

PYTHA GORAS

WISKUNDETIJDSCHRIFT VOOR JONGEREN

Prijsvraag

Blokkerende botsauto's

De dwangmatige doorrijder

51ste JAARGANG - NUMMER 3 - JANUARI 2012

Pythagoras, het vijftigjarige wiskundetijdschrift voor jongeren, zoekt per 1 september 2012 een enthousiaste

HOOFDREDACTEUR (m/v)

Het betreft een betaalde functie voor één dag in de week.

Taken en verantwoordelijkheden

De hoofdredacteur van *Pythagoras*

- werft en redigeert nieuwe kopij
- geeft leiding aan de redactie
- onderhoudt contact met auteurs
- vertegenwoordigt het tijdschrift in wiskundig Nederland en België
- representeert het tijdschrift bij evenementen als de Nationale Wiskunde Dagen
- zorgt ervoor dat *Pythagoras* ook toegankelijk is voor jongere lezers

Gevraagd

- journalistieke ervaring, bij voorkeur op het gebied van de popularisering van wiskunde
- leidinggevende eigenschappen
- creativiteit en een goede pen
- aantoonbare affiniteit met wiskunde

Geboden

- een geolied productieapparaat
- een enthousiaste redactie
- flexibele werktijden

Neem voor meer informatie contact op met een van de leden van de sollicitatiecommissie: Klaas Pieter Hart (K.P.Hart@tudelft.nl), Heiner Wind (hwind@home.nl) of Chris Zaal (chriszaal@uva.nl).

Je sollicitatiebrief (inclusief cv) dient uiterlijk 15 februari 2012 in ons bezit te zijn. Stuur je sollicitatie per e-mail naar vacature@pythagoras.nu.

AANBIEDING: BOEK + DVD

Pythagoras is al sinds 1961 een begrip in Nederland en België. Ter gelegenheid van het vijftigjarig bestaan verscheen vorig jaar *De Pythagoras Code* – het beste uit een halve eeuw wiskunde voor liefhebbers, een selectie

uit vijftig jaargangen van het blad. *De Pythagoras Code* is verkrijgbaar bij de boekhandel voor € 19,95. Je kunt het boek echter ook rechtstreeks bij de redactie bestellen.

Voor een kleine meerprijs krijg je er dan een dvd bij met de eerste vijftig jaargangen van het tijdschrift (1961-2011)! Deze dvd is niet in de boekhandel te koop. Voor het boek plus de dvd betaal je slechts € 23,50 plus verzendkosten à € 2,30 (totaal € 25,80).



De dvd is ook apart te bestellen voor € 11 + € 1,50 verzendkosten (totaal € 12,50). De totaalkosten voor bestellingen uit België zijn € 27,50 (boek + dvd) en € 13,50 (dvd).

Hoe bestellen? Stuur een e-mail naar jan@pythagoras.nu met als onderwerp 'bestelling', vermeld het aantal exemplaren ('boek + dvd' of 'dvd') en een postadres.

Maak dan het juiste bedrag over op giro 4784299 t.n.v. 'promotie Pythagoras'.

Voor Belgische bestellers is de volgende informatie nog nodig:

IBAN: NL46INGB0004784299;

BIC: INGBNL2A.

De bestelling wordt verstuurd zodra de betaling ontvangen is.

Op www.pythagoras.nu zijn de laatste jaren steeds meer oude nummers online gezet. De complete eerste vijftig jaargangen zullen t.z.t. op de site beschikbaar zijn. De resolutie van de pdf's op de website is echter lager dan de resolutie van de pdf's op de dvd.

INHOUD



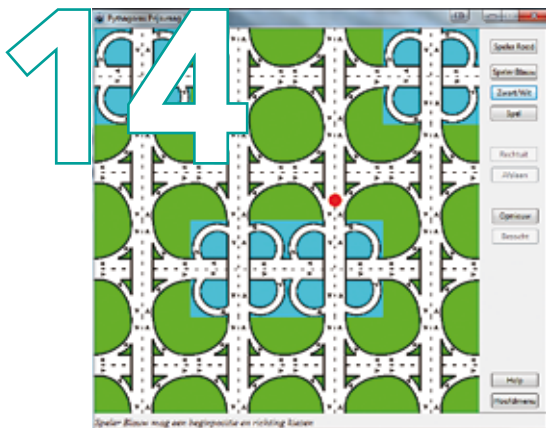
STRAFSCHOPSTATISTIEK EN ANDERE VOETBALEIGENAARDIGHEDEN

In welk deel van het doel kun je als penaltynemer het beste schieten? Welke 'natuurwetten' zitten er verstopt in wedstrijduitslagen? Lees erover in de derde aflevering van ons thema 'wiskunde en sport'.



WISKUNST IN LAVA

Op het eiland Heimaey, bij IJsland, staat een merkwaardig object in het lavalandschap. *Sculpture System No. 5* is een symmetrieloze deltahedron, gemaakt door kinderen die op Heimaey wonen.



PRIJSVRAAG: BLOKKERENDE BOTSAUTO'S EN DE DWANGMATIGE DOORRIJDER

Doe mee met de nieuwe prijsvraag van *Pythagoras*! We hebben twee spellen bedacht, waarbij we ons lieten inspireren door *Game of Life*, een in 1970 bedachte 'cellulaire automaat'.

EN VERDER

- 2 Kleine nootjes
- 9 Drie tegen vijf
- 10 Journaal
- 12 Tosti aarde
- 20 Sudoku's en magie
- 22 De boom van Markov
- 28 Getallen zeven
- 30 Pythagoras Olympiade
- 33 Oplossing sudoku en 3d-puzzel nr. 2

■ **NIVEAUBALKJES** Pagina's met één of meer zwarte balkjes (onder de paginanummering) geven de moeilijkheidsgraad aan. Eén balkje: lastig. Twee balkjes: vereist wiskundekennis uit de vijfde of zesde klas. Drie balkjes: net iets moeilijker.

KLEINE NOOTJES

■ door Jan Guichelaar

ZAKJES MET KNIKKERS

Je hebt tien zakjes waarin je knikkers wilt stoppen. Als alle zakjes een verschillend aantal knikkers moeten bevatten, lukt het dan met minder dan 45 knikkers?



HALFVOL OF HALFLEEG

Je hebt een centimeter en een rechthoekige fles uitlopend in een smalle ronde hals, die ongeveer halfvol zit met water. Kun je precies bepalen hoeveel cm^3 water er tot de rand toe in de fles past?

Je mag er geen water uitgieten of er indoen. (Bron: *The Moscow Puzzles* van Boris A. Kordemsky)



PAD MAKEN

Een tuinman wil rond een vierkant terrein van 60 bij 60 meter een pad maken. Het pad moet overal 1 meter breed worden en wordt aan weerszijden begrensd door twee hekken. De tuinman koopt $2 \times 4 \times 60 = 480$ meter hek, maar ontdekt dat dat te weinig is. Hij besluit niet nog meer hek te kopen, maar een iets kleiner vierkant terrein met een overal even breed pad dubbel te omheinen. Hoe groot wordt het binnenterrein?



Kleine nootjes zijn eenvoudige opgaven die weinig of geen wiskundige voorkennis vereisen om opgelost te kunnen worden. De antwoorden vind je in het volgende nummer van *Pythagoras*.

8

=

1 + 1 + 1 + 5

1 + 1 + 2 + 4

1 + 1 + 3 + 3

1 + 2 + 2 + 3

2 + 2 + 2 + 2

GETAL VERDELEN

Kies een getal en schrijf dat op verschillende manieren als som van vier positieve gehele getallen. Als je bijvoorbeeld 8 kiest, lukt dat op 5 manieren. De volgorde van de vier getallen speelt geen rol. Voor het getal G zijn er precies G mogelijkheden. Wat is G?

SCHIPPER MAG IK OVERVAREN?

Oliver weegt 100 kilo, Stan weegt 60 kilo en Puck weegt 40 kilo. Zij willen een vaart oversteken. Het roeibootje kan maar 100 kilogram dragen. In vier keer varen is iedereen overgestoken. Kan dat wel?



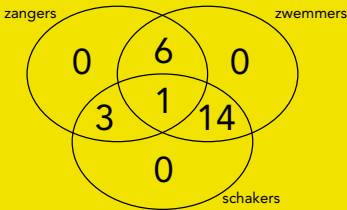
3

OPLOSSINGEN KLEINE NOOTJES NR. 2

Zingende schakers. Er zijn vier schakers die in het koor zingen. Niemand kan maar één ding. Zie het Venndiagram.

Taal of wiskunde? Het zijn de laatste acht letters vanaf het einde van het alfabet: ZYXWVUTS, een aantal ervan geroteerd.

Driehoeken tellen. Er zijn 77 rechthoekige driehoeken. Sommige zitten deels buiten de figuur.



zijden	1-1-√2	1-2-√5	1-3-√10	1-4-√17	2-2-2√2	2-3-√13	√2-√2-2	√2-2√2-√10	2√2-2√2-4	totaal
aantal	22	21	9	4	3	1	12	4	1	77

Duurt dat nog lang? Het jaar 6009.

Stoelendans. Zet een stoel in drie van de vier hoeken. Laat de vierde hoek leeg. Zet de overige zes zo neer langs de vier wanden, dat je langs elke muur drie stoelen hebt.

Nog vijf maanden tot het EK voetbal en de eerste prognoses over welk land de grootste kans heeft om kampioen te worden, verschijnen al in de media. Deze voorspellingen zijn meestal op weinig meer gebaseerd dan onderbuikgevoel. Zo heet Portugal voor Nederland een *Angstgegner*, omdat het Nederlands elftal in de 10 keer dat het tegen het Portugese elftal speelde, maar 1 keer won en 3 keer gelijk speelde. Maar de meeste van die wedstrijden werden in de vorige eeuw gespeeld! Zelfs bij de meest recente confrontatie, in 2006, speelden maar vier spelers uit de huidige selectie mee: Arjen Robben, Rafael van der Vaart, Mark van Bommel en John Heitinga. Best mogelijk dat die geen van allen staan opgesteld in de komende Nederland-Portugal in Charkov, en bij de Portugezen zal de situatie niet veel anders zijn.

■ door Marc Seijlhouwer en Arnout Jaspers

STRAFSCHOP- STATISTIEK

EN ANDERE VOETBALEIGENAARDIGHEDEN

Uitslagen uit het verleden worden vaak 'statistiek' genoemd, maar het is niet meer dan simpel turven, net zoals de cijfers die je bij wedstrijden op tv tegenwoordig onder in beeld ziet: percentage balbezit, aantal schoten op doel, of onzinnige weetjes van het type 'derde keer dat Ryan Babel met een muts op in het middenveld staat'.

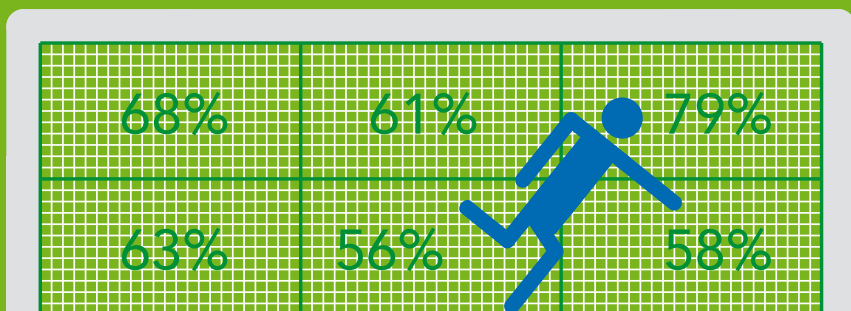
Er gaan tegenwoordig miljoenen euro's om in het analyseren en interpreteren van sportstatistieken, maar data zijn nog geen statistiek. Is een team beter als het meer balbezit heeft? Betekent het iets als een team al zes wedstrijden op rij niet heeft verloren? Zo won het Nederlands elftal bijna alle kwalificatiewedstrijden voor het EK overtuigend, maar ze verloren in november kansloos met 3-0 van Duitsland. Hoe kan dat, als Nederland zoveel wedstrijden ervoor heeft gewonnen? De quasi-diepzinnige analyses waren weer niet van de lucht. Besteedt Nederland te weinig aandacht aan vriendschappelijke wedstrijden? Waren de teams waar Nederland tegen speelde bij nader inzien heel zwak?

THUISVOORDEEL Een fenomeen dat in 1994 wel degelijk statistisch geanalyseerd is, is het fameuze thuisvoordeel. In tien seizoenen van de

Engelse competitie scoorde het thuis spelende team gemiddeld een half doelpunt meer dan in een willekeurige wedstrijd.

Dat lijkt een behoorlijk voordeel, maar het probleem is, dat het een gemiddelde over alle teams in verschillende divisies is, in tien verschillende seizoenen. Alle factoren die bij zouden kunnen dragen aan een thuisvoordeel zijn onderzocht: de divisie waarin een team speelt (een hogere divisie betekent immers meer publiek, dus meer supporters bij een thuiswedstrijd), het seizoen (clubs kunnen goede jaren hebben en mindere jaren) en natuurlijk de clubs zelf (die een groter thuisvoordeel kunnen hebben doordat ze beter gewend zijn aan hun grasveld, bijvoorbeeld). Je zou denken, en veel mensen doen dat ook, dat al deze dingen belangrijk zijn voor het thuisvoordeel.

Maar het blijkt dat vooral het seizoen belangrijk is, dat wil zeggen: de verschillen in prestatie van jaar tot jaar hadden een veel grotere invloed op een thuisvoordeel dan de hoeveelheid publiek of de eigenaardigheden van de club of het voetbalveld. Om je onderzoek niet te laten 'vervuilen' door de seizoensafhankelijkheid, zou je bijvoorbeeld meerdere jaren tegelijk kunnen bekijken. De afhankelijkheid van het competitie seizoen zal dan wegvallen.



Al met al lijkt het een rare conclusie; een thuisvoordeel zou niet iets moeten zijn dat afhankelijk is van het jaartal. Maar met het jaartal hangt natuurlijk samen dat een team belangrijke spelers kan zijn kwijtgeraakt in de zomervakantie, er kan een nieuwe coach zijn aangesteld met een andere spelvisie, enzovoort. Zo ontstaan verschillen in hoe een team

speelt van jaar tot jaar, en dat zorgt voor een groter thuisvoordeel in het ene seizoen dan in het andere. Zo laat de statistiek zien hoe ‘logische’ aannames soms niet waar blijken.

We geven een simpel voorbeeld van hoe het thuisvoordeel statistisch misleidend kan zijn. Stel er zijn drie teams, A, B en C. Team A is beter dan

team	thuis			uit			thuis – uit
	winst	gelijk	verlies	winst	gelijk	verlies	
A	2	0	0	2	0	0	0
B	1	0	1	1	0	1	0
C	0	0	2	0	0	2	0

team	thuis			uit			thuis – uit
	winst	gelijk	verlies	winst	gelijk	verlies	
A	2	0	0	1	1	0	0,5
B	1	0	1	0	0	2	1
C	1	1	0	0	0	2	1,5

De wedstrijdstatistieken van teams A, B en C; in de bovenste tabel *zonder* thuisvoordeel, in de onderste tabel *met* thuisvoordeel. In de kolom ‘thuis – uit’ zijn de gewonnen wedstrijden uit (waarbij een gelijkspel als een half gewonnen match telt) afgetrokken van de gewonnen wedstrijden thuis.

team B en C, en team B is beter dan team C. Stel nu dat een wedstrijd tussen A en B in 2-1 eindigt, tussen A en C in 3-1 en tussen B en C ook in 2-1. Omdat C het slechtste team is, verliest het dus altijd. Maar stel nu dat C een groot thuisvoordeel heeft van twee doelpunten. Dan zal C thuis gelijk spelen tegen A, en winnen van B.

In de tabel op pagina 5 zie je nu dat *alle* teams het beter doen omdat ze thuis spelen. Natuurlijk doen ze het eigenlijk slechter als ze uit spelen, maar als je niet weet dat alleen C een thuisvoordeel heeft, zou je makkelijk kunnen concluderen dat alle teams een thuisvoordeel hebben. Dit soort lastige situaties maken statistiek soms een gevaarlijk apparaat, waarmee je makkelijk verkeerde conclusies kan trekken.

PENALTY'S EN STATISTIEK Nederland is altijd notoir slecht geweest in penalty's, en zou best kunnen profiteren van een gedegen onderzoek. In welke hoek van het doel moet je schieten voor de grootste trefkans? Wij hebben 197 penalty's, genomen op de WK's en EK's van 1994 tot en met 2008, bekeken en noteerden steeds in welke hoek er geschoten werd, en met welk been. Daaruit blijkt bijvoorbeeld dat 25 procent van de penalty's rechts onder op het doel wordt geschoten. Maar aan die informatie heeft een schutter op de penaltystip niet veel; die wil weten in welke hoek je moet schieten om de hoogste scoringskans te hebben.

Als je op je gevoel af zou gaan, lijkt een schot in de bovenhoek moeilijker te stoppen. Immers, de keeper moet dan verder springen. Anderzijds,

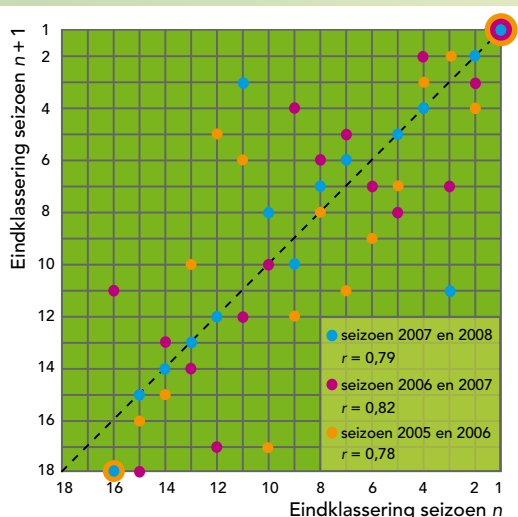
RESULTATEN UIT HET VERLEDEN...

Die ene bal op de paal in de kampioenswedstrijd, die *schwalbe* in blessuretijd waarvoor de scheidsrechter een penalty gaf. De toevalsfactor in voetbal is onmiskenbaar, maar moeilijk te kwantificeren.

In de grafiek hiernaast is de eindstand van de zestien niet gedegradeerde Nederlandse ere-divisieclubs uitgezet tegen de eindstand in het seizoen dat daarop volgde. Dus als een club in het seizoen 2005/2006 zevende werd en in het seizoen 2006/2007 vijfde, levert dat het punt (7, 5) op in de grafiek. Een club die in twee opeenvolgende seizoenen hetzelfde resultaat behaalde, komt op de stippellijn terecht. De prestaties van voetbalclubs blijken behoorlijk consistent. In het seizoen 2007/2008 (blauw) eindigden 8 van de 16 clubs weer op precies dezelfde plaats op de ranglijst.

De correlatiecoëfficiënt r is een maat voor hoe dicht de punten bij de stippellijn liggen. Als elke club van jaar tot jaar even goed presteerde, zouden alle punten op de stippellijn liggen en is r gelijk aan 1. Als voetbal zuiver een gokspel was, zou de puntenwolk geheel vormeloos zijn en is de correlatie 0.

Uit de analyse blijkt dat r ongeveer gelijk is aan 0,8. Statistisch gezien betekent dit, dat de plaats op de ranglijst voor $r^2 = 0,64$ ofwel bijna tweederde wordt bepaald door de plaats op de ranglijst het jaar daarvoor. Voor een sociaal verschijnsel is de gevonden waarde $r = 0,8$ zeer hoog, hoger bijvoorbeeld dan de correlatie tussen de IQ's van identieke tweelingbroers. Ondanks alle trainers- en spelerswissels en de grillen van de scheids blijkt de bal dus niet zo erg rond.



DE IJZEREN WETTEN VAN DE RANGLIJST

Voetbalcompetities in heel verschillende landen als Spanje en België vertonen statistisch nauwkeurige overeenkomsten, zoals blijkt uit de grafiek hiernaast. Hierin is verticaal het aantal punten uitgezet dat een club op plaats n van de eindstand behaalde (gemiddeld over drie seizoenen).

Het aantal punten daalt natuurlijk per definitie met de plaats op de ranglijst, maar de precieze verdeling ligt niet vast. Denk maar aan het extreme geval dat alle clubs eindigen met hetzelfde aantal punten en de hele ranglijst wordt bepaald door het doelsaldo.

De puntenaantallen zijn wel herschaald, omdat de competities niet allemaal hetzelfde aantal clubs hebben. In een competitie met 20 clubs worden door alle clubs gezamenlijk in principe 38/34 maal zoveel punten binnengehaald als in een competitie met 18 clubs.

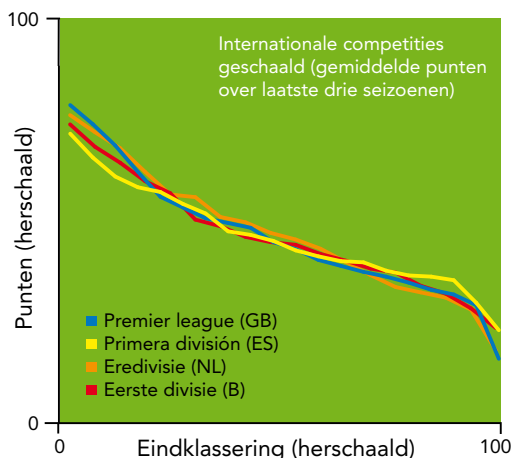
Het uitzetten van het puntentotaal tegen de eindstand levert een grotendeels rechte lijn op, die aan de top en in de degradatiezone steiler is. Een voor de hand liggende verklaring voor de piek links is dat clubs die nog kans maken op het kampioenschap of Europees voetbal gemotiveerder zijn dan de middenmoters om tot op de laatste speeldag zoveel mogelijk punten binnen te halen. De dip rechts, bij de verliezers, is moeilijker te verklaren. Ook van degradatiekandidaten zou je verwachten dat ze knokken voor elk punt. Blijkbaar slaat bij clubs aan de staart van de ranglijst toch al ruim van tevoren de wanhooptoe, waardoor ze onder de maat presteren.

Het totaal aantal punten dat de clubs in een seizoen behalen (de oppervlakte onder de lijn) is van seizoen tot seizoen bijna constant. Dit is sinds de overgang op het driepuntensysteem in 1995 (wie wint, haalt drie punten) niet vanzelfsprekend, aangezien een gelijkspel slechts $2 \times 1 = 2$ punten aan het totaal toevoegt, tegen 3 punten als één van beide wint.

Zo speelden de Belgische eerstedivisieclubs in drie seizoenen 80, 83 en 79 keer gelijk (25,6-27,0% van het totale aantal wedstrijden). Voor Spanje's *primera división* zijn deze cijfers: 95, 98 en 105 gelijkspelen (24,8-27,4% van het totale aantal wedstrijden). De Engelse *premier league* kwam uit op 100, 98 en 77 gelijkspelen (20,8-27,4%). Nederland is hier de uitzondering, want daar speelde men in de drie onderzochte jaren 70, 70 en 60 keer gelijk (19,9-23,7%).

Nederlandse clubs spelen dus significant minder vaak gelijk dan hun buitenlandse collega's. Of dat komt door meer strijd lust of door een lager spelniveau, valt uit deze cijfers natuurlijk niet af te leiden.

Opvallend is verder dat het midden van de ranglijst vrijwel vast ligt. Dit midden ligt strikt genomen tussen twee clubs in, vanwege het even aantal, 18 of 20. Niet alleen ligt het middelste puntenaantal van de diverse landen heel dicht bij elkaar, ook de seizoensvariatie per land is van de grootte-orde van één punt. Aan de top en bij de degradatiekandidaten vertoont de puntenverdeling nog wel wat variatie, maar in het midden geldt, ongeacht land en seizoen, de 'natuurwet' dat de middelste van de ranglijst tussen de 44 en 46 procent binnenhaalt van het maximaal aantal haalbare punten.



de bovenhoeken zijn voor de schutter ook moeilijker te raken. Dus vanuit je intuïtie redeneren levert hier weinig op. Gelukkig hebben we de statistiek. We verdelen het doelvlak in 3×2 sectoren: links/midden/rechts en boven/onder. Van de 197 schoten gingen er 18 over of naast, en omdat op het beeld vaak moeilijk te zien valt waar precies, gaan we er maar vanuit dat die gelijkelijk verdeeld waren over vijf van de zes vakken ($18/5 = 3,6$ per sector, want een bal midden-onder gaat per definitie nooit naast of over).

We krijgen dan de volgende tabel (de hoek is vanuit het perspectief van de schutter):

	raak	mis	percentage raak
linksboven	23	10,6	68
middenboven	12	7,6	61
rechtsboven	25	6,6	79
linksonder	27	15,6	63
middenonder	9	7	56
rechtsonder	31	22,6	58

Dat de succeskans middenonder het laagst is verbaast niet; dat is namelijk recht op de keeper af. Wel opvallend is het grote verschil tussen rechtsboven en rechtsonder, 79% tegen 58%. Maar nu is de vraag: betekent dit verschil echt iets? Intuïtief voel je aan, dat een heel klein verschil best puur toevallig kan zijn, bijvoorbeeld het verschil tussen rechtsonder (58%) en middenonder (56%). Maar hoe reken je zoiets uit?

Statistici stellen dan eerst een *nulhypothese* op, in dit geval zegt die: ‘het maakt niks uit op welke sector je schiet, de trefkans is altijd even groot’. Vervolgens bereken je de kans dat de waargenomen verschillen door toeval veroorzaakt zijn, alsof iemand met een dobbelsteen aan het gooien is geweest.

Eerst berekenen we het succespercentage voor een penalty als er geen verschil zou zijn tussen de sectoren. Dit is de som van alle treffers gedeeld door het totaal aantal penalty’s: $127/197 \approx 0,645$, ofwel 64,5 procent. Op ‘rechtsboven’ zijn $25 + 6,6 = 31,6$ penalty’s geschoten, waarvan dus $0,645 \times 31,6 \approx 20,4$ raak en 11,2 keer mis als de sector niets uit-

maakt. Rechtsonder zou dat zijn: $64,5\%$ van $53,6 = 34,6$ keer raak, en 19,0 keer mis.

We kunnen nu uitrekenen hoe groot de kans is dat je (afgerond) minstens 25 van 32 keer raak schiet (en dus hoogstens 7 keer mis) bij een trefkans van $127/197 \approx 0,645$. Let wel op de woorden *minstens* en *hoogstens*: je wilt niet de kans weten dat je *precies* 25 keer bij toeval raak schiet, maar de kans op een afwijking van de verwachte waarde (20) groter dan of gelijk aan 5. Wie iets van kansrekening weet, realiseert zich dat hier een binomiale kans moet worden uitgerekend:

$$\sum_{k=25}^{32} \binom{32}{k} p^k (1-p)^{32-k}$$

met $p = 127/197 \approx 0,645$. Deze som heeft acht termen. Met wat rekenwerk vind je dat deze kans gelijk is aan 0,073, ofwel 7,3 procent. Met een grafische rekenmachine is het antwoord heel snel gevonden: bij de TI-84 Plus gebruik je de optie `binomcdf(32,127/197,24)`; dit is het complement van de gezochte kans.

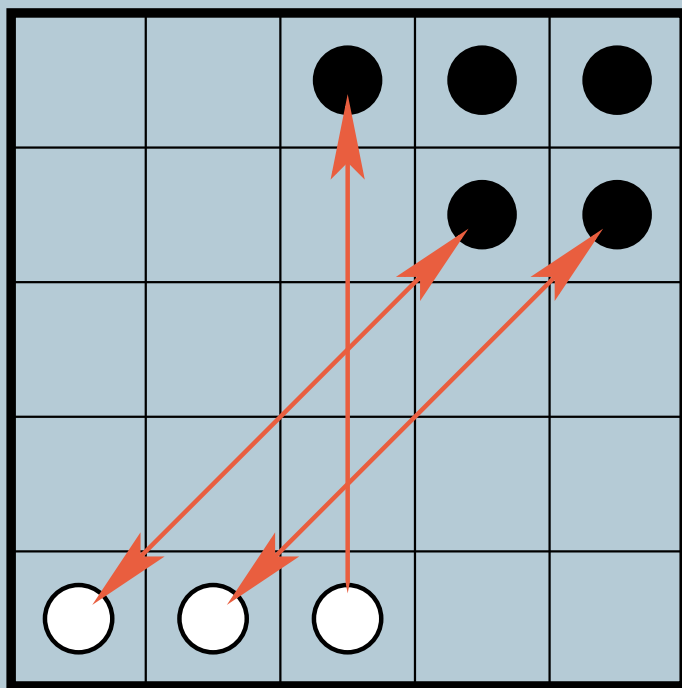
Met deze berekening hebben we gevonden dat er nog altijd een kans van ruim 7% is dat de nulhypothese *waar* is. Anders gezegd: de kans is 7% dat bij het volgende EK of WK penalty’s in de rechterbovenhoek net zo vaak mis gaan als in andere sectoren. In de sociale wetenschappen wordt vaak een grens van 5% gehanteerd om te spreken van een *significant* resultaat, en dat is hier dus net *niet* het geval. Dat betekent dat de nulhypothese *niet* wordt verworpen, zoals dat in de statistiek heet. Je mag dus *niet* concluderen dat het iets uitmaakt op welke sector je schiet (maar ook niet per se dat het niets uitmaakt; in feite trek je geen enkele conclusie).

Echter, over statistiek valt altijd te discussiëren: waarom zou je als Nederlandselftalsspeler die op de penaltystip staat, *niet* op de rechterbovenhoek mikken? De kans is 93% dat het werkelijk verschil maakt op welke hoek van het doel je mikt, en dan is de rechterbovenhoek de beste. Het klinkt ook plausibel: de meeste keepers zijn rechtshandig, en zullen dus net iets beter naar de bal gaan in de (voor de penaltynemer) linkerhoek. ■

Delen van dit artikel zijn eerder verschenen in *NWT-magazine*, februari 2009.

DRIE TEGEN VIJF

■ door Chris Zaal



Hoe het niet moet: er zijn twee diagonale conflictlijnen en één verticale conflictlijn. Dit is dus géén oplossing.

Drie tegen vijf lijkt een bordspel, maar het is in feite een puzzel die je in je eentje kunt oplossen. Je speelt het op een bord van vijf bij vijf vierkanten. Je hebt drie witte en vijf zwarte stenen. Het doel is de stenen zó op het bord te plaatsen, dat in elke horizontale, verticale of diagonale rij alleen maar stenen van *dezelfde* kleur staan.

Hoe het *niet* moet, zie je in bovenstaande figuur. In dit voorbeeld zijn er twee diagonale conflictlijnen en één verticale conflictlijn. Het vinden van een oplossing is moeilijker dan je op het eerste ge-

zicht zou denken: hoe je de zwarte en witte stenen ook plaatst, bijna altijd vallen ze elkaar aan.

AAN DE SLAG Wij hebben één oplossing gevonden (deze is in het kader onderaan deze pagina beschreven). Hoeveel oplossingen kun jij vinden? Hoeveel verschillende oplossingen bestaan er? Reacties kun je mailen naar post@pythagoras.nu.

Drie tegen vijf is bedacht door Ili Kaufmann uit Tel Aviv (Israël). Op haar website zijn nog veel meer puzzels te vinden: www.thinkinggames.com. ■

Oplossing: eerste rij ●●●, tweede rij ●●●, derde rij ●●●, vierde rij ●●●, vijfde rij ○○○

JOURNAAL

■ door Alex van den Brandhof

Grafieken tekenen met Google

Het was al langer mogelijk om Google te gebruiken als rekenmachine, en sinds vorige maand is het ook mogelijk om grafieken te tekenen met de zoekmachine.

'Studenten en wiskundefanaten hoeven alleen maar een functie in het Google-zoekveld te typen om een interactieve grafiek te zien', zegt Google in een blogpost. Je kunt in- en uitzoomen, en door de grafiek heen bewegen om alles in detail te bekijken. Ook worden de x - en y -waarden direct weergegeven wanneer je met de muis over de grafiek beweegt. Bovendien is het mogelijk om meerdere functies in te voeren, door ze te



scheiden met komma's. Hierboven zie je het resultaat van de zoekterm ' $\sqrt{x}$, $(x/2)^2$, $\ln(x)$, $\sin(\pi x/2)$ ' ($\sqrt{x}$ staat voor squareroot, ofwel vierkantswortel).

Een echt nieuwe toevoeging is de Google-plotter echter niet:

WolframAlpha, de prachtige 'antwoordmachine' waarover we in het juninummer van de vorige jaargang schreven, kan ook grafieken plotten, en geeft bovendien tal van andere eigenschappen van de ingevoerde functies.

10

Inzet ambulances kan efficiënter

Het Centrum Wiskunde & Informatica (CWI) in Amsterdam gaat nieuwe efficiëntere planningsmethodes ontwikkelen waarmee de kwaliteit en de doelmatigheid van de ambulancezorg in Nederland sterk kunnen worden verbeterd.

Jaarlijks rukken ambulances meer dan een miljoen keer uit. Voor levensbedreigend spoedvervoer wordt de eis gesteld dat in 95% van de gevallen er binnen 15 minuten een ambulance ter plaatse moet zijn. Om zulke korte aanrijtijden te realiseren is een uitgekiende planning noodzakelijk. De grote mate van onzekerheid die inherent is aan het plannen van ambulanceritten is hierin een sterk complicerende factor. Bestaande planningsmethodieken houden nauwelijks rekening met deze onzekere factoren. Daarom is grensverleggend onderzoek nodig naar het ontwikkelen van nieuwe planningsmethodes die robuust zijn tegen veranderingen van de omgevingsfactoren.

Rob van der Mei is hoogleraar toegepaste wiskunde aan de Vrije Universiteit en het Centrum Wiskunde & Informatica. Hij heeft 740.000 euro subsidie van Technologiestichting STW gekregen voor het project REPRO: *Van Reactieve naar Proactieve Planning van Ambulancediensten*. Om een goed functionerend 'dynamisch ambulance-management' te creëren, moeten diverse vragen beantwoord worden: hoe kunnen we de aantallen calls, afhankelijk van tijd en locatie, nauwkeurig voorspellen? Hoe kunnen we op de juiste wijze anticiperen en reageren op pieken in de vraag naar ambulanceritten? Hoeveel standplaatsen hebben we nodig en wat zijn de optimale locaties? Hoe kunnen we een geschikte personeelsplanning zodanig maken dat aan alle randvoorwaarden wordt voldaan?

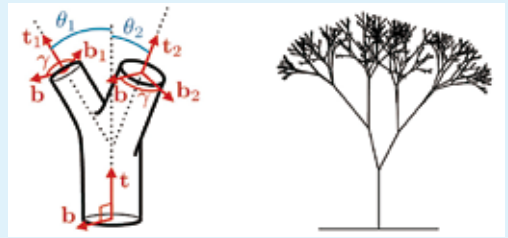
Da Vinci's boomobservatie onderzocht

Een boom groeit bijna altijd zodanig dat de totale dikte van de takken op een bepaalde hoogte gelijk is aan de dikte van de stam. Leonardo da Vinci merkte dat al op, maar waarom bomen zich aan deze vuistregel houden, was altijd onduidelijk. Een nieuwe studie geeft het antwoord: een specialist in de stromingsleer heeft ontdekt dat het verband houdt met de wind.

De eenvoudige maar verrassende vuistregel, voor het eerst waargenomen door Leonardo da Vinci 500 jaar geleden, geldt voor bijna alle soorten bomen. Grafische kunstenaars maken van deze regel dankbaar gebruik om realistische computergegenereerde bomen te tekenen.

De regel zegt dat als een boomstam zich splitst in twee takken, de totale doorsnede van die twee takken qua oppervlak even groot is als de doorsnede van de stam. En ook als die twee takken zich op hun beurt weer opsplitsen in twee dunnere takken, is de gezamenlijke oppervlakte van de doorsneden van die vier takken opnieuw gelijk aan de oppervlakte van de doorsnede van de stam. En ga zo maar door. Met andere woorden: als we een boom samenpersen tot één massief geheel, dan ontstaat er één grote cilindervorm.

In formulevorm zegt de regel van Da Vinci dat als een tak met diameter D splitst in een willekeurig aantal, zeg n , takken met diameters $d_1, d_2, \dots, d_n$, het volgende geldt: $D^2 = d_1^2 + d_2^2 + \dots + d_n^2$ – dit volgt uit de oppervlakteformule voor een cirkel ($O = \pi r^2$). In werkelijkheid zijn de exponenten die in deze formule voorkomen, niet altijd exact 2,



maar een waarde tussen 1,8 en 2,3. Dit varieert per soort boom en is afhankelijk van de vorm. Afgezien van deze kleine verschillen geldt de formule voor vrijwel alle bomen.

Biologen hebben lange tijd gedacht dat Da Vinci's formule te maken heeft met de manier waarop bomen water via hun wortels in zich opnemen en naar hun bladeren voeren. Maar de natuurkundige Christophe Eloy denkt aan iets anders. Hij gelooft niet dat het te maken heeft met de manier waarop de bladeren van water worden voorzien, maar dat het afhangt van de manier waarop de bladeren wind vangen als het hard waait.

Eloy maakte een wiskundig model waarbij hij bomen modelleert als *fractals*. Fractals zijn wiskundige figuren die zichzelf op steeds kleinere schaal herhalen – de meeste bomen hebben bij goede benadering een fractalstructuur. Eloys model werd op de proef gesteld in een virtuele windtunnel. Hij bepaalde wat de diameter van elke tak moet zijn, opdat de kans op het afbreken bij een hoge windkracht klein blijft. De simulatie bleek precies Da Vinci's regel op te leveren.

Wiskundigen als terroristen-identificeerders

Wiskundige methoden als speltheorie kunnen helpen bij het identificeren van de belangrijkste figuren en hun rangorde in terroristische netwerken. Het gebruik van die modellen kan zo leiden tot eerdere uitschakeling van die spilfiguren.

De tot nu toe gebruikte analyses richtten zich vooral op de structuur van de netwerken: ze bekeken bijvoorbeeld de hoeveelheid ontmoetingen van verdachten, om te bepalen wie de belangrijkste personen waren in een netwerk. Herbert Hamers, hoogleraar speltheorie aan de Universiteit van Tilburg, en zijn collega's Bart Husslage en Roy Lindelauf betrokken er in hun onderzoek ook andere, vaak persoonlijke, informatie over verdachten bij. Ze onderzochten gegevens van de casussen van terroristische

aanslagen van de Jemaah Islamiyah op Bali en van Al Qaida in de Verenigde Staten op 11 september 2001.

De wetenschappers verzamelden informatie op basis van andere, kwalitatieve, gegevens over de verdachten. Denk hierbij aan vragen als: bezochten zij bepaalde bijeenkomsten of plaatsen, en zo ja, wanneer en hoe vaak? Namen zij deel aan trainingskampen? Door dergelijke gegevens in een speltheoretisch model in te voeren, kwamen personen naar voren die in andere analyses, die geen gebruik maken van speltheorie, niet belangrijk leken. De Tilburgse onderzoekers pleiten daarom voor invoering en gebruik van de speltheorie voor het analyseren van terroristische netwerken.

Onlangs maakte ik een reis om de wereld in 30 dagen. De reis bestond, naast korte toeristische verblijven in de diverse steden, uit een aantal vluchten plus stukken met het openbaar vervoer (trein, bus, ferry). De tocht was de volgende: Amsterdam – trein – Londen – vliegen – Kaapstad – vliegen – Johannesburg – vliegen – Perth (Australië) – trein – Sydney – vliegen – Christchurch (Nieuw-Zeeland) – trein, bus, ferry – Auckland – vliegen – Hawaï – vliegen – Los Angeles (VS) – trein – Seattle – vliegen – Keflavik (IJsland) – vliegen – Amsterdam. Waarom mag deze reis met recht een 'reis om de wereld' genoemd worden?

■ door Jan Guichelaar

TOSTI AARDE

In *De reis om de wereld in tachtig dagen*, het bekende boek van Jules Verne, sluit de excentrieke Engelsman Phileas Fogg een weddenschap af dat hij, samen met zijn knecht Passepartout, in 80 dagen de wereld rond kan trekken. Hij slaagt daarin. Maar laten we zijn tocht, geen vliegtuigen en bijna alles met treinen en schepen, eens bekijken: Londen (Engeland) – Suez (Egypte) [7 dagen], Suez – Bombay (het huidige Mumbai in India) [13 dagen], Bombay – Calcutta (het huidige Kolkata in India) [3 dagen], Calcutta – Hong Kong (China) [13 dagen], Hong Kong – Yokohama (Japan) [6 dagen], Yokohama – San Francisco (VS) [22 dagen], San Francisco – New York [7 dagen], New York – Londen [9 dagen].

12 Met een blik op de wereldkaart, zie figuur 1, zie je dat het gehele traject zich op het noordelijk halfrond bevindt. Is dat dan wel echt een reis om de wereld? Eigenlijk niet.

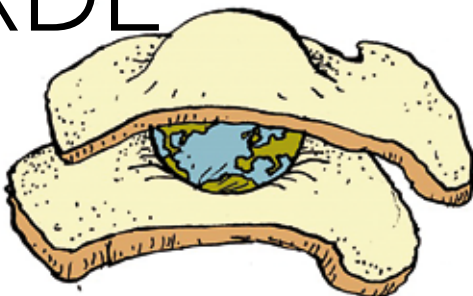
EEN GOEDE DEFINITIE Hoe kunnen we een reis om de wereld goed definiëren? De reis moet natuurlijk een gesloten kromme zijn op de aardbol. Is alle lengtegraden snijden voldoende? Nee. Dat kan ook door vlak bij de Noordpool een rondje te lopen om de pool.

Een tocht van ten minste 40.000 kilometer, de omtrek van de aarde? Nee, want dan kun je ook binnen Nederland een groot aantal keren rond het IJsselmeer rijden.

Twee antipodenpunten aandoen? Twee plaatsen op aarde zijn elkaars *antipoden* (tegenvoeters) als hun verbindingslijn door het middelpunt van de aarde loopt. Nee, want dan kun je wel op de Noordpool beginnen en via de nulmeridiaan door Greenwich naar de Zuidpool reizen en dan weer via dezelfde lijn terug.

Wat is dan wel een geschikte definitie?

In ieder geval is een tocht exact langs een groot-



Abbeiding: www.missionexplore.net

cirkel een reis om de wereld. Een grootcirkel is een doorsnede van een vlak door het middelpunt van de aarde met het aardoppervlak. De kortste afstand tussen twee punten op het aardoppervlak via het aardoppervlak is de afstand via een grootcirkel (er zijn twee stukken, dus het kleinste). Twee belangrijke grootcirkels zijn de evenaar (breedte 0 graden) en de lengtecirkel door de polen en Greenwich (de helft lengte 0 graden en de andere helft lengte 180 graden).

Vliegtuigen volgen over lange routes zoveel mogelijk een grootcirkel, maar reizend over land is het natuurlijk buitengewoon moeilijk precies een grootcirkel te volgen. Dus moeten we ook een definitie zien te vinden die voor wat grilliger banen om de aarde goed is.

Een mooie definitie lijkt (met dank aan dr. Aart de Vos): *een reis om de wereld is een gesloten kromme op het aardoppervlak die het aardoppervlak verdeelt in twee delen met gelijke oppervlaktes*. In het vervolg noemen we dit 'een reis volgens een wereldkromme'.

ANTIPODENPAAR Als we een wereldkromme volgen, doen we minstens twee antipodenpunten aan. We kunnen dit als volgt bewijzen. Teken de wereldkromme op de aarde. Neem van elk punt hiervan het antipodenpunt. Dan hebben we natuurlijk een tweede wereldkromme, die vanwege de symmetrie het aardoppervlak dus ook in twee gelijke delen verdeelt. Stel nu eens dat de twee wereldkrommen geen punt gemeenschappelijk heb-

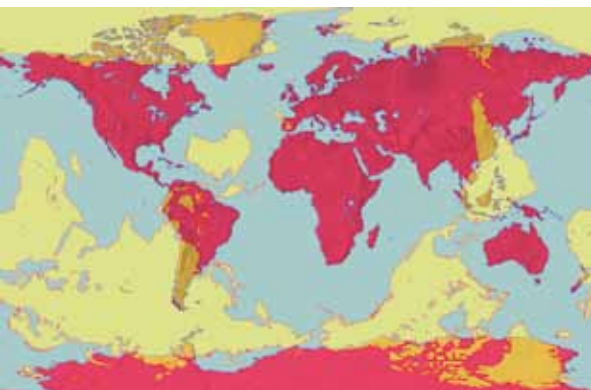


Figuur 1 De reis om de wereld in tachtig dagen. © Wikimedia Commons

ben. Dan ligt de tweede kromme geheel in een van de helften bepaald door de eerste wereldkromme. Maar dan omvat de tweede kromme dus een stuk aarde kleiner dan de helft (en een ander deel groter dan de helft). De tegenspraak leidt tot de conclusie dat er gemeenschappelijke punten moeten zijn.

Dan is er dus een punt A op de eerste wereldkromme waarvan het antipodenpunt A' (op de tweede kromme) ook op de eerste kromme ligt. Dus op de eerste wereldkromme zijn A en A' een antipodenpaar.

LAND EN ZEE Als we onderscheid maken tussen punten die op land, en punten die op zee liggen, zijn er drie soorten antipodenparen: water-water, land-land en land-water. Ongeveer 30 procent van het aardoppervlak is land, 70 procent is zee. Over korte afstanden bekeken is het natuurlijk verre van toeval of twee punten allebei op zee, danwel allebei op land liggen. Anderzijds zou het juist raar zijn, als punten die een halve aardbol van elkaar af liggen van elkaar 'weten' of ze op land of op zee liggen.



Figuur 2 Wereldkaart met daarop de antipode van elk punt aangegeven. © Wikimedia Commons

Wat zou daarom je schatting zijn, hoeveel procent van het aardoppervlak bestaat uit land-land antipodenparen? En hoeveel procent bestaat uit zee-zee antipodenparen?

Om erachter te komen welke punten op land een antipode op land hebben, passen we een fraaie truc toe: we bedekken een globe met zijn eigen spiegelbeeld. Nu is dat met een globe in de praktijk wat lastig, maar met een vlakke wereldkaart kan het ook: spiegel die in de evenaar en verschuif hem over de halve breedte van het origineel, bijvoorbeeld naar rechts. Het stuk dat over de rand schuift, knippen we af en leggen we terug op het links opgevallen stuk.

Vind je dit niet vreemd? Een combinatie van een spiegeling in de evenaar en een verschuiving in de richting van de evenaar (in twee dimensies) levert hetzelfde op als een enkele puntspiegeling (in drie dimensies)! Overal waar nu land over land ligt, hebben we land-land antipodenparen.

Je ziet nu dat Nederland geen antipoden op land heeft, Spanje is het dichtstbijzijnde land dat ze wel heeft, in Nieuw-Zeeland. Verder ligt het gespiegelde Australië geheel in de Atlantische Oceaan. Het onderste stuk van Zuid-Amerika steekt China in.

Klopt je schatting ongeveer met wat je op de kaart ziet? In een volgend artikel zullen we terugkomen op het schatten/berekenen van de grootte van de antipodengebieden en op deze bijzondere spiegeling.

TOSTI AARDE Met dank aan mobiele telefoons met gps-ontvangers, kun je tegenwoordig een 'tosti aarde' maken (originele naam: *earth sandwich*), door in de punten van een land-land antipodenpaar met een vriend aan de andere kant gelijktijdig een boterham op de grond te leggen, een geinig ideeetje uit 2006 van talkshowhost Ze Frank (zie www.zefrank.com/sandwich). ■

Voor de prijsvraag van dit jaar hebben we ons laten inspireren door *cellulaire automaten*. Het eerste op dit principe gebaseerde spel is John Conways *Game of Life* uit 1970. Een bekende variant uit 1986 is de mier van Langton, een beestje dat zich volgens een aantal regels over een stuk ruitjespapier beweegt. Wij ontwikkelden twee varianten die interessante uitdagingen voor de Pythagoraslezers bevatten: *Blokkerende botsauto's* en *De dwangmatige doorrijder*.

■ door Matthijs Coster en Arnout Jaspers

BLOKKERENDE BOTSAUTO'S EN DE DWANGMATIGE DOORRIJDER

14

SPEL 1: BLOKKERENDE BOTSAUTO'S

Dit is een spel voor twee 'chauffeurs' op een weggennet van tegels die aan de ene zijde blauw zijn, en aan de andere zijde groen. De wegen op de tegels zijn zo aangelegd, dat een auto op een blauwe tegel alleen rechtdoor kan of linksaf, op een groene tegel kan hij rechtdoor of rechtsaf. Zodra je met je auto van een tegel af rijdt, moet je die tegel om draaien: blauw wordt groen, groen wordt blauw.

Het speelveld is een 4×4 tegelvloer; een bouwplaat vind je op pagina 16. De chauffeur van de ene auto mag aan het begin de kleur van de bovenste acht tegels bepalen, de chauffeur van de andere auto die van de onderste acht tegels.

Daarna kiest elke chauffeur een beginpositie voor zijn auto op een tegel naar keuze. Op elke tegel zijn vier beginposities mogelijk, namelijk aan de randen waar de hoofdwegen beginnen (spookrijden mag uiteraard niet).

De auto's gaan nu rijden. Dit betekent dat de chauffeurs om de beurt een zet doen, die bestaat uit het verplaatsen van de eigen auto naar een van de,

volgens de pijltjes bereikbare, buurtegels.

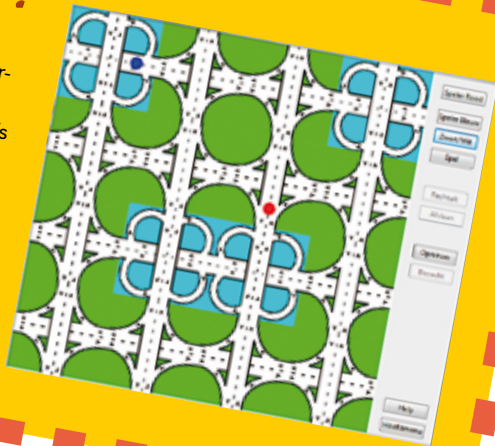
Het doel van het spel is om met je auto op alle 16 tegels te komen (je mag meer dan één keer op dezelfde tegel komen). De eerste chauffeur die dat lukt is de winnaar. Echter, chauffeurs kunnen elkaar blokkeren: er mogen nooit twee auto's op één tegel komen. Daardoor kun je als chauffeur in een positie terechtkomen dat je nergens meer heen kunt als je aan zet bent, en dan heb je verloren.

Je kunt dit spel eerst een paar keer spelen met een vriend of klasgenoot zonder je al te druk te maken over de beste strategie. Behalve de 16 losse blauw-groene tegeltjes, heb je ook nog 2 pionnen nodig voor de auto's, en iets waarmee jij en je tegenstander markeren waar je al geweest bent, bijvoorbeeld kleine fiches in twee kleuren. Of je maakt op de kopieermachine meerdere sets tegels en vinkt tijdens het spel met een pen de tegels af waar je al geweest bent.

Maar je kunt het spel ook op de computer spelen. Ga daarvoor naar onze site www.pythagoras.nu en klik in het linkermenu op 'Prijsvraag'.

Download nu!

Blokkerende botsauto's en De dwangmatige doorrijder zijn ook als computer-spel te downloaden. Speciaal voor de prijsvraag ontwikkelden we programma's waarmee je het spel kunt spelen zonder dat je tegels hoeft uit te knippen of je zetten te markeren. Je inzending op de diverse uitdagingen mag je ook illustreren met een of meer screendumps van het programma. Ga naar www.pythagoras.nu en klik in het linkermenu op 'Prijsvraag'.



Uitdaging 1: bedenk een goede, zo mogelijk zelfs winnende strategie.

Zo'n strategie zal dus bestaan uit een beginpositie (acht tegelkleuren voor jouw helft van het speelveld plus beginstand auto) en strategische regels om het de tegenstander lastig te maken en zelf zoveel mogelijk tegels aan te doen. Uiteraard ga je er altijd van uit, dat je tegenstander zich zo goed mogelijk verdedigt, dus jou zoveel mogelijk dwars zit.

Is er een winnende strategie voor de speler die begint, of misschien juist voor de speler die niet begint? Is beginnen sowieso een voor- of een nadeel? Zijn er beginzetten die altijd sterker zijn dan andere, ongeacht de beginpositie van de tegels?

SPEL 2: DE DWANGMATIGE DOORRIJDER

De tweede uitdaging speelt zich ook af op een wegennet, maar je speelt alleen, en op andere tegels; een bouwplaat vind je op pagina 17. Op een rode tegel kan je alleen maar linksaf, op een paarse alleen maar rechtsaf. Opnieuw geldt de regel, dat je de tegel waar je van af rijdt moet omdraaien, zodat die van kleur wisselt. Als je nu met je auto gaat rijden, heb je geen keus meer: je route wordt volledig bepaald door je startpunt en de manier waarop de tegels gelegd zijn.

Uitdaging 2a: vind de langst mogelijke route op een 4×4 tegelvloer.

Als warming-up zou je eerst kunnen bekijken hoeveel tegels je kan bereiken met een route die zichzelf niet doorsnijdt. Uiteraard kan die route niet langer dan 16 tegels zijn, maar is 16 wel haalbaar?

En welke startpunten zijn dan het gunstigst?

De regel dat je een tegel waar je net vanaf rijdt moet omdraaien, doet er in dit geval niet toe, aangezien je toch niet twee keer op dezelfde tegel mag komen. Maar als de route zichzelf wel mag doorsnijden – dus als je meerdere keren over dezelfde tegel mag rijden – kan hij zeker langer worden dan 16 tegels.

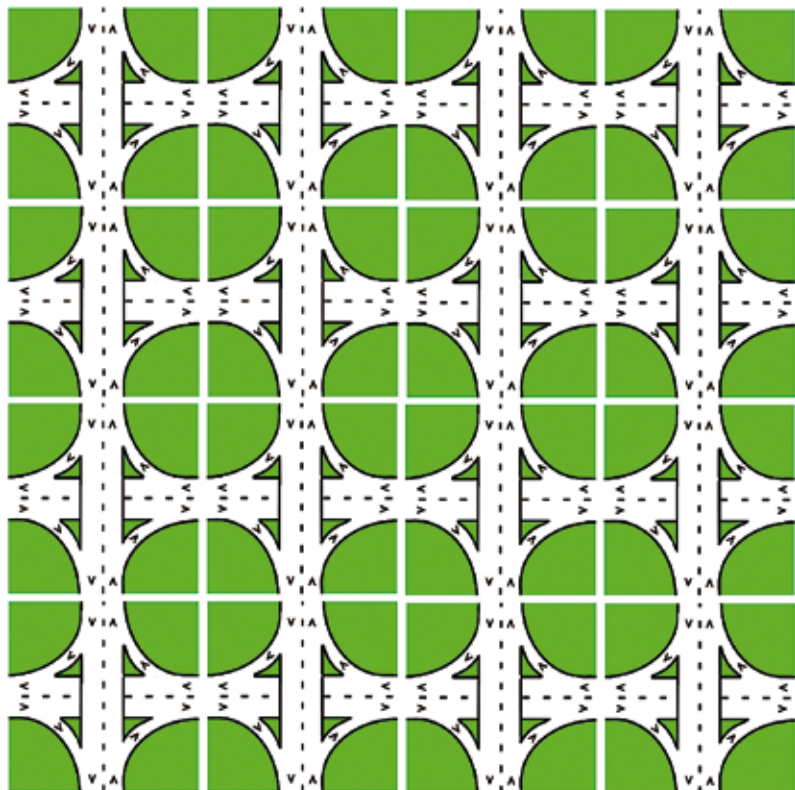
Deze uitdaging 2a is speciaal bedoeld voor onderbouwleerlingen.

Uitdaging 2b: vind de langst mogelijke route die zichzelf niet doorsnijdt op een $n \times n$ tegelvloer.

Het is niet verboden hier met de computer aan de slag te gaan, maar misschien is er toch een simpele, met de hand toepasbare set regels te bedenken die voor een tegelvloer van willekeurige grootte de beste oplossing produceert. Het computerprogramma dat je van onze website kunt downloaden is zeker hier erg handig, want daarmee kan je het speelveld met één muisklik groter dan 4×4 maken.

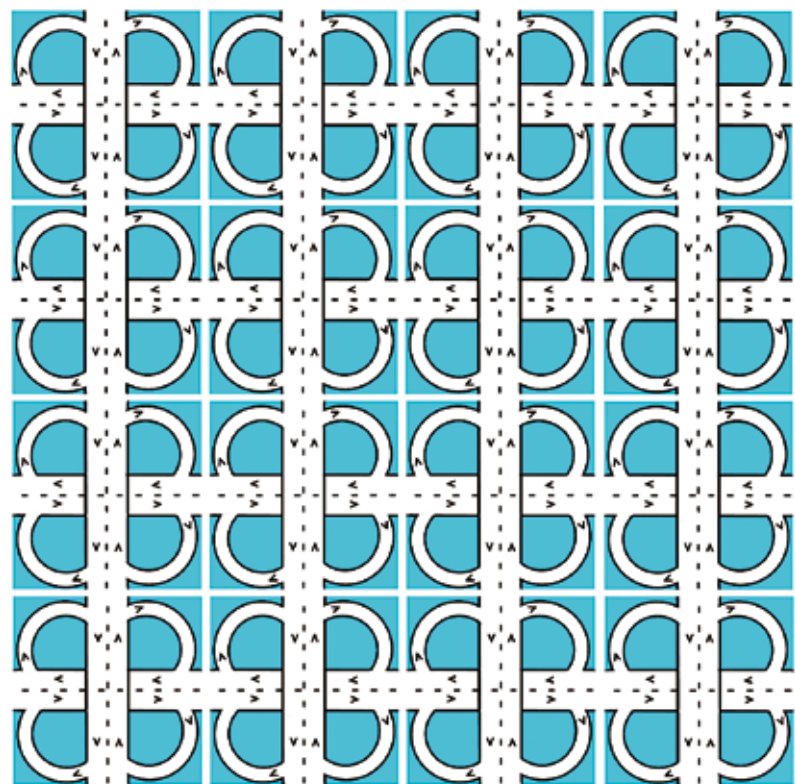
Uitdaging 2c: vind de langst mogelijke route op een $n \times n$ tegelvloer.

Als de route zichzelf wel mag doorsnijden, zijn er lange routes mogelijk. Toch is bewezen dat, hoe groot de tegelvloer ook is en waar je ook van start gaat, je er ooit van af zult rijden. Deze uitdaging 2c is waarschijnlijk vooral geschikt voor programmeurs, maar we zijn benieuwd naar verrassende, esthetisch aansprekende patronen en wetmatigheden.



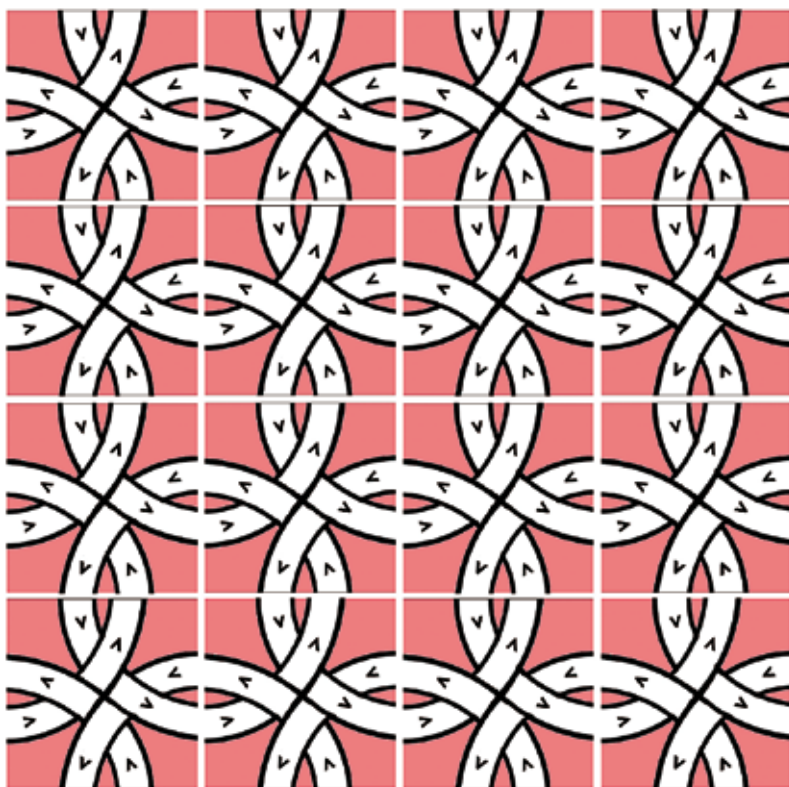
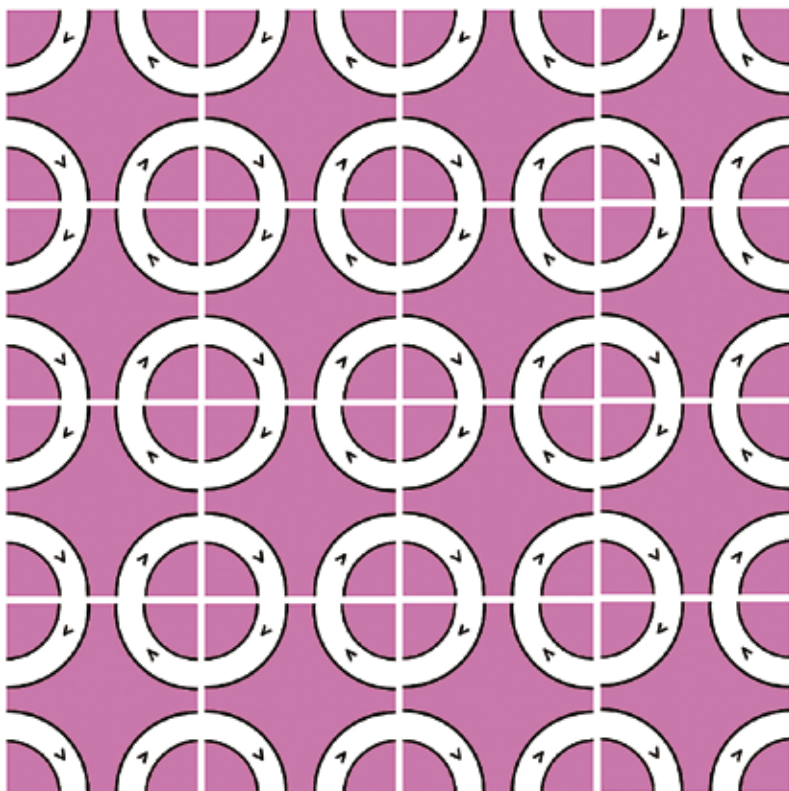
Bouw

Kopieer deze twee p
kopieermachine of d
www.pythagoras.nu
een kleurenprinter. K
uit. Plak het groene
weerszijden op een s
dat ze precies tegen
het beplakte karton
4 x 4 stukken. Je he
groen/blauwe tegels
Blokkerende botsau
Doe hetzelfde met h
dat levert de 16 teg
dwangmatige doorri



platen

pagina's op een kleuren-
download de pagina's van
en maak een print op
Knip de tegelvellen
en blauwe vel aan
stuk dun karton, zorg
over elkaar zitten. Knip
langs de witte lijnen in
bt dan 16 identieke
s, die nodig zijn om
to's te spelen.
et paarse en rode vel,
els op waarmee je De
ijder speelt.



Dit kun je winnen



Spiraculum



Kogelspiraal

Uitdaging 3: vind het mooiste patroon.

Dit is een vrije opdracht, waarin we je uitnodigen met beide spellen naar eigen inzicht aan de slag te gaan.

Bij *Blokkerende botsauto's* kun je zoeken naar interessante stellingen, net als bij schaken, van het type 'de ene auto zet de andere in drie zetten klem'. Of je verandert het doel van het spel, bijvoorbeeld 'degene die het eerst in alle hoekpunten is geweest wint' en probeert daarvoor de beste strategie te vinden.

Bij *De dwangmatige doorrijder* kun je op zoek

gaan naar routes met een mooie, regelmatige vorm, of juist naar routes die zich chaotisch ontwikkelen. Misschien valt er zelfs wel iets zinnigs te zeggen over routes op een oneindig groot speelveld. Mogelijk levert sleutelen aan het speelveld verrassende effecten op. Wat verandert er op een niet-vierkant speelveld? Wat gebeurt er als je de rechterrاند van het speelveld laat aansluiten op de linkerrand en de onderkant op de bovenkant (zodat de auto nooit meer van het speelveld af rijdt)?

In elk van de categorieën zijn fraaie prijzen te winnen. De hoofdprijzen zie je op de foto's. Voor de beste klassikale inzending stellen wij beschikbaar: *Newton's Cradle* en vijf exemplaren van *De Pythagoras Code*, inclusief een dvd met de eerste vijftig jaargangen *Pythagoras*. Daarnaast zijn er nog diverse kleinere prijzen die de jury naar eigen inzicht verdeelt over de diverse categorieën. De jury reikt alleen prijzen uit in een categorie als er naar hun oordeel inzendingen van voldoende kwaliteit binnenkomen.



Ludea Aero



Grashuis-driehoek



Philippi Plex

INZENDEN

Stuur je inzending naar prijsvraag@pythagoras.nu of eventueel per analoge post naar

K.P. Hart
Faculteit EWI
TU Delft
Postbus 5031
2600 GA Delft

Noteer in de linkerbovenhoek van de envelop 'Pythagoras prijsvraag'.

Vermeld je naam, adres, telefoonnummer, leeftijd en, als je scholier bent, ook je school en je klas. Je kunt ook met je hele klas meedoen; vermeld in dat geval ook de naam van de wiskundedocent. Van programmeurs verwachten we uiteraard dat zij hun programma opsturen.

Je inzending moet bij ons binnen zijn vóór **15 april 2012**. Veel succes! ■

Je kunt vandaag de dag geen dagblad open-slaan, of je vindt er wel een sudoku in. In deze derde aflevering van onze serie over ingevulde sudoku's daait het om magie.

■ door Aad Thoen en Aad van de Wetering

SUDOKU'S EN MAGIE

In de vorige aflevering vroegen we om een sudoku waarin maar liefst vijf magische 3×3 vierkanten staan. Het kan écht, voor een voorbeeld zie figuur 1; deze is bovendien draaisymmetrisch!

Deze aflevering is meer een diavoorstelling dan een uiteenzetting. We laten een aantal (half)magische vierkanten en ruiten zien, variërend van 4×4 tot en met 7×7 . Halfmagisch wil zeggen, dat de diagonalen niet hoeven op te tellen tot de magische som van de rijen en kolommen.

Figuur 2 toont een 5×5 magisch vierkant met som 25. Magische vierkanten kunnen ook in ruitvorm opduiken, zie figuur 3 (4×4 magische ruit) en figuur 4 (5×5). Twee van die magische ruiten kun je ook combineren: figuur 5 bevat een 4×4 én een 5×5 magische ruit. Figuur 6 doet er nog een schepje bovenop: een trioetje van drie magische ruiten, let wel dat op de rand cijferherhaling optreedt. Als we overlapping toestaan, dan kunnen twee magische 4×4 vierkanten fraai gecombineerd worden, zie figuur 7. Tot slot van deze opsomming zie je in figuur 8 een halfmagisch 7×7 vierkant met som 35, de 3×3 kern ervan is bovendien magisch.

De hier getoonde ruiten zijn een voorproefje voor het onderwerp van de volgende aflevering: *diagonalen*.

Wie zich wil wagen aan een magische puzzel kan met figuur 9 aan de slag. Voor een unieke oplossing heb je genoeg aan de volgende eisen:

- de diagonalen bevatten ook de cijfers 1 t/m 9;
- de vakken linksboven en rechtsonder zijn halfmagisch met som 15;
- het 5×5 vierkant is magisch met som 25.

De oplossing staat op pagina 33. ■

3	8	4	5	1	2	7	6	9
2	7	6	3	8	9	5	1	4
9	5	1	7	6	4	3	8	2
4	3	8	2	7	6	1	9	5
7	6	2	9	5	1	8	4	3
5	1	9	4	3	8	2	7	6
8	2	7	6	4	3	9	5	1
6	9	5	1	2	7	4	3	8
1	4	3	8	9	5	6	2	7

Figuur 1 Vijf magische 3×3 vierkanten in één sudoku

7	9	6	8	4	3	1	5	2
3	1	4	5	2	7	9	6	8
5	2	8	9	1	6	3	7	4
4	7	5	6	3	9	8	2	1
1	6	3	2	5	8	7	4	9
9	8	2	1	7	4	5	3	6
6	3	7	4	9	1	2	8	5
2	4	1	3	8	5	6	9	7
8	5	9	7	6	2	4	1	3

Figuur 4 Een 5×5 magische ruit

2	5	9	4	1	6	8	7	3
3	4	1	7	8	9	2	5	6
6	7	8	2	3	5	1	4	9
5	6	7	3	4	1	9	8	2
9	3	4	8	5	2	7	6	1
8	1	2	9	6	7	4	3	5
4	8	5	1	2	3	6	9	7
1	9	6	5	7	8	3	2	4
7	2	3	6	9	4	5	1	8

Figuur 7 Twee magische 4×4 vierkanten

1	5	2	3	4	6	9	7	8
7	6	8	5	9	2	1	3	4
4	9	3	7	8	1	6	2	5
8	4	6	2	3	9	5	1	7
9	1	7	6	5	4	3	8	2
3	2	5	1	7	8	4	9	6
5	8	4	9	2	3	7	6	1
6	7	9	8	1	5	2	4	3
2	3	1	4	6	7	8	5	9

Figuur 2 Een 5×5 magisch vierkant

7	8	6	3	2	5	4	1	9
2	5	9	7	1	4	3	8	6
4	1	3	9	6	8	7	5	2
1	9	7	8	3	6	2	4	5
5	3	2	1	4	7	6	9	8
6	4	8	5	9	2	1	3	7
8	6	1	2	5	3	9	7	4
9	2	5	4	7	1	8	6	3
3	7	4	6	8	9	5	2	1

Figuur 3 Een 4×4 magische ruit

3	5	8	1	2	7	6	9	4
1	4	9	5	6	8	7	3	2
7	2	6	9	3	4	5	1	8
9	8	2	7	1	6	3	4	5
4	3	1	8	5	2	9	7	6
5	6	7	4	9	3	8	2	1
2	9	5	6	7	1	4	8	3
8	7	3	2	4	5	1	6	9
6	1	4	3	8	9	2	5	7

Figuur 5 4×4 en 5×5 magische ruiten

8	2	3	6	1	9	7	5	4
4	9	5	8	7	3	2	1	6
6	1	7	4	2	5	9	8	3
2	8	6	9	4	7	1	3	5
1	3	4	2	5	8	6	7	9
5	7	9	3	6	1	4	2	8
7	4	1	5	8	6	3	9	2
9	6	8	7	3	2	5	4	1
3	5	2	1	9	4	8	6	7

Figuur 6 Drie-nesting

2	8	3	1	6	9	7	4	5
4	5	1	7	8	3	2	9	6
9	7	6	5	2	4	8	3	1
3	9	5	8	1	6	4	2	7
1	4	2	3	5	7	6	8	9
7	6	8	4	9	2	5	1	3
8	1	4	6	3	5	9	7	2
6	3	9	2	7	8	1	5	4
5	2	7	9	4	1	3	6	8

Figuur 8 Halfmagisch 7 × 7 vierkant

[illegible]

Figuur 9 Magische puzzel

Het eerste wat je op school leert, is rekenen met gehele getallen, want dat is het makkelijkst. Daarna komt pas het rekenen met breuken, dan komen de irrationale getallen (zoals $\sqrt{2}$, $\log 5$, π en e). En als je Wiskunde D in je pakket hebt, maak je zelfs kennis met complexe getallen. Maar er is een tak van de wiskunde waar de beperking tot gehele getallen de zaak juist veel moeilijker maakt dan alle getallen toelaten, namelijk de diophantische vergelijkingen. In dit artikel spitten we één voorbeeld uit.

■ door Matthijs Coster

DE BOOM VAN MARKOV





De vergelijking $x^7 - y^3 = 3$ ziet er simpel uit, en in zekere zin is hij dat ook. Je kunt zonder problemen de grafiek van $y = \sqrt[3]{x^7 - 3}$ tekenen, de afgeleide uitrekenen en de nulpunten bepalen. Maar als je vraagt: voor welke *gehele* getallen klopt deze vergelijking, dan wordt hij ineens heel moeilijk. Er is één oplossing bekend, namelijk het paar $(x, y) = (2, 5)$, maar niemand weet of er nog meer zijn.

Een vergelijking waarbij je alleen maar geheel-tallige oplossingen toelaat, heet een *diophantische vergelijking*, naar de Oude Griek Diophantus die dit soort problemen al bestudeerde. Een beroemde diophantische vergelijking met drie variabelen is $x^n + y^n = z^n$, met n een vast gekozen natuurlijk getal. Voor $n = 2$ zijn er oneindig veel oplossingen (de *pythagoreïsche drietallen*), maar voor elke n groter dan 2 zijn er helemaal geen oplossingen. Dit is de fameuze Laatste Stelling van Fermat, die na eeuwen onderzoek in 1995 eindelijk bewezen werd door Andrew Wiles.

In dit artikel bekijken we een wat minder bekende diophantische vergelijking met drie variabelen:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz. \quad (*)$$

De verzameling van al deze oplossingen kun je weergeven als een *oppervlak* in drie dimensies (vergelijk: de oplossingen van een vergelijking met alleen x en y , bijvoorbeeld $y = 3x + 2$, kun je weer-geven als een lijn in twee dimensies, ofwel een gewone grafiek), zie figuur 1.

De Russische wiskundige Andrei Andreyevich Markov (1856-1922) is vooral bekend om zijn werk in de kansrekening (begrippen als Markovketen en Markovproces zijn naar hem vernoemd), maar vooral in zijn jonge jaren deed hij ook onderzoek op andere terreinen. In 1879 bestudeerde hij bovenstaande diophantische vergelijking, die bijzonder is, omdat Markov een efficiënte methode vond om onbepoort veel geheeltallige oplossingen te vinden.

DE METHODE VAN MARKOV Van vergelijking (*) zie je direct een eerste oplossing, namelijk $(x, y, z) = (0, 0, 0)$. Als één van de waarden x, y, z ongelijk aan 0 wordt, dan moet het linkerlid positief zijn. Dat betekent (omdat dan ook het rechterlid ongelijk aan 0 is) dat x, y en z alle drie ongelijk

aan 0 moeten zijn. We zien nog een oplossing, namelijk $(x, y, z) = (1, 1, 1)$. Nu volgen nog drie oplossingen door simpelweg twee van de drie waarden te vervangen door hun tegengestelde: $(1, -1, -1)$, $(-1, 1, -1)$ en $(-1, -1, 1)$. Hebben we hiermee alle oplossingen gevonden? Als je hier eerst zelf over wilt nadenken, lees dan nog niet verder.

Als we voor y en z de waarde 1 invullen in vergelijking (*), dan krijgen we de vergelijking

$$x^2 - 3x + 2 = 0.$$

We kunnen het linkerlid van deze vergelijking ontbinden in factoren en vinden $(x - 1)(x - 2) = 0$. Klaarblijkelijk voldoet ook $x = 2$. En inderdaad is $(x, y, z) = (2, 1, 1)$ ook een oplossing van (*). Maar dan zijn $(1, 2, 1)$ en $(1, 1, 2)$ ook oplossingen. Bovendien zijn er negen geheeltallige oplossingen met negatieve coördinaten te vinden.

We vullen nu $x = 2$ en $y = 1$ in in vergelijking (*). We krijgen dan

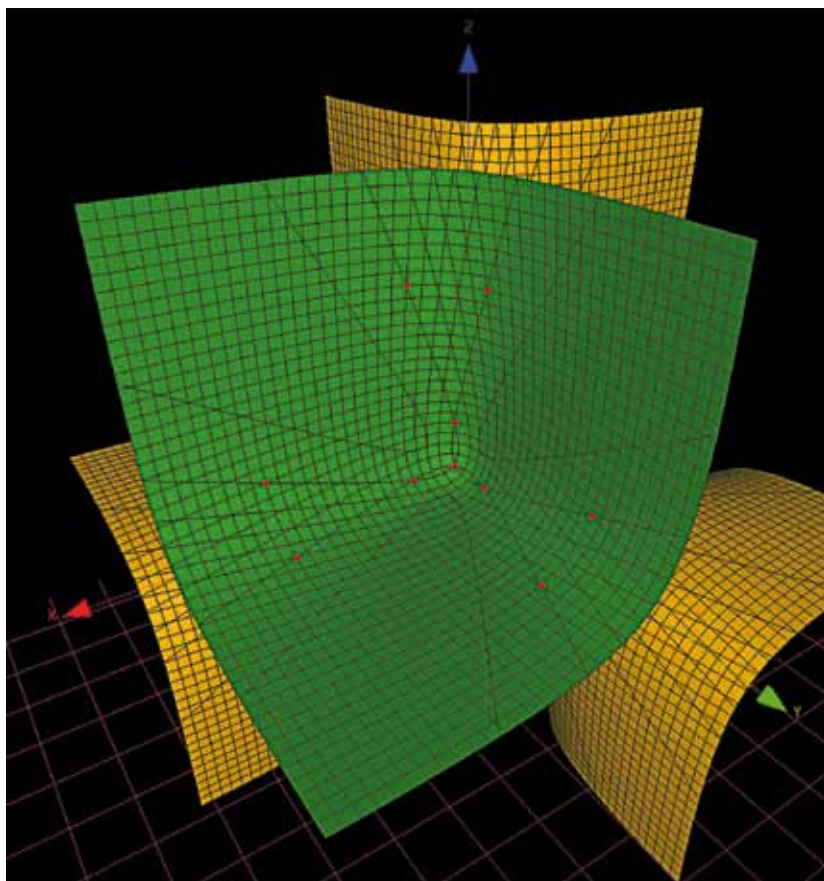
$$z^2 - 6z + 5 = 0,$$

ofwel $(z - 1)(z - 5) = 0$. Kennelijk voldoet $(x, y, z) = (2, 1, 5)$ ook en daarmee ook $(1, 2, 5)$, $(1, 5, 2)$, $(2, 5, 1)$, $(5, 1, 2)$ en $(5, 2, 1)$, en tevens achttien oplossingen met negatieve waarden.

Laten we vanaf nu eisen dat x, y en z allemaal positief zijn en dat bovendien geldt dat $x \leq y \leq z$. Op de vraag welke gehele oplossingen voldoen aan (*) hebben we gevonden $(1, 1, 1)$, $(1, 1, 2)$ en $(1, 2, 5)$. Er zijn echter nog veel meer oplossingen. Als (A, B, C) een reeds gevonden oplossing is met $0 < A \leq B \leq C$, dan kun je A en B invullen voor x respectievelijk y in (*). Je krijgt dan een vierkantsvergelijking in z . Eén van de oplossingen van deze vierkantsvergelijking is C . De andere oplossing is $3AB - C$. Om dit in te zien, schrijven we de vierkantsvergelijking uit:

$$z^2 - 3ABz + A^2 + B^2 = 0.$$

We weten dat $z = C$ een oplossing is van deze vergelijking, dus $z^2 - 3ABz + A^2 + B^2 = (z - C)(z - D) = 0$, voor een zekere waarde van D . Maar dan moeten de coëfficiënten van z in het linker- en rechterlid



Figuur 1 Het oppervlak van de vergelijking $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$ bestaat (naast $(0, 0, 0)$) uit vier verschillende delen. Met rood zijn de punten $(1, 1, 1)$, $(1, 1, 2)$, $(2, 1, 1)$, $(1, 1, 2)$, $(1, 2, 5)$, $(2, 1, 5)$, $(1, 5, 2)$, $(2, 5, 1)$, $(5, 1, 2)$ en $(5, 2, 1)$ aangegeven.

gelijk zijn. We vinden $-3AB = -C - D$, ofwel $D = 3AB - C$.

Als (A, B, C) een reeds gevonden oplossing is, dan vind je volgens de hierboven geschreven methode tevens de oplossing $(A, B, 3AB - C)$. Maar je kunt ook A en C ongewijzigd laten, dan vind je de oplossing $(A, 3AC - B, C)$. Ten slotte vind je met B en C de oplossing $(3BC - A, B, C)$.

Welke oplossingen vinden we uitgaande van $(1, 2, 5)$? Als we 1 en 2 intact laten, dan vinden we $(1, 2, 1)$. Dat is geen nieuwe oplossing. Als we 1 en 5 intact laten, dan vinden we $(1, 5, 13)$ en als we 2 en 5 intact laten, dan vinden we $(29, 2, 5)$. Uiteraard moeten we de coördinaten nog van klein naar groot plaatsen, dan hebben we de nieuwe oplossingen $(1, 5, 13)$ en $(2, 5, 29)$. Kun je zelf nog een aantal oplossingen uitschrijven?

Zie je hoe je alle oplossingen kunt vinden uitgaande van $(1, 2, 5)$? Je kunt een boomstructuur

maken, zoals de illustratie op pagina 22. De oplossing $(1, 1, 1)$ is de 'wortel' van de boom. Vervolgens ga je van beneden naar boven, volgens het volgende principe. Steeds als je een stap naar boven gaat, dan kun je links of rechts aanhouden en krijg je twee nieuwe oplossingen. Als je links aanhoudt, dan vind je vanuit (A, B, C) de oplossing $(A, C, 3AC - B)$. Als je rechts aanhoudt, dan vind je de oplossing $(B, C, 3BC - A)$.

Herken je de getallen 1, 2, 5, 13, 34, 89, ... geheel links? Dit is een deel van de *rij van Fibonacci* (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...; je krijgt een volgend Fibonacci-getal door de twee voorafgaande Fibonacci-getallen bij elkaar op te tellen). Het valt nog niet mee om dat aan te tonen!

BEKEND EN ONBEKEND Wat is er bekend over de oplossingen van vergelijking (*)? Als (A, B, C) een oplossing is, dan geldt dat A, B en C



óf alle drie oneven zijn, óf dat één van de drie even is. De oneven waarden zijn altijd een viervoud plus 1, de even waarden zijn een 32-voud plus 2. Je kunt op grond van alle oplossingen een Markovrij samenstellen met getallen die ergens als coördinaat voorkomen. Deze rij is 1, 2, 5, 13, 29, 34, 89, 169, 194, 233, 433, 610, 985, 1325, ... Men vermoedt dat elk getal x dat voorkomt in deze Markovrij slechts eenmaal voorkomt als grootste coördinaat. Tot op heden is dit nog niet bewezen.

MARKOV EN MEETKUNDE Wat gebeurt er als we alle oplossingen van vergelijking (*) bekijken, dus ook de niet-geheeltallige en zelfs de niet-rationale oplossingen? Laten we ons beperken tot het geval dat x , y en z positief zijn. Neem eerst $z = 1$. Dan geldt $y^2 - 3xy + x^2 + 1 = 0$. Je kunt y uitdrukken in x door gebruik te maken van de *abc*-formule. We vinden $y = \frac{1}{2}(3x \pm \sqrt{5x^2 - 4})$. Als x heel groot wordt, dan kun je -4 verwaarlozen ten opzichte van x . We vinden dan $y \approx \frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{5})x$. Dit worden twee asymptoten. In figuur 2 is de grafiek met de twee asymptoten getekend.

Nu we het plaatje getekend hebben, kunnen we de gehele oplossingen intekenen. We beginnen met

(1, 1). Gaan we omhoog, dan komen we op het snijpunt (1, 2) uit. Nu gaan we naar rechts tot we de kromme opnieuw snijden. Dit gebeurt in (5, 2). Als we hier omhoog gaan, dan komen we uit in (5, 13). En zo kunnen we doorgaan.

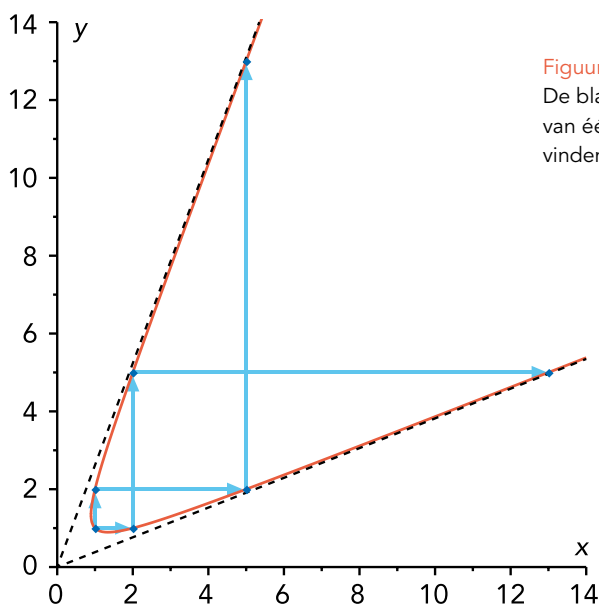
Op een vergelijkbare manier kunnen ook de figuren worden getekend voor $z = 2$ en $z = 5$.

VARIËREN OP HET THEMA Bekijk nu de vergelijking

$$x^2 + y^2 + z^2 = xyz + x + y + z + 2.$$

Na wat proberen vind je vrij snel een gehele oplossing: $(x, y, z) = (0, 1, 2)$. Eenvoudig is na te gaan dat als (A, B, C) een oplossing is, ook $(B, C, BC - A + 1)$ een oplossing is. Uitgaande van $(0, 1, 2)$ vinden we de oplossingen $(0, 0, 2)$, $(-1, 0, 1)$ en $(1, 2, 3)$. Als je verder gaat, dan vind je $(0, 0, -1)$, $(2, 3, 6)$, $(2, 6, 10)$, $(3, 6, 17)$, ...

Als je deze variant vergelijkt met de Markov-vergelijking (*), dan geldt dat de coördinaten minder snel zullen groeien dan de coördinaten van (*). Snap je waarom? ■



Figuur 2 De kromme $y^2 - 3xy + x^2 + 1 = 0$. De blauwe pijlen tonen het proces om uitgaande van één oplossing een volgende oplossing te vinden.

■ door Alex van den Brandhof

WISKUNST IN LAVA

Een *FabLab* (fabrication laboratory) is een werkplaats met digitale machines (scanners, 3d-printers, lasersnijders en dergelijke) om open innovatie en open design te stimuleren. 'Open' doelt hier op het *open source* concept, dus iedereen heeft toegang tot de bronmaterialen (de *source*) van het eindproduct.

Op een FabLab is iedereen welkom om te komen experimenteren en kennis te maken met digitale fabricage. In 2008 kreeg IJsland zijn eerste FabLab. Niet in de hoofdstad Reykjavik, maar op het vulkanische eiland Heimaey in de Noord-Atlantische Oceaan.

In 2009 bezocht de Britse wiskundige en kunstenaar Edmund Harriss het stadje Vestmannaeyjar op Heimaey. Hij ontmoette daar Smári McCarthy, een van de initiatiefnemers van het FabLab. Die vroeg aan Harriss of hij een keer een workshop in het FabLab kon geven voor scholieren van het eiland.

DELTAHEDRA Harriss doet onderzoek naar vlakvullingen. Hij benutte deze kennis om met de IJslandse kinderen een wiskunstig object te bouwen voor in het ruige lavalandschap op Heimaey. Een kunstwerk dat de mogelijkheid heeft om te evolueren in de tijd.

Voor het basisontwerp tekende de Engelse kunstenaar Richard Grimes, een vriend van Harriss. Grimes stelde voor om een *deltahedron* te bouwen – elegant en makkelijk in elkaar te zetten.

Deltahedra zijn veelvlakken waarvan alle zijden gelijkzijdige driehoeken zijn. Er bestaan er oneindig veel van, maar slechts acht ervan zijn *convex*; drie van die convexe deltahedra zijn de *platonische lichamen* tetraëder (viervlak), octaëder (achtvlak) en icosaeëder (twintigvlak).

Voor het object in het IJslandse landschap werden geen gewone gelijkzijdige driehoeken gebruikt, maar driehoeken met een 'golvende' rand. In de bovenste afbeelding op de rechterpagina zie je

hoe zo'n driehoek wordt geconstrueerd. Eerst worden op elke zijde vier cirkels getekend, zoals in het linkerplaatje. In het middelste plaatje zie je hoe de vorm wordt uitgezaagd. Twee vormen passen in elkaar zoals te zien is in het rechterplaatje.

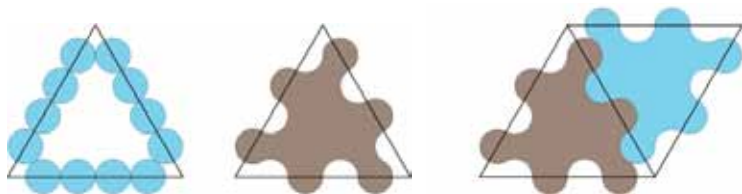
SYMMETRIELOOS Het idee was om een deltahedron te bouwen met twintig van zulke vormen. Dat kan op ongelofelijk veel manieren. Welke is als sculptuur het interessantst, zowel wiskundig als artistiek?

Hoewel symmetrie vaak als 'mooi' wordt beschouwd, vonden Harriss en Grimes dit nu eerder een saaie eigenschap, omdat de sculptuur er dan vanuit meerdere richtingen hetzelfde uitziet. De icosaeëder, de meest symmetrische deltahedron, viel daarom af. Ze kozen voor het tegenovergestelde: een sculptuur die interessant is wegens het *gebrek* aan symmetrieën. Met twintig driehoeken bleek het nog knap lastig om een veelvlak te ontwerpen met geen enkele symmetrie.

Vier groepen scholieren maakten elk een ontwerp, waarna er gestemd werd. Het winnende ontwerp was een hoogst onregelmatig object dat er vanuit ieder perspectief anders uitziet.

Bij het ontwerpen en de bouw leerden de kinderen over driedimensionale meetkunde, in het bijzonder de deltrahedra, het zoeken naar (rotatie-) symmetrieën, en over de verschillende materialen die ze gebruikten voor hun wiskunstige object.

In het FabLab werden de twintig golvende driehoeken gesneden uit 12 mm multiplex en daarna wit geverfd. Met scharnieren werden de platen aan elkaar gezet. Dat gebeurde op een lavaveld, op een koude dag in april 2009. Het resultaat, getiteld *Sculpture System No. 5*, is nog steeds te bewonderen. De tijd zal leren hoe lang de sculptuur het IJslandse weer met veel wind en ijzige neerslag zal overleven. ■



Boven: De constructie van de basistegels. Foto midden: Edmund Harriss met een van de twintig tegels. Foto onder: *Sculpture System No. 5* op Heimaey. Kunstenaar Richard Grimes ontwierp meer van dergelijke 'systemen', onderdelen die op vele manieren in elkaar gezet kunnen worden tot een sculptuur. Het ontwerp voor Heimaey is de vijfde in de serie.



Sinds 2008 vindt op de Vrije Universiteit Amsterdam jaarlijks de Junior Wiskunde Olympiade (JWO) plaats. De 90 beste deelnemers aan de Kangoeroewedstrijd van groep 8 van de basisschool en de klassen 1 en 2 van havo en vwo nemen er aan deel. De wedstrijd bestaat uit vijftien multiple-choicevragen en tien open opgaven. Behalve een wedstrijd is de JWO ook een kans om kennis te maken met leuke wiskunde en om zelf onderzoek te doen.

■ door Jaap de Jonge

GETALLEN ZEVEN

OPGAVE 12 (JWO 2011, DEEL 1)

Acht kinderen noemen samen alle getallen van 1 tot en met 2011 op. Dat doen ze als volgt.

- Auke noemt alle getallen van 1 tot en met 2011 in groepjes van drie, waarbij ze steeds het middelste getal van de drie overslaat. Dus ze zegt: 1, 3, 4, 6, 7, 9, ..., 2005, 2007, 2008, 2010, 2011.
- Bernard noemt alle getallen die Auke niet genoemd heeft, in groepjes van drie, waarbij hij steeds het middelste getal van de drie overslaat.
- Carine noemt alle getallen die Auke en Bernard allebei niet genoemd hebben, in groepjes van drie, waarbij ze steeds het middelste getal van de drie overslaat.
- Doortje, Evert, Frans en Gerard gaan door volgens hetzelfde principe.
- Hendrik noemt ten slotte het enige getal dat nog door niemand genoemd is.

Welk getal noemt Hendrik?

A) 712 B) 1094 C) 1123 D) 1265 E) 1387

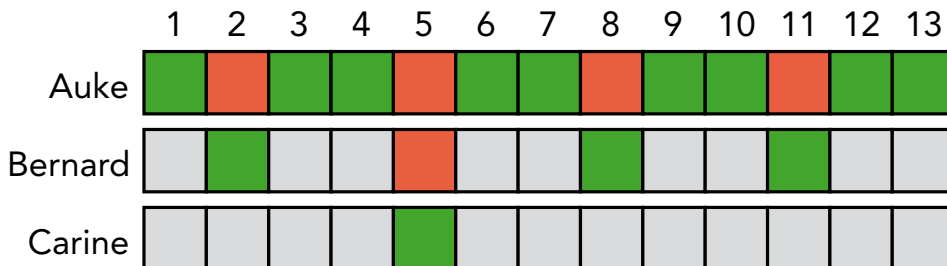
De opgave hierboven komt uit de vierde Junior Wiskunde Olympiade, die op 14 oktober 2011 werd gehouden. Zoals zo vaak is ook hier de eerste stap: lees de opgave goed. Maar dat goede lezen is hier

nu juist een van de moeilijkste stappen. Door de op het eerste gezicht ingewikkelde instructie, weet je niet precies wat er gebeurt. Om daar achter te komen is het heel nuttig om die instructie stap voor stap uit te voeren. Weliswaar is het veel te veel werk om alle getallen van 1 tot en met 2011 zo langs te lopen, maar door het begin uit te werken krijgen we al een eerste indruk.

Auke noemt 1, 3, 4, 6, 7, 9, 10, 12, 13, 15, 16, enzovoort. De vraag is: wanneer hebben we genoeg getallen opgeschreven om inzicht in het hele probleem te krijgen? Dat weten we niet, maar we merken later vanzelf of het nuttig is om nog meer getallen op te schrijven.

We begonnen met getallen opschrijven die Auke opnoemt, maar bij Bernard gaat het juist om de getallen die Auke *niet* genoemd heeft, dus 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, Al deze getallen zijn een veelvoud van 3 met 2 erbij opgeteld. Bernard laat daaruit weg 5, 14, 23, We houden nu maar weinig getallen over om regelmaat in te ontdekken, dus we zouden Aukes getallenrij kunnen uitbreiden met 18, 19, 21, 22, 24, 25, De rij van ongenoemde getallen (de veelvouden van 3 met 2 erbij) gaat dan verder met 26, 29, 32, 35, 38, 41, 44, We zien dan dat Bernard 5, 14, 23, 32, 41, ... weglaat.

Merk op dat Bernard alleen kan kiezen uit de getallen die niet door Auke zijn genoemd. Carine



De getallen die Auke, Bernard en Carine noemen zijn groen gekleurd.

moet kiezen uit de getallen die noch door Auke, noch door Bernard genoemd zijn. Voor Doortje tot en met Hendrik geldt hetzelfde principe, dus we hebben een soort zeef die in elke ronde de getallen die nog te kiezen zijn verder uitdunt.

Auke liet alle getallen ongenoemd die een veelvoud zijn van 3 met 2 erbij opgeteld. Bernard liet daaruit nog ongenoemd 5, 14, 23, 32, 41, ..., wat allemaal negenvouden zijn met daarbij 5 opgeteld. Dat is niet zo gek: Auke liet steeds het middelste getal uit een groepje van drie ongenoemd, en Bernard liet van die getallen steeds het middelste uit een groepje van drie ongenoemd, oftewel het middelste uit een groepje van oorspronkelijk negen getallen, dus het middelste van 1 tot en met 9, van 10 tot en met 18, van 19 tot en met 27 enzovoort.

Zo bekeken zien we dat Carine alle getallen in het midden van groepjes van $3 \times 3 \times 3 = 27$, oftewel het middelste van 1 tot en met 27, van 28 tot en met 54, van 55 tot en met 81 enzovoort niet noemt, en Doortje alle getallen in het midden van groepjes van $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$, oftewel het middelste van 1 tot en met 81, van 82 tot en met 162 enzovoort.

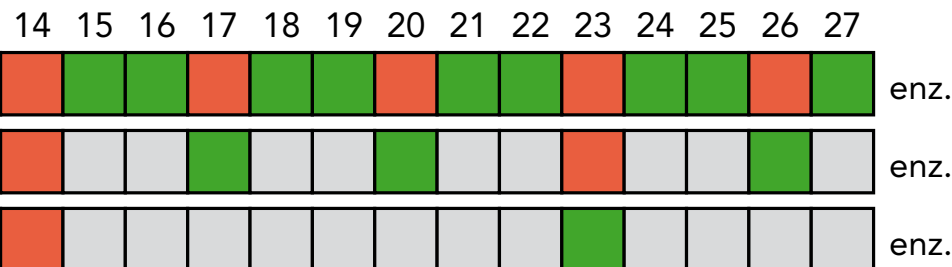
Zo zouden we oneindig lang door kunnen gaan, maar dat hoeft niet, omdat Hendrik kennelijk het laatste getal noemt. Dat zou dan het enige getal moeten zijn dat door geen van de anderen is genoemd. De laatste voorganger van Hendrik was Gerard, die volgens de boven beschreven regelmaat alle getallen in het midden van groepjes van $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 2187$ ongenoemd laat. Het eerste van die getallen is het middelste van 1 tot en met 2187, dus $(1 + 2187)/2 = 1094$, het volgende zou

zijn het middelste van 2188 tot en met 4374, ware het niet dat 2188 al groter is dan 2011. Dus is 1094 als enige vóór Hendrik nog ongenoemd. Dat is daarom het getal dat Hendrik noemt en het goede antwoord is dus B.

Hoe verschillend de opgaven van de JWO onderling ook zijn, deze aanpak is voor veel opgaven geschikt: goed lezen, stapje voor stapje het probleem proberen te begrijpen en vervolgens op te lossen, zo nodig door even een paar stapjes terug te doen.

Ook voor de komende eerste ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade komt deze aanpak vaak van pas. Je hebt dan soms ook wel wat extra wiskundig-technische kennis nodig, zoals van π en de stelling van Pythagoras. Maar het is vooral zaak de opgaven goed te analyseren: de oplossing komt dan soms 'als vanzelf'. ■

Zet jij je tanden ook graag in zulk soort opgaven? Doe dan mee aan de eerste ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade op vrijdagmiddag 27 januari. Alle leerlingen van havo/vwo klas 1 tot en met 5 kunnen meedoen. Geef je op bij je wiskundeleraar. Als je school niet meedoet, neem dan contact op met de landelijke organisatie (Melanie.Steentjes@cito.nl). Dan kijken wij of je op een andere school mee kan doen. Meer informatie is te vinden op www.wiskundeolympiade.nl.



PYTHAGORAS OLYMPIADE

■ door Matthijs Coster, Alexander van Hoorn en Eddie Nijholt

Doe mee met de Pythagoras Olympiade! Elke aflevering bevat vier opgaven. De eerste twee zijn wat eenvoudiger; onder de goede inzendingen van leerlingen uit de klassen 1, 2 en 3 wordt een cadeaubon van Bol.com ter waarde van 20 euro verloot. De laatste twee zijn echte breinbrekers; onder de goede inzendingen van leerlingen (tot en met klas 6) wordt een Bol.com-bon van 20 euro verloot. Per aflevering wordt maximaal één bon per persoon weggegeven.

Bovendien kun je je via de breinbrekers plaatsen voor de finale van de Nederlandse Wiskunde Olympiade, mocht het via de voorronden niet lukken: aan het eind van elke jaargang worden enkele leerlingen die regelmatig een correcte oplossing van de breinbrekers hebben ingestuurd, uitgenodigd voor de NWO-finale. Niet-leerlingen kunnen met de Pythagoras Olympiade meedoen voor de eer.



HOE IN TE ZENDEN? Inzendingen ontvangen we bij voorkeur per e-mail (getypt of een scan van een handgeschreven oplossing): pytholym@gmail.com.

Je ontvangt een automatisch antwoord zodra we je bericht hebben ontvangen.

Eventueel kun je je oplossing sturen naar
Pythagoras Olympiade
Korteweg-de Vries Instituut
Universiteit van Amsterdam
Postbus 94248
1090 GE Amsterdam.

Voorzie het antwoord van een duidelijke toelichting (dat wil zeggen: een berekening of een bewijs). Vermeld je naam en adres; leerlingen moeten ook hun klas en de naam van hun school vermelden.

Je inzending moet bij ons binnen zijn vóór 29 februari 2012.

DE GOEDE INZENDERS VAN SEPTEMBER 2011

218: P. Dekker, Krimpen Aan de Lek; Arie Heikoop, Kampen; Michelle Sweering (klas 4), Erasmiaans Gymnasium, Rotterdam.

219: P. Dekker, Krimpen Aan de Lek; Arie Heikoop, Kampen; Michelle Sweering (klas 4), Erasmiaans Gymnasium, Rotterdam.

220: Kees Boersma, Vlissingen; Arie Heikoop, Kampen;

Michelle Sweering (klas 4), Erasmiaans Gymnasium, Rotterdam.

221: Kees Boersma, Vlissingen; P. Dekker, Krimpen Aan de Lek; Arie Heikoop, Kampen; Michelle Sweering (klas 4), Erasmiaans Gymnasium, Rotterdam.

De cadeaubon gaat naar Michelle Sweering.

OPGAVE

226

PYTHAGORASSTRAAT

In de Pythagorasstraat staan aan beide kanten huizen: aan de ene kant zijn de huisnummers oneven, aan de andere kant even. Anton en Bernard wonen aan dezelfde kant en zijn burens van elkaar. Peter, Quintijn en Rob wonen in drie naast elkaar gelegen huizen aan de overkant van Anton en Bernard. De som van de huisnummers van Anton en Bernard is gelijk aan de som van de huisnummers van Peter, Quintijn en Rob. Tevens zijn twee van de vijf huisnummers een kwadraat. Om welke vijf huisnummers gaat het? (Alle huisnummers in de Pythagorasstraat zijn kleiner dan 1000.)

OPGAVE

227

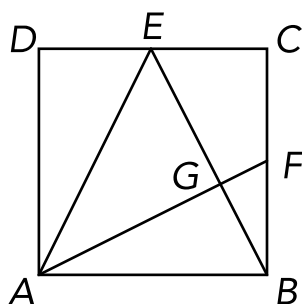
Een toeristenboot vaart over een snelstromende rivier tussen A en B (A ligt stroomopwaarts en B ligt stroomafwaarts). De boot doet er een uur over om van A naar B te varen, en doet er twee uur over om van B naar A te varen.

Nu wordt de boot vervangen door een (snellere) nieuwe boot. Deze nieuwe boot doet er drie kwartier over om van A naar B te varen. Hoe lang verwacht je dat de boot erover zal doen om van B naar A te varen: anderhalf uur, meer dan anderhalf uur of minder dan anderhalf uur? We zien je antwoord graag tegemoet met een toelichting.

OPGAVE

228

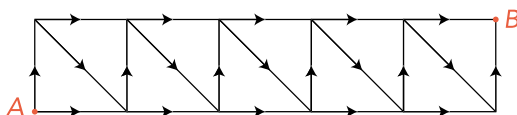
Gegeven is een vierkant $ABCD$. Punt E is het midden van CD . Punt F is het midden van BC . Punt G is het snijpunt van AF en BE . Bewijs dat driehoek AEG rechthoekig is, waarbij voor de zijden geldt dat $AE : AG : EG = 5 : 4 : 3$.



OPGAVE

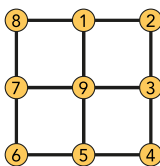
229

In onderstaande plattegrond geven de pijlen aan in welke richting je mag lopen. Hoeveel verschillende wegen zijn er van A naar B ?



OPLOSSING 218

Hiernaast zie je een plattegrond met twaalf straatstukken. Begin in 1 te lopen. Elk stuk loop je helemaal af. Dan kies je voor een ander stuk dat daar begint of voor teruglopen. Kun je zó lopen, dat je aan het eind weer in 1 bent en één stuk 1 keer hebt gelopen, een ander stuk 2 keer, een derde 3 keer enzovoorts, tot en met een stuk 12 keer?



Oplossing. Bekijk de wandeling 123959781; zes van de twaalf straatstukken zijn nu eenmaal (een oneven aantal) doorlopen. We kunnen deze wandeling aan de eis laten voldoen, door een aantal keer heen en weer te lopen over bepaalde straatstukken, bijvoorbeeld zo: 121212121232323234343434343939393919191919545454565656597979767678181. De toegevoegde punten zijn hier vet onderstreept weergegeven.

OPLOSSING 219

Verdeel de getallen 1 tot en met 50 in 25 groepjes van 2. Neem vervolgens van elk van de 25 groepjes steeds het grootste getal. Neem ten slotte van de aldus verkregen 25 getallen het kleinste getal. Wat is het grootste getal dat je op deze manier als uitkomst kunt krijgen?

Oplossing. Zij A de verzameling $\{1, \dots, 25\}$ en B de verzameling $\{26, \dots, 50\}$. Als in onze verdeling elk groepje een getal uit A en een getal uit B bevat, houden we na de tweede stap precies de verzameling B over, en krijgen we 26 als uitkomst. Met een ander soort verdeling hebben we altijd minstens één groepje met twee getallen uit A . Bij stap 2 zal dat groepje een getal kleiner dan 26 opleveren, en de uitkomst wordt dan ook kleiner dan 26. De maximale uitkomst is dus 26.

OPLOSSING 220

Two Kiddies is een spelshow waaraan alleen ouderparen mogen meedoen die twee kinderen hebben. Elk deelnemend ouderpaar mag blindelings een bal trekken uit een doos die een blauwe en een roze bal bevat. De presentator heeft een randomgenerator die een

willekeurige datum prikt, bijvoorbeeld '13 april'.

Als een ouderpaar de blauwe bal trekt, winnen zij een auto indien zij ten minste één zoon hebben die jarig is op de datum die de randomgenerator aangeeft. En als de roze bal wordt getrokken, winnen zij een auto indien zij ten minste één dochter hebben die jarig is op de datum die de randomgenerator aangeeft. Als de auto gewonnen wordt, winnen de ouders bovendien een reis voor het hele gezin indien hun beide kinderen van hetzelfde geslacht zijn.

- Wat is de kans dat een willekeurig ouderpaar dat meedoet aan *Two Kiddies* de auto wint?
- Van een willekeurig ouderpaar heb je vernomen dat ze bij *Two Kiddies* de auto hebben gewonnen. Verder informatie heb je niet. Wat is de kans dat ze ook de reis hebben gewonnen?

Oplossing. a. Er zijn $2 \times 365 = 730$ mogelijke combinaties voor geslacht+geboortedatum. Voor beide kinderen samen zijn er dus $730^2 = 532900$ mogelijkheden. Voor 729^2 hiervan geldt dat de combinatie van elk kind niet overeenkomt met de random combinatie. Er zijn dus $730^2 - 729^2 = 1459$ gunstige mogelijkheden, zodat de kans om de auto te winnen $1459/532900$ is (ongeveer 0,0027).

b. Er zijn 2×365^2 mogelijke combinaties van twee geboortedata en één geslacht voor de kinderen. Bij 365^2 hiervan komt het geslacht niet overeen met de kleur bal, en bij 364^2 komt wel het geslacht overeen maar beide data niet. Het aantal gunstige mogelijkheden is dus $2 \times 365^2 - 365^2 - 364^2 = 729$. Als je weet dat een ouderpaar de auto gewonnen heeft, is de kans dat ze ook de reis gewonnen hebben dus $729/1459$ (ongeveer 0,4997).

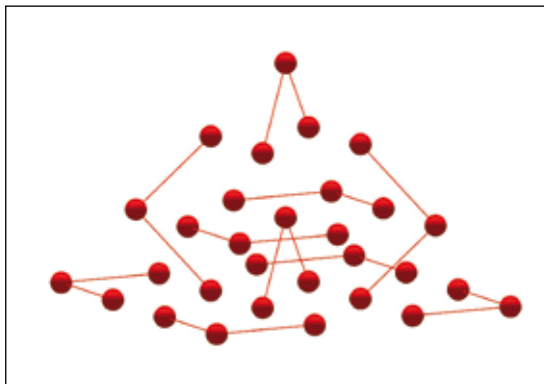
OPLOSSING 221

Lodewijk zit in een gebouw met n^2 kamers, gerangschikt in een rooster van n bij n . De buitenmuren zijn afgesloten, in elke binnenmuur zit een opening naar de aangrenzende kamer. Lodewijk wil graag in een kamer beginnen, elke kamer precies één keer bezoeken en dan weer in de eerste kamer terugkomen. Voor welke waarden van n is dit mogelijk?

Oplossing. Voor $n = 1$ hoeft Lodewijk maar één kamer te bezoeken, dus kan het. Voor oneven $n > 1$ kleuren we de kamers in een patroon van een schaakbord. Elke keer dat Lodewijk naar een nieuwe kamer gaat, gaat hij van wit naar zwart of van zwart naar wit. Om alle kamers te bezoeken en terug te keren, moet hij dus een even aantal keer van kamer wisselen. Dit is niet mogelijk, want n^2 is oneven. Voor even n kan het wel; een bewijs laten we over aan de lezer.

OPLOSSING SUDOKU EN 3D-PUZZEL NR. 2

1	9	5	6	3	8	2	7	4
8	4	3	9	2	7	6	1	5
6	2	7	1	4	5	8	3	9
5	7	1	8	9	3	4	6	2
2	3	9	4	5	6	1	8	7
4	8	6	7	1	2	9	5	3
7	1	2	5	6	9	3	4	8
3	6	8	2	7	4	5	9	1
9	5	4	3	8	1	7	2	6



Links zie je de oplossing van figuur 9 op pagina 21.

Rechts zie je de oplossing van de 3d-puzzel uit het novembernummer.

PYTHAGORAS

51ste jaargang nummer 3
januari 2012
ISSN 0033 4766

Pythagoras stelt zich ten doel jongeren kennis te laten maken met de leuke en uitdagende kanten van wiskunde. Pythagoras richt zich tot leerlingen van vwo en havo en alle anderen die jong van geest zijn.

Internet www.pythagoras.nu

Hoofredacteur Arnout Jaspers

Eindredacteur Alex van den Brandhof

Redactie Matthijs Coster,
Jeanine Daems, Jan Guichelaar,
Klaas Pieter Hart, Paul Levrie

Vormgeving Grafisch Team
Digipage BV, Leidschendam

Druk Drukkerij Ten Brink, Meppel

Uitgever Koninklijk Wiskundig
Genootschap

Verantwoordelijk uitgever Chris Zaal

Lezersreacties en kopij

Bij voorkeur per e-mail; lezersreacties naar Jan Guichelaar, jan@pythagoras.nu en kopij naar Arnout Jaspers, arnout@pythagoras.nu. Eventueel per post naar Jan Guichelaar, Pedro de Medinalaan 162, 1086 XR Amsterdam.

Abonnementen, bestellingen en mutaties

Drukkerij Ten Brink
Abonnementenadministratie
Postbus 41
7940 AA Meppel
Telefoon: 0522 855 175
E-mail:
abonnementen@pythagoras.nu

Abonnementsprijs

(6 nummers per jaargang)
€ 26,00 (Nederland),
€ 29,00 (België),
€ 32,00 (overig buitenland),
€ 17,00 (groepsabbonement
Nederland),
€ 18,00 (groepsabbonement België).
Zie www.pythagoras.nu voor toelichtingen.

Aan dit nummer werkten mee

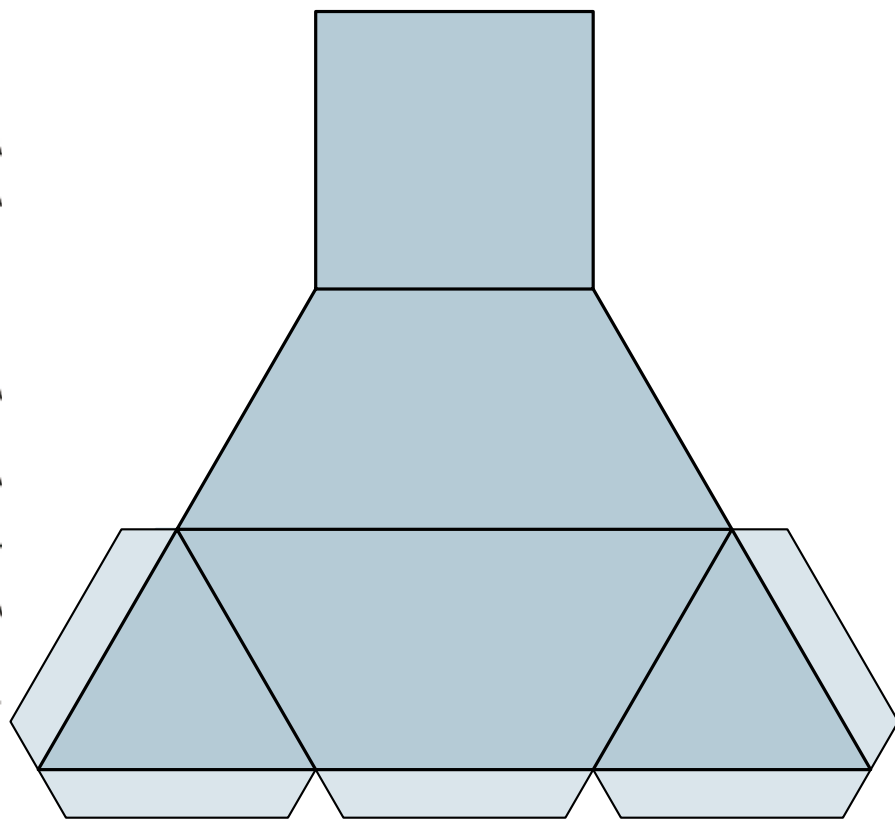
Alex van den Brandhof
(alex@pythagoras.nu),
Matthijs Coster
(matthijs@pythagoras.nu),
Jeanine Daems
(jeanine@pythagoras.nu),
Jan Guichelaar
(jan@pythagoras.nu),
Klaas Pieter Hart
(kp@pythagoras.nu),
Alexander van Hoorn
(alexander@pythagoras.nu),
Arnout Jaspers
(arnout@pythagoras.nu),
Jaap de Jonge
(dejonge@felisenum.nl),
Paul Levrie
(paul@pythagoras.nu),
Eddie Nijholt
(eddie@pythagoras.nu),
Marc Seijlhouwer
(marc933@gmail.com),
Aad Thoen
(thoenaad37@gmail.com),
Aad van de Wetering
(avdw3b@wxs.nl),
Chris Zaal (chris@pythagoras.nu).

Pythagoras wordt mede mogelijk gemaakt door de bijdragen van de ondersteunende instituten en instellingen.

3D-PUZZEL

■ door Paul Levrie

(Departement IWT, Karel de Grote-Hogeschool, Hoboken (Antwerpen))



Kopieer deze bouwplaat twee keer op stevig papier, knip ze uit en plak ze in elkaar. De opdracht is om de twee objecten zó tegen elkaar te zetten, dat er een tetraëder (regelmatig viervlak) ontstaat. De oplossing vind je in het volgende nummer van *Pythagoras*.