

PYTHA GORAS

WISKUNDETIJDSCHRIFT VOOR JONGEREN

Cellulaire automaten

Invarianten en halfvarianten

SPORT EN WISKUNDE: RECORDS



51ste JAARGANG - NUMMER 4 - FEBRUARI 2012



Pythagoras is al vijftig jaar hét wiskundetijschrift voor jongeren. Ook de oude jaargangen staan boordevol interessante artikelen en puzzels. Ze zijn, voor zover voorradig, na te bestellen bij de abonneeadministratie. De complete vijftigste jaargang kost € 18; oudere jaargangen kosten € 12,50 (zes nummers per jaargang). Bestellen kan telefonisch: 0522-855175 of per e-mail: abonnementen@pythagoras.nu.



INHOUD



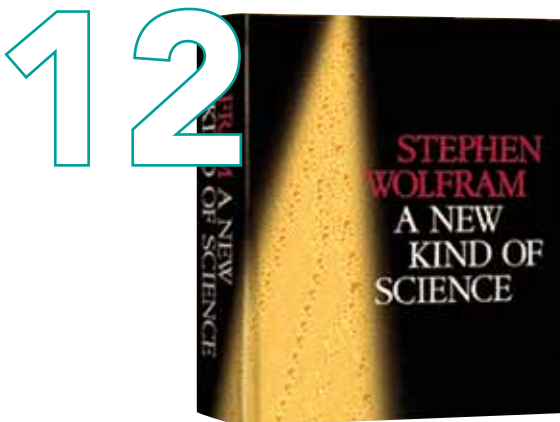
SNELLER, HOGER, STERKER

In de sport worden wereldrecords regelmatig gebroken. Betekent dit dat sporters steeds beter worden? En zijn alle precieze afstandsbepalingen en tijdmetingen, die nodig zijn om echte kampioenen aan te kunnen wijzen, wel echt zo precies? Leveren al die regels wel de juiste kampioenen op?



WERELDKROMMEN

In dit artikel rekenen we aan afstanden en oppervlaktes op de aardbol. Zo krijg je te zien hoe je kunt vaststellen of een gesloten kromme op het aardoppervlak een echte 'reis om de wereld' genoemd mag worden.



GEAVANCEERD HOKJESDENKEN

De prijsvraag die we in het vorige nummer uitschreven, is gebaseerd op *cellulaire automaten*, een speelveld van hokjes die onder simpele regels van kleur veranderen. Stephen Wolfram schreef er een dik boek over: *A New Kind of Science*.

EN VERDER

- 2 Kleine nootjes
- 10 Een seconde in het vierkant
- 16 De computer als illustrator
- 18 De post
- 19 Journaal
- 24 Sudoku's en diagonalen
- 26 Vliegende kraaien en zieke schaakborden
- 29 Wortelprobleem
- 30 Pythagoras Olympiade
- 33 Oplossing sudoku en 3d-puzzel nr. 3

Foto omslag: Robert Varadi

■ **NIVEAUBALKJES** Pagina's met één of meer zwarte balkjes (onder de paginanummering) geven de moeilijkheidsgraad aan. Eén balkje: lastig. Twee balkjes: vereist wiskundekennis uit de vijfde of zesde klas. Drie balkjes: net iets moeilijker.

KLEINE NOOTJES

■ door Jan Guichelaar



WIE IS KEES?

Drie heren die zichzelf A, B en C noemen, doen de volgende mededelingen, waarvan er slechts één waar is.

A: 'Ik heet Kees.'

B: 'Ik heet niet Kees.'

C: 'A heet niet Kees.'

Wie heet in ieder geval Kees?



ZIGZAGGEN MET EEN DUIMSTOK

Je hebt een duimstok (vouwmeter) van 2 meter lang. Om de 20 centimeter zit een scharnier; de duimstok bestaat dus uit tien delen. Leg de duimstok volledig uitgevouwen voor je neer, met het onderste deel links. Draai nu bij een scharnier naar keuze de duimstok in een rechte hoek tegen de klok in. Rechts van deze scharnier kies je een volgende scharnier en daar vouw je de duimstok in een rechte hoek met de klok mee. Zo ga je door tot je aan het uiteinde bent gekomen. Hoeveel verschillende zigzaggen kun je op deze manier vouwen?

WIJZERPLAAT VERDELEN

Louis heeft een ronde wijzerplaat van een klok, met daarop de getallen 1 tot en met 12. Hoe kan hij deze met twee koorden (lijnstukken die twee punten op de cirkel verbinden) in drie delen verdelen, zodanig dat de som van de getallen in elk deel hetzelfde is?

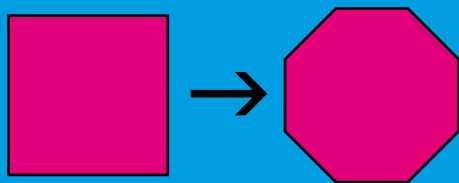


Kleine nootjes zijn eenvoudige opgaven die weinig of geen wiskundige voorkennis vereisen om opgelost te kunnen worden. De antwoorden vind je in het volgende nummer van *Pythagoras*.



STOPTREIN EN SNELTREIN

Een stoptrein rijdt met een snelheid van 80 kilometer per uur, een sneltrein rijdt 120 kilometer per uur. De stoptrein van A, via B (op 40 km van A) naar C (nog 20 km verder) vertrekt op het hele uur. De sneltrein direct van A naar C vertrekt een kwartier na de stoptrein. De sneltrein kan de stoptrein niet inhalen tussen twee stations; inhalen bij een station is wel mogelijk. Hoe laat komt de stoptrein aan in C, als de sneltrein de stoptrein heeft gepasseerd bij station B?



VAN VIERKANT NAAR ACHTHOEK

Knip een vierkant zodanig in vijf stukken, dat je met de vijf stukken een regelmatige achthoek kunt leggen.

OPLOSSINGEN KLEINE NOOTJES NR. 3

Zakjes met knikkers. Zonder zakjes in andere zakjes te stoppen, lukt het niet met minder dan 45 knikkers (met 45 lukt het wel: $0 + 1 + 2 + 3 + \dots + 9 = 45$). Maar de zuinigste oplossing vind je door zakjes in andere zakjes te stoppen: je hebt dan slechts 9 knikkers nodig! Noem de zakjes A tot en met J. Doe in de zakjes A tot en met I één knikker en laat zakje J leeg. Stop vervolgens J in I, I in H, H in G, enzovoorts tot en met B in A. Dan bevat A negen knikkers, B acht knikkers, C zeven knikkers, enzovoorts tot en met I één knikker, en J nul knikkers.

Halfvol of halfleeg. Meet de zijden a en b van de rechthoek en de hoogte van het water c . Keer de fles om (sluit hem met je duim af) en meet de hoogte van het lege stuk d . Het volume is $ab(c + d)$.

Pad maken. Met een pad dat overal 1 meter breed is, wordt het binnenterrein 59 bij 59 meter.

Getal verdelen. $G = 11 = 1 + 1 + 1 + 8 = 1 + 1 + 2 + 7 = 1 + 1 + 3 + 6 = 1 + 1 + 4 + 5 = 1 + 2 + 3 + 5 = 1 + 2 + 2 + 6 = 1 + 2 + 4 + 4 = 1 + 3 + 3 + 4 = 2 + 2 + 2 + 5 = 2 + 2 + 3 + 4 = 2 + 3 + 3 + 3$.

Schipper mag ik overvaren? Aan de ene kant stonden Oliver en Stan. Puck stond aan de andere kant; daar lag ook de roeiboot (Stan en Puck kunnen verwisseld worden). Puck vaart over. Dan varen Puck en Stan samen over. Dan vaart Puck over. Ten slotte vaart Oliver over.

Als de roeiboot aan de andere kant lag, kan het in drie vaarten.

Als de drie personen aan één kant staan (met de roeiboot), zijn vijf vaarten nodig.

Als Oliver aan de ene kant stond en Stan en Puck aan de andere kant, kan het in twee vaarten.

Komende zomer worden de Olympische Spelen in Londen gehouden. *Citius, altius, fortius* (Latijn voor 'sneller, hoger, sterker'), zo luidt het Olympische motto. In de sport worden wereldrecords regelmatig gebroken. Betekent dit dat sporters steeds beter worden? En zijn alle precieze afstandsbepalingen en tijdmetingen, die nodig zijn om echte kampioenen aan te kunnen wijzen, wel echt zo precies? Leveren al die regels wel de juiste kampioenen op? Vaak wel, maar soms zijn er toch wat kanttekeningen te maken.

■ door Jan Guichelaar en Alex van den Brandhof

SNELLER, HOGER, STERKER



© Robert Varadi

Veel sporten komen voort uit zeer oude bezigheden. Hardlopen (sprinten) was nuttig bij het achterna zitten van of het vluchten voor de vijand.

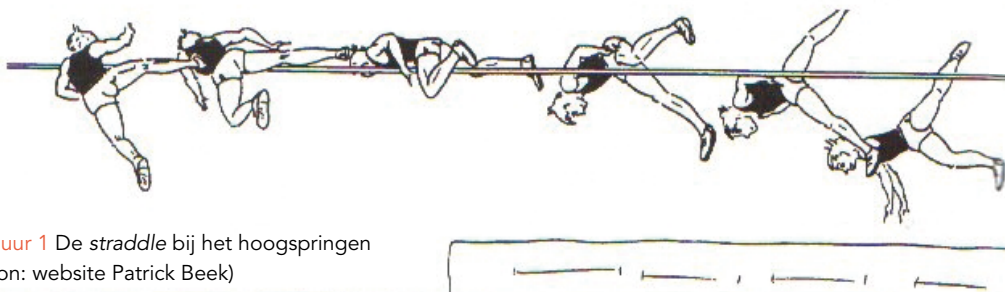
Hardlopen op de lange afstand was van belang bij het overbrengen van berichten. De oorsprong van de marathon ligt in Athene, waar in 490 v. Chr. de Griekse soldaat Pheidippides van Marathon naar Athene rende om het nieuws van de overwinning van de Atheners op de Perzen te vertellen. Hoogspringen was nodig om over obstakels te springen, verspringen om stroompjes te overbruggen. Kogelstoten, speerwerpen en discuswerpen waren nodig bij de jacht (met keien, speren en platte stenen).

HARDLOPEN Elektronische tijdwaarneming met *fotofinish* is bij Olympische hardloophwedstrijden niet meer weg te denken. Met een stopwatch maak je al gauw een fout van een paar honderdsten, maar met fotofinish wordt de tijd in duizendsten van een seconde gemeten.

De computer voor de tijdwaarneming is via een kabel met de revolver van de starter verbonden. Een andere kabel leidt naar een speciale camera direct naast de finish. Het startsignaal wordt via een geluidssensor op de loop van het geweer doorgegeven aan de computer. Het signaal bereikt bin-

nen enkele miljoensten van een seconde de computer. Bij de Olympische Spelen is er bovendien een verbinding met de valse start detectie in het startblok. Volgens wetenschappers heeft een atleet minstens een tiende van een seconde nodig om op het startschot te reageren. Met druk- of versnellingsmeters in de startblokken wordt dan de reactietijd gemeten. Bedraagt die minder dan een tiende van een seconde, dan is hij te vroeg gestart. Zodra de eerste atleet over de finish komt, doorbreekt hij een infraroodstraal. Een digitale klok langs de baan geeft alvast de voorlopige eindtijd aan; de definitieve tijd wordt bepaald met de fotofinishcamera.

De tijd van een nieuw wereldrecord wordt dus met bijna wetenschappelijke precisie vastgelegd. Toch doemt er meteen een vraag op: is de baan wel precies 100 meter lang? Er zijn altijd meetfouten. En het schilderen van witte lijnen kent ook onnauwkeurigheden. In één wedstrijd in één stadion maakt het niet zo veel uit, maar bij het vergelijken van tijden uit verschillende stadions dreigen er toch minieme verschillen te ontstaan, die voor sommige lopers ongunstig kunnen uitpakken. Dit geldt zeker voor de langere afstanden, waarbij meerdere rondes afgelegd moeten worden. Een fout telt dan een aantal keren mee. Bij een snelheid van tien meter per



Figuur 1 De straddle bij het hoogspringen
(bron: website Patrick Beek)

seconde wordt in een duizendste van een seconde bijna één centimeter afgelegd. Op een korte baan steekt een sprinter dus zo een paar duizendsten van een seconde in zijn broekzak.

HOOGSPRINGEN Vroeger sprong men beschaafd hoog: met de *Schotse sprong* of *scissors* (schaarsprong), zoals je gewoon over een hekje springt. Je landt netjes op je voeten. Je zwaartepunt (ongeveer bij je navel) is bij het passeren van de lat er een flink stuk boven.

Vervolgens kwam de *straddle* (zie figuur 1), waarbij je met je bovenlichaam horizontaal vlak over de lat gaat. Het zwaartepunt gaat daarbij vlak over de lat. Een valkussen is dan wel nodig. Bij deze sprong hoeft je je zwaartepunt dus minder de hoogte in te springen om toch hoger te komen.

Ten slotte is er de door de Amerikaan Dick Fosbury als eerste in 1968 gebruikte sprong achterover: de nu geheten *fosburyflop* (zie figuur 2). Daarbij gaat het lichaam over de lat, terwijl de benen nog beneden zijn. Deze gaan het laatst over de lat. Het zwaartepunt gaat hierbij (vrijwel) onder de lat door. Opnieuw bereik je dus met minder sprongkracht een grotere hoogte. De moeilijker technieken hebben echter een negatief effect op de sprongkracht.

Bij hoogspringen speelt de lengte van de springer een belangrijke rol. Immers, als je langer bent, zit je zwaartepunt hoger en hoeft je dus minder sprongkracht te hebben om over een bepaalde hoogte te springen.

Je kunt ook kijken hoe ver iemand boven zijn eigen kruin kan springen. De wereldrecordhouder hoogspringen, de Cubaan Javier Sotomayor met een lengte van 1,95 meter, sprong 2,45 meter hoog: hij heeft dus 50 centimeter boven zichzelf uit gesprongen. Maar de Amerikaan Franklin Jacobs, lengte 1,73 meter en hoogste sprong 2,32 meter, heeft maar liefst 59 cm boven zichzelf uit gesprongen, evenals de Zweed Stefan Holm (240 – 181 = 59 cm). Zijn dat dan niet de eigenlijke wereldkampioenen, ook al sprongen ze minder hoog dan Sotomayor? Als je klein bent, kun je beter gewichthef-

fer worden. Dan hoeft je het gewicht niet zo veel op te tillen.

ZWEMMEN We beperken ons tot de 100 meter vrije slag (borstcrawl). De gemiddelde snelheid is 100 meter in een kleine 50 seconden ofwel 2 cm per 0,01 seconde. Deze snelheid is zo'n vijf keer kleiner dan die bij het hardlopen. Dus een foutje in de lengte van een opgemeten 50-meterbad van 1 cm geeft al een tijdsverschil van 0,01 seconde. En daar gaat het ook om bij het zwemmen.

Maar er is iets heel bijzonders aan de hand met zwemmen. Bij de start nog niet zo veel: netjes wachten op het voetstuk tot het startschot klinkt. Het zwaartepunt bevindt zich zeker achter het punt waar de tenen zich om de rand krommen, anders zou de zwemmer pardoes in het water vallen.

Maar laten wij nu eens naar het eind van de wedstrijd kijken (hetzelfde punt). De eindtijd is daar, als de zwemmer aantikt, met een vingertop. Maar waar is het zwaartepunt dan? Bij een zwemmer van 1,80 meter ligt dat toch wel zo'n 90 cm van de kant. Die afstand hoeft de zwemmer dus niet af te leggen. En hij heeft al zeker niet met zijn hele li-



Figuur 2 Dick Fosbury in zijn flop



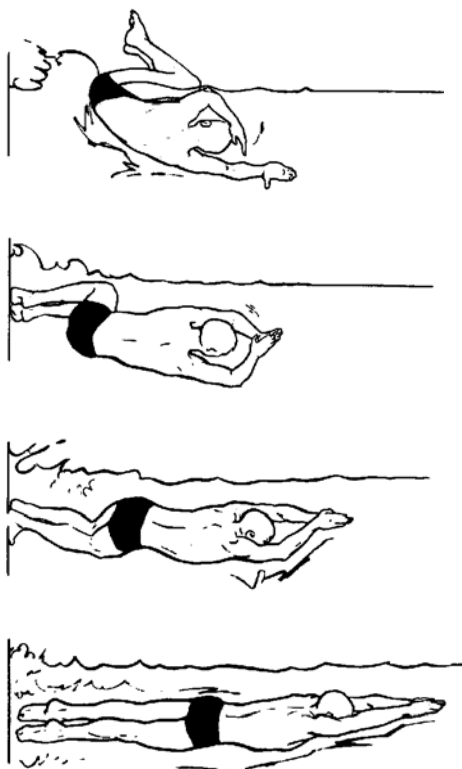
chaam de eindstreep gepasseerd.

Erger nog is het bij het keerpunt. Het is volgens de regels niet nodig het keerpunt met de hand aan te raken. Vlak voor het keerpunt in het water rond-draaien en met de voeten afzetten is genoeg. Uit figuur 3 is te zien dat het zwaartepunt twee keer een afstand van zo'n 60 cm niet hoeft af te leggen. Dus op de 100 meter vrije slag hoef je – met je zwaarte-punt – nog niet eens 98 meter te zwemmen.

KEERPUNT VOORDELIG? Een keerpunt heeft natuurlijk het afstandsvoordeel, maar er is ook een nadeel. De snelheid moet eerst tot nul afnemen, waarna met de afzet weer op snelheid gekomen moet worden. Kunnen we nagaan hoe deze twee effecten zich verhouden tot elkaar?

Ja, door te kijken naar het wereldrecord op de 100 meter in een 50-meterbad en ook naar het record in een 25-meterbad. Het wereldrecord 100 meter vrije slag in een 50-meterbad is 46,91 seconden. In een 25-meterbad is het record 44,94 seconden.

Dat is dus een verschil van zo'n 2 seconden. Het verschil tussen de twee zwembaden is twee keer een keerpunt. Daarbij is er dus een (extra) afstands-winst van $4 \times 0,6 = 2,4$ meter. Met de gemiddelde snelheid van 2m/s levert dit een tijdswinst op van $2,4/2 = 1,2$ seconden. Maar de tijdswinst is in werkelijkheid maar liefst 2 seconden. Die extra 0,8 se-



Figuur 3 Het keerpunt bij de vrije slag (bron: site van de Koninklijke Nederlandse Zwembond)

conden komen dus door twee keer extra afzetten. Een keerpunt levert dus extra winst op. Op naar het 12,5-meterbad.

Het wereldrecord op de 100 meter, waarbij het zwaartepunt echt 100 meter moet afleggen in een rechte lijn, zou dus flink wat hoger liggen dan de huidige wereldrecordtijd.

LANGE ZWEMMERS Ook hier geldt, net als bij het hoogspringen, dat een langere man of vrouw minder hoeft te zwemmen dan een kortere. Immers, neem eens twee mannen, 1,70 meter en 1,90 meter lang. Het zwaartepunt ligt bij aantikken door de kortere man 10 cm dicht bij de rand (en dan heeft hij ook nog eens kortere armen). En bij het keerpunt moet de kortere man dus ongeveer $2 \times 10 = 20$ cm meer zwemmen. Op de 100 meter in een 50-meterbad dus 30 cm meer, ofwel ongeveer 0,15 seconden. Terwijl het wereldrecord om verschillen van honderdsten van seconden gaat!

De langere zwemmer zwemt dus minder in afstand en wordt dus mede daarom kampioen. Een kortere zwemmer die wel vrijwel dezelfde tijd haalt als een langere, heeft dus een grotere gemiddelde snelheid. Het zou dus wel zo kunnen zijn dat van twee zwemmers die aan een krokodil trachten te ontkomen, de langere zwemmer (met de beste tijd in het zwembad) niet aan het monster ontkomt en de kleinere zwemmer wel.

POLSTOKHOOGSPRINGEN Ook het polsstokhoogspringen is de moeite waard om bij stil te staan. Een klein beetje natuurkunde is dan op zijn plaats. Bij het polsstokhoogspringen wordt alle *bewegingsenergie* E_b bij de sprong – die daardoor nog een kleine extra verticale snelheid geeft – eerst even opgeslagen in de vorm van elastische energie in de gebogen stok. De bewegingsenergie is $E_b = \frac{1}{2}mv^2$, met m de massa van de springer in kilogrammen en v de snelheid vlak na de afzet in m/s. De elastische energie wordt vervolgens geheel omgezet in wat genoemd wordt *potentiële energie* E_p . Hiervoor geldt de formule $E_p = mgh$, met h de bereikte hoogte en g de versnelling van de zwaartekracht ($g = 10 \text{ m/s}^2$). Deze versnelling betekent dat een vallend voorwerp door de aantrekking van de aarde elke seconde een *toename in zijn snelheid* krijgt van ongeveer 10 m/s;

bij een omhoog gegooid voorwerp *vermindert de snelheid* elke seconde met 10 m/s. Als we deze twee uitdrukkingen dan aan elkaar gelijk stellen ($E_p = E_b$ ofwel $mgh = \frac{1}{2}mv^2$), valt de m eruit en met $v = 10 \text{ m/s}$ (snelle sprint) krijgen we dan $h = 5$ meter. Nu staat het wereldrecord op dit ogenblik op naam van de Rus Sergej Bubka met 6,15 meter, terwijl het bij de vrouwen in handen is van Jelena Isinbajeva met 5,06 meter. De vrouwen lopen iets minder snel, zijn iets kleiner en zetten iets minder krachtig af. Dus het verschil is begrijpelijk.

Bij de mannen is het dus flink wat meer dan de berekende 5 meter. Maar ook hier geldt dat het zwaartepunt start op een hoogte van een 90 cm. Bovendien draait de springer zich tijdens de sprong naar boven en voegt zo met zijn armen wat potentiële energie toe.

We kunnen hier natuurlijk dus ook weer vaststellen dat langere mensen een voordeel hebben.

LITERATUUR Voor dit artikel is onder meer gebruik gemaakt van

- René Ducastel, 'De tijd in een duizendste van een seconde', *Archimedes*, jaargang 37 nr 1, november 2000.
 - Daniel Gembris, 'Entwicklung von Rekorden in der Leichtathletik', *Spektrum der Naturwissenschaft*, August 2008.
 - Daniel Gembris, 'Evolution of Athletic Records: Statistical Effects versus Real Improvements', *Journal of Applied Statistics*, Vol. 34, No. 5, July 2007.
- Deze drie artikelen zijn beschikbaar op internet, met Google zijn ze eenvoudig te vinden.

Op de volgende twee pagina's kun je lezen over de rol van *toeval* bij het breken van wereldrecords.



TOEVAL BIJ HET VERBETEREN

Waarom worden er in de sport alsmaar weer records gebroken? Licht het aan nieuwe trainingsmethoden, of betere voedingssupplementen, of snellere pakken, of klapschaatsen, of nieuwe onmeetbare doping? De Duitse natuurkundige Daniel Gembris denkt aan iets heel anders, namelijk *toeval*. Ook zónder die nieuwe trainingsmethoden, andere voeding en dergelijke zullen records steeds weer gebroken worden; dat stelde hij in 2007 in een artikel in het *Journal of Applied Statistics* (zie de bronnen op pagina 7).

Zonder betere trainingen, voedingen en dergelijke, zullen alle wedstrijdresultaten van de wereldtop een *normale verdeling* hebben. Dat wil zeggen dat er van een grote groep wedstrijdresultaten een groot deel rond het *gemiddelde* μ zit en er verder van het gemiddelde steeds minder resultaten zijn. De grafiek van de normale verdeling is de zogeheten *Gauss-kromme*, zie figuur 4.

De oppervlakte onder de kromme tussen twee waarden geeft de kans op een resultaat in dat gebied (de totale oppervlakte is dus 1). Zo is de kans op een resultaat tussen μ en $\mu + \sigma$ ongeveer gelijk aan 0,34; hierbij is σ de *standaardafwijking*, een maat voor de *spreiding* rondom het gemiddelde.

Een topper presteert bijna nooit ver onder het gemiddelde, maar ook niet ver daarboven.

Stel nu eens dat het wereldrecord $R(0)$ op een zeker tijdstip precies μ is, het gemiddelde van de wereldtop waarvan we de resultaten in de gaten houden. Deze beginsituatie is onwaarschijnlijk en duurt natuurlijk niet lang, want elke prestatie heeft een kans van 0,5 om een nieuw wereldrecord op te leveren. Het wereldrecord zal dan natuurlijk eerst snel stijgen (als het om een sport als verspringen of hoogspringen gaat; bij hardlopen *daalt* het wereldrecord juist). Maar als het record eenmaal bij $\mu + 2\sigma$ ligt, is de kans om het te verbeteren nog maar 0,023. Dan duurt het steeds langer om toevallig een nieuw record te vestigen.

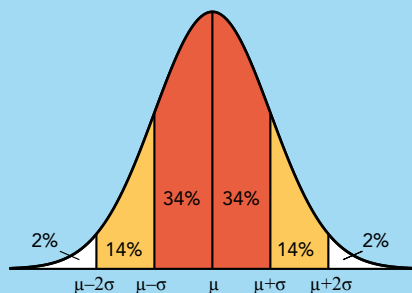
DUBBELE LOGARITME Uitgaande van de normale verdeling rekende Gembris uit dat het wereldrecord $R(n)$ na n jaren zich dan als volgt ontwikkelt:

$$R(n) = \mu + \sigma(0,818 + 0,574 \ln(\ln n) + 0,349(\ln(\ln n))^2) \quad (*)$$

Deze formule geldt voor een record dat *stijgt* in waarde, zoals gewichtheffen of sprongsporten. De waarden van μ en σ hangen natuurlijk van de sport af. Voor het verspringen bij de heren geldt dat $\mu = 7,94$ m en $\sigma = 12$ cm. Deze waarden vond Gembris op grond van de records die werden bereikt tussen 1973 en 1984 bij het Duits kampioenschap verspringen.

De grafiek van de functie $\ln(x)$ (natuurlijke logaritme) stijgt eerst snel en vlakt snel af, terwijl de functie $\ln(\ln(x))$ nog veel vlakker wordt. De grafiek van $R(n)$ stijgt dus steeds langzamer in de tijd, zoals je bij de ontwikkeling van het wereldrecord ook zou verwachten. In figuur 5 zie je in rood de grafiek van $R(n)$ waarbij de normale verdeling is *gestandaardiseerd* (dat wil zeggen: $\mu = 0$ en $\sigma = 1$).

De grafiek in figuur 5 heeft pas betekenis vanaf $n = 2$ (of, als we de tijd niet in hele jaren meten, vanaf $n = 1,552$). De horizontale as begint daarom ook niet bij 0 (meet maar na: de afstand van de verticale as tot $n = 10$ is kleiner dan de afstand tussen $n = 10$ en $n = 20$). Dit komt doordat $R(n)$ een minimum heeft voor $n \approx 1,552$. Dit kun je uitrekenen



Figuur 4 De normale verdeling

VAN WERELDRECORDS

door de afgeleide

$$\frac{dR}{dn} = \frac{\sigma(0,574 + 0,698 \ln(\ln n))}{n \ln n}$$

gelijk te stellen aan 0. Natuurlijk geldt dat hoe groter σ is, hoe korter de periode is om een nieuw record te vestigen.

Uit de bovenstaande formule voor de afgeleide van $R(n)$ kunnen we afleiden dat

$$\Delta R = \frac{\Delta n \cdot \sigma(0,574 + 0,698 \ln(\ln n))}{n \ln n}.$$

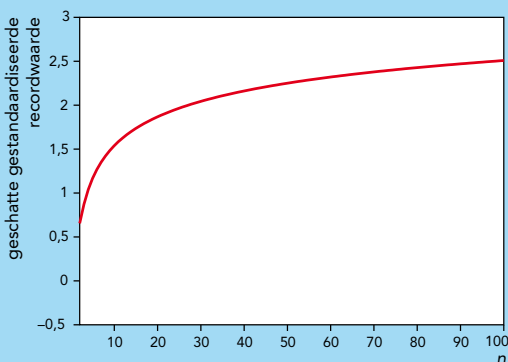
Hieraan is te zien dat voor een vaste recordverbetering ΔR (bijvoorbeeld 1 cm) verder in de tijd een steeds grotere wachttijd Δn nodig zal zijn. Maar het bijzondere van deze beschouwing is dat het zeker zal blijven gebeuren, ook al worden de sporters gemiddeld geen snars beter. Het toeval speelt dus een niet onbelangrijke rol bij recordverbeteringen.

TWEE VOORBEELDEN Voor het verspringen bij de heren geldt dat $\mu = 7,94$ m en $\sigma = 12$ cm. Vul je deze waarden in in (*), dan vind je $R(3) = 8,045$ m, $R(50) = 8,210$ m en $R(100) = 8,241$ m. In de eerste drie jaren is er dus een verbetering van ruim 10 cm, in de daaropvolgende 47 jaar wordt het record 16,5 cm meer, maar in de vijftig jaar die daarna nog verstrijken, is de verbetering niet meer dan 3,1 cm.

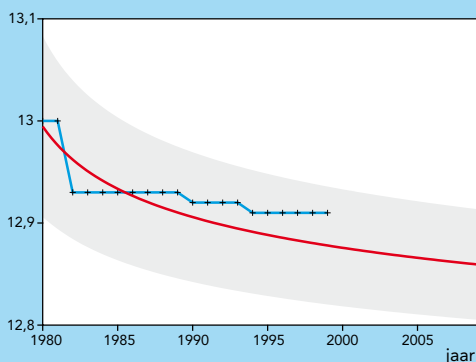
Hoe komt het dan dat verspringer Bob Beamon bij de Olympische Spelen van 1968 als een krank-

zinnige uitzondering het wereldrecord verspringen verbeterde met 55 cm, van 8,35 meter tot 8,90 meter (een grotere toename dan alle toenames in lengte van de voorafgaande veertig jaar bij elkaar)? Twee verklaringen: ten eerste zijn de waarden $\mu = 7,94$ m en $\sigma = 12$ cm vastgesteld op grond van het Duits kampioenschap, niet het wereldkampioenschap (in welk geval μ uiteraard groter zou zijn). Ten tweede doen uitzonderingen zich altijd voor. Dat erkent ook Gembris. Dat zijn berekeningen desondanks hout snijden, blijkt wel uit het feit dat van de vele Duitse kampioenschappen die hij onderzocht, er slechts vier gevallen waren waarbij sprake was van een significante afwijking ten opzichte van een puur toevallige ontwikkeling.

Figuur 6 toont de ontwikkeling van de records van het Duits kampioenschap hordelopen op de 110 meter; de waarden van μ en σ zijn bepaald op grond van de resultaten in de periode 1980-1989. De rode grafiek toont de functie $R(n)$; deze is *dalend* omdat het bij hordelopen om snelheid gaat (in de formule staat dan een minteken voor de σ). Het grijze gebied toont wat in de statistiek heet een *betrouwbaarheidsinterval*, waar we hier verder niet op ingaan. De blauwe grafiek toont de werkelijke records, en zoals je kunt zien, wijken deze records niet sterk af van wat je volgens het toeval zou mogen verwachten. ■



Figuur 5 De grafiek van $R(n)$ met $\mu = 0$, $\sigma = 1$



Figuur 6 De grafiek van $R(n)$ voor het hordelopen op de 110 meter



■ door Klaas Pieter Hart

Als je nauwkeurig wil aangeven waar je bent, dan geef je je coördinaten door met het eeuwenoude systeem van lengte- en breedtegraden. Over de aardbol zijn twee stelsels denkbeeldige lijnen getrokken: de meridianen van de noord- naar de zuidpool, en loodrecht daarop de parallellen, evenwijdig aan de evenaar. De meridiaan die door *the Royal Observatory* in Greenwich loopt heet de *nulmeridiaan*; samen met de evenaar vormt hij een soort assenkruis, met de evenaar als *x*-as en de nulmeridiaan als *y*-as.

Het snijpunt van de nulmeridiaan en de evenaar is de oorsprong. In plaats van *x*- en *y*-coördinaten spreken we van, respectievelijk, de *geografische lengte* en *breedte*. Beide assen zijn in *graden* verdeeld. De evenaar in twee keer 180 graden: naar het westen en naar het oosten, vanaf de nulmeridiaan.

10 Als je de nulmeridiaan doortrekt naar de andere kant van de aardbol, zit je op een meridiaan die zowel 180 graden westerlengte als 180 graden oosterlengte is. De nulmeridiaan is in twee keer 90 graden verdeeld, noord en zuid.

De nulmeridiaan van de evenaar tot de noordpool is 10.000 km lang (per definitie; zo is ooit de lengte van de kilometer, en dus de meter vastgelegd), dus is één graad ongeveer 111 km. Dat is nog vrij veel en daarom is elke graad weer in 60 minuten verdeeld, en elke minuut in 60 seconden. Dit systeem is een overblijfsel van de zestigtallige



EEN SECONDE IN HET VIERKANT





schrijfwijze voor getallen uit het oude Babylon. Een minuut langs de nulmeridiaan is ongeveer 1850 meter lang, een seconde dus zo'n 30 meter.

GEOGRAFISCHE PLAATSBEPALING Langs de parallellen worden de graden, minuten en seconden steeds korter. In Delft, in het Parkje Buitenhof, ligt een kunstwerk uit 1972 dat *Geografische Plaatsbepaling Delft* heet; daar kun je zien hoeveel korter een seconde op onze breedte geworden is. Het is namelijk een vierhoek begrensd door twee parallellen en door twee meridianen. Op de foto's in de vier hoeken van deze pagina's kun je zien welke dat zijn: de meridianen op 04°, 20', 06" en 04°, 20', 07" oosterlengte, en de parallellen op 51°, 59', 29" en 51°, 59', 30" noorderbreedte.

Ik ben de hele vierhoek rondgelopen; in de noord-zuidrichting had ik dertig stappen nodig en in de oost-westrichting maar negentien. Met hoeveel seconde per seconde draait de aarde om zijn eigen as? Zodra je de vraag goed begrijpt, kun je dit makkelijk uit je hoofd uitrekenen.

Een iets lastiger vraag is: welke functie bepaalt de lengte van een seconde langs een parallel? Klopen mijn gemeten lengten ongeveer?

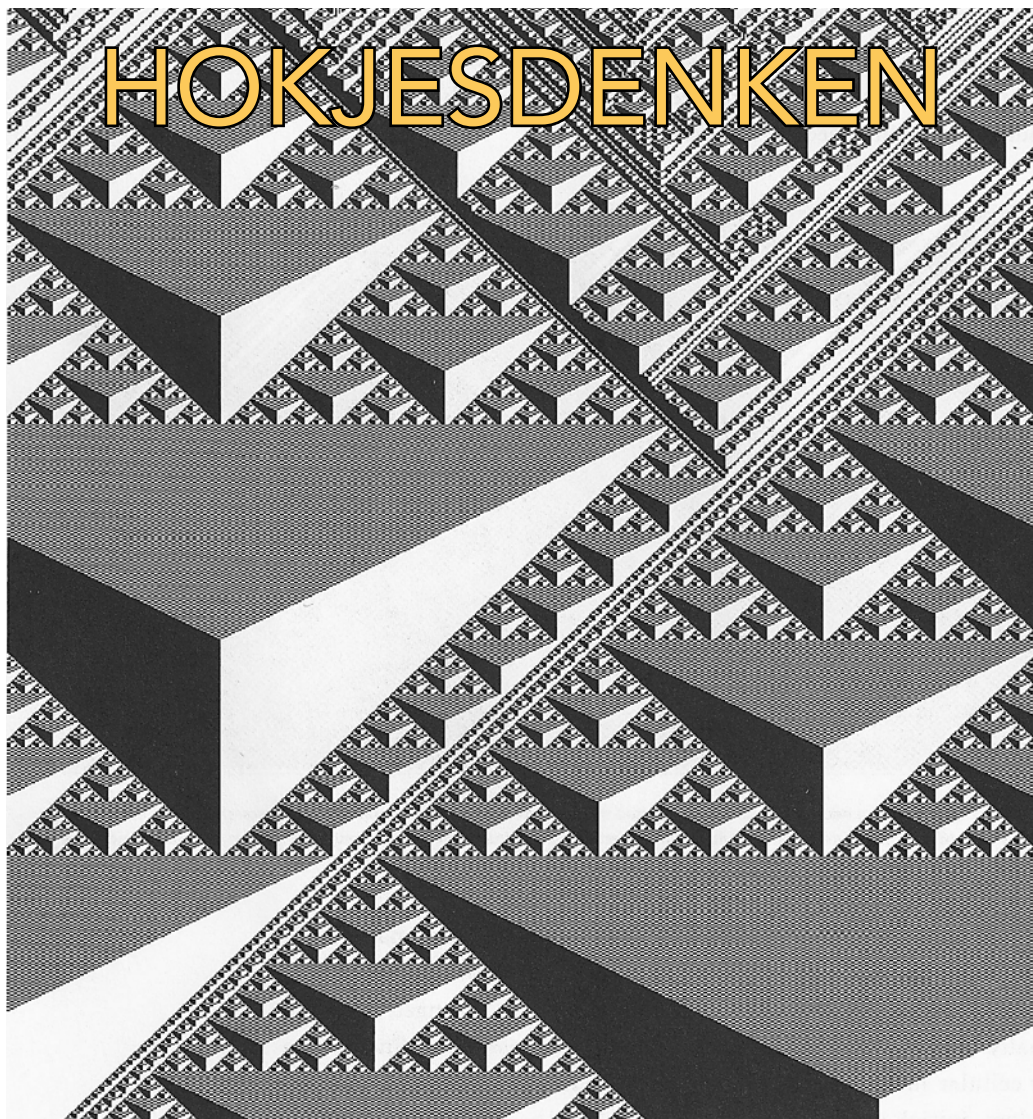
INTERNET Meer informatie kun je vinden op de site van Kunstwacht (<http://bit.ly/AyLrTz>) en op de site van Nelis Oosterwijk, die samen met Gerard Hagen en Philip van Pieterse *Geografische Plaatsbepaling Delft* ontwierp (<http://bit.ly/wqy2Ku>). ■



De prijsvraag die we in het januarinummer presenteerden, is gebaseerd op *cellulaire automaten*, een speelveld van hokjes die onder simpele regels van kleur veranderen. Stephen Wolfram, de uitvinder van het computerpakket *Mathematica*, raakte zo geobsedeerd door cellulaire automaten, dat hij twintig jaar werkte aan een bijbel over cellulaire automaten, *A New Kind of Science*. Maar van zijn claim dat dit een revolutie betekende voor alle natuurwetenschappen, is tot nu toe niets gebleken.

■ door Arnout Jaspers

GEAVANCEEERD HOKJESDENKEN



Figuur 1 Een voorbeeld van de complexe structuren die kunnen ontstaan door een 'voortplantingsregel' heel vaak toe te passen op een zwart-wit rij blokjes.

A New Kind of Science is een turf van 1300 pagina's, met een stuk of duizend afbeeldingen in ultra-hoog resolutie. (Een uitgebreide preview is te vinden op www.wolframscience.com.) Daarin presenteert Wolfram een uitputtend onderzoek van een bepaald soort cellulaire automaat: je begint met een rij hokjes die wit of zwart zijn (soms gebruikt hij meer dan twee kleuren), en geeft 'voortplantingsregels' voor de kleur die de hokjes op de rij daaronder moeten krijgen. Die regels zijn altijd heel simpel, bijvoorbeeld: als de twee burens van een zwart hokje wit zijn, wordt het hokje daar recht onder wit. Omdat de kleur van slechts drie hokjes de kleur van het hokje daaronder bepaalt, is dit visueel heel eenvoudig weer te geven door een balkje met $2^3 = 8$ diagrammetjes, zie figuur 2.

Juist omdat de voortplantingsregels zo simpel zijn, verwacht je dat ook de patronen die opdoemen in een groot aantal rijen onder elkaar, heel simpel zijn. Figuur 3 laat zien dat dat soms inderdaad zo is.

Toch levert de voortplantingsregel die hierboven als voorbeeld gebruikt is, al een verrassend patroon op, zie figuur 4.

Het kan niet anders, of het *fractal*-patroon zit op de een of andere manier vervat in de voortplantingsregel, maar die is hier niet uit af te lezen. Wolfram beschrijft deze elementaire constatering in zijn boek als een bijna religieuze ervaring die hem ertoe dreef met zijn twintig jaar durende project te beginnen.

CHAOTISCHE PATRONEN Meer nog dan fractal-patronen, waar nog een strakke regelmaat in zit, is Wolfram gefascineerd door het feit dat een simpele regel vanuit een simpele begintoestand (één zwart blokje) een patroon kan produceren dat er grotendeels chaotisch en toevallig uitziet. In figuur 5 zie je de eerste 50 regels van het eerste voorbeeld op dit gebied dat hij vond.

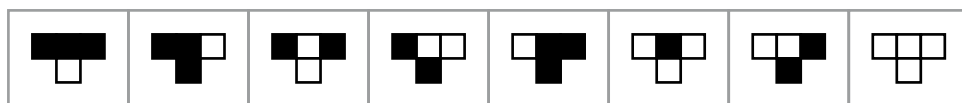
Toen Wolfram dit schijnbaar chaotische patroon op zijn beeldscherm zag verschijnen, vroeg hij zich natuurlijk af of dit zo zou blijven. Zou, naarmate de piramide breder werd, de regelmaat het toch winnen van de chaos? In figuur 6 zie je een groter deel van de in principe oneindige piramide. Links wordt een min of meer regelmatig patroon van diagonale strepen zichtbaar, maar rechts heerst onverminderd de chaos.

In figuur 7 is de piramide uitgebreid tot ongeveer 2 miljoen blokjes, zodat ze individueel niet meer zichtbaar zijn, maar het beeld blijft hetzelfde: een streperige structuur links, en chaos rechts. Niemand kan voorspellen of dat ook zo zal blijven als je nog verder 'uitzoomt' en een miljard blokjes bekijkt, dat is alleen maar te checken door een computer het echt te laten doen.

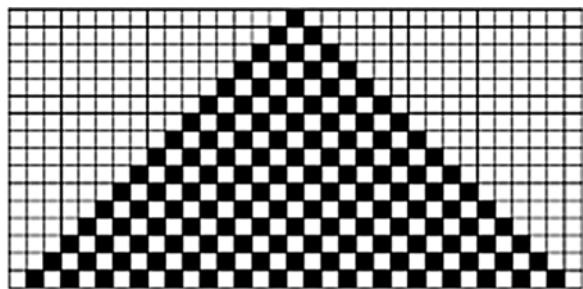
Wolfram zette daarna zwaar computergeschut in om talloze varianten van zijn cellulaire automaten door te rekenen. Daarbij gebruikte hij ook ingewikkeldere voortplantingsregels. Voor de structuur in figuur 1 gebruikte hij een regel waarbij niet alleen de naaste burens, maar ook de burens daarvan invloed hebben op de kleur van de hokjes in de volgende rij.

UNIVERSUM Wolfram bouwt voort op werk van anderen, zoals John Conway en James Gleick, maar vindt zelf dat zijn project een heel nieuw paradigma voor de wetenschap schept (pas altijd op als iemand het woord paradigma in de mond neemt, dat wijst bijna altijd op ernstige zelfoverschatting). Volgens Conway is het hele universum eigenlijk een cellulaire automaat, en moet het in principe mogelijk zijn om een relatief simpele voortplantingsregel te ontdekken, waardoor de hele geschiedenis van het heelal met alle natuurwetten waar het aan voldoet symbolisch gereproduceerd wordt in een piramide zoals op de plaatjes in dit artikel.

De concrete voorbeelden die Wolfram geeft in



Figuur 2 Voorbeeld van een voortplantingsregel.



Figuur 3 Een voortplantingsregel en het bijbehorende patroon van een groot aantal rijen.

A New Kind of Science zijn heel bescheiden: streepjespatronen op schelpen of andere biologische patronen zijn inderdaad met cellulaire automaten te reproduceren. Maar hoe moet je met een cellulaire automaat zelfs zoiets eenvoudigs als de baan van een planeet om een ster weergeven? Ook Wolfram blijft daar heel vaag over.

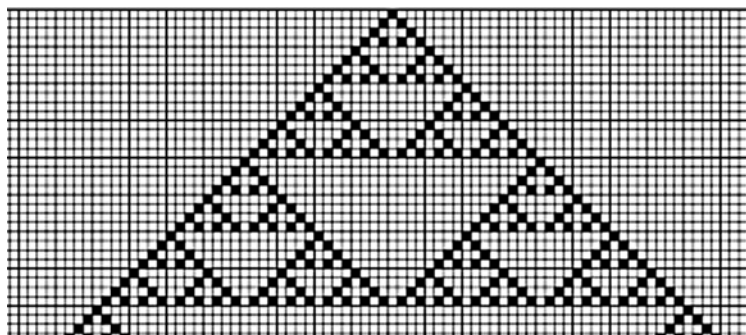
Stephen Wolfram is de – inmiddels schatrijke – uitvinder van *Mathematica*, het eerste commercieel verkrijgbare computerprogramma dat met formules kon werken. Maar helemaal zelf bedacht heeft hij het niet. Wolfram was ooit assistent van de latere Nederlandse Nobelprijswinnaar natuurkunde Martinus Veltman. Veltman was toen bezig met enorm ingewikkelde berekeningen aan elementaire deeltjes, waarvoor duizenden diagrammen moesten worden doorgerekend. Niemand kon dat nog foutloos met de hand doen, dus bedacht Veltman een computerprogramma dat hij *Schoonschip* noemde. Dit was het allereerste programma dat niet alleen berekeningen deed, maar ook manipulaties met va-

riabelen en functies aankon, en het was in zekere zin de voorloper van *Mathematica*.

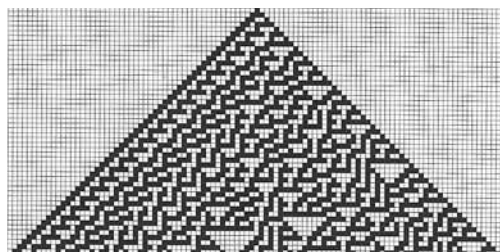
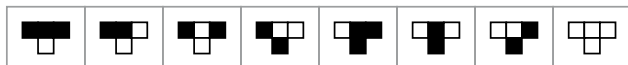
Uiteraard herinnerde Veltman zich Wolfram nog goed: ‘Hij is ongetwijfeld heel slim, maar dat zijn er zoveel.’ Van zijn fysisch inzicht was hij echter niet onder de indruk. Toen in 2002 *A New Kind of Science* uitkwam kreeg ook hij een exemplaar toegestuurd, maar na wat bladeren was hij er snel klaar mee. Veltman zag heel weinig in de grandioze claims van Wolfram, als zouden de hele natuurkunde en eigenlijk alle overige natuurwetenschappen opnieuw moeten worden opgebouwd op basis van cellulaire automaten.

Ook de bekende kosmoloog Vincent Icke was destijds niet onder de indruk van Wolframs stokpaardje: ‘Voor iemand die alleen maar een hamer heeft, lijkt alles op een spijker’.

Inmiddels is Wolframs *A New Kind of Science* al weer tien jaar oud, en de invloed van het boek op de gangbare wetenschap is vrijwel nihil gebleken. ■



Figuur 4 Het patroon bij de voortplantingsregel van figuur 2.



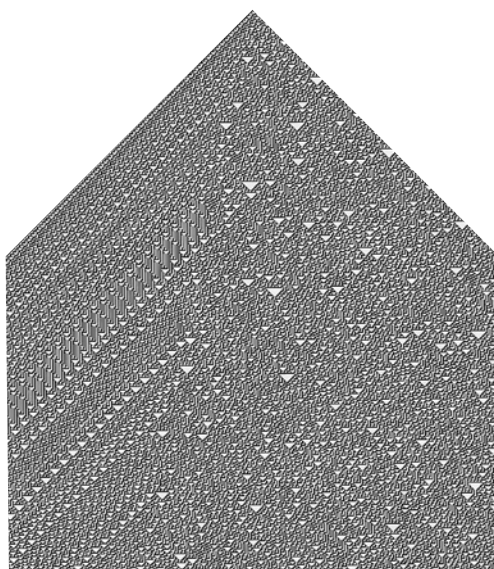
Figuur 5 Een voortplantingsregel en het bijbehorende patroon van een groot aantal rijen.

PRIJSVRAAG De prijsvraag die we in het vorige nummer uitschreven, is gebaseerd op cellulaire automaten. Inmiddels is menigeen aan het puzzelen geslagen. En al deze puzzelaars komen tot de ontdekking dat wat ze ook doen, de dwangmatige doorrijder uiteindelijk altijd buiten het speelbord terecht komt. Zelfs als het bord wordt vergroot tot 25 bij 25, dan nog rijdt de auto een keer van het bord af. We gaven bij de beschrijving van uitdaging 2c al aan dat dit altijd het geval zal zijn; dit volgt uit de Stelling van Cohen en Kung.

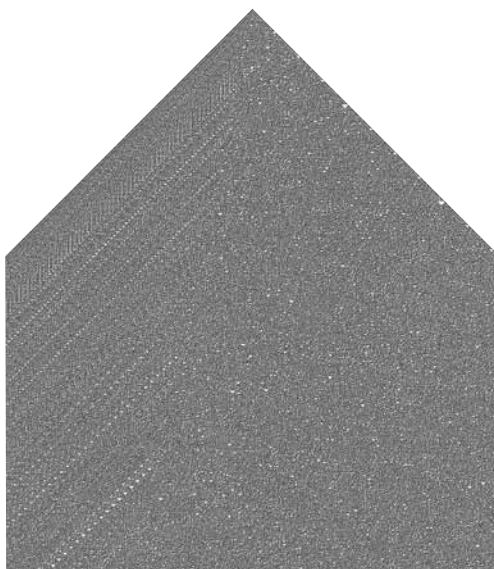
Een paar vragen waarover puzzelaars ons mailden, beantwoorden we hieronder.

1. Hoeveel rode en hoeveel paarse tegels heeft *De dwangmatige doorrijder* aan het begin? Antwoord: dat mag je zelf bepalen. Omdat de route volledig wordt bepaald door je startpunt en de manier waarop de tegels zijn gelegd, is dat juist waar het om draait. Er hoeven dus niet, bijvoorbeeld, precies evenveel rode als paarse tegels zichtbaar te zijn in de beginsituatie.

2. Klopt het dat je bij *Blokkerende botsauto's* op de blauwe tegels alleen rechtdoor of linksaf mag? Antwoord: ja, zo is de spelregel geformuleerd en die klopt. Het is dus de bedoeling dat je op een blauwe tegel óf geen, of één klaverblad volgt. Binnen één beurt mag je dus niet twee of drie klaverbladen doorlopen, om zodoende om te keren of rechtsaf te slaan.



Figuur 6 Een groter deel van de piramide volgens de voortplantingsregel in figuur 5.



Figuur 7 Een nóg groter deel van de piramide. Je ziet: een streperige structuur links, en chaos rechts.

Diffusion Tensor Imaging (DTI), een speciaal soort MRI-scan, levert driedimensionale informatie over de verbindingen tussen, bijvoorbeeld, hersencellen. Onbewerkte plaatjes van een stel hersenen zien er dan uit als een grote kluwen garen. De Groningse wiskundige Maarten Everts ontwikkelde automatische tekentechnieken om een beter ruimtelijk inzicht in dit soort scans te krijgen.

■ door Arnout Jaspers

DE COMPUTER ALS

ILLUSTRAT

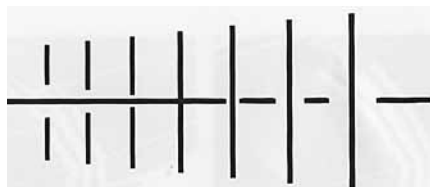
Een plaatje zegt meer dan duizend woorden, wil het cliché, maar als het beeld een taal spreekt die je niet verstaat, word je nog niets wijzer. Moderne scan-technieken als MRI, CT en DTI kijken dwars door levend weefsel heen en leveren een driedimensionale dataset op. Maar of een arts of onderzoeker daar iets aan ziet, hangt voor een groot deel af van hoe je die data weergeeft.

Een MRI-scan detecteert met magnetische velden en radiostraling heel nauwkeurig hoeveel water op een bepaald punt aanwezig is. DTI is een speciale vorm van MRI, waarbij in elk blokje van ongeveer $1 \times 1 \times 1$ mm wordt gedetecteerd in welke richting de watermoleculen het meeste bewegen (beter gezegd: *diffunderen*). Dat is vooral onthullend in de hersenen, omdat het zichtbaar maakt hoe de lange, smalle uitlopers van zenuwcellen lopen en onderling verbonden zijn (zie ook het artikel 'Rekenen met medische pixels' in *Pythagoras* 46-5 (april 2007)).

Het kan echter lastig zijn om in een DTI-scan door de bomen het bos nog te zien. Maarten Everts promoveerde in december 2011 aan de Rijksuniversiteit Groningen op nieuwe methodes om de dataset van een DTI-scan om te zetten in plaatjes die ook echt inzicht geven in hoe de hersenen in elkaar zitten.

Zijn methode berust op twee principes:

- lijnen die dicht bij elkaar liggen en in bijna dezelfde richting lopen worden samen genomen;
- elke lijn krijgt een 'illustratieve halo'. Deze bestaat uit twee witte banen ter weerszijden van een zwarte lijn, waarvan de breedte afhankelijk is van de afstand in de kijkrichting tot de eerste lijn die daarachter ligt. Het effect is verrassend 'tekenend', het levert plaatjes op die door een menselijke illustrator gemaakt lijken te zijn. Maar de computer kan iets wat geen mens kan: *real time* uitrekenen hoe de halo's moeten veranderen als de hoek waaronder je tegen zo'n scan aankijkt verandert. Dat levert filmpjes op met een 'echter dan echt' 3D-effect, zie bijvoorbeeld <http://bit.ly/vo86Ep>. ■



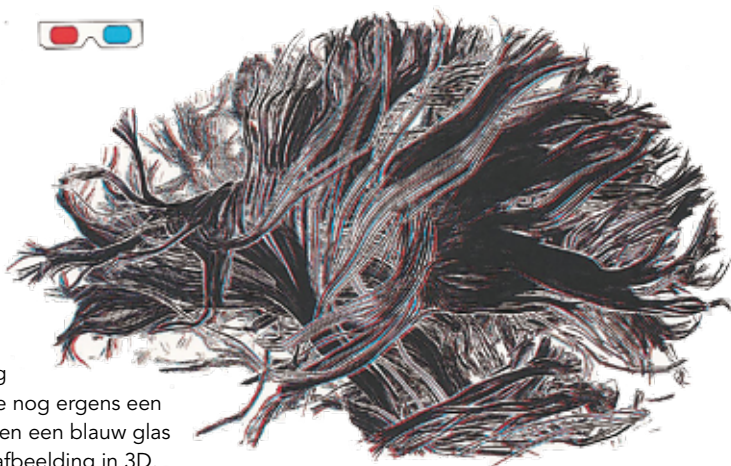
Principe van de 'illustratieve halo': de breedte van de witte banen die een lijn flankeren, is afhankelijk van de afstand in de kijkrichting tot achterliggende lijnen. Het computerprogramma rekent al deze afstanden zo snel uit en past de baanbreedtes zo snel aan, dat de kijkrichting ook vele malen per seconde kan veranderen, zodat een filmpje met verrassend realistisch 3D-effect ontstaat.



OR



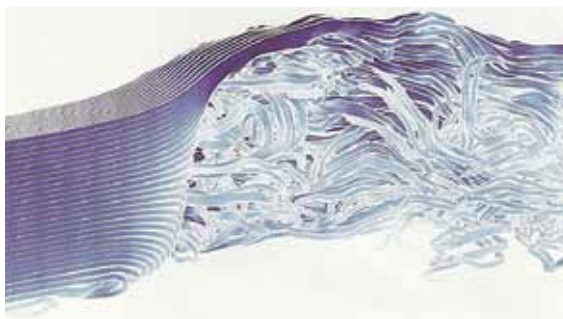
Alsof het door Leonardo da Vinci getekend is: DTI-scan van de hersenen, bewerkt met de illustratieve halo-techniek.



Tweekleurenafbeelding van de hersenen. Als je nog ergens een briljetje met een rood en een blauw glas hebt liggen, zie je de afbeelding in 3D.

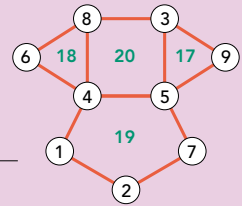


Verschillende manieren om dezelfde dataset weer te geven. Linksboven: alle lijnen weergegeven als buisjes. Rechtsboven: gewone lijntekening. Linksonder: alle lijnen met halo's. Rechtsonder: lijnen met illustratieve halo's.



Met DTI is ook de stroming in vloeistoffen zichtbaar te maken. In feite beweegt de vloeistof overal en zijn er oneindig veel lijnen, maar de illustratieve halo-techniek groepeerde bewegingen en zorgt ervoor dat je veel meer structuur in het patroon ziet. Met kleur kan ook de snelheid van de vloeistof aangegeven worden (donkerblauw: langzaam, lichtblauw: snel).

■ door Jan Guichelaar



Getallen plaatsen

De lezers Martijn Bak en Jaap van de Griend schreven dat het kleine nootje *Getallen plaatsen* in het septembernummer nog een andere oplossing heeft dan de oplossing die we in het novembernummer gaven. De oplossing van Martijn en Jaap zie je hierboven.

Repunits

Dries Lemstra stelt de *repunits* (repeterende enen) aan de orde: getallen die alleen uit enen bestaan. Hij vroeg zich af hoe het met het priem-zijn van repunits zit.

Er is een verschil tussen repunits met een priem aantal enen en die met een samengesteld aantal enen. Met een priem aantal enen kan een repunit samengesteld zijn, maar ook priem zijn. Zo zijn $111 = 3 \times 37$ en $11111 = 41 \times 271$ samengesteld, terwijl

11 en 111111111111111111 (19 enen) priemgetallen zijn. Maar als het aantal enen samengesteld is, is de repunit ook samengesteld. Dat is als volgt in te zien. Indien van repunit $R(n)$ het aantal enen gelijk is aan $n = p \times q$, dan kunnen we $R(n)$ schrijven als $R(p)(10^{(q-1)p} + 10^{(q-2)p} + \dots + 10^{2p} + 10^p + 1)$. Dus $R(pq)$ is een samengesteld getal. Voorbeeld met $n = 6 = 2 \times 3$: $111111 = 11 \times 10000 + 11 \times 100 + 11 \times 1 = 11 \times (10^4 + 10^2 + 1) = 11 \times 10101$.

Drie tegen vijf

In het vorige nummer stond de puzzel *Drie tegen vijf*: plaats vijf zwarte en drie witte stenen zó op een 5×5 vierkant, dat in elke horizontale, verticale en diagonale rij alleen maar stenen van dezelfde kleur staan. We gaven één oplossing en vroegen of er misschien nog meer oplossingen zijn. Paul van de Veen schreef een programma in Fortran en liet zo zijn computer systematisch alle mogelijkheden controleren. In totaal zijn er $25!/(5! \cdot 3! \cdot 17!) =$

60.568.200 mogelijkheden om de 8 stenen op de 25 vakjes te plaatsen. Deze ruim 60 miljoen mogelijkheden zijn niet allemaal écht verschillend: draaiingen en spiegelingen worden ook meegeteld. Paul van de Veens computer constateerde dat de puzzel (op draaiingen en spiegelingen na) exact één oplossing heeft. Dat verklaart waarom het vinden van een oplossing moeilijker is dan je op het eerste gezicht zou denken, en dat maakt de puzzel juist zo leuk.

Voetbalstatistiek

Op pagina 8 van het januarinummer begaven we ons op het glibberige terrein van de statistiek en daarbij is een fout gemaakt. Het ging om de vraag of het uitmaakt of een penaltynemer op een bepaald deel van het doel schiet.

We formuleerden de nulhypothese H_0 als volgt: 'het maakt niet uit op welk deel van het doel je schiet'. Noem verder A de gebeurtenis waarbij er minstens 25 keer raak wordt geschoten in een serie van 32 penalties. We berekenden dat $P(A | H_0) = 0,073$. Deze kans is niet zo groot, maar toch nog te groot om te zeggen: 'minstens 25 keer raak is zo onwaarschijnlijk, we concluderen dat H_0 onwaar is' (meestal hanteert men een grens van 0,05).

So far, so good. De kans $P(A | H_0)$ is echter niet

gelijk aan $P(H_0 | A)$, dus het is onjuist om te zeggen dat de kans dat H_0 waar is (gegeven het feit dat er minstens 25 keer raak is geschoten), 0,073 is. Evenmin mag je concluderen dat de kans dat H_0 niet waar is (weer onder de voorwaarde A), gelijk is aan $1 - 0,073 = 0,927$. Hierop maakte Gerard Koolstra ons attent.

Wat is de kans dat, gegeven A , H_0 waar dan wel onwaar is, dan wel? Dit is een lastige vraag. In de 'klassieke statistiek' (Fisher, Neyman-Pearson) vindt men dit zelfs een onjuiste vraagstelling. In de 'bayesiaanse statistiek' is dit wel een zinnige vraag, maar hoe bepaal je die? Als je de regel van Bayes wilt toepassen, heb je een a-priori kans op H_0 nodig en dat geeft principiële en praktische problemen.

JOURNAAL

■ door Alex van den Brandhof

Sudoku met 16 begincijfers bestaat niet

Een team van Ierse wiskundigen heeft een complex rekenalgoritme gebruikt om vast te stellen dat een sudoku met minder dan 17 begincijfers geen unieke oplossing heeft.

Hiernaast zie je een sudoku met 17 begincijfers (de zwarte cijfers). Laat je één begincijfer weg, dan is het geen geldige sudoku meer, omdat er dan meer dan één oplossing is. De vraag of er sudoku's met 16 begincijfers bestaan, heeft sudoku-wiskundigen lang beziggehouden. Men vermoedde dat zulke sudoku's niet bestaan. De Ierse wiskundige Gary McGuire heeft dit vermoeden nu bewezen.

In totaal bestaan er 5.472.730.538 essentieel verschillende ingevulde sudoku's. Neem zo'n ingevulde sudoku, en kies daaruit 16 begincijfers. Het aantal manieren om 16 cijfers uit 81 te kiezen, is $\binom{81}{16} = 33.594.090.947.249.085$ (ongeveer 33×10^{15}). Een potentiële manier om het vermoeden te bewijzen, is door al die sudoku's met 16 begincijfers na te lopen. Dat zou echter veel te veel tijd kosten: ook voor snelle computers is het een ondoenlijke taak om alle mogelijkheden na te gaan.

McGuire bedacht daarom een paar slimigheden om dit aantal te reduceren. Het idee is gebaseerd op wat wiskundigen *onvermijdelijke sets* noemen. Een deelverzameling U van een ingevulde sudoku S heet een onvermijdelijke set, indien elke

7	9	3	6	8	4	5	1	2
4	8	6	5	1	2	9	3	7
1	2	5	9	7	3	8	4	6
9	3	2	7	5	1	6	8	4
5	7	8	2	4	6	3	9	1
6	4	1	3	9	8	7	2	5
3	1	9	4	6	5	2	7	8
8	5	7	1	2	9	4	6	3
2	6	4	8	3	7	1	5	9

verzameling begincijfers waarmee S uniek kan worden opgelost, ten minste één element uit U bevat.

In de afgebeelde sudoku vormen de gele vakjes een onvermijdelijke set. Immers, als je de cijfers 1 en 5 in de gele vakjes verwisselt, ontstaat er opnieuw een geldige sudoku. Dat betekent dat ten minste één van de cijfers in de gele vakjes bij de begincijfers moet horen.

Onvermijdelijke sets kunnen helpen om het probleem te vereenvoudigen: als een verzameling begincijfers *niet* elke onvermijdelijke set doorsnijdt, is het geen geldige sudoku; er zijn dan immers meerdere oplossingen. Dat betekent dat een verzameling begincijfers van elke onvermijdelijke set ten minste één element moet bevatten.

McGuire ontwierp een zogeheten 'hitting-set algoritme', waarmee hij alle onvermijdelijke sets van een ingevulde sudoku kon vaststellen. De winst: de hoeveelheid rekenwerk die nodig is om vast te kunnen stellen dat een sudoku met 16 begincijfers niet kan bestaan, wordt beheersbaar. Ongeveer 7 miljoen processoruren op het Irish Centre for High-End Computing in Dublin klaarden de klus in een klein jaar.

Gamers vinden oplossing voor complex probleem

Online gamers hebben de oplossing gevonden van een raadsel dat Amerikaanse onderzoekers al ruim tien jaar bezighield: de ruimtelijke structuur van het enzym 'retroviral protease'.

Dit enzym speelt een rol bij de groei en verspreiding van het AIDS-virus; kennis over dit enzym kan helpen bij de bestrijding ervan. De onderzoekers wisten niet precies hoe het molecuul eruit ziet. Om hier achter te komen, bedachten ze een online spel (*Fold-it*) waarin spelers ruimtelijke puzzels moeten oplossen. Over meerdere niveaus liep

de moeilijkheidsgraad op: van kleine puzzels tot het complexe probleem waarin de onderzoekers geïnteresseerd zijn. Al binnen een paar dagen waren gamers erin geslaagd een werkbaar model voor het enzym te vinden.

Computers bieden de mogelijkheid om grote groepen mensen met verschillende achtergronden tegelijk aan hetzelfde probleem te laten werken. Door deze aanpak wordt volgens de makers van het spel het beste van menselijke en kunstmatige intelligentie gecombineerd.

Als vervolg op 'Tosti aarde' in het vorige nummer gaan we nu rekenen aan afstanden en oppervlaktes op de aardbol. Daarvoor moet je wat goniometrie kennen, maar wie zich daar niet door laat afschrikken, krijgt te zien hoe je kunt vaststellen of een gesloten kromme op het aardoppervlak een echte 'reis om de wereld' genoemd mag worden.

■ door Jan Guichelaar

WERELDKROMMEN

In het artikel 'Tosti aarde' in het januarinummer beloofden we een schatting te maken van de grootte van het land op aarde dat ook een *antipode* op land heeft, uitgaande van 30% land en 70% zee. Kijk nog eens naar de dubbele gespiegelde wereldkaart uit het vorige nummer. Neem aan dat er geen correlatie (samenhang) bestaat tussen de twee over elkaar heen liggende kaarten. Dan is de kans, bij een willekeurige prik door de twee kaarten, dat je op beide land raakt gelijk aan $0,3^2 = 0,09$. Dus 9% van de aardbol bestaat uit land-land antipodenpunten.

Voor zee-zee antipoden geldt dat die 49% van de aardbol bedekken (want $0,7^2 = 0,49$). Voor zee-land antipoden is dat ten slotte natuurlijk 42% van het aardoppervlak (want $2 \times 0,3 \times 0,7 = 0,42$). Ter controle: $9 + 49 + 42 = 100$.

Blijft de vraag: mag je aannemen dat er geen samenhang bestaat tussen de twee kaarten? Op het eerste gezicht zou je denken dat ze juist wel samenhangen, want de kaarten zijn elkaars spiegelbeeld. Maar niet alleen dat, ze zijn ook over een halve wereldbol ten opzichte van elkaar verschoven. Als een punt op de aardbol niet 'weet' (of: geen invloed ondervindt van) wat er op de tegenoverliggende plek op de aardbol gebeurt, klopt de aanname.

Voor twee punten op maar 10 kilometer van elkaar is dit natuurlijk niet waar; als het ene punt in zee ligt, is de kans heel groot dat het andere punt ook in zee ligt, simpelweg omdat zeeën groot zijn, en net zoiets geldt voor landmassa's. Maar als twee punten een halve aardbol – 20.000 kilometer – van elkaar liggen, valt moeilijk te verzinnen welk geologisch proces er voor zou zorgen dat ze bij voorkeur allebei in zee, of allebei op land liggen, of bij voorkeur juist niet.

Kijk door je oogwimpers naar de gespiegelde kaarten: de aanname lijkt zo gek nog niet.

SINAASAPPELPARTEN Neem op een bol drie grootcirkels, die een driehoek ABC vastleggen, zie figuur 1. De punten A en A' , B en B' en C en C' zijn elkaars antipoden. Zo dadelijk zullen we de opper-

vlakte van de driehoek op het aardoppervlak berekenen.

Beschouw nu eerst de figuur $ABA'CA$, een sinaasappelpart met twee antipodenpunten A en A' en twee halve grootcirkels (ABA' en ACA') als begrenzing. Van dit stuk van de bol willen we de oppervlakte berekenen. De figuur is te vergelijken met de noord- en zuidpool (A en A') en twee meridianen (ABA' en ACA'). De twee vlakken door de grootcirkels maken een hoek α met elkaar (het verschil tussen de twee lengtegraden indien we de polen nemen). De oppervlakte O is dan natuurlijk het $(\alpha/2\pi)^{\text{de}}$ gedeelte van de oppervlakte van de hele bol. Hierbij nemen we de hoek in radialen ($2\pi = 360^\circ$).

De oppervlakte van een bol is $4\pi r^2$, met r de straal van de bol. Dan krijgen we voor O :

$$O = \frac{\alpha}{2\pi} 4\pi r^2 = 2\alpha r^2.$$

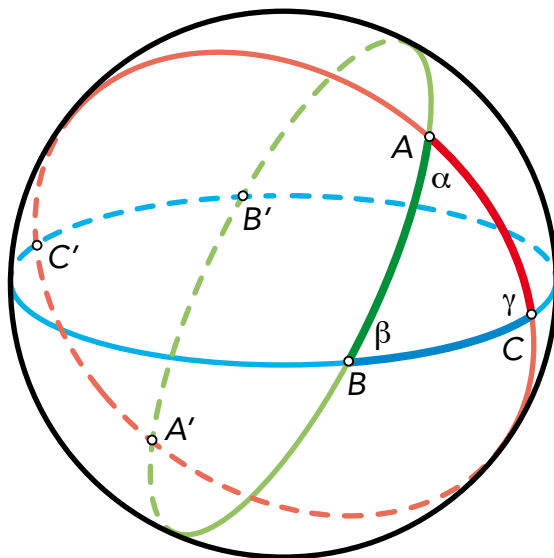
OPPERVLAKTE DRIEHOEK De oppervlakte van een sinaasappelpart was dus niet zo moeilijk. Maar ook de oppervlakte van een driehoek is met enig kijken snel te vinden.

Een driehoek op een bol begrensd door drie stukken grootcirkel heet een *Eulerse driehoek* (er zijn veel zaken in de wiskunde genoemd naar de grote wiskundige Leonard Euler (1707-1783)). Als we goed in figuur 1 kijken, zien we voor enkele oppervlaktes op de bol, waarbij we voor het gemak $r = 1$ nemen, de volgende gelijkheden:

$$\begin{aligned} AB'A'CA &= A'B'C' + AB'C', \\ BCB'AB &= ABC + CB'A, \\ CAC'BC &= ABC + ABC'. \end{aligned}$$

Dit zijn sinaasappelparten, en met $A'B'C' = ABC$ krijgen we:

$$\begin{aligned} 2\alpha &= ABC + AB'C', \\ 2\beta &= ABC + CB'A, \\ 2\gamma &= ABC + ABC'. \end{aligned}$$



Figuur 1 Drie grootcirkels op een bol, die een driehoek ABC vastleggen.

Nu geldt ook dat de driehoeken $AB'C'$, $CB'A$ en ABC' samen met ABC een halve bol vormen. Dus:

$$AB'C' + CB'A + ABC' = 2\pi - ABC. \quad (*)$$

Tel nu het drietal vergelijkingen hierboven bij elkaar op en maak gebruik van (*):

$$2(\alpha + \beta + \gamma) = 3ABC + 2\pi - ABC.$$

Dat levert voor de oppervlakte van driehoek ABC (met straal r erbij):

$$ABC = (\alpha + \beta + \gamma - \pi)r^2.$$

In een vlakke driehoek zijn de drie hoeken van een driehoek samen 180° of π radialen. Op een bol zijn de drie hoeken samen groter dan π . Het verschil $\alpha + \beta + \gamma - \pi$ heet het *sferisch excès* (het extra op een bol of sfeer). Het is een verbijsterend eenvoudige formule.

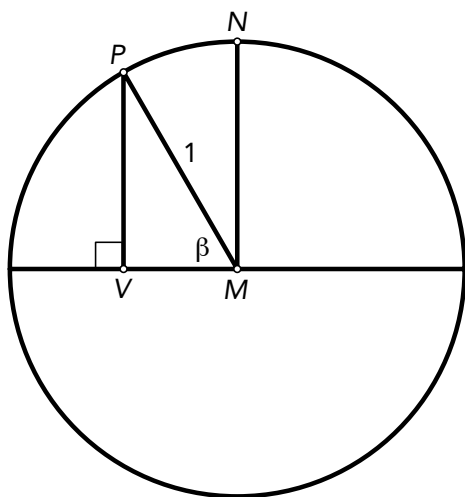
PLAATSBEPALING OP AARDE Voor de plaatsbepaling op aarde tekenen we in gedachten op de aarde breedtecirkels vanaf de evenaar en lengtecirkels of meridianen vanaf de nulmeridiaan door Greenwich in Engeland.

We gebruiken als eenheden de breedtegraden

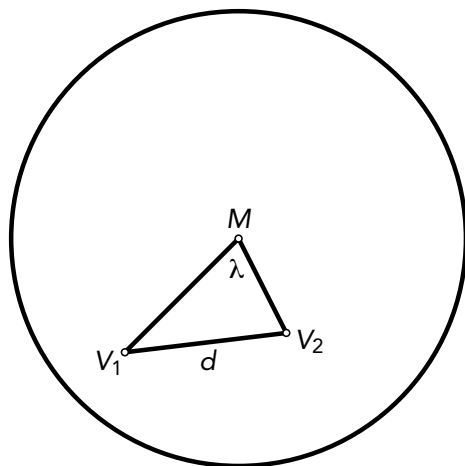
(noorderbreedte vanaf de evenaar gemeten van 0° tot 90° op de noordpool en zuiderbreedte van 0° tot 90° van de evenaar tot de zuidpool) en lengtegraden (oosterlengte van 0° tot 180° tegenover Greenwich en westerlengte van 0° tot -180°). Van veel plaatsen op aarde kennen we de coördinaten op deze manier. En als je met je iPhone via gps een plaatsbepaling kunt maken, dan krijg je de gegevens in decimale graden (bijvoorbeeld $23^\circ,51' = 23^\circ 30'36''$; met $1^\circ = 60$ minuten = $60'$ en $1' = 60$ seconden = $60''$). We zullen als eerste oefening de afstand in km op het aardoppervlak gaan berekenen tussen twee punten waarvan de breedte- en lengtegraden gegeven zijn. Daarbij gaan we ervan uit dat de verbindinglijn deel is van een grootcirkel.

'LIJNSTUK' OP AARDOPPERVLAK Neem twee punten P_1 en P_2 op het aardoppervlak en het vlak door P_1 en P_2 en het middelpunt van de aarde M . Dat vlak legt de grootcirkel door P_1 en P_2 vast. Er zijn twee delen van deze grootcirkel begrensd door P_1 en P_2 . We beschouwen het kleinste stuk (kan natuurlijk ook 180° of π radialen zijn). De 'driehoek' MP_1P_2 heeft bij M hoek $p \leq \pi$. Een deel van een grootcirkel op het aardoppervlak kan dus ook worden weergegeven door een hoek bij M .

Hoe groot is deze hoek? Teken nu het echte lijnstuk P_1P_2 . Dat ligt dus binnen de bol. In $\triangle MP_1P_2$



Figuur 2 M is het middelpunt van de aarde, N is de noordpool. Er geldt: $VM = \cos \beta$ en $PV = \sin \beta$.



Figuur 3 Een vlak door de evenaar. M is het middelpunt van de aarde. Er geldt: $MV_1 = \cos \beta_1$, $MV_2 = \cos \beta_2$ en $V_1V_2 = d$.

geldt de cosinusregel (zie het kader op pagina 23):

$$P_1P_2^2 = MP_1^2 + MP_2^2 - 2 \cdot MP_1 \cdot MP_2 \cdot \cos p.$$

Neem nu voor het gemak de straal van de aarde weer gelijk aan 1. Later voegen we deze r dan wel weer toe. Dan krijgen we p als functie van P_1P_2 :

$$\cos p = \frac{2 - P_1P_2^2}{2}. \quad (**)$$

En voor de lengte L van het kromme 'lijnstuk' op het aardoppervlak krijgen we dan verhoudingsgewijs:

$$\frac{L}{2\pi r} = \frac{p}{2\pi}$$

en dus

$$L = pr.$$

Om L in km te krijgen, moeten we $r = 6300$ km nemen (benaderd; de polen liggen 22 km dichter bij M dan de punten op de evenaar). Maar om nu L echt te berekenen, moeten we, uitgaande van het feit dat we de twee punten P_1 en P_2 in lengte- en breedtegraden weten, eerst p hierin uitdrukken. Dat doen we door eerst de echte koorde P_1P_2 te berekenen en daaruit p .

AFSTAND TUSSEN TWEE PUNTEN OP AARDE

Neem om de gedachten te bepalen de punten P_1 en P_2 op het noordelijk halfrond met breedtegraden β_1 en β_2 , en lengtegraden λ_1 en λ_2 . Voor de algemene uitkomst maakt dat niet uit.

Noem $\lambda = \lambda_1 - \lambda_2$. Als het tweede punt op het westelijk halfrond ligt, tellen de twee hoeken vanwege het minteken mooi op.

Neem door elk van de punten P_1 en P_2 het vlak door M en de polen. Projecteer de punten P_1 en P_2 op het vlak door de evenaar. Dit geeft de voetpunten V_1 en V_2 . De afstanden van V_1 en V_2 tot het middelpunt van de aarde M zijn $\cos \beta_1$ en $\cos \beta_2$ en voor de hoogtes boven het vlak van de evenaar $\sin \beta_1$ en $\sin \beta_2$. In figuur 2 is de situatie voor één punt P getekend.

Voor de afstand d tussen de voetpunten geldt met behulp van de cosinusregel:

$$d^2 = \cos^2 \beta_1 + \cos^2 \beta_2 - 2 \cos \beta_1 \cos \beta_2 \cos \lambda,$$

zie figuur 3.

Als we nu langs V_1P_1 en V_2P_2 de hoogte in gaan (loodrecht op het vlak door de evenaar naar boven), krijgen we op de hoogte door P_1 (neem $\beta_2 > \beta_1$) het lijnstuk $P_1Q = d$. Dan hebben we P_1P_2 in de rechthoekige driehoek P_1P_2Q , zie figuur 4. Daarin geldt de stelling van Pythagoras; even rekenen ($\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$) levert:

$$P_1P_2^2 = d^2 + (\sin \beta_2 - \sin \beta_1)^2 = 2 - 2(\cos \beta_1 \cos \beta_2 \cos \lambda + \sin \beta_1 \sin \beta_2).$$

Dus met $(**)$ krijgen we dan:

$$\cos p = \cos \beta_1 \cos \beta_2 \cos \lambda + \sin \beta_1 \sin \beta_2.$$

Hiermee kunnen we dus uit de lengte- en breedte-

graden van twee punten op aarde eerst p en vervolgens de afstand via de grootcirkel berekenen. Voor enkele eenvoudige gevallen kun je de formule controleren. (Voor de twee polen geldt bijvoorbeeld: $\beta_1 = \pi/2$ en $\beta_2 = -\pi/2$, dus $\cos p = -1$ ofwel $p = \pi$.)

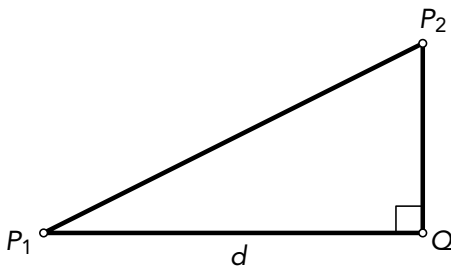
DRIEHOEK OP AARDE We weten nu dat een driehoek ABC op een bol drie hoeken α, β en γ op het boloppervlak heeft en ook de drie hoeken a, b en c bij het middelpunt M (hoek a eindigt zijn benen in de punten B en C , enzovoort). We kunnen nu, uitgaande van de lengte- en breedtegraden van de drie punten van een driehoek, de drie hoeken a, b en c berekenen. Maar voor de oppervlakte van de driehoek hebben we de hoeken op het oppervlak α, β en γ nodig. Hoe komen we van a, b en c (de hoeken bij M) naar α, β en γ (op de bol)?

Hiervoor kunnen we de zogeheten *cosinusregel voor boldriehoeken* gebruiken. Die luidt:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha.$$

Er zijn er nog twee natuurlijk (net als bij de gewone cosinusregel): één met $\cos \beta$ en één met $\cos \gamma$. We zullen deze cosinusregel hier niet afleiden. Het is wat meer gedoe dan de vorige afleidingen, maar niet echt veel moeilijker. Met dit laatste gereedschap kunnen we dan van elke drie punten op de werelddol de oppervlakte van de Eulerse driehoek berekenen.

WERELDKROMME In de vorige aflevering gaven we als definitie van een 'reis om de wereld': *een gesloten kromme, die de aardbol verdeelt in twee ge-*



Figuur 4 Er geldt: $P_2Q = \sin \beta_2 - \sin \beta_1$ en $P_1Q = d = V_1V_2$.

DE COSINUSREGEL

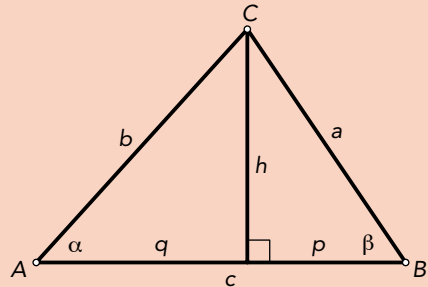
Zie onderstaande figuur.

Gebruik twee keer de stelling van Pythagoras:

$$\begin{aligned} a^2 &= h^2 + p^2 = h^2 + (c - q)^2 = \\ &= h^2 + c^2 + q^2 - 2cq = \\ &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha. \end{aligned}$$

Natuurlijk geldt ook:

$$\begin{aligned} b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta, \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma. \end{aligned}$$



lijke oppervlaktes (een wereldkromme). Als we nu een echte reis om de wereld hebben gemaakt, die de aarde niet verdeelt in twee gelijke stukken, wanneer kan het dan toch een echte reis om de wereld genoemd worden?

Kijk naar de volgende gedachteprocedure. Neem een tocht die bestaat uit een (groot) aantal stukken van grootcirkels. Kies op twee opvolgende stukken een punt. Neem het stuk van de verbindende grootcirkel tussen deze twee punten op in de 'reis' en laat de 'omweg' weg. De totale reis wordt dan korter, omdat de driehoeksongelijkheid ook voor Eulerse driehoeken geldt (in de gewone driehoek ABC geldt $AB < BC + CA$, maar ook voor de bogen geldt $bg AB < bg BC + bg CA$). Probeer dat maar eens aan te tonen.

De ene 'helft' wordt nu *groter* in oppervlakte en de andere helft *kleiner*. Probeer dat nu zo te doen dat het *grootste deel kleiner* en het *kleinste deel groter* wordt. Als je door een aantal afsnijdingen de route zó kunt maken dat de twee helften gelijke oppervlakte hebben, dan heb je een wereldkromme gemaakt, en noemen we de oorspronkelijke route een echte wereldreis.

Dit kan zeker niet altijd. Immers, neem een reis rond de noordpool (neem voor het gemak een breedtecirkel), op het noordelijk halfrond. Een afsnijding maakt het *kleine deel kleiner* en het *grote deel groter*. Dan kom je er dus nooit. ■

Je kunt vandaag de dag geen dagblad openslaan, of je vindt er wel een sudoku in. Het oplossen kan behoorlijk verslavend zijn. In deze jaargang van *Pythagoras* schrijven Aad Thoen en Aad van de Wetering in elke aflevering een artikel over sudoku's; niet over het oplossen ervan, maar over fraaie eigenschappen van het ingevulde 9×9 diagram. In deze vierde aflevering draait alles om *diagonalen*.

■ door Aad Thoen en Aad van de Wetering

SUDOKU'S EN DIAGONALEN

De rijen, kolommen en 3×3 vakken in een sudoku zijn om een neologisme te gebruiken vlijnen. Een *vlijn* is een eenheid van 9 velden waarin de cijfers 1 tot en met 9 moeten staan. Diagonalen zijn in het algemeen geen vlijnen. Wel zijn in een Xudoku per definitie de hoofddiagonalen vlijnen.

Welbeschouwd lenen de diagonalen in een 9×9 Latijns vierkant zich slecht voor vlijnschap. Een Latijns vierkant waarin alle doorgetrokken diagonalen ook vlijnen zijn heet *pandianaal*. Een bekende stelling zegt: een Latijns vierkant van orde n is pandianaal dan en slechts dan als de grootste gemeene deler van n en 6 gelijk is aan 1. De waarde $n = 9$ hoort daar niet bij. Het kleinste pandianaale vierkant is 5×5 , het is als ruit verwerkt in figuur 1.

SEMI-PANDIANAAL Wat wél haalbaar is in een sudoku, is 'semi-pandianaal'. In figuur 2 zijn alle doorgetrokken diagonalen van linksonder naar rechtsboven vlijnen! Ter verduidelijking zijn drie van die negen diagonalen gekleurd. Alternatief kunnen verschillende cijfers, zelfs puntsymmetrisch, worden gerealiseerd op de diagonalen van even of oneven lengte, zie figuur 3 en 4. De combinatie van beide is echter onmogelijk.

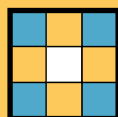
Anderzijds kunnen we er ten volle gebruik van maken dat herhaling van cijfers op de diagonalen is toegestaan. Niet minder dan vijf identieke cijfers kunnen op één diagonaal voorkomen! In figuur 5 is dat vier keer uitgevoerd, en wel draaisymmetrisch. Wellicht een goede kandidaat voor de schoonheidswedstrijd? Figuur 6 probeert indruk te maken met

een draaimolentje van even cijfers, figuur 7 met paren van gelijke trio's. Ze draaien alle lustig rond om hun beste kanten te laten zien. Figuur 8 laat zich het beste *modulair* bekijken, dat wil zeggen op de torus: we plakken in gedachten de rechter verticale rand vast aan de linkerrand en de boven- aan de onderkant.

Daardoor heeft elk cijfer, op het middelste cijfer in elk vak na, ten minste één gelijke *diabuur*: een diagonale buur, die zich eventueel uitstrekt over een rand heen. Hier is dat voor elkaar gekregen via *verschuiving* van gelijke rijen én kolommen over één veld. Verder maakt figuur 8 het wel heel bont met zes complete diagonalen die elk uit drie gelijke trio's bestaan!

In de volgende aflevering komt andersoortige *verschuiving* aan bod. Nog meer kandidaten die pronken met gelijke diaburen zullen we zien in de laatste aflevering.

PUZZEL Ook deze aflevering besluiten we met een puzzel. De voorwaarde bij de puzzel in figuur 9 is: ongelijke diaburen. Elk cijfer heeft 8 burens: 4 orthoburens (geel) en 4 diaburen (blauw), zie het onderstaande vierkantje. Het is nu een vereiste dat ook de diaburen ongelijk zijn aan het centrale cijfer. De oplossing staat op pagina 33. ■



9	8	5	7	1	4	2	6	3
6	1	3	9	2	5	4	7	8
4	2	7	8	3	6	9	1	5
8	5	2	1	4	7	6	3	9
3	6	9	2	5	8	1	4	7
1	7	4	3	6	9	8	5	2
5	9	1	4	7	2	3	8	6
2	3	6	5	8	1	7	9	4
7	4	8	6	9	3	5	2	1

Figuur 1 Een 5 × 5 Latijnse ruit

1	2	3	4	5	6	7	8	9
4	5	7	3	8	9	1	2	6
8	6	9	1	2	7	5	4	3
2	1	5	6	4	8	3	9	7
7	9	4	2	3	5	6	1	8
3	8	6	7	9	1	2	5	4
5	3	1	8	7	4	9	6	2
9	4	2	5	6	3	8	7	1
6	7	8	9	1	2	4	3	5

Figuur 2 Deze sudoku is semi-pandiagonaal

1	5	4	9	2	8	7	6	3
3	6	2	4	7	5	9	1	8
9	7	8	6	1	3	4	2	5
8	1	9	3	4	2	5	7	6
6	2	7	1	5	9	3	8	4
4	3	5	8	6	7	1	9	2
5	8	6	7	9	4	2	3	1
2	9	1	5	3	6	8	4	7
7	4	3	2	8	1	6	5	9

Figuur 3 'Even' diagonalen met verschillende cijfers

8	3	7	6	9	4	1	2	5
4	1	9	5	7	2	3	8	6
2	5	6	1	3	8	7	9	4
9	7	8	4	6	1	2	5	3
3	4	5	8	2	9	6	7	1
1	6	2	3	5	7	9	4	8
7	8	4	9	1	3	5	6	2
5	9	1	2	4	6	8	3	7
6	2	3	7	8	5	4	1	9

Figuur 4 'Oneven' diagonalen met verschillende cijfers

7	2	6	4	8	3	5	1	9
3	8	9	2	1	5	7	6	4
5	1	4	9	6	7	8	3	2
9	5	1	6	7	2	3	4	8
4	3	8	1	5	9	2	7	6
2	6	7	8	3	4	9	5	1
8	7	2	3	4	1	6	9	5
6	4	3	5	9	8	1	2	7
1	9	5	7	2	6	4	8	3

Figuur 5 Vijf gelijke oneven cijfers

2	4	9	7	1	5	3	8	6
6	7	5	8	3	4	9	1	2
1	3	8	9	2	6	4	5	7
5	8	2	3	6	9	7	4	1
7	1	4	2	5	8	6	9	3
9	6	3	1	4	7	8	2	5
3	5	6	4	8	1	2	7	9
8	9	1	6	7	2	5	3	4
4	2	7	5	9	3	1	6	8

Figuur 6 Gelijke even cijfers

7	8	6	4	3	5	2	9	1
3	2	1	9	8	7	5	6	4
4	5	9	1	6	2	7	3	8
5	9	4	6	1	8	3	7	2
1	6	2	7	5	3	8	4	9
8	3	7	2	9	4	6	1	5
2	7	3	8	4	9	1	5	6
6	4	5	3	2	1	9	8	7
9	1	8	5	7	6	4	2	3

Figuur 7 Paren van gelijke trio's

6	7	2	9	1	8	3	4	5
1	4	9	5	2	3	7	8	6
8	3	5	4	6	7	2	9	1
3	5	4	6	7	2	9	1	8
7	8	6	1	5	9	4	2	3
2	9	1	8	3	4	6	5	7
9	1	8	3	4	6	5	7	2
4	2	3	7	8	5	1	6	9
5	6	7	2	9	1	8	3	4

Figuur 8 Trio's gelijke diaburen

					5			
						8		
	5			6	7			
			4			1	9	6
			7		8			
	6						3	

Figuur 9 'Diaverbod'-puzzel

Elk jaar nemen enkele tientallen leerlingen die hoog zijn geëindigd bij de Nederlandse Wiskunde Olympiade deel aan een training ter voorbereiding op de Internationale Wiskunde Olympiade, de Benelux Wiskunde Olympiade en – dit jaar voor het eerst – de European Girls' Mathematical Olympiad. De training omvat onderwerpen die buiten de middelbare-schoolstof vallen, maar toch nodig zijn om een kans te maken bij zo'n internationale wedstrijd. Een van die onderwerpen is *invariantie*.

■ door Merlijn Staps

VLIEGENDE KRAAIEN EN ZIEKE SCHAAKBORDEN



26

Op een rij staan elf bomen. In elke boom zit een kraai. Een kraai kan van een boom naar een andere boom vliegen, maar een kraai mag alleen k bomen naar rechts vliegen als er tegelijkertijd een andere kraai k bomen naar links vliegt. Is het mogelijk dat alle kraaien in één boom terechtkomen?

We kunnen dit gedaan krijgen door alle kraaien naar de middelste boom te laten vliegen: van de kraaien uit de buitenste bomen vliegt er één 5 bomen naar rechts en één 5 bomen naar links, van de kraaien uit de op één na buitenste bomen vliegt er één 4 bomen naar rechts en de ander 4 bomen naar links, enzovoort. De kraai in de middelste boom blijft gewoon zitten. Het antwoord op deze vraag is dus: ja, dat is mogelijk.

EEN BOOM MINDER

Het wordt een stuk interessanter als we kijken naar tien

bomen in plaats van elf. We beginnen weer met in elke boom een kraai en stellen dezelfde eis aan de verplaatsingen van de kraaien: vliegt er een kraai k bomen de ene kant op, dan moet er een andere kraai k bomen de andere kant op vliegen. Als je nu probeert alle kraaien in één boom te krijgen, blijkt dit niet zo makkelijk te zijn. Misschien verwacht je dat het onmogelijk is: er is nu immers geen middelste boom meer. Maar dat is natuurlijk nog geen bewijs. Met het *invariantieprincipe* kunnen we deze veronderstelling echt hard maken.

Nummer eerst de bomen:

1, 2, ..., 10. Schrijf voor iedere kraai het nummer van de boom

op waar hij in zit. Bijvoorbeeld, als er drie kraaien in boom 1 zitten, twee kraaien in boom 4, twee kraaien in boom 6, één kraai in boom 7 en twee kraaien in boom 8, schrijven we op: 1, 1, 1, 4, 4, 6, 6, 7, 8, 8.

Tel deze tien getallen bij elkaar op; hun som noemen we S . Hier hebben we dus $S = 1 + 1 + 1 + 4 + 4 + 6 + 6 + 7 + 8 + 8 = 46$. In het begin, met in iedere boom precies één kraai, vinden we $S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55$.

Wat gebeurt er met de waarde van S als kraaien



zich verplaatsen? Wanneer een kraai k bomen naar rechts vliegt, neemt S met k toe. Maar de eis is, dat dan ook een kraai k bomen naar links vliegt, waardoor S met k afneemt. Daardoor zal S dus netto niet veranderen. Omdat S in het begin 55 is, blijft S altijd 55.

Stel nu dat op een gegeven moment alle kraaien in één boom zouden zitten, zeg in boom nummer i , dan is $S = 10i$. Dat betekent dat S deelbaar is door 10. Maar dat is onmogelijk, want we weten dat $S = 55$. De kraaien kunnen dus niet allemaal in één boom terechtkomen!

INVARIANTEN EN HALFVARIANTEN In het voorbeeld met de kraaien zagen we dat S niet veranderde bij elke dubbele vliegbeweging van de kraaien: we noemen S daarom een *invariant*. In allerlei processen die in de tijd veranderen, zijn invarianten te vinden. In de natuurkunde is de totale hoeveelheid energie bijvoorbeeld invariant: energie kan worden omgezet in andere soorten energie, maar er kan nooit energie bijkomen of energie verdwijnen.

In de wiskunde zijn invarianten bruikbaar om te laten zien dat een bepaalde eindsituatie niet uit een bepaalde beginsituatie bereikt kan worden. In het kraaienprobleem kunnen de kraaien zich op heel veel verschillende manieren over de bomen verspreiden en de situatie kan ook telkens op heel veel manieren veranderen. Maar de grootheid S bood ons houvast – die veranderde immers juist niet.

Stel nu dat we een grootheid hebben die dan wel niet altijd hetzelfde blijft, maar die maar ‘één kant op’ verandert: dus ofwel alleen groter wordt, ofwel alleen kleiner. Ook die wetenschap is nuttig bij wiskundige problemen en zo’n grootheid noemen we een *halfvariant*. De waarde van een halfvariant neemt dus ofwel alleen maar toe, ofwel alleen maar af.

EEN ZIEK SCHAAKBORD We bekijken nu een tweede voorbeeld, waarbij we een halfvariant zullen gebruiken.

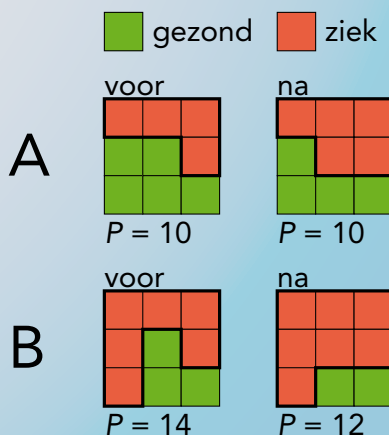
Van een 8×8 schaakbord zijn een aantal vakjes ziek. Deze ziekte is erg besmettelijk: als een vakje een zijde gemeenschappelijk heeft met minstens twee zieke

vakjes, wordt dat vakje ook ziek. Uiteindelijk zijn alle vakjes van het bord ziek. Laat zien dat er aan het begin van de epidemie minstens 8 vakjes ziek waren.

We pakken dit als volgt aan: we laten zien dat als we met 7 zieke vakjes beginnen, dan nooit alle vakjes van het bord ziek kunnen worden. Daaruit volgt dat als uiteindelijk alle vakjes ziek worden, er aan het begin minstens 8 vakjes ziek moeten zijn geweest. Dat aantal is overigens ook daadwerkelijk genoeg: als alle vakjes op een hoofddiagonaal ziek zijn, wordt het hele bord ziek.

We beginnen dus met 7 zieke vakjes, en kijken wat er gebeurt met de *omtrek* P van het zieke gebied. Aan het begin is deze omtrek hoogstens $4 \times 7 = 28$, dus $P \leq 28$; P is kleiner als sommige van de 7 vakjes tegen elkaar aan liggen. Wat gebeurt er met de omtrek van het zieke gebied als er meer vakjes ziek worden?

Bekijk eerst eens wat er gebeurt als één vakje besmet raakt. Zie onderstaande figuur voor twee voorbeelden op een klein schaakbord (3×3). In beide gevallen wordt het middelste vakje besmet. In voorbeeld A heeft het middelste vakje twee zieke en twee gezonde buren; de omtrek van het zieke gebied verandert hier niet. In voorbeeld B heeft het middelste vakje drie zieke buren en één gezonde buur; de omtrek van het zieke gebied neemt hier met 2 af. Dus in deze voorbeelden geldt: P blijft ge-



PYTHAGORAS FEBRUARI 2012

WORTELPROBLEEM

■ door Frank Roos

$$\begin{aligned}\sqrt{2,61803398874989\dots} &= 1,61803398874989\dots \\ \sqrt{5,30277563773199\dots} &= 2,30277563773199\dots \\ \sqrt{6,56155281280883\dots} &= 2,56155281280883\dots \\ \sqrt{12,5413812651491\dots} &= 3,5413812651491\dots\end{aligned}$$

Kies een niet-geheel getal groter dan 1, bijvoorbeeld 3,784, en neem de wortel ervan. Die is 1,94525... Je ziet dat de cijfers achter de komma verschillen. Dat is bijna altijd zo, niets bijzonders.

Tik nu eens 7,79 in op je rekenmachine en neem de wortel: 2,791057... De eerste twee cijfers achter de komma blijven hetzelfde. Tik 7,791 in en neem de wortel: 2,791236... Interessant, nu blijven de eerste drie cijfers achter de komma hetzelfde. Als je 7,791287847 intikt, krijg je als wortel 2,791287847. Dat kan nauwelijks toeval meer zijn, het lijkt er sterk op dat er getallen bestaan, waarvan alle decimalen hetzelfde blijven bij worteltrekken.

Hoe vind je zo'n getal? Als je een zuiver kwadraat kiest, bijvoorbeeld 36, dan is $\sqrt{36} = 6$ en zijn alle decimalen nul. Dat is erg flauw, daarom stelden we als eis dat je een niet-geheel getal moet kiezen. Lukraak wat proberen schiet natuurlijk niet op. Bovendien, de wortel van een niet-geheel getal heeft meestal oneindig veel decimalen (niet altijd natuurlijk, bijvoorbeeld $\sqrt{6,25} = 2,5$). Hoe kun je ooit zeker weten dat ze *allemaal* gelijk blijven bij worteltrekken?

DE OPLOSSING Kies een getal $n + a$. Hierbij is n een natuurlijk getal, terwijl a een reëel getal tussen 0 en 1 is. Als $\sqrt{n+a} = m + a$ voor een natuurlijk ge-

tal m , dan hebben we ons doel bereikt, want de cijfers achter de komma van het gekozen getal blijven dan gelijk na het trekken van de wortel. Die zekerheid heb je met '+' ingebouwd! Het hele deel van de wortel, m , is natuurlijk kleiner dan n .

Door links en rechts te kwadrateren, krijg je een kwadratische vergelijking in a :

$$a^2 + (2m - 1)a + m^2 - n = 0.$$

Deze vergelijking kun je oplossen; je vindt voor a dan uitdrukkingen in n en m . Er zijn twee oplossingen, maar omdat $0 < a < 1$, voldoet slechts de oplossing

$$a = \frac{1 - 2m + \sqrt{4(n - m) + 1}}{2}. \quad (*)$$

Dus $\sqrt{n+a} = m + a$ voldoet voor paren natuurlijke getallen (n, m) en met a als in (*). De waarden van n en m moeten zó gekozen zijn, dat $0 < a < 1$. Probeer zelf te ontdekken welke waarden m kan aannemen, zodra je n gekozen hebt.

Kies je $n = 7$ en $m = 2$, dan vind je het voorbeeld terug:

$$\sqrt{7,79128784747792\dots} = 2,79128784747792\dots \quad \blacksquare$$

PYTHAGORAS OLYMPIADE

■ door Matthijs Coster, Alexander van Hoorn en Eddie Nijholt

Doe mee met de Pythagoras Olympiade! Elke aflevering bevat vier opgaven. De eerste twee zijn wat eenvoudiger; onder de goede inzendingen van leerlingen uit de klassen 1, 2 en 3 wordt een cadeaubon van Bol.com ter waarde van 20 euro verloot. De laatste twee zijn echte breinbrekers; onder de goede inzendingen van leerlingen (tot en met klas 6) wordt een Bol.com-bon van 20 euro verloot. Per aflevering wordt maximaal één bon per persoon gegeven.

Bovendien kun je je via de breinbrekers plaatsen voor de finale van de Nederlandse Wiskunde Olympiade, mocht het via de voorronden niet lukken: aan het eind van elke jaargang worden enkele leerlingen die regelmatig een correcte oplossing van de breinbrekers hebben ingestuurd, uitgenodigd voor de NWO-finale. Niet-leerlingen kunnen met de Pythagoras Olympiade meedoen voor de eer.



HOE IN TE ZENDEN? Inzendingen ontvangen we bij voorkeur per e-mail (getypt of een scan van een handgeschreven oplossing): pytholym@gmail.com.

Je ontvangt een automatisch antwoord zodra we je bericht hebben ontvangen.

Eventueel kun je je oplossing sturen naar

Pythagoras Olympiade
Korteweg-de Vries Instituut
Universiteit van Amsterdam
Postbus 94248
1090 GE Amsterdam.

Voorzie het antwoord van een duidelijke toelichting (dat wil zeggen: een berekening of een bewijs). Vermeld je naam en adres; leerlingen moeten ook hun klas en de naam van hun school vermelden.

Je inzending moet bij ons binnen zijn vóór 30 april 2012.

DE GOEDE INZENDERS VAN NOVEMBER 2011

222: Ben De Bondt (klas 5), Koninklijk Atheneum, Grimbergen; Vidan Samardzic (klas 5), Corlaer College, Nijkerk; Michelle Sweering (klas 4), Erasmiaans Gymnasium, Rotterdam; Djurre Tijsma (klas 5), Christelijk Gymnasium Beyers Naudé, Leeuwarden.

223: Ben De Bondt (klas 5), Koninklijk Atheneum, Grimbergen; Hidde van der Kemp (groep 7), Arnhemse Montessori School; Peter van der Lecq, Utrecht; Michelle Sweering (klas 4), Erasmiaans Gymnasium, Rotterdam.

224: Kees Boersma, Vlissingen; Ben De Bondt (klas 5), Koninklijk Atheneum, Grimbergen; P. Dekker, Krimpen aan de Lek; Romke E. Egbers, Meppel; Peter van der Lecq, Utrecht; Rogier Nell (klas 5), Stedelijk Gymnasium,

Leiden; Vidan Samardzic (klas 5), Corlaer College, Nijkerk; Michelle Sweering (klas 4), Erasmiaans Gymnasium, Rotterdam; Djurre Tijsma (klas 5), Christelijk Gymnasium Beyers Naudé, Leeuwarden; Rob van der Waall, Huizen.

225: Kees Boersma, Vlissingen; Ben De Bondt (klas 5), Koninklijk Atheneum, Grimbergen; P. Dekker, Krimpen aan de Lek; Peter van der Lecq, Utrecht; Rogier Nell (klas 5), Stedelijk Gymnasium, Leiden; Vidan Samardzic (klas 5), Corlaer College, Nijkerk; Michelle Sweering (klas 4), Erasmiaans Gymnasium, Rotterdam; Rob van der Waall, Huizen.

De bonnen gaan naar Hidde vd Kemp en Rogier Nell.

OPGAVE 230

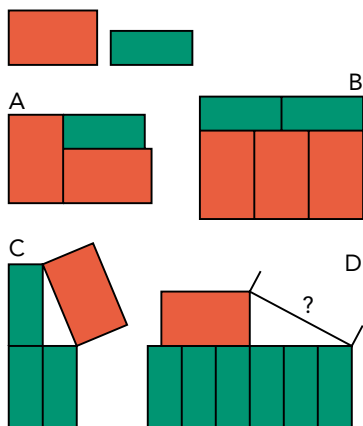
Willem fietst dagelijks van huis naar school en weer terug. Hij passeert daarbij twee kerken met kerktorens met een uurwerk die beide ongeveer de juiste tijd weergeven. Op de heenweg geven de uurwerken op de kerken op het moment van passeren exact dezelfde tijd weer, en op de terugweg is het uurwerk van de tweede kerk exact 5 minuten later dan het uurwerk op de eerste kerk. Willem fietst met een constante snelheid van 15 km/uur. Wat is de afstand tussen de twee kerken?

OPGAVE 232

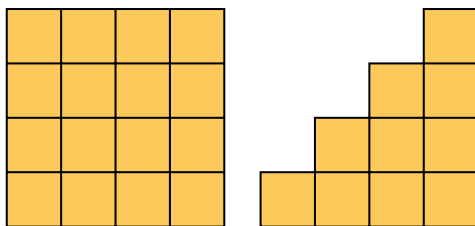
Uit een onderzoek naar het dopen van koekjes in de koffie blijkt dat 25% van de mensen het koekje loodrecht in de koffie steekt, 19,2% geeft de voorkeur aan een hoek van ongeveer 45 graden, terwijl 35% de hoek liever wat steiler ziet. De rest doopt nooit een koekje. Gegeven het feit dat deze percentages exact zijn, wat is dan het kleinste aantal mensen dat mee heeft gedaan aan dit onderzoek? (Als er bijvoorbeeld 4 mensen meedoen, kunnen de resultaten alleen maar veelvoud van 25% zijn.)

OPGAVE 231

Jannie heeft een aantal rechthoeken van karton. Er zijn twee soorten rechthoeken, rode en groene: zie de figuur. Daarmee kan zij onder meer de figuren A, B en C leggen. Ook kan ze figuur D maken, waarbij een aantal rechthoeken exact passend langs de diagonaal met het vraagteken liggen. Welke rechthoeken zijn dat, en hoe liggen die?



OPGAVE 233



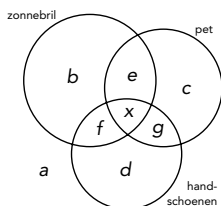
vooraanzicht

zijaanzicht

Hoeveel verschillende bouwwerken, gemaakt van identieke kubusjes, waarbij de kubusjes alleen recht op elkaar mogen staan en niet mogen zweven, leveren het bovenstaande vooraanzicht en zijaanzicht op?

OPLOSSING 222

Een klas van 25 leerlingen gaat op kamp. Van deze 25 leerlingen nemen er 15 een zonnebril mee. Verder nemen 12 leerlingen een pet mee, en nemen 10 leerlingen een paar handschoenen mee. Er zijn er acht die zowel een zonnebril als een pet mee hebben. Vijf hebben zowel een zonnebril als handschoenen mee. En vier hebben een pet en handschoenen mee. Hoeveel leerlingen hebben een zonnebril, een pet én een paar handschoenen mee?



Oplossing. Bekijk het Venn diagram hierboven.

We willen x weten. Er geldt:

$$a + b + c + d + e + f + g + x = 25$$

$$b + e + f + x = 15$$

$$c + e + g + x = 12$$

$$d + f + g + x = 10$$

$$e + x = 8$$

$$f + x = 5$$

$$g + x = 4$$

Wegens de laatste vergelijking is $x \leq 4$. Als we $x = 4$ nemen, volgt van onder naar boven achtereenvolgens: $g = 0$, $f = 1$, $e = 4$, $d = 5$, $c = 4$, $b = 6$, $a = 1$. Dus $x = 4$ voldoet. Op gelijke wijze vinden we dat 0, 1, 2 en 3 ook voldoen voor x . Het antwoord is dus $x = 0, 1, 2, 3$ of 4.

OPLOSSING 223

Matilde heeft op een blaadje papier een vierkant getekend. Ook heeft zij ergens op het blaadje een punt getekend met onzichtbare inkt. Jij mag rechte lijnen trekken en Matilde (die een speciale bril op heeft) vertelt je dan aan welke kant van de lijn het punt ligt (of op de lijn). Hoe kun je er met zo weinig mogelijk lijnen achter komen of het punt binnen, buiten of op het vierkant ligt?

Oplossing. Het kan met drie lijnen. Teken de twee diagonalen van het vierkant. Deze verdelen het vlak in vier gebieden. Je weet dan in welke van de vier het getekende punt ligt. De zijde van het vierkant die in dat gebied ligt, deelt het gebied in een deel dat helemaal binnen en een deel dat helemaal buiten het vierkant ligt. Neem als derde lijn dus deze zijde. (Als het punt op een zekere diagonaal ligt, nemen we willekeurig een van de twee mogelijke zijden.)

OPLOSSING 224

Vind alle getallen a , b , c en d zodanig dat

$$a + b + c + d = 0$$

$$ab + ac + ad + bc + bd + cd = -50$$

$$abc + abd + acd + bcd = 0$$

$$abcd = 49$$

Oplossing. Bekijk de functie

$$p(x) = (x - a)(x - b)(x - c)(x - d).$$

Dan zijn a , b , c en d de nulpunten van p . Herschrijving geeft $p(x) = x^4 - (a + b + c + d)x^3 + (ab + ac + ad + bc + bd + cd)x^2 - (a + b + c + d)x + abcd$. Het invullen van de gegevens in deze polynoom levert $p(x) = x^4 - 50x^2 + 49 = (x^2 - 1)(x^2 - 49)$. Voor de nulpunten geldt $x^2 = 49$ of $x^2 = 1$.

De nulpunten van p zijn dus -7 , 7 , -1 en 1 . En daarmee zijn dat ook de waarden van a , b , c en d .

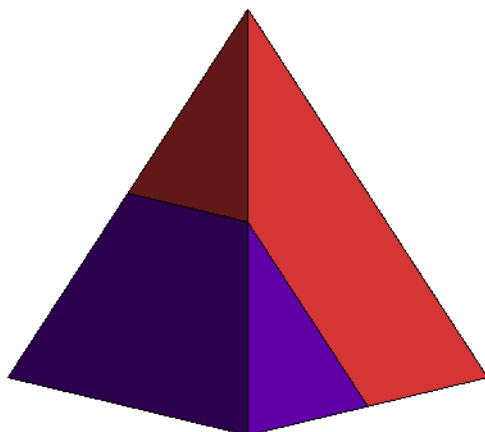
OPLOSSING 225

In een openluchtmuseum staat een miniatuurgrachtenpand met een trapegevel. De hele voorgevel heeft een oppervlakte van 79 dm^2 . De breedte van het pand is een oneven aantal decimeter (minimaal 3). De hoogte is een geheel aantal decimeter (minimaal 1). Het dak van het huis bestaat uit een trap, dus geheel bovenaan is de breedte 1, dan 3, dan 5 enzovoorts (deze trappen zijn steeds 1 dm hoog). Wat zijn de mogelijke afmetingen van een dergelijk grachtenpand?

Oplossing. Zij n de hoogte van het trapgedeelte (inclusief de onderste trede) en zij k de hoogte van de rest van het pand. De breedte is dan $2n - 1$. De oppervlakte van het trapgedeelte is de som van de eerste n oneven getallen, wat gelijk is aan n^2 , ook te schrijven als $(2n - 1) \cdot \frac{1}{4}(2n + 1) + \frac{1}{4}$; de oppervlakte van de rest van de voorgevel is $(2n - 1)k$. De totale oppervlakte is dus $(2n - 1) \cdot (\frac{1}{4}(2n + 1) + k) + \frac{1}{4} = 79$, ofwel $(2n - 1)(2n + 1 + 4k) = 315$. We kunnen 315 schrijven als $1 \cdot 315$, $3 \cdot 105$, $5 \cdot 63$, $7 \cdot 45$, $9 \cdot 35$ of $15 \cdot 21$. Met de eisen $n \geq 2$ en $k \geq 1$ vinden we voor (n, k) de mogelijkheden $(2, 25)$, $(3, 14)$, $(4, 9)$, $(5, 6)$ en $(8, 1)$. De corresponderende afmetingen, $(2n - 1, k + n)$, zijn $(3, 27)$, $(5, 17)$, $(7, 13)$, $(9, 11)$ en $(15, 9)$.

OPLOSSING SUDOKU EN 3D-PUZZEL NR. 3

5	9	8	3	7	1	4	6	2
2	7	4	6	8	5	3	1	9
6	3	1	2	4	9	8	5	7
1	5	9	8	6	7	2	4	3
4	2	6	1	9	3	5	7	8
7	8	3	4	5	2	1	9	6
9	4	5	7	3	8	6	2	1
8	6	2	9	1	4	7	3	5
3	1	7	5	2	6	9	8	4



Links zie je de oplossing van figuur 9 op pagina 25.

Rechts zie je de oplossing van de 3d-puzzel uit het januarinummer.



51ste jaargang nummer 4
februari 2012
ISSN 0033 4766

Pythagoras stelt zich ten doel jongeren kennis te laten maken met de leuke en uitdagende kanten van wiskunde. Pythagoras richt zich tot leerlingen van vwo en havo en alle anderen die jong van geest zijn.

Internet www.pythagoras.nu

Hoofredacteur Arnout Jaspers

Eindredacteur Alex van den Brandhof

Redactie Matthijs Coster,
Jeanine Daems, Jan Guichelaar,
Klaas Pieter Hart, Paul Levrie

Vormgeving Grafisch Team
Digipage BV, Leidschendam

Druk Drukkerij Ten Brink, Meppel

Uitgever Koninklijk Wiskundig
Genootschap

Verantwoordelijk uitgever Chris Zaal

Lezersreacties en kopij

Bij voorkeur per e-mail; lezersreacties naar Jan Guichelaar, jan@pythagoras.nu en kopij naar Arnout Jaspers, arnout@pythagoras.nu. Eventueel per post naar Jan Guichelaar, Pedro de Medinalaan 162, 1086 XR Amsterdam.

Abonnementen, bestellingen en mutaties

Drukkerij Ten Brink
Abonnementenadministratie
Postbus 41
7940 AA Meppel
Telefoon: 0522 855 175
E-mail:
abonnementen@pythagoras.nu

Abonnementsprijs

(6 nummers per jaargang)
€ 26,00 (Nederland),
€ 29,00 (België),
€ 32,00 (overig buitenland),
€ 17,00 (groepsabbonnement
Nederland),
€ 18,00 (groepsabbonnement België).
Zie www.pythagoras.nu voor toelichtingen.

Aan dit nummer werkten mee

Alex van den Brandhof
(alex@pythagoras.nu),
Matthijs Coster
(matthijs@pythagoras.nu),
Jeanine Daems
(jeanine@pythagoras.nu),
Jan Guichelaar
(jan@pythagoras.nu),
Klaas Pieter Hart
(kp@pythagoras.nu),
Alexander van Hoorn
(alexander@pythagoras.nu),
Arnout Jaspers
(arnout@pythagoras.nu),
Paul Levrie
(paul@pythagoras.nu),
Eddie Nijholt
(eddie@pythagoras.nu),
Frank Roos
(fd_r@yahoo.com),
Merlijn Staps
(merlijnstaps@hotmail.com),
Aad Thoen
(thoenaad37@gmail.com),
Aad van de Wetering
(avdw3b@wxs.nl).

Pythagoras wordt mede mogelijk gemaakt door de bijdragen van de onderstaande instituten en instellingen.

3D-PUZZEL

■ door Paul Levrie
(Departement IWT,
Karel de Grote-Hogeschool,
Hoboken (Antwerpen))



Een fraaie 3d-puzzel ontworpen door Oskar van Deventer. Kleef de laatjes van vijf luciferdoosjes vast aan de hulsjes zoals op de foto's. De bedoeling is om de vijf aan elkaar gekleefde doosjes zó in elkaar te schuiven dat alle luciferdoosjes gesloten zijn. De oplossing vind je in het volgende nummer van *Pythagoras*.