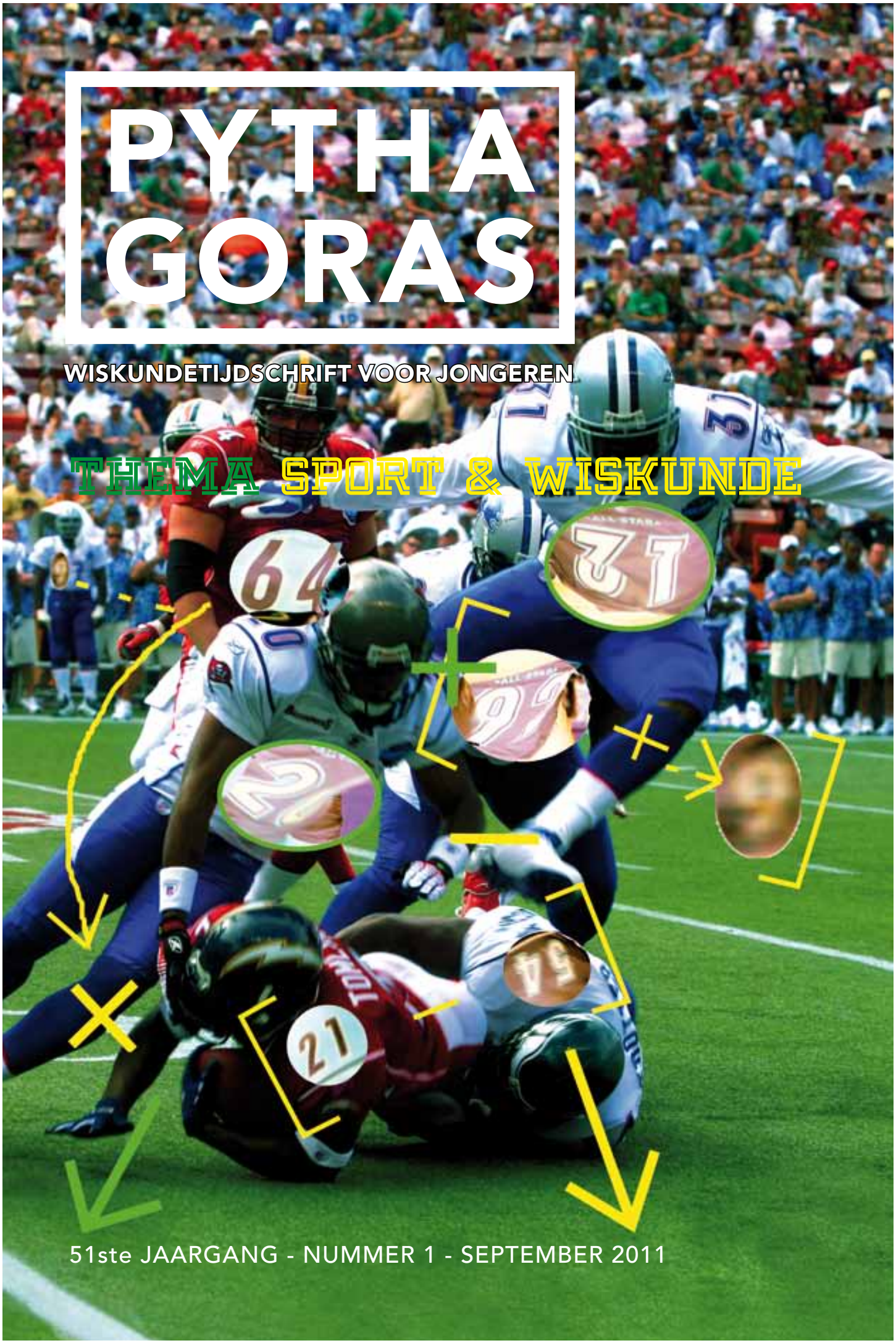
PYTHAGORAS

WISKUNDETIJDSCHRIFT VOOR JONGEREN

THEMA SPORT & WISKUNDE



51ste JAARGANG - NUMMER 1 - SEPTEMBER 2011

Pythagoras is al vijftig jaar hét wiskundetijdschrift voor jongeren. Ook de oude jaargangen staan boordevol interessante artikelen en puzzels. Ze zijn, voor zover voorradig, na te bestellen bij de abonneeadministratie. De complete vijftigste jaargang kost € 18; oudere jaargangen kosten € 12,50 (zes nummers per jaargang). Bestellen kan telefonisch: 0522-855175 of per e-mail: abonnementen@pythagoras.nu.

INHOUD

MEER GELUK DAN TOEVAL

Een nieuwe jaargang van *Pythagoras*, een nieuw thema. In elk nummer van deze 51ste jaargang kun je een artikel lezen over de rol van wiskunde in sport. In de eerste aflevering laat wetenschapsjournalist Hans van Maanen zien dat veel mensen veel energie verspillen aan het zoeken naar verklaringen voor toevallige fluctuaties in de sport.

26 **International Mathematical Olympiad Amsterdam 2011**

KLAPPEN VAN DE MOLEN

Van 16 tot 24 juli vond in Amsterdam de *International Mathematical Olympiad* (IMO) plaats. In totaal 564 deelnemers uit 101 verschillende landen zetten hun tanden in zes deksels lastige opgaven. Een daarvan bespreken we uitgebreid in deze *Pythagoras*.

12 **NOG MEER KINDEREN VAN FEMKE**

24 **FEMKE, BAYES EN DE *ODDS***

Het artikel 'De kinderen van Femke' uit het juninummer heeft nogal wat reacties losgemaakt bij de lezers. We moesten ons manmoedig door een serie opmerkingen heen werken, zoals: 'slaat echt alles', 'misbruik van de statistiek', 'drogredenering', 'feestnummer', '1 aprilgrap'. In twee artikelen geven we een nadere analyse van het verraderlijke probleem uit de kansrekening.

EN VERDER

2 Kleine nootjes
10 Journaal
16 Sudoku's en symmetrie
18 Sleutelen aan identieke tweelingen
22 Aansnijden van een hyperkubus
30 Pythagoras Olympiade
33 Oplossing sudoku en congruente vierdeling

NIVEAUBALKJES Pagina's met één of meer zwarte balkjes (onder de paginanummering) geven de moeilijkheidsgraad aan. Eén balkje: lastig. Twee balkjes: vereist wiskundekennis uit de vijfde of zesde klas. Drie balkjes: net iets moeilijker.

KLEINE NOOTJES

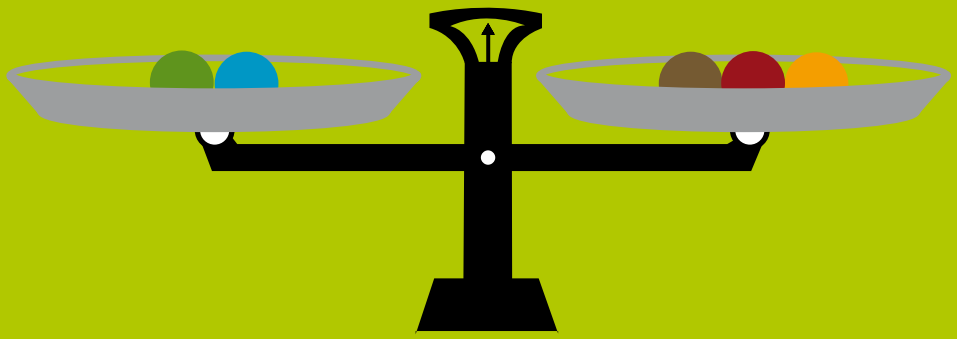
■ door Jan Guichelaar

DOOR DE VIERDE DIMENSIE?

Teken deze figuur zonder je pen van het papier te halen.

VOLKOREN BROOD

De jongste bediende bij een bakkerij is vergeten wat een volkorenbrood ook alweer kost; de prijs was ergens tussen de 2 en 3 euro. Van de 17 volkorenbroden die de bakker 's morgens had gebakken, heeft de jongste bediende wel de totale prijs op een briefje staan: € _4,7_. Maar het eerste en laatste cijfer kan hij niet meer lezen. Wat kost één volkorenbrood?



VIJF GEWICHTJES

Je hebt vijf kleine gewichtjes. Ze hebben allemaal een verschillend gewicht, elk een geheel aantal grammen onder de 10. Met een balans met één of meer van deze gewichtjes op elke schaal krijg je na veel proberen slechts vier verschillende evenwichten. Kun je nu eenduidig vaststellen hoeveel de gewichtjes wegen?

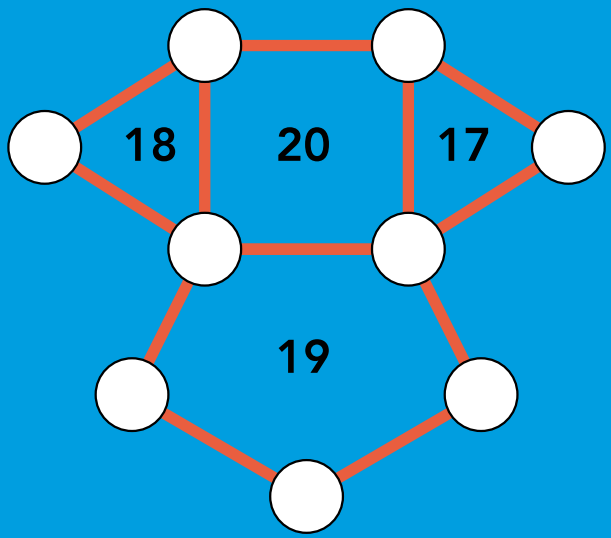
Kleine nootjes zijn eenvoudige opgaven die weinig of geen wiskundige voorkennis vereisen om opgelost te kunnen worden. De antwoorden vind je in het volgende nummer van *Pythagoras*.

2011 MAKEN

Wat is het kleinste getal waarvoor geldt dat de som van de cijfers gelijk is aan 2011?

GETALLEN PLAATSEN

Zet de getallen 1 tot en met 9 in de witte stippen, zodat de som van de drie, vier of vijf getallen het getal binnen de drie-, vier- of vijfhoek is.



OPLOSSINGEN KLEINE NOOTJES NR. 6

Broodsudoku.

1	3	4	2
4	1	2	3
2	4	3	1
3	2	1	4

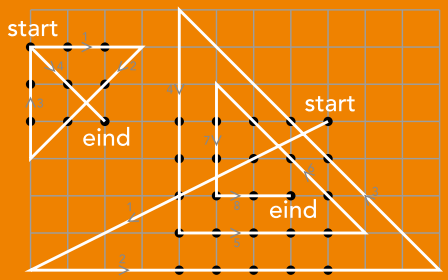
1	4	3	2
3	2	1	4
2	3	4	1
4	1	2	3

Geld halen. 1200 euro. In plaats van $500 + 7 \times 100$ euro krijgt hij het bedrag van $100 + 7 \times 500 = 3600$ euro. De bijzonderheid van het logo is dat het een (platgeslagen) Möbiusband is.

Langzaam en snel. Lena's beginsnelheid is v gedurende tijd t, haar retourtijd is T.
Er geldt: $vt + 3v \cdot 3t = 2vT$. Dus $T = 5t$.
Dan $t + 3t + 5t = 90$, ofwel $t = 10$ minuten.

Spaarvarken. Noem het aanvankelijke bedrag (in euro's) S, dan geldt: $(1 - \frac{1}{5})(1 - \frac{1}{4})(1 - \frac{1}{3})S = 40$, dus $S = 100$. Opmerking: hoewel vraag en antwoord theoretisch juist zijn, is het onmogelijk om van 100 euro exact $\frac{1}{3}$ deel te nemen. De opgave was beter geweest als het eindbedrag 60 euro was, dan zou namelijk $S = 150$ en dat is wel deelbaar door 3.

Pen op papier.



Noot van de redactie. Het nootje 'Gelijkvormige driehoeken' uit het aprilnummer is onoplosbaar. De in het juninummer vermelde oplossing is fout: verhoudingen en lengtes kloppen, maar aan de driehoeksongelijkheid is niet voldaan. Een blunder van de redactie, waarvoor excuses.
Het 'borrelnootje', eveneens uit het aprilnummer, kan sneller worden opgelost dan zoals in het juninummer beschreven: de 3 gekozen getallen laten er 6 over voor de winst voor Henk. Zijn kans om te winnen is dus $\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$.

Als er iets is wat een wetenschapper van gewone mensen onderscheidt, dan is het wel het besef dat toeval een veel grotere rol in ons leven speelt dan wij geneigd zijn te denken – zelfs als we dat beseffen. In deze eerste aflevering van onze themaserie over sport en wiskunde laat wetenschapsjournalist Hans van Maanen zien dat gewone mensen ook in de sport veel energie verspillen aan het zoeken naar verklaringen voor toevallige fluctuaties.

door Hans van Maanen

MEER GELUK DAN TOEVAL

GELUK IS ONGELIJK VERDEELD De kans op 'kop' of 'munt' is bij het opgooien van een eerlijke munt gelijk verdeeld: als we vijftig keer een munt laten opgooien en 'kop' weergeven met een zwart bolletje en 'munt' met een rood bolletje, krijgen we bijvoorbeeld de reeks van figuur 1. Hoewel de zwarte en rode bolletjes elkaar redelijk in evenwicht houden, is het duidelijk dat soms vrij lange reeksen van zwart of rood voorkomen. Dat valt geheel binnen de wetten van het toeval. Het is, om warm te lopen voor dit artikel, aardig om alvast eens uit te rekenen hoe groot bijvoorbeeld de kans is dat bij tien muntworpen er minstens vijf keer achtereen hetzelfde wordt gegooid. Het antwoord staat in het kader aan het eind van dit artikel.

Als we niet wisten dat de reeks van figuur 1 puur door toeval is gemaakt, zouden we in de verleiding komen om te denken: tien rode bolletjes op een rij in het midden, slechts onderbroken door twee zwarte, dat kan haast geen toeval zijn.

De hele rij bolletjes kunnen we bijvoorbeeld beschouwen als de uitslagen van tenniswedstrijden (waarbij remises onmogelijk zijn). Als de twee spelers vrijwel even sterk zijn en bijvoorbeeld twintig wedstrijden tegen elkaar spelen, kunnen we ook zeggen dat speler A eerst even aan het gras moest wennen, maar daarna sterk vervolgde met vier winstpartijen. Die voorsprong heeft hij daarna niet meer uit handen gegeven: via 6-3 en 7-6 werd hij ten slotte met 11-9 kampioen. Of andersom, dat speler B goed begon maar daarna vier wedstrijden op rij moest weggeven, en hoewel hij nog dapper terugkwam tot 6-6, werden de zenuwen hem toen toch te veel en moest hij met 11-9 in A zijn meerdere erkennen.

De bolletjes kunnen we ook lezen als treffers en missers van een basketballer – een redelijk goede basketballer, want een schotpercentage van vijftig procent is redelijk goed. Na een eerste misser begint hij met vier treffers. Ook al weten we dat zijn trefkans telkens vijftig procent is, het lijkt alsof hij hier 'op schot' komt. Straks gaan we dieper op deze kwestie in.

De rij zwarte en rode bolletjes kan ook worden beschouwd als de winst- en verliespartijen in bijvoorbeeld de voetbalcompetitie (gelijke spelen negeren we). Ook daarin valt te verwachten dat een middelmatig team soms door toeval vijf of zes verliespartijen achter elkaar speelt. Als daarna vier of vijf winstpartijen volgen, heet het al snel dat het team 'altijd sterk terugkomt vanuit de underdogpositie'. Als bij de omslag ook nog toevallig een nieuwe trainer was aangesteld, gaat zijn marktwaarde direct fors omhoog. Uiteraard kan een nieuwe trainer best bezielend werken, maar je wilt wel bewijs dat de verbetering van de resultaten uitstijgt boven de verbeteringen die al volgens de kansrekening verwacht mogen worden: ze moeten 'significant' zijn. Toch hoor je zelden een sportverslaggever aan de trainer vragen of de goede resultaten niet puur toeval zijn.

We kijken nog een keer naar de rij in figuur 1. De kans dat er na een eerste keer 'kop' nog driemaal achtereen 'kop' wordt gegooid met een eerlijke munt, is $(\frac{1}{2})^3 = 0{,}125$ (ofwel 12,5%). Met andere

Figuur 1 Een mogelijke reeks ontstaan door het opgooien van een munt, in feite een simulatie door een computer.

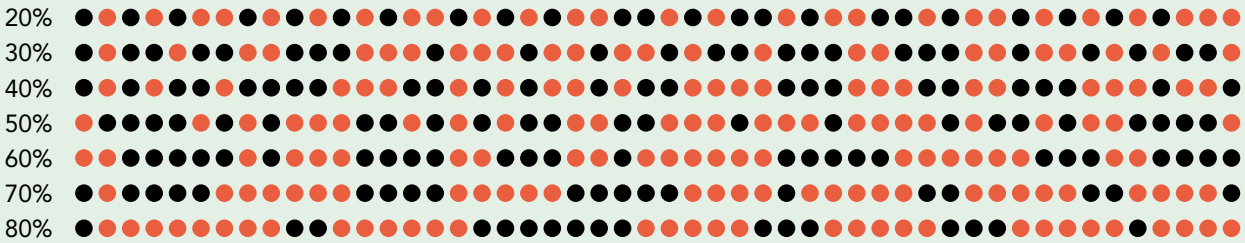
Gaat ie erin of niet? Vaak is het toeval of een bal net wel of net niet in het doel belandt. Maar een handvol van zulke incidenten kan een team de titel kosten of laten degraderen.

woorden, in meer dan tien procent van de keren dat we viermaal een munt opwerpen zal na de eerste keer gooien nog drie keer dezelfde kant boven komen. Dat is dus bepaald geen zeldzame gebeurtenis, maar voor de meeste mensen is hiermee wel de grens van de geloofwaardigheid bereikt.

Een reeks van vijf beginnen mensen verdacht te vinden, zo blijkt uit een experiment dat de dit jaar overleden Leidse hoogleraar psychologie Willem Wagenaar eens uitvoerde. Hij construeerde rijen zwarte en rode stippen zoals in figuur 1, maar varieerde de kans op herhaling – dus de kans dat na een rode stip weer een rode stip komt en na een zwarte weer een zwarte stip. Bij een herhalingskans van 50 procent ontstaat uiteraard een rij zoals die bij een eerlijke munt zou ontstaan, maar bij een herhalingskans van 20 procent zullen de stippen elkaar bijna voortdurend afwisselen. Toch bevatten alle rijen ongeveer evenveel rode als zwarte stippen. Zo ontstaan bijvoorbeeld de reeksen van figuur 2.

Wagenaar liet deze rijen aan een heleboel proefpersonen zien, en liet ze aangeven welke rij volgens hen werkelijk door het opgooien van een munt was geconstrueerd. De uitkomst liet aan duidelijkheid niets te wensen over: de rijen met dertig en veertig procent herhalingskans zien er het meest 'willekeurig' uit, en vrijwel niemand gelooft nog dat een rij met zestig procent herhalingskans door het gooien van een eerlijke munt kan zijn ontstaan. Toch zijn alle rijen 'eerlijk', in de zin dat ze puur door toeval bepaald zijn. Negen van de tien mensen geven hun voorkeur aan een lage herhalingskans, dus een overmaat aan afwisseling. Ook uit ander onderzoek blijkt dat mensen de neiging hebben lange reeksen te snel verdacht te vinden.

Maar, zoals gezegd, reeksen van vijf of zes keer 'munt' (of vijf of zes keer rood bij roulette) zijn bepaald niet zeldzaam, en wie een avond naar het ca-



Figuur 2 De afwisseling van zwart en rood, afhankelijk van de kans op herhaling van dezelfde kleur (deze kans is links van elke rij aangegeven).

sino gaat, loopt grote kans met dergelijke reeksen geconfronteerd te worden – en geruïneerd te worden als de strategie daar geen rekening mee houdt.

Het merkwaardige is echter, zo ontdekte Wagenaar, dat mensen in zo'n geval niet concluderen dat hun ideeën van de kansrekening moeten worden bijgesteld, maar dat er nog een andere factor in het spel moet zijn – namelijk *geluk*. Iemand die geluk heeft, wint vele malen achter elkaar, hetzelfde kan gebeuren als het je geluksdag is, als je aan je gelukkige tafel zit, of met je geluksкleur speelt.

Wagenaar trok hieruit de aardige conclusie dat 'toeval' en 'geluk' voor de meeste mensen twee verschillende zaken zijn. Terwijl wiskundigen de wereld van sport en spel opdelen in behendigheid en kans, zien gokkers dat heel anders. Voor hen is het geluk een derde oorzakelijke factor, waarmee zorgvuldig moet worden omgesprongen. Je moet wach-

REGRESSIE NAAR HET GEMIDDELDE Stel je voor, dat in de eerste ronde van een groot kop-of-munt toernooi duizend personen ieder tien keer een munt op mogen gooien. 'Kop' levert een punt op, 'munt' geen punten. Puur door toeval zal dan meestal één iemand 10 punten scoren, ongeveer tien personen scoren 9 punten, circa 45 scoren er 8 en negenhonderd personen behoren tot de brede middenmoot die tussen de 7 en 3 punten bij elkaar sprokkelt. De gemiddelde score per persoon is natuurlijk 5 punten, want ze gooien met eerlijke munten. Je kunt deze getallen eventueel zelf narekenen met de *binomiale verdeling*.

Een scout die op zoek is naar talent, besluit om iedereen die 8 of meer punten heeft gescoord in zijn selectieteam van kop-of-munt gooiers op te nemen. Deze naar verwachting 1 + 10 + 45 = 56 talenten gooien in de tweede ronde opnieuw ieder tien keer een munt op. Nu haalt doorgaans niemand 10 punten, misschien één iemand 9 punten, twee halen 8 punten en de rest 7 of minder punten, op grond van precies dezelfde kansverdeling als in de eerste ronde.

De scout bekijkt ieders score en is zwaar teleurgesteld: maar één talent heeft zich verbeterd (van 8 naar 9), twee talenten zijn constant op 8 gebleven, terwijl de overige 53 talenten lager scoorden (van 8 naar 7 of nog lager). De regressie naar het gemiddelde van 5 punten heeft onverbiddelijk toegeslagen.

In dit voorbeeld is wel duidelijk dat alle scores puur toevallig zijn, maar dit effect treedt altijd op als een selectie wordt gemaakt op basis van een eigenschap die deels door toeval wordt bepaald. Dat geldt voor voetbalprestaties, maar ook voor patiënten die voor een medicijntest worden geselecteerd op hoge bloeddruk, of het muzikaal talent van kinderen met muzikale ouders. Juist extremen zijn vaak het resultaat van een toevallige samenloop van omstandigheden die zich geen tweede keer zal herhalen.

ten met inzetten tot het geluk je toelacht, je moet het geluk niet tarten, en je moet weten wanneer het geluk zich tegen je keert. Het hanteren van het geluk is een behendigheid, en een goede gokker weet wanneer zijn geluk begint en wanneer hij moet stoppen met spelen.

We kunnen de zaak ook helemaal van de andere kant bekijken, en zeggen dat het toeval veel meer 'klontert' dan we geneigd zijn te denken. Als iets strikt toevallig en een beetje zeldzaam is – bijvoorbeeld het missen van een strafschop, of het optreden van leukemie – dan is het niet zo dat dit af en toe en met gelijkmatige tussenruimtes plaatsvindt, nee, dan kun je er haast op wachten dat iemand drie keer achter elkaar mist, of dat rond een kerncentrale opvallend veel leukemie voorkomt. Zeker als er veel voetbalwedstrijden worden gespeeld, of veel kerncentrales zijn (en veel soorten kanker waarop gelet kan worden). Dat een kampioen door de underdog wordt verslagen lijkt ondenkbaar, maar er zijn zoveel kampioenen die tegen underdogs moeten spelen, dat het vrij geregeld voer voor krantenkoppen is.

DE 'HOT HAND' Mensen verwachten van een rij 'kop' of 'munt' meer dan een willekeurige munt kan bieden. Niet alleen moet de munt volgens hen op de lange termijn eerlijk vijftig procent 'kop' en vijftig procent 'munt' tonen, ook op de korte termijn moet dat. Zoals zojuist al bleek, overschatten mensen de afwisseling die de munt bij een klein aantal worpen moet vertonen – meer dan vier of vijf keer munt achtereen, is al snel verdacht. Een willekeurige reeks ziet er vaak helemaal niet willekeurig uit.

Dit verschijnsel leidt ertoe, dat mensen patronen en regelmatigheden zien waar ze niet zijn. Een van de aardigste misvattingen die daardoor zijn ontstaan, is die van de 'hot hand', het al genoemde idee dat basketballers tijdens een wedstrijd 'op schot' raken. Biljarters noemen het 'op stoot', en ook in veel andere sporten wordt min of meer vanzelfsprekend aangenomen dat winst tot winst leidt, en dat verlies moeilijk te doorbreken is. De spelers zijn 'in vorm', het team is 'in the winning mood'. Vandaar dat de Amerikaanse psychologen Amos Tversky en Thomas Gilovich al in

speler	A	B	C	D	E	F	G	H	I
raak na 3 mis	50%	52%	50%	77%	50%	52%	61%	70%	88%
raak na 2 mis	47%	51%	49%	60%	48%	53%	58%	56%	73%
raak na 1 mis	56%	51%	46%	60%	47%	51%	58%	52%	71%
raak na 1 raak	49%	53%	46%	55%	45%	43%	53%	51%	57%
raak na 2 raak	50%	52%	46%	54%	43%	40%	47%	48%	58%
raak na 3 raak	48%	48%	32%	59%	27%	34%	53%	36%	51%

Figuur 3 Kans op een treffer na treffers en missers voor de Philadelphia 76ers (seizoen 1980-1981).

Ook het oplopen van een ernstige blessure is vaak een kwestie van per ongeluk een fractie van een seconde te laat of te vroeg zijn.

de vorige eeuw op het idee kwamen, die opvatting eens aan een nader onderzoek te onderwerpen.

Basketballers zelf geloven sterk in wat zij 'flap' noemen. Negen van de tien door Tversky en Gilovich ondervraagde spelers denken dat een speler die zojuist driemaal heeft raakgeschoten, meer kans heeft het volgende schot raak te schieten. Vier van de vijf spelers menen dat het goed is de bal te spelen naar degene die zojuist drie of vier keer raak schoot, en twee van de drie denken dat een speler meer kans heeft de tweede vrije worp raak te schieten als de eerste erin ging. Als iemand 'op schot' is, zal hij dus meer dan gemiddeld lange series treffers hebben, en daarnaast zal de kans dat hij raak schiet na een treffer groter zijn dan de kans dat hij raak schiet na een misser.

Het enige wat nu nog moet worden gedaan, is onderzoek. In figuur 3 zie je de resultaten van Tversky en Gilovich. Van de negen belangrijkste spelers zijn gegeven de kans op een treffer na drie, twee of één missers en na één, twee of drie treffers.

Voor acht van de negen spelers blijkt de kans op een treffer groter na een misser dan na een treffer. Er blijkt weinig verband tussen de resultaten, behalve voor speler I, die na drie missers veel vaker scoort dan na drie treffers.

Ook als wordt gekeken naar de tijd waarbinnen de schoten worden genomen (iemand die in vier minuten zes uit zeven haalt, lijkt meer 'op schot' dan iemand die zeven op zeven haalt in veertig minuten) of bijvoorbeeld naar series van telkens vier schoten, bleef het beeld bestaan: er is geen verband tussen het vorige en het volgende schot.

Ook bij vrije worpen, die meestal in twee- of drietallen mogen worden genomen, blijkt geen verband tussen het missen of scoren van de eerste vrije worp en het missen of scoren van de volgende.

De 'hot hand' bestaat niet – wat spelers en publiek ook beweren, de kans op een treffer is onafhankelijk van het resultaat van het voorafgaande schot. Het feit dat een speler vier ballen achter elkaar er in schiet, kan volledig op conto van het toeval geschreven worden. Stel dat een speler met een schotpercentage van vijftig in totaal twintig schotpogingen op een avond onderneemt, dan is de kans al bijna vijftig procent dat hij er vier achter elkaar in

schiet. De kans dat er vijf ballen achtereen ingaan, is bijna vijfentwintig procent, en de kans op een reeks van zes is ongeveer tien procent. Dat betekent ook, dat als deze speler tien wedstrijden speelt, de kans groot wordt (ruim 65 procent) dat hij in één van die wedstrijden inderdaad zes treffers op rij heeft. Hijzelf zal dan menen dat hij bij zo'n wedstrijd uitzonderlijk op schot was.

WAAROM DEBUTANTEN TEGENVALLEN

Debutanten stellen opvallend vaak teleur. Voor ze werden aangekocht speelden ze de sterren van de hemel, maar zodra de competitie is begonnen, presteren ze ver onder hun kunnen. Volgens de kranten hebben ze dan 'hun belofte niet waargemaakt' of zijn ze 'bezweken onder de druk'. Ze zijn echter slachtoffer van de 'regressie naar het gemiddelde' (zie het kader op pagina 6).

Regressie naar het gemiddelde is een van de belangrijkste valkuilen in de statistiek. Wetenschappers zagen hun goede naam in rook opgaan omdat ze vergaten er rekening mee te houden. Talloos zijn de politici die menen effectieve maatregelen te hebben genomen, terwijl regressie naar het gemiddelde het werk voor hen deed.

Wie het eenmaal begrijpt, ziet het overal terug. Bij de selectie voor voetbalteams zijn er altijd wel een paar middelmatige jongens die toevallig een goede dag hebben, of die net een opmerkelijk goed seizoen hebben. Zij worden uitverkoren, maar daarna spelen ze weer op hun gewone niveau.

Verreweg de meeste leerlingen die een mooi rapport hebben en daarmee worden gecomplimenteerd, zullen de volgende keer een minder mooi rapport hebben – niet door dat complimentje, maar omdat ze niet elke keer het geluk aan hun zijde hebben. Leerlingen met een slecht rapport gaan er na een vermanend woord vaak op vooruit – niet door het standje, maar omdat de kans groter is dat ze het daarna beter doen dan nog slechter.

Voetbal- en schoolprestaties, maar bijvoorbeeld ook bedrijfsresultaten zijn opgebouwd uit twee onderdelen: de echte vaardigheid, plus een dosis toeval. De hoogste score wordt bereikt door degene met de grootste vaardigheden plus het meeste geluk. Bij een volgende meting zal de vaardigheid niet zijn veranderd, maar zal het geluk wat minder zijn of zelfs omslaan in pech – dat is het wezen van het toeval – en zal de score dus wat lager zijn en meer naar het gemiddelde neigen. Hoe sterker de toevalsfactor, hoe sterker het effect van de regressie naar het gemiddelde.

Uitzonderlijk muzikale moeders krijgen dankzij de genetica meestal wel muzikale dochters, maar die zijn dankzij het toeval waarschijnlijk toch wat minder muzikaal dan zij. Hetzelfde geldt voor intelligentie, schoonheid, kunstzinnigheid, lengte en wat niet al. De zonen van Johan Cruijff en Jan Mulder zijn toch, laten we wel wezen, minder goed en onuitstaanbaar dan hun vaders.

Regressie naar het gemiddelde is niet een principe dat veel journalisten kennen en veel lezers aanspreekt, dus wordt altijd eerder een verklaring gezocht in te veel spanning of te veel ontspanning of te weinig begeleiding of te veel begeleiding. Mensen verdoen veel tijd met het zoeken naar verklaringen voor toevallige fluctuaties. ■

DE KANS OP EEN REEKS Wat is de kans op minstens vijf keer hetzelfde bij tien muntworpen? Het totale aantal kop/munt-rijtjes ter lengte 10 is $2^{10} = 1024$. Hoeveel daarvan bevatten minstens vijf keer een K (kop) achter elkaar? Hieronder staan die rijtjes; daarbij betekent een x dat daar zowel een K (kop) als een M (munt) mag staan:

KKKKKxxxxx
MKKKKKxxxx
xMKKKKKxxx
xxMKKKKKxx
xxxMKKKKKx
xxxxMKKKKK

In totaal zijn dit $2^5 + 2^4 + 2^4 + 2^4 + 2^4 + 2^4 =$ 112 rijtjes. Het aantal rijtjes met minstens vijf keer een M achter elkaar is natuurlijk ook 112. Maar pas op, er zijn dubbeltellingen: KKKKKMMMMM en MMMMMKKKKK hadden we al geteld! Dus er blijven 110 rijtjes met vijf keer een M achter elkaar over. Het totale aantal rijtjes met vijf keer achter elkaar hetzelfde is dus 112 + 110 = 222. Conclusie: de gezochte kans is 222/1024, ongeveer 21,7%.

JOURNAAL

■ door Alex van den Brandhof

Wereldrecord dubbelvouwen gebroken

Hoe vaak kun je een vel papier dubbelvouwen? Probeer het maar eens met een gewoon A4-tje; verder dan zes of zeven keer zul je niet komen.

In 2002 bewees de toen 17 jaar oude Britney Gallivan uit Californië op overtuigende wijze dat je papier wel degelijk vaker kunt dubbelvouwen. Daarvoor had zij wel een enorme rol toiletpapier nodig. Haar record –12 keer vouwen – werd op 2 april van dit jaar gebroken door leerlingen van de St. Mark's School in Southborough, Massachusetts. Onder begeleiding van hun wiskundeleraar slaagden ze er in zo'n vier kilometer wc-papier 13 keer dubbel te vouwen. Het plooien zelf gebeurde in de *Infinite Corridor*, een 251 meter lange gang in het Massachusetts Institute of Technology.

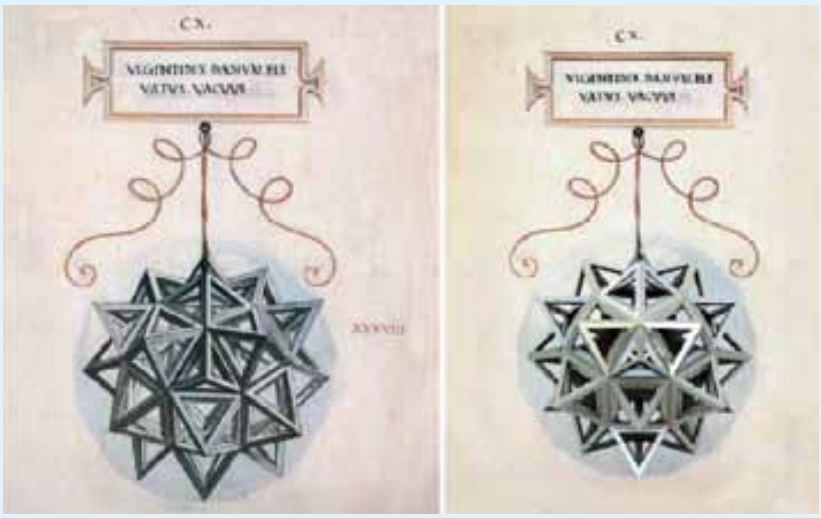
Bij het dubbelvouwen neemt de lengte van het papier snel af en de dikte van het resultaat wordt snel groter. Om je een idee te geven: als het papier 0,1 mm dik is, en je vouwt het 41 keer dubbel, dan is de dikte van het resultaat ongeveer gelijk aan de afstand van de aarde tot de maan!

Een fout van Leonardo da Vinci

Wiskundige en kunstenaar Rinus Roelofs heeft een fout ontdekt in een tekening van Leonardo da Vinci. Het gaat om een tekening van een *romboëdrische kuboctaëder*, een veelvlak waarbij een gelijkzijdige driehoek steeds door vierkanten wordt omringd.

Op de tekening heeft Da Vinci ieder zijvlak van een piramide voorzien. Op de driehoekige zijvlakken staat een piramide met een driehoekig grondvlak en op de vierkanten eentje met een vierkante. Toen Roelofs de tekening probeerde na te tekenen, kwam hij erachter dat een piramide aan de onderkant van de tekening een vierkante basis heeft, terwijl het eigenlijk een driehoekige zou moeten zijn.

Da Vinci maakte dergelijke tekeningen als illustraties bij het werk van Luca Pacioli, een wiskundige die net als Da Vinci aan het hof van de hertog van Milaan werkte. Voor zover bekend maakte Da Vinci voor zijn tekeningen geen gebruik van modellen en had hij alleen de instructies van Pacioli om zich een beeld te vormen van de figuren.



Links de tekening van Leonardo da Vinci, rechts de gecorrigeerde versie van Rinus Roelofs

Bron: EOS Magazine

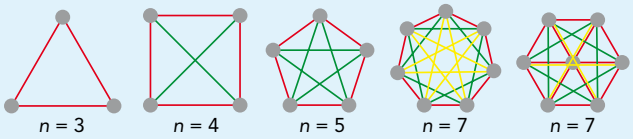
Combinatorisch meetkundeprobleem opgelost

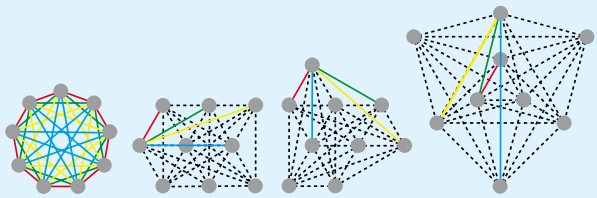
In 1946 bedacht de befaamde Hongaarse wiskundige Paul Erdös (1913-1996) het *verschillende-afstanden-probleem*. Nu, 65 jaar later, is het probleem opgelost door Nets Hawk Katz van de Indiana University en Larry Gutz van het Institute for Advanced Study in Princeton.

Teken een stel punten en verbind elk tweetal punten met een rechte lijn. Lijnen van verschillende lengte geef je verschillende kleuren, lijnen van gelijke lengte krijgen dezelfde kleur. De vraag die Erdös stelde is: wat is het kleinst mogelijke aantal kleuren bij een gegeven aantal punten?

Bij drie punten is het makkelijk: één kleur volstaat, door de punten op de hoekpunten van een gelijkzijdige driehoek te plaatsen. Bij vier punten heb je twee kleuren nodig en ook bij vijf punten lukt het met twee kleuren, zie onderstaande figuur. Bij zes punten heb je een derde kleur nodig. Ook bij zeven punten lukt het met drie kleuren; de twee mogelijkheden zie je in de figuur.

Bij acht of negen punten heb je vier kleuren nodig; de vier mogelijkheden om negen punten te rangschikken, zie je rechtsboven. Slechts bij één mogelijkheid zijn alle lijnen met kleur aangegeven. Bij de andere drie mogelijkheden is van elke lengte er één met kleur aangegeven; de overige lijnen zijn gestippeld met zwart. Overtuig jezelf dat er geen vijfde kleur nodig is om deze stippellijnen te kleuren!





De vier mogelijkheden voor het geval $n = 9$; er zijn vier kleuren nodig.

Bij tien, elf of twaalf punten heb je vijf kleuren nodig. Voor twaalf punten volstaat het niet om de punten met gelijke afstand op de omtrek van een cirkel te leggen; je zou dan zes kleuren nodig hebben. Probeer zelf te bedenken hoe je twaalf punten moet rangschikken, zodat je aan vijf kleuren genoeg hebt.

De vraag is hoe het verder gaat als het aantal punten toeneemt. Bij een zeer groot aantal punten is het verre van eenvoudig om uit te vinden hoe je de punten moet rangschikken, om het aantal verbindingslijnen van verschillende lengte te minimaliseren. De onderzoekers konden bewijzen dat als je uitgaat van n punten, het aantal verbindingslijnen van verschillende lengte ten minste gelijk is aan een constante maal $n/\log(n)$. Dit is een aanzienlijke verbetering ten opzichte van de ondergrens die hiervoor bekend was.

Steen-papier-schaar beschrijft biodiversiteit

Als twee verschillende diersoorten voor hun levensbehoeften afhankelijk zijn van dezelfde bronnen, dan zal volgens de klassieke ecologie de sterkste soort het overleven en de andere uitsterven. Er zijn echter plaatsen op aarde, zoals het Amazonegebied, waar duizenden diersoorten naast elkaar bestaan en voedsel, licht en water met elkaar delen.

Amerikaanse onderzoekers hebben een wiskundig model ontwikkeld waaruit nieuwe ecologische regels naar voren zijn gekomen. Het model is gebaseerd op het spelletje *Steen-papier-schaar*. De spelers kiezen daarbij tegelijkertijd één van de drie voorwerpen door ze met hun hand uit te beelden. Steen wint van schaar, schaar wint van papier en papier wint van steen.

Dit is een voorbeeld van een *intransitieve competitie*: van elk paar mogelijkheden is er steeds een winnaar en een verliezer, maar alle drie mogelijkheden samen kunnen niet van goed naar slecht gerangschikt worden.

Dit spelletje kan gebruikt worden om ecologische systemen met drie diersoorten te omschrijven. De onderzoekers hebben een wiskundige structuur ontwikkeld waarmee ze kunnen uitvinden wat er gebeurt bij méér dan drie diersoorten. Met methodes uit de speltheorie, grafentheorie en dynamische systemen kunnen ze laten zien dat de biodiversiteit snel toeneemt als er meer beperkende factoren in het model worden opgenomen. Een aantal zwakke spelers wordt snel uitgeschakeld en tussen de overige diersoorten treedt een soort evenwicht op. Daardoor is het in dit model wel mogelijk dat veel verschillende soorten in hetzelfde gebied naast elkaar bestaan.

Het artikel 'De kinderen van Femke' uit het juninummer heeft nogal wat reacties losgemaakt bij de lezers. We moesten ons manmoedig door een serie opmerkingen heen werken, zoals: 'slaat echt alles', 'misbruik van de statistiek', 'drogredenering', 'feestnummer', '1 aprilgrap'. Dat was voor ons reden om ons aan een nadere analyse te zetten. In dit artikel gaan we in op enkele lezersreacties. Verder bleek dat de zaak ook met de *Regel van Bayes* kan worden doorgerekend; daarover gaat het artikel 'Femke, Bayes en de *odds*' op pagina 24.

■ door Jan Guichelaar en Alex van den Brandhof

NOG MEER KINDEREN VAN FEMKE

In het vorige nummer van *Pythagoras* schreven we over een variant op het bekende twee-kinderenprobleem uit de kansrekening, dat ter sprake kwam bij een congres ter ere van Martin Gardner. Het klassieke probleem en de zogeheten 'dinsdagvariant' herhalen we kort; het volledige artikel 'De kinderen van Femke' is te vinden in het archief op www.pythagoras.nu.

1. Femke heeft twee kinderen, waarvan minstens één zoon. Wat is de kans dat Femke twee zonen heeft?

jongste kind / oudste kind	jongen	meisje
jongen	1	1
meisje	1	0

Figuur 1 De kans op 2 zonen, gegeven dat er ten minste 1 zoon is, is gelijk aan $\frac{1}{3}$.

In figuur 1 staan verticaal de mogelijkheden voor het oudste kind en horizontaal die van het jongste kind. In totaal zijn er vier mogelijkheden, maar omdat gegeven is dat er minstens één zoon is, staat er een 0 in het vakje rechtsonder. De drie overgebleven mogelijkheden zijn alle even waarschijnlijk. Dus de kans op twee zonen is $\frac{1}{3}$.

2. Femke heeft twee kinderen, waarvan minstens één zoon die op een dinsdag is geboren. Wat is de kans dat Femke twee zonen heeft?

In figuur 2 staan alle mogelijkheden. Vanwege het gegeven 'minstens één zoon op dinsdag geboren' is het totale aantal mogelijkheden 27. Hiervan zijn er 13 waarbij twee zonen voorkomen. Dus de gevraagde kans is $\frac{13}{27}$.

De kans van $\frac{13}{27}$ werd door sommige lezers zó ongeloofwaardig gevonden, dat ze in de pen klommen. De critici onderbouwden hun opmerkingen steeds, hoewel we het niet altijd met hen eens waren. Daarnaast heeft de redactie ook een aantal positieve reacties ontvangen. Wij zijn de schrijvers allen dankbaar voor hun opmerkingen, alternatieve voorbeelden en redeneringen. Ze hebben ons

bewust gemaakt van de vele kanten die er aan dit soort problemen zitten.

MODELLERING Om een (voorwaardelijke) kans uit te rekenen, heb je een een goed gedefinieerd kansmodel nodig. In het artikel 'De kinderen van Femke' (en in vraag 2 hierboven) kozen we een *uitkomstenruimte* die aan zowel het oudste als het jongste kind een geboortedag toekent, en alle uitkomsten zijn *even waarschijnlijk*. De interpretatie die daarbij hoort is als volgt: als je een willekeurige moeder van twee kinderen vraagt of zij een zoon heeft die op dinsdag geboren is, en zij zegt ja, dan is de kans dat zij twee zonen heeft gelijk aan $\frac{13}{27}$.

Er kan verwarring ontstaan omdat je ook een andere interpretatie kunt bedenken. Bijvoorbeeld: je vraagt een willekeurige moeder van twee kinderen of zij een zoon heeft; zij antwoordt met ja en voegt daar uit zichzelf aan toe dat deze op dinsdag geboren is. In dat geval hangt het er vanaf welke 'strategie' de vrouw hanteert. Geeft zij die extra informatie alléén als de zoon op dinsdag is geboren en houdt ze anders haar mond? Of zegt ze van de zoon sowieso de geboortedag, ongeacht wélke dag dat is? En wat als ze twee zonen heeft? Kiest ze willekeurig (dat wil zeggen: door het werpen van een munt) één van de zonen en meldt de geboortedag? Of geeft ze (met kans 1) de geboortedag van de oudste zoon? Het zijn allemaal verschillende problemen en in ons artikel in het juninummer hadden we er beter aan gedaan als we de interpretatie duidelijker hadden opgeschreven. Want bij de volgende interpretatie is het antwoord wél $\frac{1}{3}$: je vraagt de moeder of zij een zoon heeft; zij antwoordt ja en zij voegt daar uit zichzelf de geboortedag (welke dag dat ook is) aan toe, in het geval van twee zonen kiest zij altijd de oudste.

Verwarring kan ook ontstaan doordat we het in ons artikel over Femke hadden. Is dat wel hetzelfde als een willekeurige moeder met twee kinderen? Misschien hadden we het wel over Femke Halsema, de voormalige partijleidster van GroenLinks, waarvan we wéten dat zij twee kinderen heeft, een jongen en een meisje. Maar goed, er zijn vast een heleboel moeders die Femke heten, dus lijkt het niet zo raar om dat aspect te verwaarlozen.

Desondanks was het beter geweest als we niet een specifieke naam hadden gebruikt, maar hadden gesproken over een willekeurige familie met twee kinderen waarvan ten minste één kind een op dinsdag geboren zoon is.

Het lijkt vast te staan dat de manier van informatieoverdracht van grote invloed is op het uiteindelijke antwoord. Subtiele verschillen in gegeven informatie kunnen tot verschillende kansmodellen leiden en dus tot verschillende antwoorden. In dat kader is ook het artikel 'Martin Gardner's Mistake' van Tanya Khovanova interessant om te lezen, zie voor een verwijzing het eind van dit artikel. Zij citeert Martin Gardner zelf, die het oorspronkelijke probleem (zie vraag 1 hierboven) voorzien had van de oplossing $\frac{1}{3}$. Later schreef hij dat er ook een andere interpretatie mogelijk is:

(i) Neem alle gezinnen met twee kinderen met minstens één jongen. Kies willekeurig een gezin hieruit. De kans op twee jongens is dan $\frac{1}{3}$.

(ii) Neem een willekeurig gezin met twee kinderen. De vader zegt 'Ik heb minstens één zoon', als hij twee zonen heeft; hij zegt 'Ik heb minstens één dochter', als hij twee dochters heeft; als hij een zoon en een dochter heeft, gooit hij een munt op om te bepalen welke van de twee zinnen hij uitspreekt. In dit geval is de kans op twee zonen na de mededeling 'Ik heb minstens één zoon' gelijk aan $\frac{1}{2}$. (En als hij zegt 'Ik heb minstens één dochter' is de kans op twee zonen natuurlijk 0.)

Je zou dus kunnen zeggen dat het probleem niet volledig gedefinieerd of ambigu is, schreef Martin Gardner. En dat leidt dan natuurlijk tot meer mogelijke antwoorden en alle discussies die daarbij horen.

MEER INFORMATIE Wilko Emmens is een van de mensen die reageerden op ons artikel uit het juninummer. Hij merkt op dat uit dat artikel het volgende blijkt: steeds meer informatie over de ene zoon, anders dan over het geslacht, leidt tot een kans steeds dichter bij $\frac{1}{2}$. Hij noemt dit 'in strijd met de aanname van een zuiver kansproces'. Daar willen wij toch het volgende tegenin brengen

jongste kind / oudste kind	jongen, op dinsdag geboren	jongen, niet op dinsdag geboren	meisje, op willekeurige dag geboren
jongen, op dinsdag geboren	1	6	7
jongen, niet op dinsdag geboren	6	0	0
meisje, op willekeurige dag geboren	7	0	0

Figuur 2 De kans op 2 zonen, gegeven dat er ten minste 1 zoon is die op een dinsdag is geboren, is gelijk aan $\frac{13}{27}$ (in de interpretatie zoals beschreven in de eerste alinea onder het kopje 'Modellering').

(steeds nemen we: gezin met twee kinderen; wat is de kans op twee zonen?):

(i) Geen enkele informatie; de kans is dan $\frac{1}{4}$ (van alle twee-kinderengezinnen heeft een kwart twee zonen);

(ii) klein beetje informatie: minstens één zoon; de kans is dan $\frac{1}{3}$ (van alle twee-kinderengezinnen met minstens één zoon heeft eenderde twee zonen);

(iii) informatie over één zoon volledig: oudste kind is zoon; de kans is dan $\frac{1}{2}$ (er zijn twee soorten gezinnen met als oudste kind een zoon: oud/jong = zoon/zoon of oud/jong = zoon/dochter).

Er is natuurlijk weer discussie mogelijk à la Martin Gardner, maar dat meer informatie een kans geeft dichter bij $\frac{1}{2}$, lijkt geen onredelijke conclusie. In het volgende voorbeeld wordt extra informatie gegeven door een zoon mee uit wandelen te nemen.

EEN ZOON WANDELT MEE Je loopt op straat en ontmoet een vrouw, die met een jongen loopt. Je vraagt: 'Heeft u twee kinderen?' Bij antwoord 'nee' loop je door en vraagt het de volgende volwassene met een kind. Bij antwoord 'ja' voegt de volwassene toe: 'Dit is een van mijn kinderen.' Je ziet dat het een zoon is. Dit lijkt op het klassieke probleem, maar schijn bedriegt, zoals ook Ronald Meester al liet zien in 2000 (zie *Pythagoras* 39-6). Je hebt hier nu niet oorspronkelijk 4 mogelijke soorten gezinnen sec: (z, z), (z, d), (d, z), (d, d), maar 8 mogelijke, want elk kind kan meegenomen worden op de wandeling: (z, z*), (z*, z), (z, d*), (z*, d), (d, z*), (d*, z), (d, d*), (d*, d). Het meewandelende kind krijgt een asterisk (*), dus de uitkomst (z*, d) betekent dat het oudste kind een zoon is, het jongste een dochter en het oudste kind wandelt mee. Doordat je ziet dat het meewandelende kind een jongen is, blijven de volgende 4 uitkomsten over: (z, z*), (z*, z), (z*, d), (d, z*). Er zijn er 2 met (z, z), dus de gevraagde kans is $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Dit geval correspondeert met een aantal opmerkingen van lezers die voor de gevraagde kans $\frac{1}{2}$ vonden. De aanname dat elk kind een even grote kans heeft om mee uit wandelen genomen te worden moet natuurlijk wel gemaakt worden.

VOOR OF NA 12 UUR GEBOREN? De al genoemde Wilko Emmens volgde een boeiende redenering. Hij begon met de volgende twee vragen.

Vraag 1: Femke heeft twee kinderen waarvan minstens één zoon die geboren is tussen 0:00 en 12:00. Wat is de kans dat Femke twee zonen heeft? Met de aanpak van de dinsdagvariant vinden we het antwoord $\frac{3}{7}$, zie figuur 3a.

Vraag 2: Femke heeft twee kinderen waarvan minstens één zoon die geboren is tussen 12:00 en 24:00. Wat is de kans dat Femke twee zonen heeft? Het antwoord op deze vraag is natuurlijk ook $\frac{3}{7}$, zie figuur 3b.

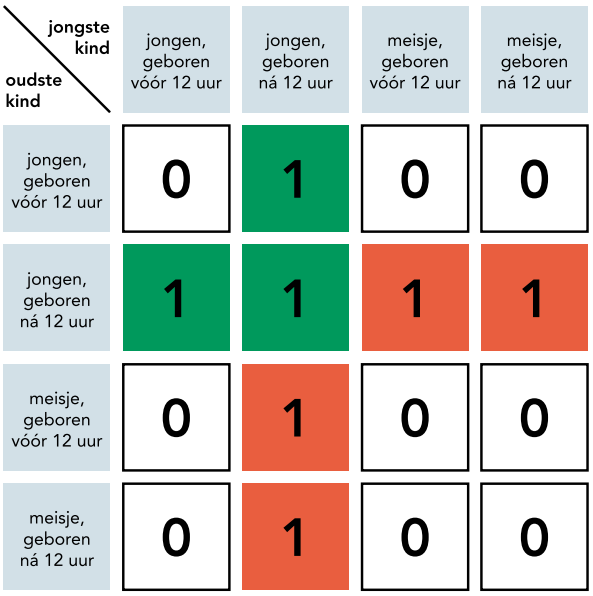
jongste kind / oudste kind	jongen, geboren vóór 12 uur	jongen, geboren ná 12 uur	meisje, geboren vóór 12 uur	meisje, geboren ná 12 uur
jongen, geboren vóór 12 uur	1	1	1	1
jongen, geboren ná 12 uur	1	0	0	0
meisje, geboren vóór 12 uur	1	0	0	0
meisje, geboren ná 12 uur	1	0	0	0

Figuur 3a De kans op 2 zonen, gegeven dat er ten minste 1 zoon is die tussen 0:00 en 12:00 geboren is, is gelijk aan $\frac{3}{7}$.

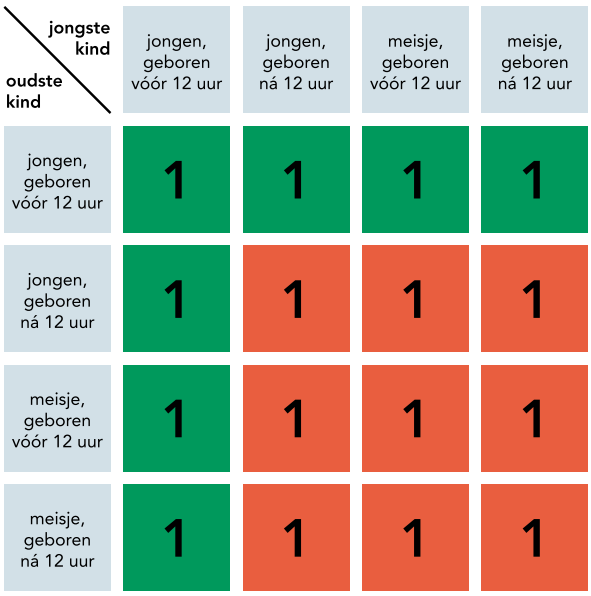
Vervolgens combineerde hij deze twee vragen. De voorwaarden 'geboren tussen 0:00 en 12:00' en 'geboren tussen 12:00 en 24:00' zijn elkaar uitsluitende voorwaarden, elk met een kans van $\frac{1}{2}$; een derde mogelijkheid is er niet. Dat wil zeggen dat de combinatie van deze twee voorwaarden (superpositie) gelijk is aan de situatie dat er géén voorwaarde over het tijdstip is gegeven (dus het klassieke tweekinderenprobleem, waarop het antwoord $\frac{1}{3}$ is). Superpositie levert dan op dat de kans op twee zonen gelijk is aan $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{7}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{7}=\frac{3}{7}$ en dit is ongelijk aan $\frac{1}{3}$: een tegenspraak.

Tot zover de redenering van Emmens. Hiermee lijkt op het eerste gezicht niets mis, maar er is volgens ons bij de superpositie iets misgegaan. De twee uitkomstenruimtes van de figuren 3a en 3b hebben een niet-lege doorsnede van 2 hokjes. Deze overlap ziet Emmens over het hoofd.

Als je de figuren 3a en 3b samen neemt, krijg je $2 \times 7 = 14$ gevallen, waarvan er $2 \times 3 = 6$ goed zijn, dus lijkt de kans $\frac{6}{14} = \frac{3}{7}$ en dit is inderdaad ongelijk aan $\frac{1}{3}$. Maar als je de figuren echt op elkaar legt, zie je dat de 2 dubbelingen het totaal aantal mogelijkheden van 14 verminderen met 2 en ook het aantal goede mogelijkheden. De kans wordt dan $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$; daarmee komt er dus opnieuw $\frac{1}{3}$ uit. We laten hierbij dus alleen de eis 'voor of na 12 uur geboren' vallen en handhaven de eis 'minstens één zoon'.



Figuur 3b De kans op 2 zonen, gegeven dat er ten minste 1 zoon is die tussen 12:00 en 24:00 geboren is, is gelijk aan $\frac{3}{7}$.



Figuur 3c De kans op ten minste 1 zoon die tussen 0:00 en 12:00 geboren is, is gelijk aan $\frac{7}{16}$.

ONVOORWAARDELIJKE KANS We blijven nog even bij de kwestie 'voor of na 12 uur geboren'. We laten nu ook de eis 'minstens één zoon' vallen en berekenen de (onvoorwaardelijke) kans op twee zonen, waar natuurlijk $\frac{1}{4}$ moet uitkomen. We maken gebruik van het *conditoneringsprincipe* (door Emmens superpositie genoemd), dat we uitleggen aan de hand van het volgende (eenvoudige) voorbeeld. Stel je trekt twee kaarten uit een goed geschud pak van 52 kaarten. Wat is de kans op twee azen? De kans op een aas met de eerste kaart is $\frac{4}{52}$. Gegeven dat één aas uit het pak kaarten is, dan is de kans op een aas met de tweede kaart gelijk aan $\frac{3}{51}$. De gevraagde kans is dus $\frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51}$. Dit is een toepassing van de volgende basisregel uit de kansrekening:

$$\mathbf{P}(A \text{ en } B) = \mathbf{P}(A)\ \mathbf{P}(B \mid A); \qquad (*)$$

in woorden: de kans dat zowel gebeurtenis A als gebeurtenis B optreedt is gelijk aan de kans dat gebeurtenis A optreedt vermenigvuldigd met de (voorwaardelijke) kans dat gebeurtenis B optreedt gegeven de informatie dat gebeurtenis A is opgetreden. Natuurlijk geldt ook:

$$\mathbf{P}(A \text{ en } B) = \mathbf{P}(B)\ \mathbf{P}(A \mid B). \qquad (**)$$

Uit deze formules volgt het *conditoneringsprincipe*:

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A \text{ en } B) + \mathbf{P}(A \text{ en niet-}B) = \mathbf{P}(A \mid B)\ \mathrm{P}(B) + \mathbf{P}(A \mid \text{niet-}B)\ \mathbf{P}(\text{niet-}B).$$

Noteer nu met A de gebeurtenis 'twee zonen' en met B de gebeurtenis 'minstens één zoon geboren tussen 0:00 en 12:00'. Er geldt: $\mathbf{P}(B) = \frac{7}{16}$ (zie figuur 3c), en dus $\mathbf{P}(\text{niet-}B) = \frac{9}{16}$. En ook: $\mathbf{P}(A \mid B) = \frac{3}{7}$ (zie figuur 3a) en $\mathbf{P}(A \mid \text{niet-}B) = \frac{1}{9}$ (bekijk de nullen in figuur 3a). Maak nu gebruik van het conditoneringsprincipe, dan krijg je:

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(B)\ \mathbf{P}(A \mid B) + \mathbf{P}(\text{niet-}B)\ \mathbf{P}(A \mid \text{niet-}B) = \frac{7}{16} \cdot \frac{3}{7} + \frac{9}{16} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{4}.$$

Dit is de *onvoorwaardelijke* kans op twee zonen in een twee-kinderengezin; er komt (gelukkig!) dezelfde waarde uit als via de 'directe weg'.

TEN SLOTTE Het zal duidelijk zijn dat de vraagstelling afhangt van de informatieverwerving. Bij iedereen die zich met deze problemen bezighoudt slaat de twijfel soms toe, bij ons ook. En dat is maar goed ook. Dat leidt tot verder nadenken en beter begrip. Als je nog meer wilt lezen over dit onderwerp, is het artikel 'Martin Gardner's Mistake' een aanrader. Daarin gaat Tanya Khovanova in op diverse varianten van het twee-kinderenprobleem. Het is te vinden op internet: http://arxiv.org/PS_cache/arxiv/pdf/1102/1102.0173v1.pdf.

Wij danken Ronald Meester, Henk Tijms, Henk Venema en Aart de Vos voor hun nuttige commentaar op een eerdere versie van dit artikel. ■

Je kunt vandaag de dag geen dagblad openslaan, of je vindt er wel een sudoku in. Het oplossen kan behoorlijk verslavend zijn. In deze jaargang van *Pythagoras* schrijven Aad Thoen en Aad van de Wetering in elke aflevering een artikel over sudoku's; niet over het oplossen ervan, maar over allerlei aspecten van het ingevulde 9 × 9 diagram. Pas nadat het puzzelwerk gedaan is begint het hier interessant te worden. Niettemin wordt elke aflevering afgesloten met een puzzel.

■ door Aad Thoen en Aad van de Wetering

SUDOKU'S EN SYMMETRIE

De vraag waarmee we ons zullen bezighouden is: hoe aantrekkelijk kan een sudoku eruit zien? In de wiskunde is *symmetrie* bij uitstek een kenmerk van schoonheid. Kan een sudoku symmetrisch zijn? Wat zou dat kunnen inhouden?

Het lege sudokudiagram, een vierkant met 9 × 9 hokjes, heeft de bekende symmetrieën van het vierkant: draaiingen en spiegelingen. Ze vormen een *groep* van acht elementen. Figuur 1 toont een voorbeeld van een *draaisymmetrische* sudoku. Bij draaiing over 90° veranderen de cijfers weliswaar, maar steeds op dezelfde wijze. Hoe? Dat kunnen we het makkelijkst aflezen in het centrale 3 × 3 vak: de 1 wordt een 4, de 4 een 6, de 6 een 9, de 9 een 1, waarmee de eerste *cykel* rond is: (1469).

Dit patroon geldt voor elke 1, 4, 6 en 9 in het diagram. Kijk bijvoorbeeld naar de 4 helemaal links in de tweede rij van boven. Draai de sudoku in gedachten 90° met de klok mee. De 4 komt dan terecht in het bovenste hokje van de achtste kolom, daar staat inderdaad een 6. Draai weer 90° met de klok mee, dan kom je terecht in het meest rechtse hokje van de zevende rij, daar staat een 9. Draai je nog een keer 90°, dan beland je in het onderste hokje van de tweede kolom, waar een 1 staat. Deze 1 verandert na een laatste draaiing over 90° weer in de 4 waarmee we begonnen.

Ga zelf na dat dit patroon geldt voor alle cijfers 1, 4, 6 en 9 in het diagram. De andere cykel is (2378). Het enige cijfer dat niet in deze twee cykels

2	8	7	4	1	5	9	6	3
4	3	5	6	9	8	1	7	2
6	9	1	2	7	3	4	5	8
5	7	2	1	8	4	3	9	6
9	6	3	7	5	2	8	1	4
1	4	8	9	3	6	7	2	5
3	5	9	8	2	7	6	4	1
7	2	6	3	4	1	5	8	9
8	1	4	5	6	9	2	3	7

Figuur 1 Een draaisymmetrische sudoku

5	7	6	8	1	4	2	9	3
3	9	4	5	2	6	8	7	1
8	2	1	9	7	3	5	4	6
6	5	9	1	4	7	3	2	8
1	4	3	2	5	8	7	6	9
2	8	7	3	6	9	1	5	4
4	6	5	7	3	1	9	8	2
9	3	2	4	8	5	6	1	7
7	1	8	6	9	2	4	3	5

Figuur 2 Een spiegelsymmetrische sudoku

voorkomt is de 5 die in het centrum van het diagram staat. Je ziet dan ook dat alle cijfers 5 bij draaiing over 90° onveranderd blijven.

SYMMETRIE IN DIAGONALEN Spiegeling om een horizontale of verticale as is onmogelijk in een 9 × 9 sudoku vanwege het oneven aantal rijen en kolommen. Immers, op de horizontale of verticale spiegelas staan dan per definitie alle negen cijfers. Die vallen samen met hun eigen spiegelbeeld, en zouden dus allemaal onveranderd moeten blijven. Maar als alle cijfers bij spiegeling in een horizontale/verticale as hetzelfde blijven, zouden in elke kolom/rij alle cijfers twee keer voorkomen, en dat is in strijd met de definitie van een sudoku.

Voor de diagonale assen, daarentegen, geldt niet de eis dat daar negen verschillende cijfers staan en voor elke kortere diagonaal net zo min. Figuur 2 toont een geval dat *spiegelsymmetrisch* is in beide diagonalen. Op de ene diagonaal staan slechts de cijfers 1, 5 en 9, op de andere de cijfers 3, 5 en 7. Blijkbaar worden de cijfers in de ene as anders gespiegeld dan in de andere. De 5 blijft ook hier onveranderd. In de diagonaal van linksonder naar rechtsboven is de spiegeling (19)(26)(48), terwijl 3, 5 en 7 onveranderd blijven. In de diagonaal van linksboven naar rechtsonder is ze (24)(37)(68), waarbij 1, 5 en 9 onveranderd blijven.

Aangezien het product van twee spiegelingen een puntspiegeling is in het snijpunt van de twee spiegelassen, heeft figuur 2 ook *puntsymmetrie*. Je kunt dit als volgt inzien: kies bijvoorbeeld het derde hokje (met cijfer 6) in de bovenste rij. Het hokje dat daar – ten opzichte van het middelpunt van de sudoku – recht tegenover ligt, is het zevende hokje in de onderste rij, en dat bevat een 4. Ga nu na, dat elk hokje met een 6 zo'n overbuurman heeft met cijfer 4 en omgekeerd. Verder geldt dat elke 1 overbuurman 9 heeft, elke 2 overbuurman 8, elke 3 overbuurman 7 en elke 5 overbuurman 5. Uiteraard heeft ook figuur 1 puntsymmetrie, puntsymmetrie is immers hetzelfde als draaiing over 180°.

TOPOLOGIEËN Nu zou je kunnen denken: dat waren dus de symmetrieën, meer is er niet. Als je echter de linker- en rechterrand van het sudokudiagram aan elkaar plakt, krijg je een nieuwe *topologie*: de *cilinder*, die om een 'inwendige' as kan draaien. Evenzo kunnen de onder- en bovenrand aan elkaar geplakt worden. Gecombineerd levert dat een *torus*. In figuur 3 gaan via draaiing over drie kolommen, respectievelijk drie rijen de banden via een permutatie in elkaar over. (Definitie: een *band* bevat drie rijen of drie kolommen én drie vakken.) Van links naar rechts via (195)(276)(348) en van onder naar boven via (195)(267)(384). We noemen dit verschijnsel *bandsymmetrie*.

Zouden er nog andere symmetrieën kunnen bestaan via verwisseling van rijen en/of kolommen? Onderzoek dat zelf eens. Snel terug naar figuur 3: deze heeft een buitengewoon mooie eigenschap! Eentje waarmee ze hoge ogen gooit in de schoonheidswedstrijd. Welke eigenschap? Dat zal onthuld worden in de volgende aflevering.

Ten slotte de beloofde puzzel. In figuur 4 is het een vereiste dat op beide diagonalen ook de cijfers 1 tot en met 9 staan. De hints staan fraai *symmetrisch* gepositioneerd op de randvelden. ■

1	2	3	9	7	4	5	6	8
4	5	6	8	1	2	3	9	7
7	8	9	6	3	5	2	4	1
5	7	4	1	6	8	9	2	3
8	9	2	3	5	7	4	1	6
6	3	1	2	4	9	7	8	5
9	6	8	5	2	3	1	7	4
3	1	7	4	9	6	8	5	2
2	4	5	7	8	1	6	3	9

Figuur 3 Een bandsymmetrische sudoku

	2	3	4		8	5	6	
6								3
7								4
8								5
5								1
2								6
3								8
	6	8	7		1	2	5	

Figuur 4 Een 'symmetrische' sudoku (oplossing blz. 33)

Het zijn puzzels die je met enige regelmaat tegenkomt, ook in dit blad. Gegeven is een figuur en de opgave is, om deze in twee congruente helften te verdelen. Congruent wil zeggen: beide stukken hebben precies even grote zijden en identieke hoeken. Soms mogen de stukken ook elkaars spiegelbeeld zijn, soms niet, dat onderscheid is hier niet van belang.

■ door Arnout Jaspers

SLEUTELEN AAN IDENTIEKE TWEELINGEN

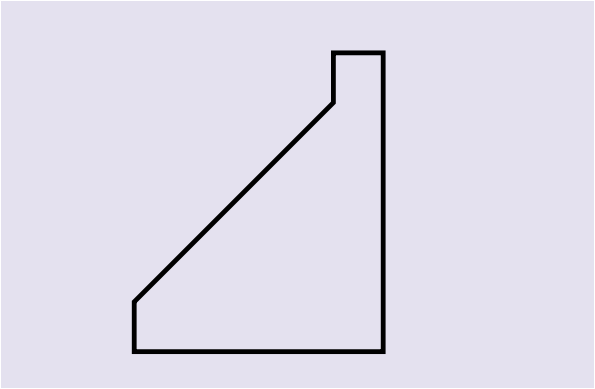
Probeer figuur 1 eens in twee congruente stukken te verdelen. Misschien vind je al vrij snel de oplossing, maar kun je ook uitleggen *hoe* je die gevonden hebt? Nog meer dan bij andere soorten puzzels, lijk je hier afhankelijk van een flits van inzicht, iets wat volkomen uit de lucht komt vallen. Het aantal mogelijke tweedelingen is enorm (oneindig zelfs) en als je er een paar hebt geprobeerd die niet werkten, ben je in feite geen stap dichter bij het einddoel gekomen.

Bekijk nu figuur 2, een gelijkbenige, rechthoekige driehoek met een vierkante inham. Lang niet iedereen zal hier snel de juiste tweedeling zien. En als je het niet 'ziet', wat moet je dan? Er valt toch niets te berekenen of te construeren?

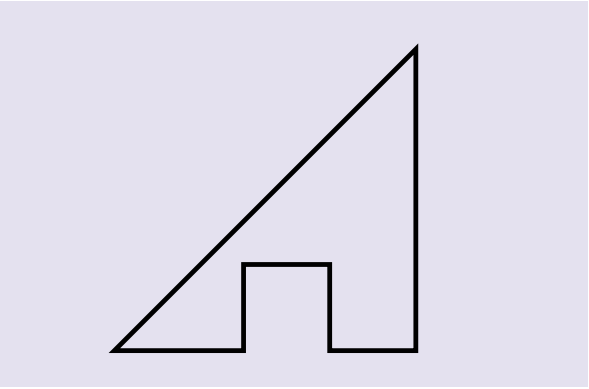
Toch wel, we presenteren in dit artikel een soort gereedschapskist om een congruente tweedeling te vinden, gesteld dat die bestaat. Het is geen wiskundig strenge constructie, maar een setje regels waardoor je in de goede richting gaat en waarschijnlijk uitkomt bij de oplossing.

KNIPLIJN EN KNIPPUNTEN In het vervolg noemen we de lijn die de figuur in tweeën deelt de *kniplijn*. Deze kan bestaan uit allerlei rechte en/of kromme gedeeltes, maar hij bevat geen lussen (waarom niet?) en hij begint en eindigt op de rand van de figuur. Deze twee randpunten noemen we de *knippunten*.

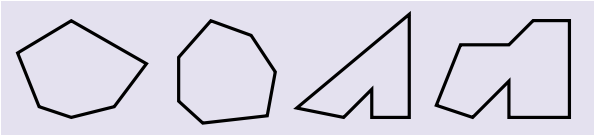
We gebruiken eerst dat de twee congruente helften evenveel hoeken hebben. (Een kromme zijde kan, als een cirkel die overloopt in een rechte lijn, een hoek van 0° met een rechte zijde maken. Dat tellen we ook mee als hoek. Overigens maakt het



Figuur 1 Verdeel deze figuur in twee stukken die congruent zijn.



Figuur 2 Verdeel deze figuur in twee stukken die congruent zijn.



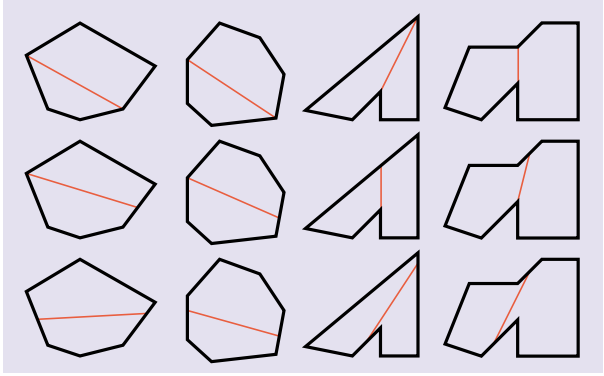
Figuur 3 De eerste twee figuren zijn *convex*: er zijn geen inhammen. De andere twee zijn *concaaf*: de derde figuur heeft één inham, de vierde heeft er twee.

voor dit verhaal niet uit hoe je de hoeken precies telt, als je maar consequent bent.) Hoeveel hoeken er in de kniplijn zelf zitten weten we nog niet, maar dat geeft niet: die hoeken tellen voor beide helften mee. We hoeven daarom alleen te kijken naar het aantal hoeken van de oorspronkelijke figuur.

Een kniplijn verdeelt, losjes geformuleerd, het aantal hoeken van de figuur in tweeën, maar we moeten wel per knippunt bekijken of dit op een zijde of in een hoekpunt ligt. Ook moeten we onderscheid maken tussen *convexe* en *concave* figuren, zie figuur 3.

Een convexe figuur heeft geen inhammen: het verlengde van een zijde loopt altijd de figuur *uit*. In een concave figuur is er minstens één inham; de zijden bij zo'n inham lopen de figuur *in* als je ze verlengt. Als je zo'n verlengde lijn als kniplijn neemt, verdwijnt in een van beide helften een hoek. In figuur 4 zie je de mogelijkheden; dat levert onderstaande tabel op. Een duidelijke regel is: een kniplijn kan alleen van zijde naar zijde lopen als het aantal hoeken even is.

Bekijk vervolgens de omtrek van de figuur, stel dat deze lengte F heeft. Als een kniplijn met lengte K de figuur in twee helften verdeelt, krijgen beide helften een extra stuk omtrek met lengte K mee, zie figuur 5. De omtrek van beide helften samen is dus $F + 2K$. Maar als de helften congruent zijn, hebben ze *dezelfde* omtrek: $\frac{1}{2}F + K$. Dit geeft een belangrijk houvast: de afstand tussen de twee knippunten, gemeten langs de omtrek van de figuur, is $\frac{1}{2}F$. Dit betekent, dat als je de positie van één knippunt kiest, de positie van het andere knippunt vast ligt, ongeacht hoe de kniplijn door de figuur loopt. Aan menige figuur zul je meteen kunnen zien dat de kniplijn niet van hoek naar hoek kan lopen, namelijk als er geen twee hoeken zijn die precies op $\frac{1}{2}F$ van elkaar liggen.



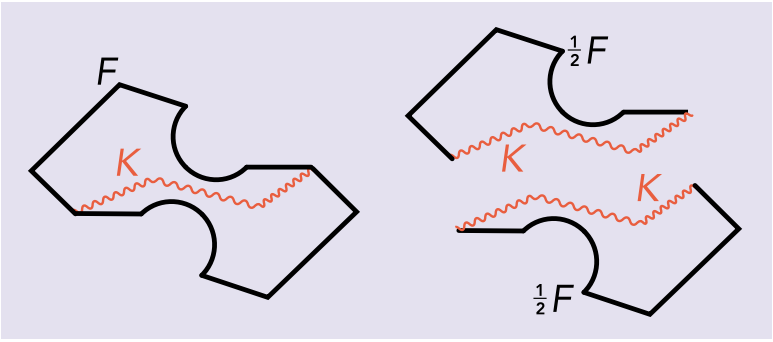
Figuur 4 Overzicht van hoe kniplijnen kunnen lopen. De kniplijnen hoeven overigens geen rechte lijnen te zijn, maar kunnen bestaan uit allerlei rechte en/of kromme gedeeltes.

EEN TOUWTJE OM DE FIGUUR Leg nu in gedachten een touwtje met lengte $\frac{1}{2}F$ langs de rand van de figuur. Begin en eind zijn potentiële knippunten, maar dan moet wel het aantal hoeken binnen het touwtje gelijk zijn aan het aantal hoeken buiten het touwtje. Als een uiteinde precies op een hoek ligt, telt deze in een convexe figuur voor beide helften mee. In een concave figuur moet je oppassen: als de kniplijn in het verlengde van een zijde kan lopen, krijgt in dat geval één helft er een hoekpunt bij, de andere helft niet.

Als je het touwtje langs de hele rand verschuift, zal voor sommige stukken van de rand het aantal hoeken niet kloppen, dus kunnen bij de uiteinden geen knippunten liggen. In figuur 6 is op deze manier aangegeven waar wel, en waar geen knippunten in de figuur van de eerste opgave kunnen liggen. Als de exacte afmetingen van de figuur niet in de opgave staan, kun je ze opmeten met een liniaal, exactheid is nu nog niet belangrijk.

Figuur 6 is concaaf en heeft een even aantal hoeken, dus dat sluit voor de kniplijn nog niets uit. Maar geen twee hoeken liggen op precies de halve omtrek van elkaar af. Als de kniplijn van zijde naar zijde loopt, zijn de mogelijkheden: *a-c* of *b-d* of *b-e*. Als de kniplijn van hoek naar zijde loopt, kan dat

	convex		concaaf	
kniplijn kan lopen van...	even aantal hoeken	oneven aantal hoeken	even aantal hoeken	oneven aantal hoeken
hoek naar hoek	✓	✗	✓	✓
hoek naar zijde	✗	✓	✓	✓
zijde naar zijde	✓	✗	✓	✗



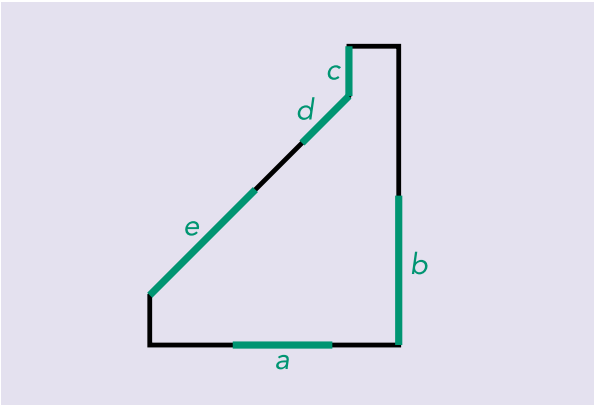
Figuur 5 Als beide stukken congruent zijn, hebben ze dezelfde omtrek: $\frac{1}{2}F + K$.

alleen vanuit het hoekpunt waar de inham zit (dus het hoekpunt tussen zijde *c* en de zijde waarop *d* en *e* liggen). Hij moet dan naar zijde *a* om de omtrek in tweeën te delen.

Als je de oplossing nog niet gevonden had, weet je nu dat hij in één van deze vier opties past. Nog een hint: de kniplijn heeft maar één knik.

CIJFERPUZZEL We pakken nu figuur 2 aan. Deze is concaaf en heeft zeven hoeken, een oneven aantal. Noem de hoekpunten *A* tot en met *G*, beginnend linksonder tegen de klok in. De kniplijn kan volgens de tabel niet van zijde naar zijde lopen. Kan hij van hoek naar hoek lopen? Volgens de tabel wel, en je zou nu van alle $7 \cdot 6 / 2 = 21$ paren knippunten kunnen nagaan of die precies de halve omtrek van elkaar af liggen. Maar je ziet aan deze figuur in een oogopslag dat de kniplijn niet van hoek tot hoek loopt. Immers, dan zou de lange schuine zijde *AG* in zijn geheel in één deel liggen, en waar haal je nog zo'n lang recht stuk vandaan voor het tweede deel?

De kniplijn begint dus ergens op zijde *AG* en eindigt op een hoek. Simpelweg tellen van de hoeken in beide kniphelften leidt tot de conclusie dat de kniplijn eindigt op hoek *D*, en dat de kniplijn daar niet in het verlengde ligt van zijde *CD*, noch van zijde *DE*. Beide congruente helften hebben daarom minstens 5 hoeken.



Figuur 6 Een hint voor de tweedeling van figuur 1.

Meet nu met een liniaal de omtrek van de figuur op, deel die door 2 en bepaal het punt *D′* op de lange zijde dat de halve omtrek van *D* af ligt. Je vindt een punt dat ongeveer recht boven *D* ligt. Neem voorlopig maar even aan dat *D′* exact recht boven *D* ligt.

We zijn nu al zover gekomen, dat je misschien de oplossing voor je ziet. Maar we kunnen zonder flits van inzicht nog steeds verder komen. We hebben geen idee welke knikken en kronkels kniplijn *D*-*D′* vertoont, maar de linkerhelft heeft in ieder geval hoeken van 45°, 90° en 270°, de rechterhelft van 90°, 90° en 45°. De kniplijn moet er voor zorgen dat de twee setjes hoeken identiek worden.

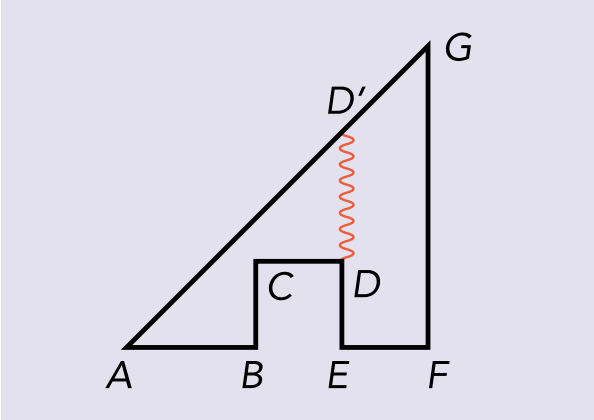
Als een knik in de knip*lijn* aan de ene helft een hoek van grootte α toevoegt, voegt die aan de andere helft een hoek van $360° - \alpha$ toe. In een knip*punt* maakt het verschil of dit op een zijde of in een hoekpunt ligt; overeenkomstige hoeken in beide helften tellen daar op tot 180° of tot de grootte van de hoek in de rand.

Het tweedelingsprobleem krijgt nu iets van een cijferpuzzel. Kniplijn *D*-*D′* voegt toe:

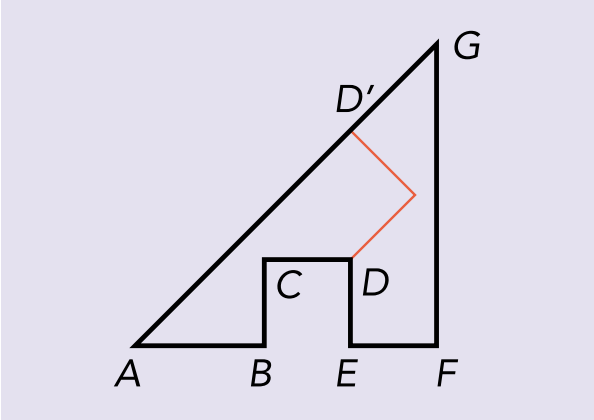
	linkerhelft	rechterhelft
bovenste knippunt	α_1	$180° - \alpha_1$
onderste knippunt	α_2	$270° - \alpha_2$
knik 1 in kniplijn	α_3	$360° - \alpha_3$
knik 2 in kniplijn	α_4	$360° - \alpha_4$
enzovoorts	α_i	$360° - \alpha_i$

Het ligt voor de hand dat alle hoeken in de kniplijn veelvouden van 45° zijn, omdat de al bekende hoeken dat ook zijn, maar zeker is dit nog niet. Eerste gok: de simpelst mogelijke kniplijn, een verticale rechte. Dat geeft $\alpha_1 = 45°$ en $\alpha_2 = 90°$ en de setjes worden: (45; 90; 270; *45*; *90*) en (90; 90; 45; *135*; *180*). Dat is dus niet goed.

Lukt het met een kniplijn met één knik? Voor de grootte van de knik proberen we achtereenvolgens de stompe hoek 135° en 90° (met een knik van 45°



Figuur 7 Een hint voor de tweedeling van figuur 2.

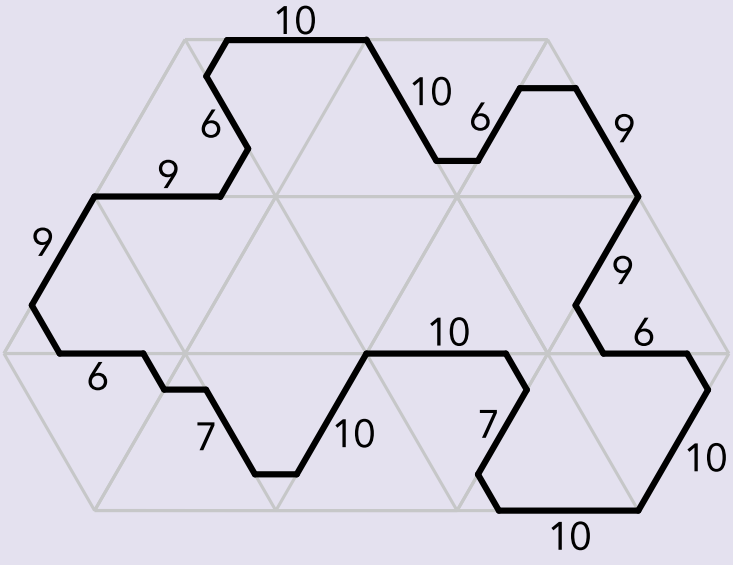


Figuur 8 De kniplijn die figuur 2 in twee congruente stukken verdeelt.

blijf je niet binnen de figuur, met een knik van 225° is de oppervlakte van de linkerhelft duidelijk kleiner dan die van de rechterhelft). Met een knik van 135° krijg je $\alpha_1 = 67{,}5°$, $\alpha_2 = 112{,}5°$ en $\alpha_3 = 135°$. Dat levert de setjes (45; 90; 270; *67,5*; *112,5*; *135*) en (90; 90; 45; *112,5*; *167,5*; *225*). Ook niet goed dus. Met een knik van 90° krijg je $\alpha_1 = 90°$, $\alpha_2 = 135°$ en $\alpha_3 = 90°$. Dat levert de setjes (45; 90; 270; *90*; *135*; *90*) en (90; 90; 45; *90*; *135*; *270*). Bingo! Deze setjes zijn wel gelijk.
Je moet nu hoekpunt *D* door een rechte haak verbinden met de schuine bovenzijde, waarbij de hoek in het bovenste knippunt 90° blijft. Je hebt dan nog de vrijheid om de lengte van het onderste been van de haak te variëren. Je ziet nu vrij gemakkelijk, dat als de twee benen even lang zijn, de congruente tweedeling een feit is. De twee benen komen dan overeen met de linker- en de horizontale zijde van de inham, zie figuur 8.

In een willekeurige figuur zou zo'n samenloop van omstandigheden hoogst zelden optreden, maar het gaat hier om een puzzel, een figuur die is geconstrueerd op een simpele oplossing. Daarom is de kans groot dat je op deze manier snel op de juiste tweedeling uitkomt.

CONGRUENTE VIERDELING Voor een congruente drie-, vier- of meer-deling werken deze gereedschappen niet. Althans, niet in het algemeen. Maar kijk eens naar figuur 9. De figuur is getekend op een rooster van gelijkzijdige driehoeken met zijden van lengte 13. Alle hoeken in de figuur zijn veelvouden van 60°. Kun je van deze figuur een congruente vierdeling vinden? De vierdeling is echt congruent, dus zonder gespiegelde delen. Om het een beetje makkelijker te maken: de kniplijnen lopen van hoek tot hoek. De oplossing vind je op pagina 33. ■

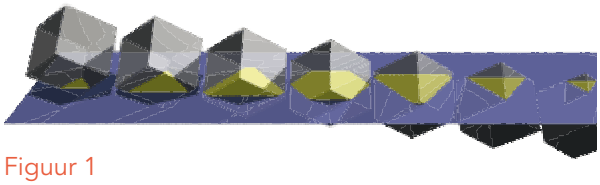


Figuur 9 Verdeel deze figuur in vier stukken die congruent zijn.

Nathan Kraaijeveld en Patrick van Dieten, tot en met vorig schooljaar leerlingen van De Goudse Waarden in Gouda, wonnen een van de KNAW-onderwijsprijzen 2011 voor hun profielwerkstuk over de formule van Euler in hogere dimensies. Ook schreven ze een computerprogramma dat laat zien hoe een hyperkubus zich aan ons zou vertonen als hij in onze wereld doordrong.

■ door Arnout Jaspers

AANSNIJDEN VAN EEN HYPERKUBUS



Figuur 1

De Zwitserse wiskundige Leonhard Euler ontdekte al in de achttiende eeuw een algemeen geldig verband tussen het aantal hoekpunten H, het aantal ribben R en het aantal zijvlakken Z van driedimensionale convexe voorwerpen: $H - R + Z = 2$. Neem bijvoorbeeld de kubus: 8 hoekpunten, 12 ribben en 6 zijvlakken, en inderdaad $8 - 12 + 6 = 2$.

Nathan en Patrick vroegen zich af hoe dit zit met voorwerpen in vier of nog meer dimensies. De gewone formule van Euler telt achtereenvolgens de hoekpunten (punt, nul dimensies), ribben (lijn, één dimensie) en zijvlakken (vlak, twee dimensies). Voor lichamen in vier dimensies telden ze dezelfde onderdelen, maar ook die in drie dimensies, de *hypervlakken*.

Een kubus (3d) kun je in gedachten opbouwen uit een vierkant (2d) dat je in een derde richting, loodrecht op beide zijkanten, verschuift. Zo krijg je een driedimensionaal blok. Precies zo kun je een hyperkubus (4d) opgebouwd denken uit een kubus (3d), die je in een vierde richting verschuift, loodrecht op alle ribben. Zoals een kubus wordt begrensd door 6 vierkanten, wordt een hyperkubus begrensd door 8 hypervlakken, in dit geval kubussen. Bij een hyperkubus moet je, om een Eulerachtige formule te vinden, het aantal begrenzende kubussen meetellen.

Eulers formule $H - R + Z = 2$ kun je noteren als

$$N_0 - N_1 + N_2 = 2,$$

waarbij de index het aantal dimensies van het onderdeel aangeeft.

Voor de hyperkubus geldt dan ($N_3 = 8$):

$$N_0 - N_1 + N_2 - N_3 = 0.$$

De twee scholieren maken aannemelijk dat voor een grote klasse van voorwerpen in m-dimensionale ruimtes, de zogeheten *regelmatige polytopen*, geldt:

$$N_0 - N_1 + N_2 - \cdots + (-1)^{m-1} N_{m-1} = 1 - (-1)^m .$$

Regelmatige polytopen in twee dimensies zijn de regelmatige veelhoeken: gelijkzijdige driehoek, vierkant, regelmatige vijfhoek, enzovoort. De formule voor $m = 2$ wordt heel simpel, er staat dan namelijk: $N_0 - N_1 = 1 - (-1)^2 = 0$, ofwel: het aantal hoeken N_0 is gelijk aan het aantal zijden N_1.

In drie dimensies zijn regelmatige polytopen bijvoorbeeld de tetraëder, de kubus, de dodecaëder en varianten daarvan. Al deze voorwerpen hebben grote aantalllen 'neven' en 'nichten' in hogere dimensies.

VERANDERENDE DOORSNEDES In hun bekroonde profielwerkstuk hebben Nathan en Patrick heel wat geavanceerde wiskunde nodig om op de algemene formule uit te komen, dat laat zich hier niet in één of twee pagina's samenvatten. Maar ze maakten ook een computerprogramma dat laat zien hoe een hyperkubus zich aan ons zou vertonen als die onze driedimensionale wereld doorkruist.

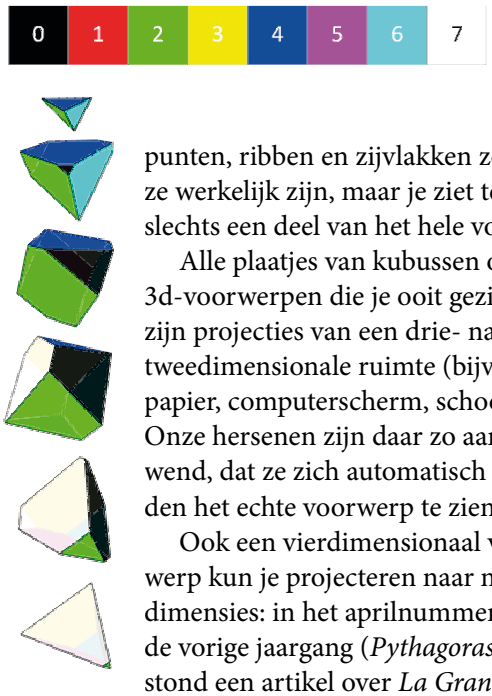
Om beter te begrijpen wat er gebeurt als een vierdimensionaal voorwerp zich aan ons zou vertonen, bekijken we eerst hoe een driedimensionale kubus zich zou vertonen aan een platlander, een wezen dat leeft in een tweedimensionale wereld.

Platland zou het grensvlak tussen water en lucht in een groot aquarium kunnen zijn. Een platlander is een wezentje – een intelligente bacterie of iets dergelijks – dat op dat grensvlak alleen maar kan zwemmen in twee richtingen loodrecht op elkaar: zeg *noord-zuid* en *oost-west*. De platlander kan zich niet voorstellen dat er nog een derde richting loodrecht op allebei bestaat, *omhoog-omlaag*.

Stel je nu voor dat we een kubus heel voorzichtig door dat grensvlak laten zakken. Wat merkt de platlander? Hij ziet eerst een klein, driehoekig deel van de kubus in zijn wereld verschijnen, dat steeds groter wordt en maximaal zes hoeken krijgt, alvorens weer kleiner te worden. (Snap je waarom het hoogstens een zeshoek wordt?) Figuur 1 laat dit zien.

Als de kubus precies de goede oriëntatie ten opzichte van het grensvlak heeft en behoudt, kan de kubus zich ook plotseling vertonen als een vierkant dat niet van grootte verandert maar na enige tijd weer verdwijnt.

In figuur 1 zie je opeenvolgende tweedimensionale *doorsnedes* van een driedimensionaal voorwerp. Dit is wezenlijk iets anders dan een tweedimensionale *projectie* van een driedimensionaal voorwerp. In een projectie zie je alle hoekpunten, ribben en zijvlakken van het voorwerp tegelijkertijd, zij het vervormd. In een doorsnede zie je hoekpunten, ribben en zijvlakken zoals ze werkelijk zijn, maar je ziet telkens slechts een deel van het hele voorwerp.



Figuur 2

Alle plaatjes van kubussen of andere 3d-voorwerpen die je ooit gezien hebt, zijn projecties van een drie- naar een tweedimensionale ruimte (bijvoorbeeld papier, computerscherm, schoolbord). Onze hersenen zijn daar zo aan gewend, dat ze zich automatisch verbeelden het echte voorwerp te zien.

Ook een vierdimensionaal voorwerp kun je projecteren naar minder dimensies: in het aprilnummer van de vorige jaargang (*Pythagoras* 50-5) stond een artikel over *La Grande Arche*, een gebouw in Parijs dat de driedimensionale projectie van een hyperkubus is (en de foto van dat gebouw op pagina 15 van de betreffende *Pythagoras* is een tweedimensionale projectie van een hyperkubus).

Nu gaan we van Platland terug naar onze wereld. Een hyperkubus kan langs een voor ons onvoorstelbare vierde richting, loodrecht op én noord-zuid, én oost-west én omhoog-omlaag, neerdalen in onze wereld. We zien dan een voortdurend veranderende driedimensionale doorsnede van de hyperkubus, in onze wereld een onregelmatig veelvlak. De vorm hangt, net als in Platland, af van de oriëntatie van de hyperkubus ten opzichte van onze wereld. Meestal zal de doorsnede in het begin op een piramide lijken: de hyperkubus steekt eerst slechts een puntje in onze wereld naar binnen.

Figuur 2, gemaakt met het computerprogramma van Nathan en Patrick, laat dit zien. De kleuren geven aan van welke kubussen we een zijvlak zien. Een hyperkubus heeft acht kubussen als 'hyperzijvlakken', dus een driedimensionale doorsnede heeft maximaal acht zijvlakken. De doorsnede van een kubus met een vlak is een onregelmatige veelhoek met maximaal zes hoeken, dus heeft ook elk zijvlak maximaal zes hoeken.

Fantasierijke geesten hebben wel geopperd dat UFO's bezoekers uit de vierde dimensie zijn, vandaar dat hun gedrag alle natuurwetten lijkt te tarten. Maar door hun veranderlijke verschijningsvormen te analyseren op de manier zoals ook in dit computerprogramma gebeurt, zouden we er wel degelijk achter kunnen komen wat voor objecten dit zijn, en aan welke natuurwetten hun gedrag voldoet. ■

KNAW ONDERWIJSPRIJS De Onderwijsprijs van de Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen (KNAW) is een prijs voor de beste vwo-profielwerkstukken van Nederland. De prijs, een studiebeurs van 1500 euro, wordt sinds 2008 jaarlijks uitgereikt aan de makers van de twaalf beste profielwerkstukken. Dit jaar viel het werkstuk *De formule van Euler in reguliere polytopen* van Nathan Kraaijeveld en Patrick van Dieten (docent H. Blauwendraat, m.m.v. prof. E. Looijenga) in de prijzen. Uit het juryrapport: 'Nathan Kraaijeveld en Patrick van Dieten duiken met hun puur wiskundige vraagstuk in de wiskunde van de veelvlakken, veelhoeken en de vierde dimensie. Een zeer originele vraagstelling en het resultaat is een gedegen werkstuk. Kraaijeveld en Van Dieten bestudeerden boeken van academisch niveau en maakten zich de materie goed eigen. Zij kregen hierbij niet alleen enige hulp en richting van hun docent maar ook van een hoogleraar meetkunde. Denken in vier dimensies is lastig en vraagt een hoog abstractieniveau. Het is erg knap hoe zij zich theorie en bewijzen eigen hebben gemaakt en op hun eigen manier verwoord hebben.'

Op pagina 12 van dit nummer staat een vervolgartikel op 'De kinderen van Femke' uit het juninummer. Henk Tijms van de Vrije Universiteit in Amsterdam maakte ons erop attent dat dergelijke problemen uit de kansrekening ook opgelost kunnen worden met de *Regel van Bayes*. Deze alternatieve berekeningsmethode kan heel verhelderend werken, als je de techniek eenmaal beheerst.

■ door Jan Guichelaar en Alex van den Brandhof

FEMKE, BAYES EN DE *ODDS*

Het begrip 'odds' wordt veelvuldig gebruikt in de wereld van het gokken; een Nederlands woord voor *odds* schijnt niet te bestaan. Odds stellen je in staat om kansen op een andere manier weer te geven. De odds van een gebeurtenis is de kans dat de gebeurtenis waar is gedeeld door de kans dat de gebeurtenis *niet* waar is. Een gebeurtenis die waar is met kans p heeft dus odds $p/(1-p)$. Omgekeerd: odds a betekent een kans van $a/(1+a)$.

Een voorbeeld: de *odds* om kruis bij het opgooien van een munt is $\frac{1}{2} : (1 - \frac{1}{2}) = 1$ (1 kruis op 1 munt). En de *odds* om niet op dinsdag geboren te zijn is $\frac{6}{7} : (1 - \frac{6}{7}) = 6$ (6 niet op dinsdag geboren op 1 wel).

De regel van Bayes in odds-vorm luidt:

$$\frac{\mathbf{P}(B \mid A)}{\mathbf{P}(\text{niet-}B \mid A)} = \frac{\mathbf{P}(B)}{\mathbf{P}(\text{niet-}B)} \cdot \frac{\mathbf{P}(A \mid B)}{\mathbf{P}(A \mid \text{niet-}B)}$$

Van deze formule wordt het linkerlid de *posterior odds* (ná informatie) genoemd, de eerste factor van het rechterlid de *prior odds* (vóór informatie) en de tweede factor de *likelihood ratio* (waarschijnlijkheidsverhouding). Probeer de regel zelf af te leiden uit de formules (*) en (**) op pagina 15.

In toepassingen is B typisch de 'hypothese' en A de 'evidentie'. Het twee-kinderenprobleem, en de diverse varianten daarop, kan op een alternatieve manier worden opgelost met behulp van de regel van Bayes in odds-vorm. Zeker omdat de likelihood ratio vaak gemakkelijk te vinden is.

HET KLASSIEKE GEVAL We beginnen met de klassieke vraag: wat is de kans op twee zonen in een gezin met twee kinderen, als je extra informatie is: minstens één zoon?

Noteer met A de hypothese 'minstens één zoon' en met B de evidentie 'twee zonen'. Er geldt dat $\mathbf{P}(B) = \frac{1}{4}$, dus de odds van B is gelijk aan $\frac{1}{4} : \frac{3}{4} = \frac{1}{3}$. Verder is $\mathbf{P}(A \mid B) = 1$ (kans op minstens 1 zoon, als er 2 zijn) en $\mathbf{P}(A \mid \text{niet-}B) = \frac{2}{3}$ (het gaat hier immers om de kans op minstens 1 zoon, gegeven dat er geen twee zonen zijn, ofwel (z, d), (d, z), (d, d)). Met de regel van Bayes in odds-vorm vinden we nu dat de odds van B gegeven A gelijk is aan $\frac{1}{3} \cdot (1 : \frac{2}{3}) = \frac{1}{2}$. Dat betekent dat de gezochte kans $\mathbf{P}(B \mid A)$ gelijk is aan $\frac{1}{2} : (1 + \frac{1}{2}) = \frac{1}{3}$. Dat wisten we ook al zonder dat we de formule van Bayes hoefden te gebruiken, maar het illustreert de kracht van deze formule.

ROOD EN ZWART HAAR Een ander voorbeeld. Op een school zitten 40% jongens en 60% meisjes. Alle jongens hebben rood haar, de helft van de meisjes rood, de andere helft zwart. Je ziet op het schoolplein in de verte iemand waarvan alleen het rode haar te zien is. Hoe groot is de kans dat het een meisje is?

Noteer met A de hypothese 'rood haar' en met B de evidentie 'meisje'. Er geldt $\mathbf{P}(B) = 0{,}6$, dus de odds van B is $0{,}6 : 0{,}4 = 1\frac{1}{2}$. Verder is $\mathbf{P}(A \mid B) = \frac{1}{2}$ en $\mathbf{P}(A \mid \text{niet-}B) = 1$. Dus de odds van B gegeven A is $1\frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2} : 1) = \frac{3}{4}$, ofwel $\mathbf{P}(B \mid A) = \frac{3}{4} : (1 + \frac{3}{4}) = \frac{3}{7}$.

DE DINSDAGZOON Na een beetje oefenen blijkt de methode met behulp van de regel van Bayes erg handig te zijn, en kunnen we er ook de vraag uit het juninummer mee beantwoorden: hoe groot is in een twee-kinderengezin de kans op twee zonen, als de informatie is: er is een zoon op dinsdag geboren. We gaan bij deze vraag (en ook bij alle hierna volgende vragen) uit van deze interpretatie: je vraagt een willekeurige moeder van twee kinderen naar de hypothese die we hier steeds A noemen; gevraagd is de kans op de evidentie B gegeven

WISKUNDIGE DOMINEE

Thomas Bayes (1702-1761) was een Engelse dominee die zich in zijn vrije tijd met kansrekening bezighield. Hij wilde weten wat de kans is dat een biljartbal op een bepaalde plaats stopt, als gegeven is op welke plekken eerdere ballen tot stilstand zijn gekomen. In een artikel over dit probleem leidde hij een regel af die we tegenwoordig kennen als de 'regel van Bayes'. Met zijn nieuwe theorie van 'voorwaardelijke kans' liet hij zien hoe de kanstheorie niet alleen kan worden toegepast op onafhankelijke gebeurtenissen, maar ook op gebeurtenissen waarvan de uitkomsten onderling verband met elkaar houden.

dat de moeder 'ja' heeft geantwoord.

In het geval van de dinsdagzoon is de hypothese A 'minstens één zoon op dinsdag geboren' en de evidentie B is 'twee zonen'. De odds van B is gelijk aan $\frac{1}{4}:\frac{3}{4}=\frac{1}{3}$. Verder is $\mathbf{P}(A \mid B) = 1 - (\frac{6}{7})^2 = \frac{13}{49}$ (in woorden: 1 min de kans dat geen van beiden op dinsdag is geboren). Ten slotte: $\mathbf{P}(A \mid \text{niet-}B) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{7}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{7}+\frac{1}{3}\cdot 0=\frac{2}{21}$. Dus de odds van B gegeven A is $\frac{1}{3}\cdot(\frac{13}{49}:\frac{2}{21})=\frac{13}{14}$, ofwel $\mathbf{P}(B \mid A) = \frac{13}{14}:(1+\frac{13}{14})=\frac{13}{27}$.

MAANDAG TOT EN MET ZONDAG We hebben net gezien dat met de informatie 'minstens één zoon op dinsdag geboren', voor de kans p op twee zonen geldt:

$$\frac{p}{1-p}=\frac{1/4}{3/4}\cdot\frac{1-(6/7)^2}{1/3\cdot 1/7+1/3\cdot 1/7+1/3\cdot 0}=\frac{13}{14}$$

en dus $p=\frac{13}{27}$.

Met de informatie 'minstens één zoon op maandag of dinsdag geboren' geldt:

$$\frac{p}{1-p}=\frac{1/4}{3/4}\cdot\frac{1-(5/7)^2}{1/3\cdot 2/7+1/3\cdot 2/7+1/3\cdot 0}=\frac{6}{7}$$

en dus $p=\frac{6}{13}$.

Met de informatie 'minstens één zoon op maandag, dinsdag of woensdag geboren' geldt:

$$\frac{p}{1-p}=\frac{1/4}{3/4}\cdot\frac{1-(4/7)^2}{1/3\cdot 3/7+1/3\cdot 3/7+1/3\cdot 0}=\frac{33}{42}$$

en dus $p=\frac{33}{75}$.

Zo kun je doorgaan. Met de informatie 'minstens één zoon op maandag of dinsdag of woensdag of donderdag of vrijdag of zaterdag of zondag geboren' krijg je:

$$\frac{p}{1-p}=\frac{1/4}{3/4}\cdot\frac{1-(0/7)^2}{1/3\cdot 7/7+1/3\cdot 7/7+1/3\cdot 0}=\frac{1}{2}$$

en dus $p=\frac{1}{3}$.

Bayes' formule in odds-vorm geeft het antwoord $(14-k)/(28-k)$ en heel inzichtelijk loopt deze functie van $\frac{13}{27}$ naar $\frac{1}{3}$.

EEN ZOON WANDELT MEE MET BAYES

A = 'zoon loopt mee' en B = '2 zonen'. De prior odds is $\frac{1}{3}$. Verder is $\mathbf{P}(A \mid B) = 1$ en $\mathbf{P}(A \mid \text{niet-}B) = \frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.Dus voor $p = \mathbf{P}(B \mid A)$ geldt: $p/(1-p) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1/3} = 1$, ofwel $p=\frac{1}{2}$.

DINSDAGZOON WANDELT MEE MET BAYES

De moeder had ook kunnen zeggen: 'Dit is een van mijn kinderen en hij is op dinsdag geboren.' Hoe groot is nu de kans op 2 zonen? Probeer zelf na te gaan dat dit leidt tot de formule

$$\frac{p}{1-p}=\frac{1}{3}\cdot\frac{2/7}{2/21}=1$$

en dus $p=\frac{1}{2}$.

EN NU DEZE NOG Ik heb twee kinderen. Eén van hen heeft burgerservicenummer (BSN) 123456789. Dat is een jongen. Hoe groot is de kans dat ik twee zonen heb?

De uitkomstenruimte bestaat nu nog slechts uit 1 gezin: het mijne. Nergens komt dit BSN verder voor. De kans die de lezer die mij niet kent vindt, is dus $\frac{1}{2}$ (mijn tweede kind is een jongen of een meisje).

Nu is Bayes ingewikkeld. De prior odds is $\frac{1}{3}$. Voor de teller van de *likelihood ratio* geldt: kans op jongen met BSN 123456789, gegeven 2 zonen in gezin (dus (z, z)). Stel er zijn b BSN's. Van de $b(b-1)$ mogelijkheden voor (z, z) zijn er $2(b-1)$ mogelijkheden met dit BSN bij één van de jongens. De kans is dus $2/b$.

En voor de noemer geldt: kans op jongen met BSN 123456789, gegeven niet-2 zonen in gezin (dus (z, d), (d, z) of (d, d)). Het aantal mogelijkheden is nu $3b(b-1)$, waarvan er $2(b-1)$ het betreffende BSN aan een van de twee in aanmerking komende jongens geven. De kans is dus $2/(3b)$. Dit leidt tot

$$\frac{p}{1-p}=\frac{1}{3}\cdot\frac{2/b}{2/(3b)}=1$$

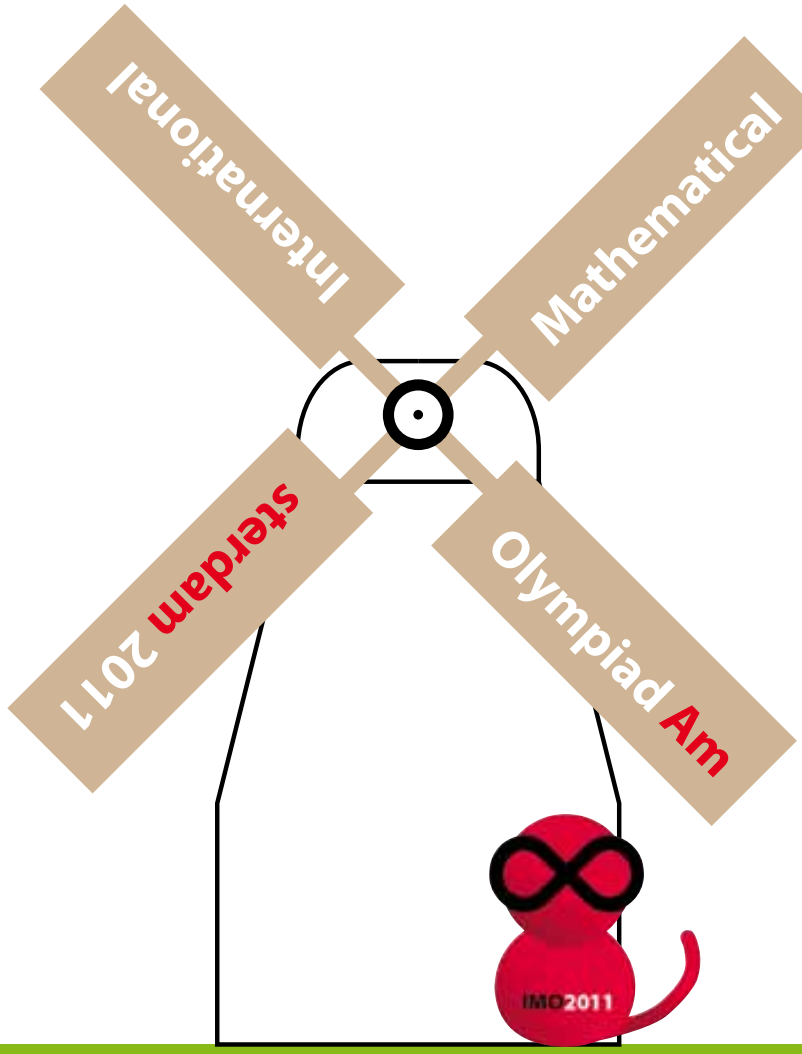
en dus $p=\frac{1}{2}$.

VERDER LEZEN Meer over Bayes in de odds-vorm met talrijke voorbeelden kun je vinden in het boek *Understanding Probability* van Henk Tijms (Cambridge University Press). ■

Deze zomer vond de 52ste Internationale Wiskunde Olympiade (*International Mathematical Olympiad* ofwel IMO) plaats; dit jaar voor de eerste keer in Nederland. Tussen 16 en 24 juli gingen 564 leerlingen uit 101 landen de strijd aan, met elkaar én met zes moeilijke wiskundeopgaven. Sietske Tacoma, die zelf in 2004 en 2005 meedeed met de IMO en dit jaar het team begeleidde als *deputy leader*, bespreekt in dit artikel een van die opgaven.

■ door Sietske Tacoma

KLAPPEN VAN



OPGAVE 2 (IMO 2011)

Zij S een eindige verzameling van ten minste twee punten in het vlak, waarvan er geen drie op één lijn liggen. Een *windmolen* is een proces dat begint met een lijn l die door één punt P van S gaat. De lijn draait met de klok mee om het *draaipunt* P tot er voor het eerst een ander punt van S op deze lijn komt te liggen; we noemen dit punt Q en dit wordt het nieuwe draaipunt. We zeggen dan dat Q *een klap van de molen krijgt*. De lijn draait nu met de klok mee om Q, totdat opnieuw een punt van S een klap van de molen krijgt. De windmolen deelt zo oneindig veel klappen uit.

Laat zien dat we een punt P van S en een lijn l door P kunnen kiezen zodat er een windmolen ontstaat waarbij elk punt van S oneindig veel klappen van de molen krijgt.

NEDERLANDSE WISKUNDE OLYMPIADE 50 JAAR

DE MOLEN

Na maanden intensief trainen en oefenen met oude vraagstukken, was het voor de deelnemers van de Internationale Wiskunde Olympiade erg spannend hoe de opgaven er dit jaar uit zouden zien. 'Anders dan anders', luidde het oordeel van veel (soms teleurgestelde) deelnemers over de opgaven van de eerste wedstrijddag.

Opgave 2 ging weliswaar over punten en lijnen, maar was geen echte meetkundeopgave. De context hadden de deelnemers echter kunnen raden: het IJslandse team gaf bij aankomst op Schiphol op de vraag 'wat is het eerste wat in je opkomt als je denkt aan Amsterdam?' als antwoord: '*history and culture, oh! and windmills*', en wat kregen de deelnemers op de eerste wedstrijddag voor hun kiezen? Juist, een vraagstuk over windmolens, zie het kader op de linkerpagina.

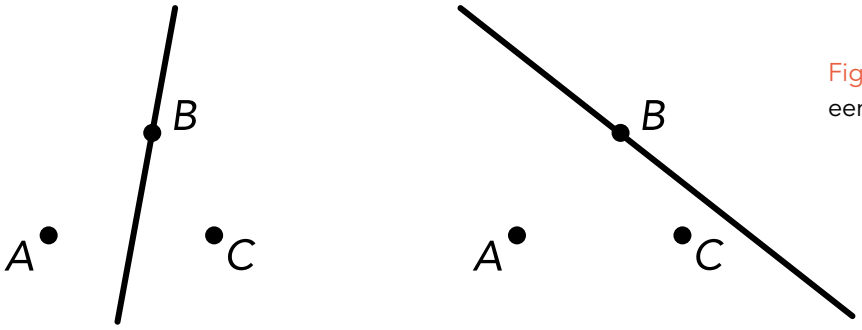
Het windmolenprobleem viel op omdat maar 29 van de 564 deelnemers een (bijna) complete oplossing vonden, waaronder de Nederlandse Madelon de Kemp. Op de andere opgaven heeft ook de rest van het Nederlandse team goed gescoord, dus gingen ze met twee zilveren medailles, drie bronzen medailles en een eervolle vermelding naar huis.

In het landenklassement werd Nederland 28ste. Winnaar was China, gevolgd door de Verenigde Staten en, verrassend, Singapore. De beste individuele deelnemer, de Duitse Lisa Sauermann, behaalde als enige alle 42 punten. Ze behaalde deze olympiade haar vierde gouden medaille en daarmee is ze de beste deelnemer aller tijden.

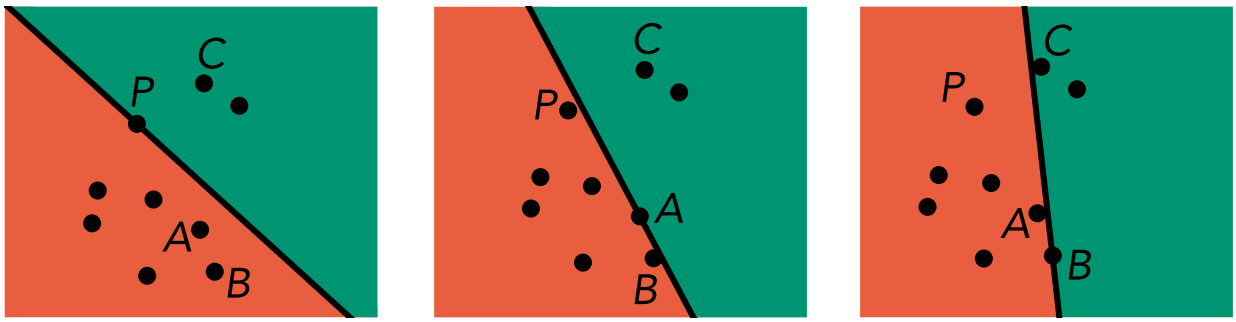
GOEDE WINDMOLENS Ondanks het feit dat de oplossing voor het windmolenprobleem moeilijk te vinden is, is er nauwelijks ingewikkelde wiskunde nodig om het probleem te begrijpen. Volgens de opgave bevat S minstens twee punten. Bekijk eerst het simpelste geval: precies twee punten en een lijn door één van deze twee. Dit levert natuurlijk altijd een windmolen op waarbij alle punten oneindig vaak een klap van de molen krijgen. Noem een windmolen, die elk punt in S oneindig vaak een klap geeft, een *goede windmolen*.

Ook voor drie punten krijgen we altijd een goede windmolen, al zijn er nu twee mogelijkheden, zie figuur 1. Links krijgt eerst A een klap van de molen, vervolgens draait de molen door om A en krijgt C een klap. Daarna draait de molen door om C, krijgt B weer een klap en zijn we terug in de beginsituatie. We zien dat de molen altijd voor een deel binnen driehoek ABC ligt.

Rechts krijgt eerst C een klap van de molen, vervolgens A, dan B en zijn we terug in de beginsituatie. Hier draait de molen altijd om de driehoek heen. Als er een punt D binnen driehoek ABC zou liggen, zou D nooit een klap van de molen krijgen.



Figuur 1 Twee mogelijkheden voor een molen met drie punten.



Figuur 2 Drie verschillende standen van de molen.

TWEE DRAAIENDE HALFVLAKKEN Nu we dit weten, is het tijd om naar een algemener plaatje te kijken, zie figuur 2 links. De molen verdeelt het vlak in twee gekleurde stukken, die we laten meedraaien met de molen. Eerst krijgt A, in het rode deel, een klap. Daarna draait de molen door om A en komt P, het vorige draaipunt, ook in het rode deel terecht. Na deze klap van de molen liggen er dus evenveel punten in het rode deel als ervoor. We zijn nu in het middelste plaatje van figuur 2.

Hier is B het volgende punt dat een klap krijgt, zie het rechter plaatje van figuur 2, waar C de volgende klap zal krijgen. Kijk nu goed naar het aantal punten dat in het rode en groene deel van het vlak ligt: dit verandert niet door het draaien van de molen (behalve op het moment van de klap zelf, als er heel even twee punten op de molen liggen).

Het is niet moeilijk om in te zien dat dit in het algemeen geldt: als een punt in het rode (groene) deel een klap krijgt en van kleur wisselt, komt het vorige draaipunt in het rode (groene) deel te liggen, zodat het totaal hetzelfde blijft.

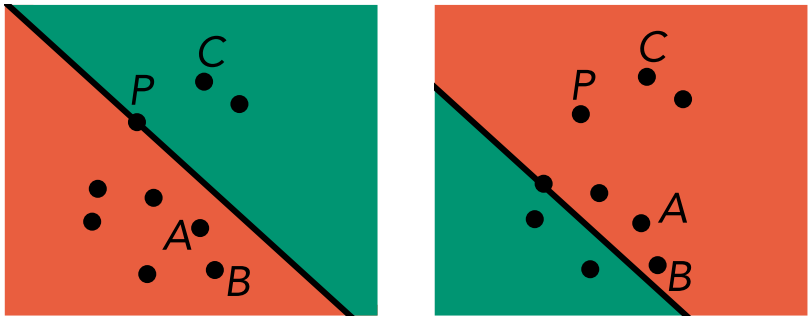
In figuur 2 draait de lijn van ongeveer '4 uur' via '5 uur' richting '6 uur'. Op '10 uur' is hij 180° gedraaid ten opzichte van de beginsituatie, zie figuur 3, rechts.

MOLENEIGENSCHAP Ook zonder de molen van punt tot punt te volgen, weten we zeker dat dit de situatie is nadat de molen 180° is gedraaid. Er moeten namelijk nog steeds twee punten in het groene deel liggen. Als we alle lijnen trekken die evenwijdig zijn aan de beginstand van de molen, dan is er maar één die door een punt van S gaat, zodanig dat er precies twee punten linksonder die lijn liggen.

Deze observatie is heel belangrijk, en we kunnen hem algemener formuleren als de *moleneigenschap*: in vrijwel iedere richting is er precies één lijn door een punt van S die het vlak verdeelt in een rood en een groen deel, met k punten aan de rode kant en $n - k - 1$ punten aan de groene kant, waarbij n het aantal punten van S is en $0 \leq k \leq n - 1$.

Je kunt dit als volgt inzien. Kies een lijn (die niet evenwijdig is aan een lijn door enig paar punten in S), die helemaal naast S ligt, zodat alle punten aan de groene kant liggen. Verschuif deze lijn in de richting loodrecht op de lijn naar de groene kant toe. We stoppen met schuiven bij het $k + 1$-ste punt dat we tegenkomen. Daarvoor zijn we al k punten tegengekomen, dus die liggen nu allemaal in het rode gebied. Verder ligt er één punt op de molen en de andere $n - k - 1$ punten liggen in het groene gebied.

Het is hierbij dus wel van belang dat er op deze verschoven lijn niet net toevallig twee punten tegelijk komen te liggen. Vandaar de voorwaarde dat de lijn niet evenwijdig is aan een lijn door enig paar punten in S. Op deze manier sluiten we weliswaar een heleboel richtingen uit, maar het gaat nog



Figuur 3 De molen in de beginsituatie en na 180° draaien.

Foto: Marijn van Rij

Het Nederlandse team. De eerste vier zijn van links naar rechts: Merlijn Staps (16 jaar, Leusden), Daniël Kroes (17 jaar, Woerden), Ragnar Groot Koerkamp (16 jaar, Opijnen) en Jeroen Huijben (15 jaar, Goirle). Rechts staan Madelon de Kemp (18 jaar, Nijmegen) en Jetze Zoethout (16 jaar, Goutum). De derde van rechts is Jeroen Winkel (14 jaar, Nijmegen). Hij behoorde niet tot het team, maar kreeg na de selectieronde de aanmoedigingsprijs.

steeds maar om eindig veel richtingen. We kunnen gewoon als beginstand een richting kiezen die ongelijk is aan al die richtingen; dan komen we geen problemen tegen en is het – met de moleneigenschap – helemaal duidelijk wat de situatie na 180° draaien is.

Nu terug naar ons voorbeeld. De twee punten in figuur 3 (rechts) in het groene deel, lagen eerst in het rode deel. Een punt kan alleen van kleur wisselen, als de molen door dat punt heen gaat. Deze twee punten moeten dus wel een klap van de molen hebben gehad. Ook de twee punten die in het begin in het groene deel lagen, zijn van kleur veranderd en hebben dus een klap gehad. Het zou nou handig zijn, als we op deze manier konden garanderen dat álle punten een klap van de molen hebben gehad. En hiervoor komt de moleneigenschap weer goed van pas.

Veronderstel eerst dat S bestaat uit een oneven aantal punten, zeg $n = 2m + 1$. We kiezen een beginstand die niet evenwijdig is aan een lijn door enig paar punten in S. Vanwege de moleneigenschap is er een lijn met m punten aan de rode kant en $n - m - 1 = m$ punten aan de groene kant van de lijn. Nadat deze molen 180° gedraaid is, liggen er nog steeds m punten in het groene en m punten in het rode deel. Het punt waar de molen na de draai doorheen gaat, moet hetzelfde punt zijn als waar de molen in het begin doorheen ging, vanwege de moleneigenschap. De rode en de groene kant zijn dus precies verwisseld. Dus alle punten in het groene deel liggen nu in het rode deel en omgekeerd, dus ze hebben allemaal een klap van de molen gehad. Het laatste punt heeft duidelijk ook klappen gehad, want daar gaat de molen in de begin- en eindsituatie doorheen.

Volgens dezelfde redenering is de molen na nog eens 180° draaien terug in de beginsituatie en begint alles weer opnieuw, dus alle punten krijgen oneindig veel klappen van deze windmolen. Voor een oneven aantal punten hebben we het probleem nu opgelost.

Nu rest nog het geval $n = 2m$, een even aantal punten. We kunnen nu niet dezelfde beginsituatie kiezen, want als de molen door een punt van S gaat, blijft een oneven aantal punten over. Die kunnen we niet eerlijk over de rode en groene kant verdelen, maar wel zo eerlijk mogelijk. Dus kies een molen met m punten in het rode deel en $m - 1$ punten in het groene deel. Na een draaiing van 180° loopt de molen weer evenwijdig aan zijn beginsituatie, maar zijn de groene en de rode kant omgedraaid.

Dankzij de moleneigenschap weten we nu dat alle punten uit het oorspronkelijke groene deel, én het oorspronkelijke draaipunt, in het rode deel moeten liggen. Alle punten in het oorspronkelijke groene deel zijn dus van kleur veranderd. Alle andere punten liggen na de halve draai óf op de molen, óf in het groene deel. Deze punten lagen oorspronkelijk allemaal in het rode deel, dus ook zij moeten een klap van de molen hebben gehad. Dus alle punten hebben na een draaiing van 180° een klap van de molen gehad. Na nog eens 180° draaien is de molen terug in de beginsituatie, dus krijgen we opnieuw een goede windmolen. En daarmee is de windmolenopgave opgelost. ■

PYTHAGORAS OLYMPIADE

■ door Matthijs Coster, Alexander van Hoorn en Eddie Nijholt

Doe mee met de Pythagoras Olympiade! Elke aflevering bevat vier opgaven. De eerste twee zijn wat eenvoudiger; onder de goede inzendingen van leerlingen uit de klassen 1, 2 en 3 wordt een Irisbon van 20 euro verloot. De laatste twee zijn echte breinbrekers; onder de goede inzendingen van leerlingen (tot en met klas 6) wordt een Irisbon van 20 euro verloot. Bovendien kun je je via deze breinbrekers plaatsen voor de finale van de Nederlandse Wiskunde Olympiade, mocht het via de voorronden niet lukken. Niet-leerlingen kunnen met de Pythagoras Olympiade meedoen voor de eer.

HOE IN TE ZENDEN? **Inzendingen ontvangen we bij voorkeur per e-mail (getypt of een scan van een handgeschreven oplossing): pytholym@pythagoras.nu.**

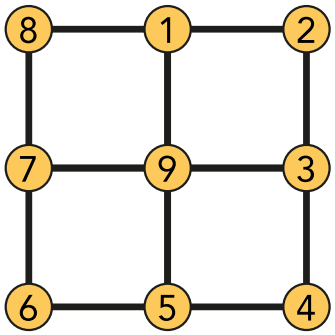
Eventueel kun je je oplossing sturen naar
Pythagoras Olympiade
Korteweg-de Vries Instituut
Universiteit van Amsterdam,
Postbus 94248
1090 GE Amsterdam.

Voorzie het antwoord van een duidelijke toelichting (dat wil zeggen: een berekening of een bewijs). Vermeld je naam en adres; leerlingen moeten ook hun klas en de naam van hun school vermelden.
Je inzending moet bij ons binnen zijn vóór 31 oktober 2011.

DE GOEDE INZENDERS VAN APRIL 2011

210: Andreas Bally (klas 3), Europese school van Luxemburg; Ben De Bondt (klas 4), Koninklijk Atheneum, Grimbergen; Stijn Cambie (klas 5), VTI Poperinge; Rick Damhuis (klas 5), Twents Carmel College locatie Lyceumstraat, Oldenzaal; Michelle Sweering (klas 3), Erasmiaans Gymnasium, Rotterdam; Michiel Vanneste, KSO Glorieux, Ronse.
211: Michelle Sweering (klas 3), Erasmiaans Gymnasium, Rotterdam.
212: Michelle Sweering (klas 3), Erasmiaans Gymnasium, Rotterdam.
213: Ben De Bondt (klas 4), Koninklijk Atheneum Grimbergen; Marcel Roggeband, Hoofddorp; Michelle Sweering (klas 3), Erasmiaans Gymnasium, Rotterdam.
De Irisbonnen gaan naar Andreas Bally en Ben De Bondt.

OPGAVE 218



Hiernaast zie je de plattegrond van een deel van een stad. Er zijn twaalf straatstukken. Begin in 1 te lopen. Elk stuk loop je helemaal af. Dan kies je voor een ander stuk dat daar begint óf voor teruglopen. Kun je zó lopen, dat je aan het eind weer in 1 bent en één stuk 1 keer hebt gelopen, een ander stuk 2 keer, een derde 3 keer enzovoorts, tot en met een stuk 12 keer?

OPGAVE 219

Verdeel de getallen 1 tot en met 50 in 25 groepjes van 2. Neem vervolgens van elk van de 25 groepjes steeds het grootste getal. Neem ten slotte van de aldus verkregen 25 getallen het kleinste getal. Wat is het grootste getal dat je op deze manier als uitkomst kunt krijgen?

OPGAVE 220

Two Kiddies is een spelshow waaraan alleen ouderparen mogen meedoen die twee kinderen hebben. Elk deelnemend ouderpaar mag blindelings een bal trekken uit een doos die een blauwe en een roze bal bevat. De presentator heeft een randomgenerator die een willekeurige datum prikt, bijvoorbeeld '13 april'.

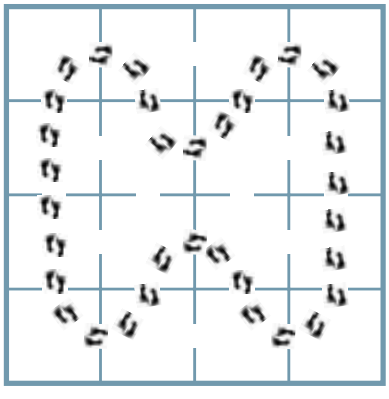
Als een ouderpaar de blauwe bal trekt, winnen zij een auto indien zij ten minste één zoon hebben die jarig is op de datum die de randomgenerator aangeeft. En als de roze bal wordt getrokken, winnen zij een auto indien zij ten minste één dochter hebben die jarig is op de datum die de randomgenerator aangeeft. Als de auto gewonnen wordt, winnen de ouders bovendien een reis voor het hele gezin indien hun beide kinderen van hetzelfde geslacht zijn.

a. Wat is de kans dat een willekeurig ouderpaar dat meedoet aan *Two Kiddies* de auto wint?
b. Van een willekeurig ouderpaar heb je vernomen dat ze bij *Two Kiddies* de auto hebben gewonnen. Verdere informatie heb je niet. Wat is de kans dat ze ook de reis hebben gewonnen?

(Ga er vanuit dat elke dag even waarschijnlijk is om geboren te worden, en dat de kans op een jongen even groot is als de kans op een meisje. Schrikkeljaren mag je verwaarlozen.)

OPGAVE 221

Lodewijk zit in een gebouw met n^2 kamers, gerangschikt in een rooster van n bij n. De buitenmuren zijn afgesloten, in elke binnenmuur zit een opening naar de aangrenzende kamer. Lodewijk wil graag in een kamer beginnen, elke kamer precies één keer bezoeken en dan weer in de eerste kamer terugkomen. Voor welke waarden van n is dit mogelijk? (Dat het voor $n = 4$ mogelijk is, blijkt uit het plaatje hiernaast.)



OPLOSSING 210

In een rooster van 3 × 3 hokjes zijn in totaal veertien vierkantjes te onderscheiden: negen van 1 × 1, vier van 2 × 2 en één van 3 × 3. Hoeveel vierkantjes zijn er op deze manier te onderscheiden in een rooster van 50 × 50 hokjes?

Oplossing. Om te berekenen hoeveel vierkantjes van $k \times k$ er te vinden zijn, merken we op dat we alleen de linker bovenhoek hoeven te beschouwen. Deze mag hooguit $50 - k$ vakjes van links verwijderd zijn, en hooguit $50 - k$ van boven. In totaal zijn er dus $(51 - k)^2$ vierkantjes van $k \times k$. Als we dit voor $k = 1$ tot en met 50 bij elkaar optellen, krijgen we $50^2 + 49^2 + \cdots + 1^2$. Met wat rekenwerk of de formule $n(n + 1)(2n + 1)/6$ voor $n = 50$ komen we op een totaal van 42925 vierkantjes.

OPLOSSING 211

Ernst heeft acht emmers: vier van het merk HAMÉ en vier van het merk DELTA. Hoewel Ernst de emmers niet met het blote oog uit elkaar kan houden, weet hij dat een emmer van HAMÉ in (bovenop) een emmer van DELTA past, maar niet andersom. Bovendien passen twee emmers van dezelfde soort natuurlijk wel in elkaar.

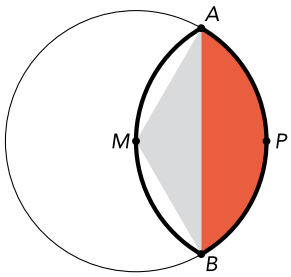
Hoe kan Ernst in zo weinig mogelijk zetten alle emmers identificeren? Een zet bestaat uit het op elkaar zetten van twee emmers (geen stapeltjes); het uit elkaar halen van twee emmers mag zo vaak als je wilt.

Oplossing. We tonen eerst aan dat het niet in zes of minder zetten kan. Als we de acht emmers op een rij zetten, dan zijn er $\binom{8}{4} = 70$ verdelingen mogelijk. Bij een zet kunnen er twee dingen gebeuren: óf de bovenste emmer past niet goed in de onderste emmer (dan zijn die twee emmers geïdentificeerd: de bovenste is van DELTA en de onderste van HAMÉ), óf de emmers passen wel (dan zijn die twee emmers niet geïdentificeerd: ze kunnen beide van hetzelfde merk zijn, of de bovenste is van HAMÉ en de onderste van DELTA). Per zet zijn er 2 mogelijkheden (passen of niet passen). Dus na 6 zetten zijn er in totaal $2^6 = 64$ mogelijke uitkomsten. Omdat $64 < 70$, kunnen deze nooit allemaal uit elkaar gehouden worden.

In zeven zetten is het als volgt mogelijk. We beginnen met een emmer en zetten er een tweede emmer bovenop. Als hij past, laten we hem erop zitten en als hij niet past, leggen we deze tweede emmer opzij. Op deze manier breiden we met elke volgende emmer een 'passend' torentje naar boven toe uit, mits mogelijk, anders leggen we de emmer opzij. Uiteindelijk krijgen we een passend torentje met wat emmers apart die, omdat ze niet pasten, van DELTA zijn. Omdat in het torentje wél alles past, is dit een torentje van de vier HAMÉ's boven op een torentje van een aantal (mogelijk nul) DELTA's. Zo identificeren we ze allemaal in precies zeven zetten.

OPLOSSING 212

Op een ronde tafel met een straal van 1 meter zetten we een muis neer. (De kans dat de muis binnen een gebied G wordt gezet, is *evenredig* met de oppervlakte van G.) De muis loopt in een willekeurige richting 1 meter recht vooruit. Hoe groot is de kans dat de muis van de tafel af loopt?



Oplossing. Neem aan dat de muis naar links loopt. Het gebied Z dat met een dikke zwarte rand is gemarkeerd, is de verzameling punten die een afstand van minstens 1 tot de linkerkant van de cirkelrand hebben. Om de oppervlakte hiervan te bepalen, merken we op dat de driehoeken PAM en PBM gelijkzijdig zijn, zodat $\angle AMB = 120°$ en taartpunt MAB (grijs plus rood) dus oppervlakte $\frac{1}{3}\pi$ heeft. Er geldt: $\text{opp}(Z) = 2 \times \text{opp}(\text{rood}) = 2(\frac{1}{3}\pi - \text{opp}(\Delta AMB)) = 2(\frac{1}{3}\pi - \frac{1}{4}\sqrt{3})$. De kans dat de muis van de tafel loopt, is dus

$$\frac{1}{\pi}(\pi - (\tfrac{2}{3}\pi - \tfrac{1}{2}\sqrt{3})) = \tfrac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2\pi}$$

(ongeveer 0,609 ofwel 60,9%).

OPLOSSING 213

Plaats in vier kolommen achtereenvolgens de getallen 1, 2, 3 en 5. In elke kolom mag je onbeperkt getallen toevoegen, door het product te nemen van drie getallen uit de drie andere kolommen (uit elke kolom één getal naar keuze). Komt uiteindelijk het getal 540.000 voor in één van de kolommen en zo ja, in welke kolom(men)?

Oplossing. Noteer (a, b, c) voor $2^a \times 3^b \times 5^c$. Dan zijn de eerste twee rijen van de tabel:

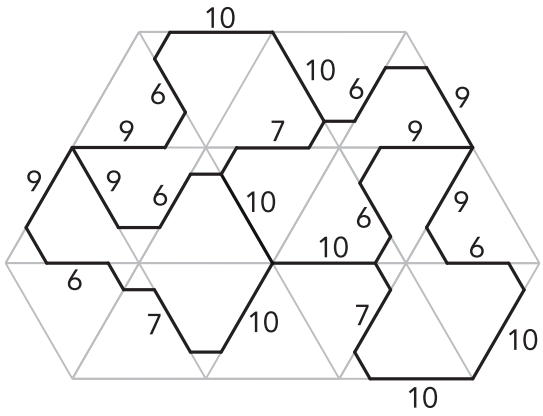
(0, 0, 0) **(1, 1, 1)**	**(1, 0, 0)** **(0, 1, 1)**	**(0, 1, 0)** **(1, 0, 1)**	**(0, 0, 1)** **(1, 1, 0)**

Als we nu 0 interpreteren als 'even' en 1 als 'oneven', zien we dat er geen nieuwe coördinaten in de tabel bij komen. Er geldt $900 = 15 \times 10 \times 6$ (eerste kolom), $300 = 30 \times 2 \times 5$ (derde kolom) en $540.000 = 900 \times 2 \times 300$ (vierde kolom). Omdat $540.000 = 2^5 \times 3^3 \times 5^4 = (5, 3, 4)$ van de vorm $(1, 1, 0)$ is, komt dit getal alléén in de vierde kolom voor.

1 **30** **900**	**2** **15**	**3** **10** **300**	**5** **6** **540.000**

OPLOSSING SUDOKU EN CONGRUENTE VIERDELING

1	2	3	4	9	8	5	6	7
6	8	4	1	5	7	9	2	3
7	9	5	3	2	6	8	1	4
8	4	6	2	1	3	7	9	5
9	1	7	8	6	5	4	3	2
5	3	2	9	7	4	6	8	1
2	7	1	5	8	9	3	4	6
3	5	9	6	4	2	1	7	8
4	6	8	7	3	1	2	5	9



Links zie je de oplossing van figuur 4 op pagina 17, rechts de oplossing van figuur 9 op pagina 21. Aanwijzing om deze oplossing te vinden: maak eerst een congruente tweedeling, en maak daarna van de twee ontstane stukken opnieuw een congruente tweedeling.

PYTHAGORAS

51ste jaargang nummer 1
september 2011
ISSN 0033 4766

***Pythagoras* stelt zich ten doel jongeren kennis te laten maken met de leuke en uitdagende kanten van wiskunde. *Pythagoras* richt zich tot leerlingen van vwo en havo en alle anderen die jong van geest zijn.**

Internet www.pythagoras.nu

Hoofdredacteur Arnout Jaspers

Eindredacteur Alex van den Brandhof

Redactie Matthijs Coster, Jeanine Daems, Jan Guichelaar, Klaas Pieter Hart, Paul Levrie

Vormgeving Grafisch Team Digipage BV, Leidschendam

Druk Drukkerij Ten Brink, Meppel

Uitgever Koninklijk Wiskundig Genootschap

Verantwoordelijk uitgever Chris Zaal

Lezersreacties en kopij
Bij voorkeur per e-mail; lezersreacties naar Jan Guichelaar, jan@pythagoras.nu en kopij naar Arnout Jaspers, arnout@pythagoras.nu. Eventueel per post naar Jan Guichelaar, Pedro de Medinalaan 162, 1086 XR Amsterdam.

Abonnementen, bestellingen en mutaties
Drukkerij Ten Brink
Abonnementenadministratie
Postbus 41
7940 AA Meppel
Telefoon: 0522 855 175
E-mail:
abonnementen@pythagoras.nu

Abonnementsprijs
(6 nummers per jaargang)
€ 26,00 (Nederland),
€ 29,00 (België),
€ 32,00 (overig buitenland),
€ 17,00 (groepsabonnement Nederland),
€ 18,00 (groepsabonnement België).
Zie www.pythagoras.nu voor toelichtingen.

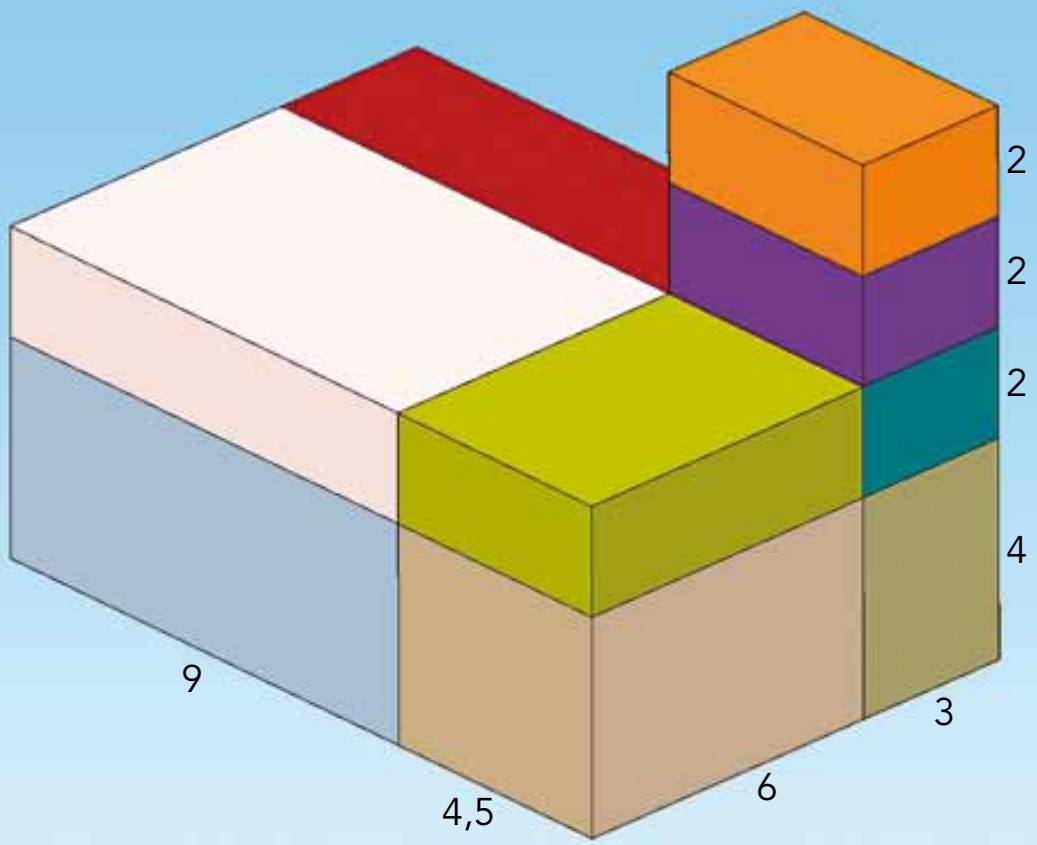
Aan dit nummer werkten mee
Alex van den Brandhof (alex@pythagoras.nu),
Matthijs Coster (matthijs@pythagoras.nu),
Jeanine Daems (jeanine@pythagoras.nu),
Jan Guichelaar (jan@pythagoras.nu),
Klaas Pieter Hart (kp@pythagoras.nu),
Alexander van Hoorn (alexander@pythagoras.nu),
Arnout Jaspers (arnout@pythagoras.nu),
Paul Levrie (paul@pythagoras.nu),
Hans van Maanen (hans@vanmaanen.org),
Eddie Nijholt (eddie@pythagoras.nu),
Sietske Tacoma (sietsketacoma@gmail.com),
Aad Thoen (thoenaad37@gmail.com),
Aad van de Wetering (avdw3b@wxs.nl).

Pythagoras wordt mede mogelijk gemaakt door de bijdragen van de onderstaande instituten en instellingen.

3D-PUZZEL

■ door Paul Levrie

Tien balkjes moeten in een doosje met deksel passen. De (relatieve) afmetingen van de balkjes zijn: 9 × 6 × 4; 9 × 6 × 2; 9 × 4 × 3; 9 × 3 × 2; 4,5 × 6 × 4; 4,5 × 6 × 2; 4,5 × 4 × 3 en drie balkjes van 4,5 × 3 × 2. De doos heeft binnen-afmeting 14,5 × 6 × 9. In het begin zitten de acht verschillende balkjes (samen een blok van 13,5 × 6 × 9) in de doos.



Opdracht 1. Neem er een klein balkje (4,5 × 3 × 2) bij.
Deze negen passen samen ook in de doos. Hoe?

Opdracht 2. Neem ook het tiende blokje erbij.
Samen kunnen ze zo in de doos dat het deksel net nog dicht kan. Hoe?

De oplossingen vind je in het volgende nummer van *Pythagoras*.