opgaven individueel hebben op te lossen. Ze doen dit in een naburige sporthal, die groot genoeg is voor de benodigde 600 tafels en stoelen. Verder zijn zo'n zestig surveillanten aanwezig. De wedstrijdcommissie heeft alles tot in de puntjes voorbereid: er liggen maar liefst 40.000 blaadjes wedstrijdpapier klaar en er zijn honderden flesjes water voor de leerlingen. Bij de ingang wordt streng gecontroleerd of mensen geen rekenmachine meenemen, want dat is verboden. Mensen moeten natuurlijk naar de wc kunnen, maar ze mogen niet met elkaar kunnen overleggen. Ook daar is over nagedacht: geen twee deelnemers van hetzelfde land zullen elkaar tegenkomen in hetzelfde toiletblok.

Na de wedstrijd gaan de leerlingen terug naar het hotel. Het gemaakte werk wordt gekopieerd en vervolgens getransporteerd naar de jury: de team-

leiders van alle landen. De jury is een paar dagen eerder naar Nederland gekomen, om de wedstrijdopgaven uit te kiezen. Elk land heeft opgaven kunnen insturen voor de olympiade, waaruit een shortlist gekozen is. De teamleiders testen al deze opgaven en kijken welke het meest geschikt zijn voor de wedstrijd. Om te zorgen dat de leerlingen niet al van tevoren met de opgaven in aanraking komen, zitten de teamleiders op een andere, voor het team onbekende locatie in Nederland. Na het uitkiezen van de zes IMO-opgaven vertalen de teamleiders deze nog in alle circa 60 talen.

CORRECTIEWERK Het nakijken van de 3600 opgaven is een evenement op zich. Het werk van elke deelnemer wordt niet alleen door de teamleiders van het eigen land nagekeken, maar ook door een stuk of tachtig door Nederland aangewezen nakijkers, in het Engels *coordinators* genaamd. Zo'n coordinator kijkt van 20 landen (120 leerlingen) al het werk van bijvoorbeeld opgave 5 na. Hoewel deze coordinators de taal vaak niet zullen spreken, kunnen ze wel de formules begrijpen. In overleg met de teamleiders komen ze dan uit op een eerlijke score voor elke opgave. Hiervoor heb-



Nederlandse scholieren die het tot de IMO-training schopten. Deze maand worden uit deze kandidaten zes leerlingen gekozen die ons land zullen vertegenwoordigen bij de IMO2011.



ben de teamleiders steeds een gesprek van een half uur met een coordinator over één opgave, wat dus neerkomt op vijf minuten per leerling per opgave.

Terwijl de jury twee dagen lang druk bezig is met nakijken en overleggen met de coordinators, zijn er voor de leerlingen excursies geregeld, zodat ze ook iets van Nederland te zien krijgen. Er zijn vier excursies gepland, waarvan de teams er elk twee kunnen kiezen: een sporttoernooi in Sporthal Zuid, een zeiltocht op het IJsselmeer, een excursie naar het Vredespaleis en het Eschermuseum in Den Haag, en een stoomcursus fietsen ten noorden van Amsterdam. 's Avonds is er steeds vrije tijd in het hotel.

Daarna is er nog een grote excursie door Amsterdam, waaraan niet alleen de deelnemers en de gidsen, maar ook de teamleiders meedoen. Tot besluit is er een gezamenlijk diner in Science Center NEMO.

MEDAILLES De volgende dag is de sluitingsceremonie, wederom in de RAI. Hier worden de prijzen uitgereikt: de beste helft van de deelnemers krijgt een bronzen, zilveren of gouden medaille, die in de verhouding 3 : 2 : 1 worden verdeeld. Daarnaast krijgt iedereen die geen medaille heeft gewonnen, maar wel een opgave foutloos heeft opgelost, een eervolle vermelding. Het kan gebeuren dat iemand een zo bijzondere of elegante oplossing heeft voor een opgave, dat hij van de jury een speciale prijs krijgt. Na deze prijsuitreiking is er nog een slotdiner voor iedereen die aan de IMO heeft meegedaan en meegewerkt.

Wij zien uit naar een fantastisch evenement, de eerste IMO in de geschiedenis die in Nederland zal worden gehouden! ■



De wedstrijdzaal van de IMO in Bremen, Duitsland, waar het evenement twee jaar geleden plaatsvond.

BROKKELIGE GETALLEN

■ door Jan Guichelaar en Anneke Grünefeld

GROOTSTE PRODUCT

Als je het getal 10 splitst als $8 + 2$, dan krijg je als product $8 \times 2 = 16$. Splits je het als $5 + 4 + 1$, dan is het product groter: $5 \times 4 \times 1 = 20$. Welke splitsing levert het grootste product?

Het puzzeltje hierboven was een van de ‘Kleine nootjes’ uit het januarinumnummer. Hoewel niet expliciet vermeld, werd er bij de oplossing die we in het februarinumnummer vermeldden, uitgegaan van gehele getallen: het grootst haalbare product is 36, door 10 te splitsen als $4 + 3 + 3$ of als $2 + 2 + 3 + 3$ (immers $4 \times 3 \times 3 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 36$). Dick Beekman, die jarenlang een van de bedenkers van de nootjes is geweest, bedacht de naam ‘brokkelige getallen’ voor dit soort splitsingen.

GELIJKE REËLE GETALLEN Je kunt je natuurlijk ook afvragen hoe je een willekeurig positief getal G kunt splitsen in n gelijke getallen, waarvan het product $f(n) = (\frac{G}{n})^n$ maximaal is. De afgeleide $f'(n)$ vind je met behulp van

$$[\ln f(n)]' = \frac{f'(n)}{f(n)}.$$

Dit geeft

$$f'(n) = f(n)(\ln G - \ln n - 1).$$

Het maximum vinden we door $f'(n) = 0$ te stellen. Daaruit volgt $n = \frac{G}{e}$. Voor $G = 10$ is $n = 3,678\dots$. Voor gehele n hebben we dan de keuze uit $n = 3$ of $n = 4$. Dat levert $(\frac{10}{3})^3 = 37,037\dots$ en $(\frac{10}{4})^4 = 39,0625$. Dus een verdeling in vier gelijke getallen geeft bij $G = 10$ het maximale product.

NATUURLIJKE GETALLEN Terugkerend naar het oorspronkelijke vraagstuk kun je je afvragen

hoe je een natuurlijk getal G kunt splitsen in meerdere natuurlijke getallen (die niet gelijk hoeven te zijn) met een maximaal product. Splits G in n getallen:

$$G = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

waarbij het product $a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n$ maximaal is.

Elke a_i is niet groter dan 4, want splits a_i in 2 en $a_i - 2$ en eis dat $2(a_i - 2) > a_i$. Dat leidt tot $a_i > 4$. Vieren zelf hoeven niet, want elke 4 is te schrijven als $2 + 2 = 2 \times 2$. Enen kunnen ook niet, want die zijn altijd samen te nemen met een getal a groter dan 1, met $a + 1 > 1 \times a$.

Dus G wordt alleen gesplitst in tweeën en drieën. Meer dan twee tweeën mag niet, want elk drietal tweeën kunnen we vervangen door een tweetal drieën ($2 + 2 + 2 = 3 + 3$) met $3 \times 3 > 2 \times 2 \times 2$. Dus er blijven hoogstens één of twee tweeën over en verder alleen drieën. Dat geeft drie mogelijkheden:

1. $G = 3p$, dan is het maximum $M = 3^p$.
2. $G = 3p + 1$, dan is $M = 3^{p-1} \times 2^2$.
3. $G = 3p + 2$, dan is $M = 3^p \times 2$.

Neem bijvoorbeeld $G = 100$. Om het grootste product te krijgen, splitsen we dit in 32 drieën en twee tweeën: $100 = 3 \times 32 + 2 \times 2$. Dat levert $M = 3^{32} \times 2^2$ en dat is ongeveer gelijk aan 7,4 biljard ($7,4 \times 10^{15}$). ■

PYTHAGORAS OLYMPIADE

■ door Matthijs Coster, Alexander van Hoorn en Eddie Nijholt

Doe mee met de Pythagoras Olympiade! Elke aflevering bevat vier opgaven. De eerste twee zijn wat eenvoudiger; onder de goede inzendingen van leerlingen uit de klassen 1, 2 en 3 wordt een Irisbon van 20 euro verloot. De laatste twee zijn echte breinbrekers; onder de goede inzendingen van leerlingen (tot en met klas 6) wordt een Irisbon van 20 euro verloot. Bovendien kun je je via deze breinbrekers plaatsen voor de finale van de Nederlandse Wiskunde Olympiade, mocht het via de voorronden niet lukken. Niet-leerlingen kunnen met de Pythagoras Olympiade meedoen voor de eer.



HOE IN TE ZENDEN? Inzendingen ontvangen we bij voorkeur per e-mail (getypt of een scan van een handgeschreven oplossing): pytholym@pythagoras.nu.

Eventueel kun je je oplossing sturen naar **Pythagoras Olympiade, Korteweg-de Vries Instituut, Universiteit van Amsterdam, Postbus 94248, 1090 GE Amsterdam.**

Voorzie het antwoord van een duidelijke toelichting (dat wil zeggen: een berekening of een bewijs). Vermeld je naam en adres; leerlingen moeten ook hun klas en de naam van hun school vermelden.

Je inzending moet bij ons binnen zijn vóór 15 september 2011.

DE GOEDE INZENDERS VAN FEBRUARI 2011

206: Ben de Bondt (klas 4), Koninklijk Atheneum, Grimbergen; Peter van der Lecq, Utrecht; Pepijn de Maat (klas 2), Christelijk Gymnasium, Utrecht; Marcel Roggeband, Hoofddorp; Michelle Sweering (klas 3), Erasmiaans Gymnasium, Rotterdam.

207: Ben de Bondt (klas 4), Koninklijk Atheneum, Grimbergen; Peter van der Lecq, Utrecht; Pepijn de Maat (klas 2), Christelijk Gymnasium, Utrecht; Marcel Roggeband, Hoofddorp; Michelle Sweering (klas 3), Erasmiaans Gymnasium, Rotterdam.

208: Kees Boersma, Vlissingen; Stijn Cambie (klas 5), VTI Poperinge; Jan-Willem van Ittersum (klas 5), Keizer Karel

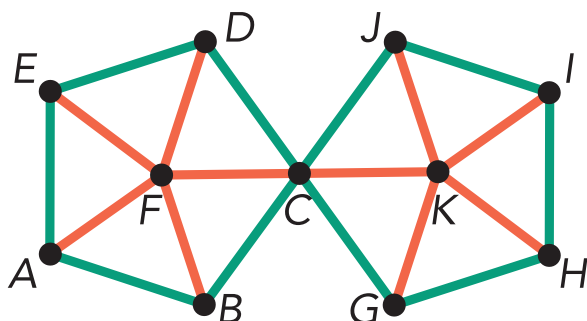
College, Amstelveen; Arie van der Kraan, Nuth; Peter van der Lecq, Utrecht; Marcel Roggeband, Hoofddorp; Vidan Samardzic (klas 4), Corlaer College, Nijkerk; Michelle Sweering (klas 3), Erasmiaans Gymnasium, Rotterdam.

209: Kees Boersma, Vlissingen; Ben de Bondt (klas 4), Koninklijk Atheneum, Grimbergen; Marcel Roggeband, Hoofddorp; Vidan Samardzic (klas 4), Corlaer College, Nijkerk; Michelle Sweering (klas 3), Erasmiaans Gymnasium, Rotterdam.

De Irisbonnen gaan naar Pepijn de Maat en Vidan Samardzic.

214

In een park hebben de paden de vorm van de plattegrond die je hieronder ziet. Elk groen pad is 116 meter lang, elk rood pad is 100 meter lang. Jolanda wandelt door het park. Wat is de lengte van de kortst mogelijke wandeling, als Jolanda elk van de twintig paden minimaal één keer wil doorlopen? Ze hoeft niet bij hetzelfde punt te eindigen als waar ze begint.



215

Van een getal zet je het laatste cijfer vooraan. Het nieuwe getal is dan anderhalf keer zo groot als het oude. Zoek het kleinst mogelijke getal waarvoor dit geldt.

216

In deze opgave gebruiken we de notatie $a \uparrow\uparrow b$ voor $a^{a^{a^{\dots^a}}}$ (hierin komen b a 's voor).

Merk op dat $a^{b^c} = a^{(b^c)}$.
Welk getal is groter: $4 \uparrow\uparrow 6$ of $10 \uparrow\uparrow 5$?

217

Na de vijftigste jaargang van het tijdschrift *Pythagoras* wordt er een verkiezing gehouden welke jaargang tot nu toe de beste was. Iedereen die meedoet aan de stemming kiest een aantal, zeg k , jaargangen ($k \geq 1$). Deze k jaargangen krijgen dan elk $\frac{1}{k}$ punt.

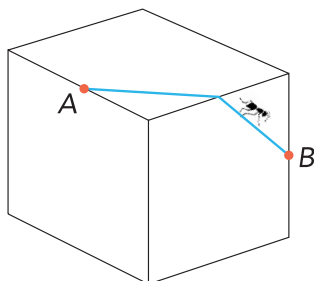
Na de stemming blijkt dat elke jaargang een verschillende score heeft! Hoeveel mensen hebben er minstens gestemd?

Je hoeft bij deze opgave niet te bewijzen dat je het kleinste aantal mensen hebt gevonden, alhoewel dat natuurlijk wel leuk is om te doen.



OPLOSSING 206

Hieronder zie je een (massieve) kubus waarvan de ribben lengte 10 hebben. De punten A en B liggen op de middens van een ribbe. Een mier wandelt via een zo kort mogelijk weg van A naar B . Wat is de afstand die de mier aflegt?



Oplossing. De kortste route is met blauw aangegeven. Als je de kubus uitvouwt, zie je dat de afstand AB de schuine zijde is van een gelijkbenige, recht-hoekige driehoek. De afstand van A naar B is dus $\sqrt{10^2 + 10^2} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$.

OPLOSSING 207

Bekijk de volgende figuur bestaande uit 7×7 getallen:

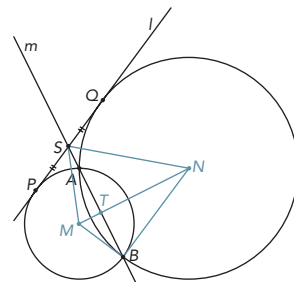
1	0	-1	-2	-1	0	1
2	1	0	-1	0	1	2
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
2	1	0	-1	0	1	2
1	0	-1	-2	-1	0	1

We breiden deze figuur uit tot een figuur bestaande uit 2011×2011 getallen, waarbij we er voor zorgen dat de rode 1 in het midden blijft. Bepaal de som van alle getallen in die figuur.

Oplossing. Geef met (x, y) de coördinaten van het vakje ten opzichte van de rode 1 aan en met $f(x, y)$ zijn waarde, bijvoorbeeld $f(3, -1) = 3$. Merk op dat $f(x, y) = |x| - |y| + 1$, waar $|k|$ staat voor de absolute waarde van k . Als we de gevraagde som S noemen, dan kunnen we $2S$ berekenen door elk vakje dubbel te tellen. Vervang hiertoe de waarde van vakje (x, y) door $f(x, y) + f(y, x)$. Nu bevat elk vakje de waarde 2, want $(|x| - |y| + 1) + (|y| - |x| + 1) = 2$. Er geldt dus dat $2S = 2011^2 \cdot 2$, zodat $S = 2011^2 = 4044121$.

OPLOSSING 208

Twee cirkels snijden elkaar in de punten A en B . De lijn door A en B noemen we m . Eén van de twee gemeenschappelijke raaklijnen van de cirkels noemen we l ; de raakpunten noemen we P en Q . Als S het snijpunt is van m en l , bewijs dan dat $|PS| = |QS|$.



Oplossing. Noteer met T het midden van AB en met M en N de middelpunten van de cirkels. Dan volgt uit de symmetrie dat MN en AB elkaar loodrecht snijden in T . De stelling van Pythagoras geeft: $|MS|^2 + |BN|^2 = (|MT|^2 + |ST|^2) + (|BT|^2 + |NT|^2) = (|NT|^2 + |ST|^2) + (|BT|^2 + |MT|^2) = |NS|^2 + |BM|^2$, dus $|MS|^2 - |BM|^2 = |NS|^2 - |BN|^2$ en ook

$$|MS|^2 - |PM|^2 = |NS|^2 - |QN|^2. \quad (*)$$

Omdat l de cirkels raakt, is $\angle MPS = \angle NQS = 90^\circ$. Vergelijking $(*)$ levert dus, met de stelling van Pythagoras, $|PS|^2 = |QS|^2$. Hieruit volgt het gevraagde.

OPLOSSING 209

Gegeven is de verzameling $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ en een operatie $\heartsuit$ met de volgende eigenschappen:

1. Voor $x, y \in V$ is $x \heartsuit y$ opnieuw een element van V .
2. Voor $x, y \in V$ geldt $x \heartsuit y = y \heartsuit x$.
3. Voor $x, y, z \in V$ geldt $x \heartsuit (y \heartsuit z) = (x \heartsuit y) \heartsuit z$.
4. Voor $x, y \in V$ is er altijd een $z \in V$ zodat $x \heartsuit z = y$, bovendien is z altijd uniek.
5. Specifieke bewerkingen:
 $1 \heartsuit 2 = 3$; $2 \heartsuit 3 = 4$; $1 \heartsuit 5 \neq 4$.

Bepaal $3 \heartsuit 5$.

Oplossing. Er geldt $1 \heartsuit 4 = 1 \heartsuit (2 \heartsuit 3) = (1 \heartsuit 2) \heartsuit 3 = 3 \heartsuit 3$. Noem dit a . Omdat al geldt $3 \heartsuit 2 = 4$, is $3 \heartsuit 3 \neq 4$. Dus $a \neq 4$ ofwel $1 \heartsuit 4 \neq 4$. Maar $2 \heartsuit 3 = 4$ impliceert ook dat $1 \heartsuit 3 \neq 4$. Verder is gegeven dat $1 \heartsuit 5 \neq 4$ en $1 \heartsuit 2 = 3 \neq 4$, dus moet wel gelden $1 \heartsuit 1 = 4$. Laat $b = 1 \heartsuit 3$ en $c = 1 \heartsuit 5$. We weten $3 \heartsuit 5 \neq 1 \heartsuit 5 = c$, dus $3 \heartsuit 5$ is $a, b, 3$ of 4 . Maar wegens $3 \heartsuit 1 = b$, $3 \heartsuit 2 = 4$ en $3 \heartsuit 3 = a$ blijft als enige mogelijkheid $3 \heartsuit 5 = 3$ over.

EURANDOM

13 JAAR GELEDEN

Een van de succesvolste nummers die van *Pythagoras* zijn verschenen, is het *Eschernummer*: jaargang 37 nummer 4 (april 1998). De honderdste geboortedag van Maurits Cornelis Escher op 17 juni 1998 was voor *Pythagoras* aanleiding om een heel nummer aan deze 'wiskunstenaar' te wijden. Je ziet hier het omslag en een pagina uit het binnenwerk van het betreffende nummer, dat gerust een *collector's item* genoemd mag worden.

