

PYTHA GORAS

WISKUNDETIJDSCHRIFT VOOR JONGEREN

De weg naar de top

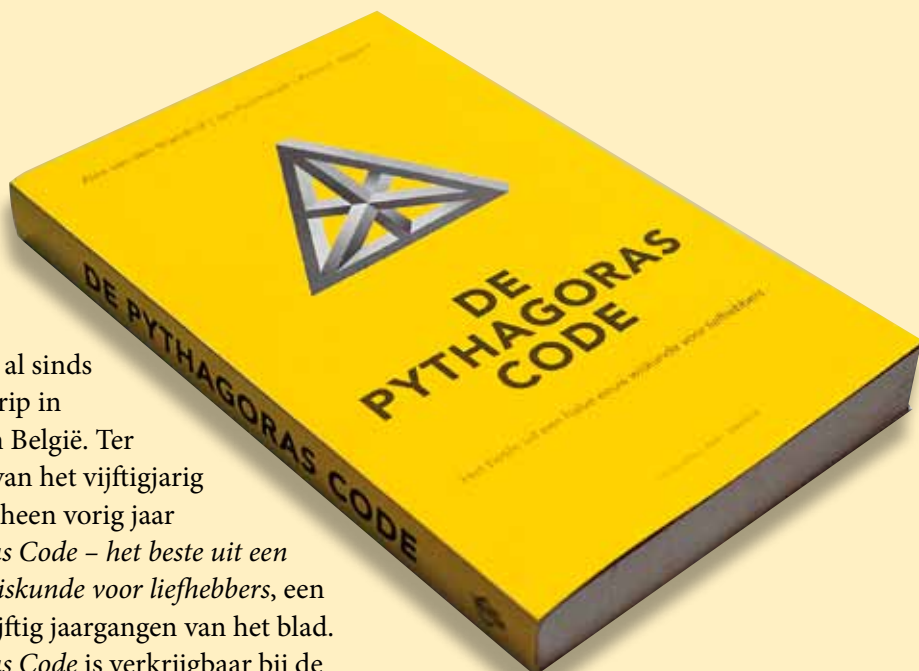
De skill curve bij basketbal

De cirkelstelling van Descartes

Magnetische geometrische objecten

51ste JAARGANG - NUMMER 5 - APRIL 2012

AANBIEDING: BOEK + DVD



Pythagoras is al sinds 1961 een begrip in Nederland en België. Ter gelegenheid van het vijftigjarig bestaan verscheen vorig jaar *De Pythagoras Code* – het beste uit een halve eeuw wiskunde voor liefhebbers, een selectie uit vijftig jaargangen van het blad. *De Pythagoras Code* is verkrijgbaar bij de boekhandel voor € 19,95. Je kunt het boek echter ook rechtstreeks bij de redactie bestellen.

Voor een kleine meerprijs krijg je er dan een dvd bij met de eerste vijftig jaargangen van het tijdschrift (1961-2011)!

Deze dvd is niet in de boekhandel te koop. Voor het boek plus de dvd betaal je slechts € 23,50 plus verzendkosten à € 2,30 (totaal € 25,80).

De dvd is ook apart te bestellen voor € 11 + € 1,50 verzendkosten (totaal € 12,50). De totaalkosten voor bestellingen uit België zijn € 27,50 (boek + dvd) en € 13,50 (dvd).

Hoe bestellen? Stuur een e-mail naar jan@pythagoras.nu met als onderwerp 'bestelling', vermeld het aantal exemplaren ('boek + dvd' of 'dvd') en een postadres. Maak dan het juiste bedrag over op giro 4784299 t.n.v. 'promotie Pythagoras'.

Voor Belgische bestellers is de volgende informatie nog nodig:

IBAN: NL46INGB0004784299;

BIC: INGBNL2A.

De bestelling wordt verstuurd zodra de betaling ontvangen is.

Op www.pythagoras.nu zijn de laatste jaren steeds meer oude nummers online gezet. De complete eerste vijftig jaargangen zullen t.z.t. op de site beschikbaar zijn. De resolutie van de pdf's op de website is echter lager dan de resolutie van de pdf's op de dvd.

INHOUD



DE WEG IS HET DOEL

Het bereiken van de top, dát is voor bergbeklimmers het doel. Op een licht hellend vlak wandel je rechtstreeks naar de top, maar als het te steil wordt, ga je zigzaggend naar boven. De beste manier om te zigzaggen laat zich bepalen met wiskunde.

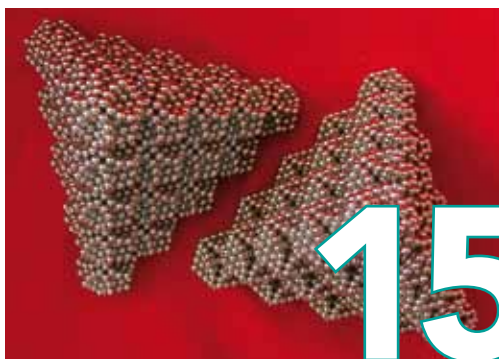
EN VERDER

- 2 Kleine nootjes
- 9 17×17 probleem
- 10 Sudoku's en verschuiving
- 20 Journaal
- 21 Oplossing sudoku
- 22 De kussende cirkels van de prinses
- 26 Inductie bij de NWO
- 30 Pythagoras Olympiade
- 33 Oplossing 3d-puzzel nr. 4



DE VEDETTE ALS BLOK AAN HET BEEN

Je zou denken dat het bij een teamsport zoals basketbal altijd het gunstigst is om de beste speler zo lang mogelijk aan de bal te houden. Dat is echter lang niet altijd zo. We leggen het uit met behulp van netwerkanalyse.



BOUWEN MET MAGNETISCHE BALLETTJES

Sinds een paar jaar bestaan er magnetische balletjes waarmee je ruimtelijke objecten kunt maken. Edo Timmermans bespreekt een paar geometrisch interessante objecten. Bijbehorende instructiefilmpjes heeft hij op Youtube gezet.

Foto omslag: de berg Söðull in IJsland. © Alex van den Brandhof

■ **NIVEAUBALKJES** Pagina's met één of meer zwarte balkjes (onder de paginanummering) geven de moeilijkheidsgraad aan. Eén balkje: lastig. Twee balkjes: vereist wiskundekennis uit de vijfde of zesde klas. Drie balkjes: net iets moeilijker.

KLEINE NOOTJES

■ door Jan Guichelaar

LEGPUZZEL

Van een legpuzzel is het aantal puzzelstukjes zonder rechte kant twee keer zo groot als het aantal overige stukjes. Wat is een mogelijkheid voor het totaal aantal stukjes? Hoeveel oplossingen zijn er in totaal?



LOGISCHE GETALLENRIJ

Bedenk een volgend getal in de getallenrij die je hier ziet.

0, 4, 9, 60, 80, 1.000.000.000.000.000.000, 17, ?

2



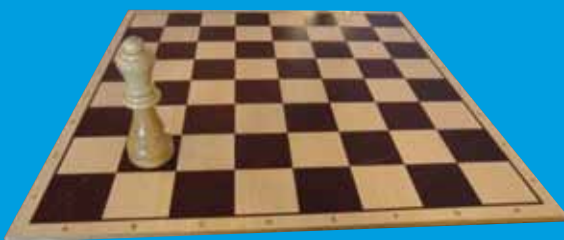
HOE OUD?

Kim en Wouter zijn samen 20 jaar oud. Kim zegt tegen Wouter: 'Mijn leeftijd is driemaal de leeftijd die jij had toen ik zo oud was als jij nu bent. En als jij zo oud zal zijn als ik nu, dan is mijn leeftijd het dubbele van je huidige leeftijd.' Hoe oud zijn Kim en Wouter? (Met dank aan Bert en Karin Michielsens, Deurne, België.)

Kleine nootjes zijn eenvoudige opgaven die weinig of geen wiskundige voorkennis vereisen om opgelost te kunnen worden. De antwoorden vind je in het volgende nummer van *Pythagoras*.

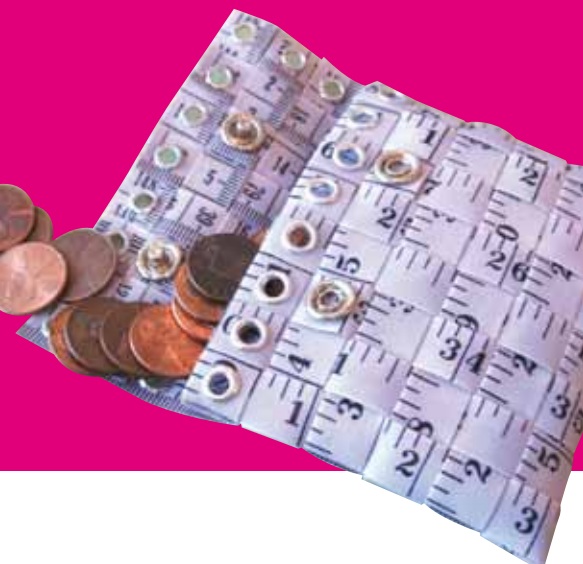
KONINGINNENZET

Op een schaakbord staat één stuk: een koningin, op veld B2. Een koningin mag horizontaal, verticaal en diagonaal bewegen naar elk bereikbaar veld. Je doet een willekeurige zet. Hoe groot is de kans dat de koningin op dezelfde kleur komt?



MUNTEN RUILEN

Anja, Patricia en Ties hebben samen in totaal 18 munten, van 1, 2, 5 en 10 cent. Alle drie hebben ze 20 cent. Anja heeft twee keer zoveel munten als Patricia, en Ties heeft drie keer zoveel munten als Patricia. Na wat ruilen hebben ze alle drie evenveel munten. Anja heeft dan twee keer zoveel geld als Patricia, en Ties heeft drie keer zoveel geld als Patricia. Welke munten had elk eerst? En welke na het ruilen? Zijn er verschillende oplossingen?



OPLOSSINGEN KLEINE NOOTJES NR. 4

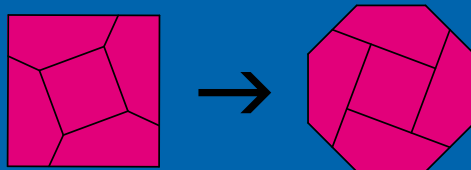
Wie is Kees? Stel dat er meerdere Kezen kunnen zijn. Bij de namen voor (A, B, C) (Kees, Kees, Kees), (Kees, Kees, Klaas), (Koos, Kees, Kees) en (Koos, Kees, Klaas) is er steeds maar één van de drie opmerkingen waar. B heet in alle gevallen Kees. Bij alle andere mogelijkheden is er meer dan één opmerking waar.
Conclusie: B heet in elk geval Kees.

Zigzaggen met een duimstok. Noteer met a_n het aantal zigzagmogelijkheden bij een duimstok die uit n delen bestaat. Dan is $a_n = 2a_{n-1}$ met $a_2 = 1$. Dus $a_{10} = 256$.

Wijzerplaat verdelen. De groepen worden:
 $11 + 12 + 1 + 2 = 9 + 10 + 3 + 4 =$
 $5 + 6 + 7 + 8 = 26$.

Stoptrein en sneltrein. De stoptrein is na $40/80 \times 60 = 30$ minuten in B. De sneltrein komt in B op $15 + 40/120 \times 60 = 35$ minuten na het hele uur. De stoptrein moet 5 minuten wachten om de sneltrein te laten passeren en arriveert dus op $35 + 20/80 \times 60 = 50$ minuten na het hele uur in C.

Van vierkant naar achthoek.



Het bereiken van de top, dat is voor bergbeklimmers het doel. Dáár lonken de prachtige uitzichten. Er zijn meerdere manieren om de top te bereiken: in een rechte lijn naar boven, wat erg vermoeiend is als het erg steil is, of in een zigzagpatroon, waardoor je weliswaar meer meters aflegt maar niet geheel buiten adem raakt. In dit artikel is niet de top zelf het doel, maar de weg ernaartoe. We laten zien hoe wiskunde kan helpen bij het bepalen van de optimale route.

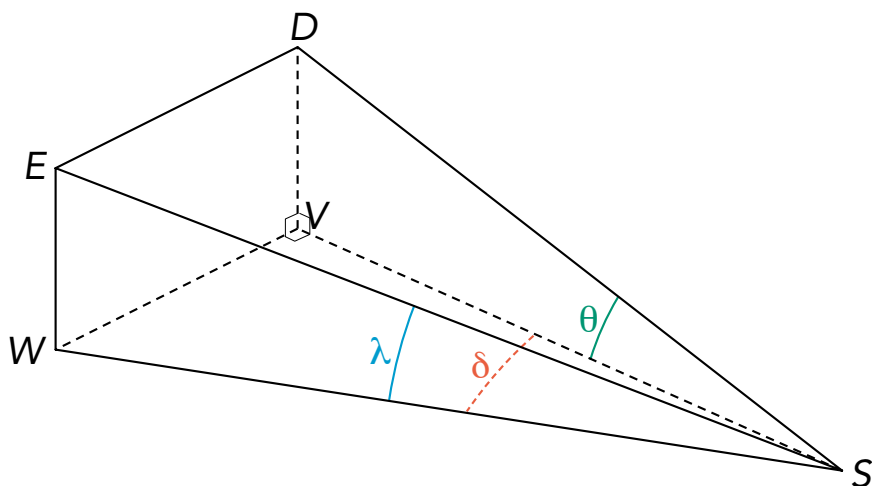
■ door Alex van den Brandhof en Jan Guichelaar

DE WEG IS HET DOEL

Op een licht hellend vlak wandel je rechtstreeks naar de top, maar als het te steil wordt, ga je zigzaggend naar boven. Welke zigzagweg is dan de beste? Uit ervaring weten we dat je meer energie verbruikt naarmate het pad steiler is. Marcos Llobera van de universiteit van Washington en Tim Sluckin van de universiteit van Southampton hebben berekend wanneer een berg té steil is om het pad in een directe weg naar boven te laten gaan. Hun criterium: de weg waarbij je de minste energie verbruikt, is de beste.

MODELLERING Voor onze berekeningen abstraheren we onze berg tot een vlakke helling met hellingshoek θ , zie figuur 1. Je start in het punt S . Het doel is punt D 'recht' naar boven (dus met hellingshoek θ). In plaats van rechtstreeks naar D te lopen, kun je natuurlijk ook onder een kleinere hellingshoek λ lopen naar punt E , dat zich links van D op gelijke hoogte bevindt, zodanig dat $\angle EDS$ recht is. Door halverwege te switchen naar rechts, onder dezelfde hoek met SD , kom je natuurlijk met dezelfde inspanning toch in D .





Figuur 1 Modellering van de te beklimmen berg: een vlakke helling met hellingshoek θ .

Noteer met V het punt recht onder D ('in de berg') op gelijke hoogte met startpunt S en noem

$$s = \tan \theta = \frac{DV}{SV}.$$

Net zo noteren we met W het punt recht onder E op gelijke hoogte met V en S . Dus $DV = EW$. Als je van S naar E loopt, is de hellingshoek λ , met

$$s_w = \tan \lambda = \frac{EW}{SW}.$$

Het energieverbruik M is gedefinieerd als het aantal energieëenheden *per meter in horizontale richting*, als functie van s_w . Voor M kan een formule worden afgeleid; deze formule geven we straks.

We kunnen s_w uitdrukken in δ , de hoek die SV met SW maakt:

$$\begin{aligned} s_w &= \frac{EW}{SW} = \frac{DV}{SW} = \frac{DV/SV}{SW/SV} = \\ &= \frac{DV}{SV} \cdot \frac{SV}{SW} = \tan \theta \cdot \cos \delta = s \cdot \cos \delta. \end{aligned}$$

Het totale energieverbruik E_t is gelijk aan

$$E_t = M(s_w) \cdot SW.$$

We willen immers de top (E boven W , of na een knik D boven V) halen.

Als we E_t delen door de constante waarde SV , krijgen we de *verbruiksfunctie* I :

$$I = \frac{E_t}{SV} = \frac{M(s_w)}{SV/SW} = \frac{M(s_w)}{\cos \delta}. \quad (1)$$

Dit is nu niet de totaal verbruikte energie, maar de

verbruikte energie per meter in de *gewilde horizontale* richting (van S naar V).

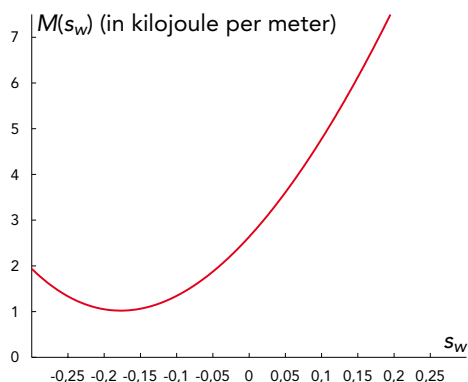
Ten slotte nog een opmerking over de hellingshoek θ : deze hoeft niet positief te zijn; een negatieve waarde voor θ (en dan ook voor λ) komt overeen met een *afdalings*. Ook δ mag zowel positief als negatief zijn: dit betekent naar links of naar rechts afwijken van de rechte weg naar boven.

KRITIEKE GRENZEN Zoals hierboven opgemerkt, is het energieverbruik M een functie van s_w . Llobera en Sluckin gebruikten oude data om een realistisch model voor M op te stellen. In 1938 verzamelde de Italiaanse fysioloog Rodolfo Margaria metingen van stofwisselingen bij het bergbeklimmen. Uit deze gegevens over het energieverbruik leidden Llobera en Sluckin de volgende formule af:

$$M(s_w) = 2,635 + 17,37s_w + 42,37s_w^2 - 21,43s_w^3 + 14,93s_w^4. \quad (2)$$

De coëfficiënten (2,635, 17,37 enzovoort) zijn zo gekozen, dat de formule zo goed mogelijk aansluit op de data van Margaria. In figuur 2 zie je de grafiek van $M(s_w)$. Wat is nu de perfecte hoek waaronder je een berg beklimt?

Je verbruikt per afgelegde meter de minste energie als je zó loopt dat M minimaal is. Het minimum van M bevindt zich bij de waarde $s_0 = -0,177227$. Daarbij hoort een hoek van $\lambda = \tan^{-1}(s_0) \approx -10^\circ$. Dit betekent dat je het makkelijkste loopt als je afdaalt onder een hoek van 10° . Dit is in overeenstemming met onze ervaring: onder een kleine hoek afdalen is erg comfortabel. Maar op deze manier bereiken we de top natuurlijk nooit.



Figuur 2 De grafiek van de energieverbruiksfunctie $M(s_w)$ gebaseerd op data uit 1938.

Om hogerop de berg te komen, kijken we naar de verbruiksfunctie I zoals die in (1) is gedefinieerd, met $M(s_w)$ als in (2). Bij het beklimmen van de berg ga je zo zuinig mogelijk met je energie om indien I minimaal is.

De waarden van δ waarvoor I minimaal is, kunnen we berekenen door I naar δ te differentiëren, gebruikmakend van de quotiëntregel en de kettingregel:

$$\frac{dI}{d\delta} = \frac{\sin \delta}{\cos^2 \delta} (M(s_w) - s_w \cdot M'(s_w)).$$

De nulpunten (om de extreme waarden te vinden) zijn $\delta = 0$ en de nulpunten van de functie

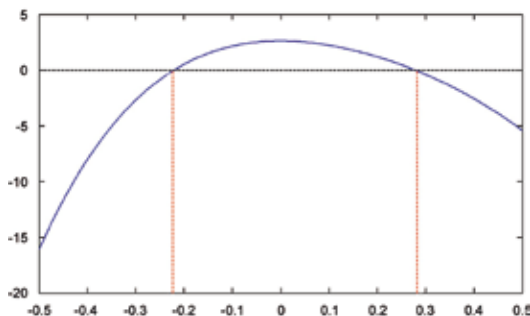
$$N(s_w) = M(s_w) - s_w \cdot M'(s_w).$$

In figuur 3 zie je de grafiek van $N(s_w)$. Het rekenwerk om de nulpunten te vinden, lieten wij door WolframAlpha doen, de website die met het computeralgebrapakket *Mathematica* berekeningen kan uitvoeren: de nulpunten van $N(s_w)$ bevinden zich bij

$$s_1 = -0,220857 \text{ en } s_2 = 0,278789.$$

Voor welke δ is I nu minimaal? Dat is afhankelijk van de helling $s = \tan \theta$. We bekijken een paar gevallen.

Als de helling $s = \tan \theta$ in ligt tussen s_1 en s_2 , dan geldt ook dat $s_w = s \cdot \cos \delta$ tussen deze twee waarden in ligt (immers $\cos \delta \leq 1$): $s_1 < s_w < s_2$. Dan is $N(s_w) > 0$, zoals je aan figuur 3 kunt zien. Het enige nulpunt dat dan overblijft is $\delta = 0$. Voor $\delta < 0$ is $I'(\delta)$ negatief en voor $\delta > 0$ is $I'(\delta)$ positief. Dat betekent dat I bij $\delta = 0$ het gezochte minimum



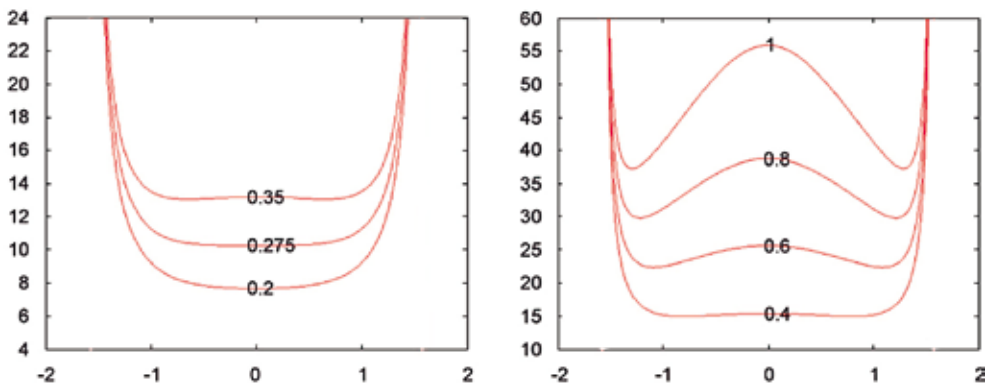
Figuur 3 De grafiek van $N(s_w)$. De nulpunten bevinden zich bij $s_1 = -0,220857$ (deze waarde hoort bij de kritieke grens voor het afdalen) en $s_2 = 0,278789$ (de waarde bij de kritieke grens voor het stijgen).

heeft.

In figuur 4 zie je voor zeven verschillende waarden van s de grafiek van $I(\delta)$. In twee gevallen ligt s tussen s_1 en s_2 : $s = 0,2$ en $s = 0,275$. Aan de grafieken zie je dat I dan inderdaad minimaal is voor $\delta = 0$. Dit viel natuurlijk te verwachten, omdat de berg in deze gevallen niet steil is. Je hoeft dan dus geen omwegen te maken: je loopt rechtstreeks naar het doel D indien s tussen s_1 en s_2 in ligt. Daarbij horen hellingshoeken van $\lambda_1 = \tan^{-1}(s_1) \approx -12,5^\circ$ en $\lambda_2 = \tan^{-1}(s_2) \approx 15,6^\circ$. Dat betekent dat voor het *af dalen* geldt dat de kritieke grens bij een hoek van $12,5^\circ$ ligt, terwijl de kritieke grens voor het *stijgen* pas bij $15,6^\circ$ ligt.

Als s kleiner dan s_1 of groter dan s_2 wordt, dan heeft I geen minimum meer voor $\delta = 0$, maar een (lokaal) maximum, zoals je aan figuur 4 kunt zien voor de gevallen $s = 0,35$, $s = 0,4$, $s = 0,6$, $s = 0,8$ en $s = 1$. In deze gevallen moet je dus zeker niet recht naar boven (of beneden, ingeval $s < s_1$) lopen, maar zigzaggend. Je ziet aan de genoemde gevallen van figuur 4 tevens dat I links en rechts van $\delta = 0$ een minimum heeft. Probeer dit zelf eens algebraïsch na te gaan, en dat die minima zich bevinden bij die waarden van δ waarvoor geldt dat $\cos \delta = s_1/s$ (dalen) en $\cos \delta = s_2/s$ (stijgen). De twee waarden voor δ die je in beide gevallen vindt, zijn elkaars tegengestelde. Hoe groter s wordt, hoe dichter deze δ 's bij $\pm\pi/2$ (ofwel $\pm 90^\circ$) komen te liggen, zoals je ook aan figuur 4 kunt zien.

Als de helling van de te bestijgen berg groter is dan $\lambda_2 = \tan^{-1}(s_2) \approx 15,6^\circ$, is het dus energetisch het gunstigst om niet rechtstreeks naar de top te lopen, maar zigzaggend onder een hoek van $15,6^\circ$. En bij het dalen moet je reeds zigzaggan als de helling



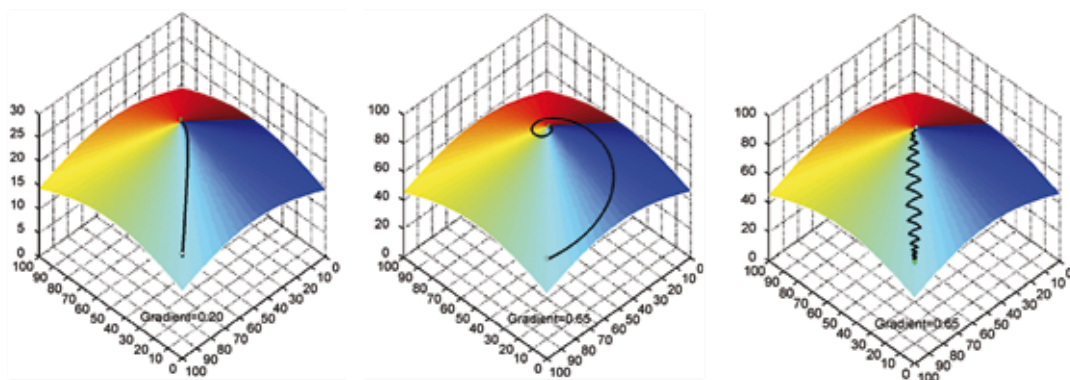
Figuur 4 De grafiek van I voor een aantal speciale waarden van s . Bij toenemende s van een minimum bij $\delta = 0$ naar een lokaal maximum bij $\delta = 0$ en minima links en rechts van $\delta = 0$. De grafiek van I is symmetrisch in de lijn $\delta = 0$.

van de berg groter is dan $12,5^\circ$ (want $\lambda_1 = \tan^{-1}(s_1) \approx -12,5^\circ$).

MOUNT CONICUS We zijn bij onze berekeningen uitgegaan van een berg in de vorm van een vlakke helling. De gevonden resultaten gelden ook als de berg de vorm van een zuivere kegel heeft – *Mount Conicus* noemen Llobera en Sluckin zo'n berg. Je kunt dus rechtstreeks naar de top lopen indien de hellingshoek van Mount Conicus kleiner is dan $15,6^\circ$ (figuur 5, links). Is de hellingshoek groter, dan is de optimale route voor de bergbeklimmer een pad dat als een soort schroef naar de top voert, en wel onder een hoek van $15,6^\circ$ (figuur 5, midden). Een zigzaggend pad (figuur 5, rechts) komt

op hetzelfde neer, mits je de extra energie die bij de keerpunten (de haarspeldbochten) verbruikt wordt, verwaarloost. De geïdealiseerde vorm van Mount Conicus maakt dat een zigzaggend pad niet nodig is. Maar in de praktijk is een zigzagweg veel realistischer, omdat vrijwel geen enkele berg perfect kegelvormig is. Bij een zigzagweg volstaat het als de berg aan één kant de vorm van een kegel benadert.

DALEN IS MOEILIK In vergelijking met vlak lopen kost het bestijgen van een berg uiteraard meer energie, simpelweg om boven te komen. Het dalen gaat weliswaar sneller dan het stijgen, maar dat betekent niet dat dalen ook makkelijker is. Integendeel, ervaren bergbeklimmers weten dat dalen zelfs



Figuur 5 Wandelpaden op Mount Conicus. Links een helling van 0,2 (ongeveer 11°); dit is minder dan de kritieke grens, dus kan het pad in een rechte lijn naar de top voeren. In het midden en rechts is de helling 0,65 (ongeveer 33°); in dat geval heeft het optimale pad een spiraalvorm of haarspeldbochten.

Afbeelding: Marcos Llobera en Tim Sluckin.



Figuur 6 Een zigzagpad op de Bortelhorn in Zwitserland. Foto: Alex van den Brandhof

moeijker is, omdat je, zeker als de afdaling steil is, bij elke stap extra energie verbruikt om te remmen. Compenseert deze energie de extra energie die nodig is bij het stijgen?

Het antwoord is nee. Als de extra energie die nodig is bij het stijgen gelijk zou zijn aan de extra energie die nodig is bij het dalen, zou de kritieke grens bij het dalen hetzelfde zijn als bij het stijgen. We zagen echter dat de kritieke grens bij het dalen gelijk is aan $12,5^\circ$, kleiner dan bij het stijgen ($15,6^\circ$).

Deze opvallende asymmetrie viel van tevoren al te voorspellen, als je formule (2) bestudeert. De coëfficiënt van s_w^3 is $-21,43$: een negatief getal. Bij het dalen is de hellingshoek, en daarmee ook de waarde van s_w en van s_w^3 , negatief. Het product van twee negatieve getallen is positief en dat maakt dat de energieverbruiksfunctie $M(s_w)$ voor negatieve s_w eerder een hoge waarde aanneemt. Dat verklaart wiskundig gezien waarom steile afdalingen zo lastig zijn.

Idealiter zouden er verschillende paden voor stijgen en dalen moeten zijn, maar in de praktijk is

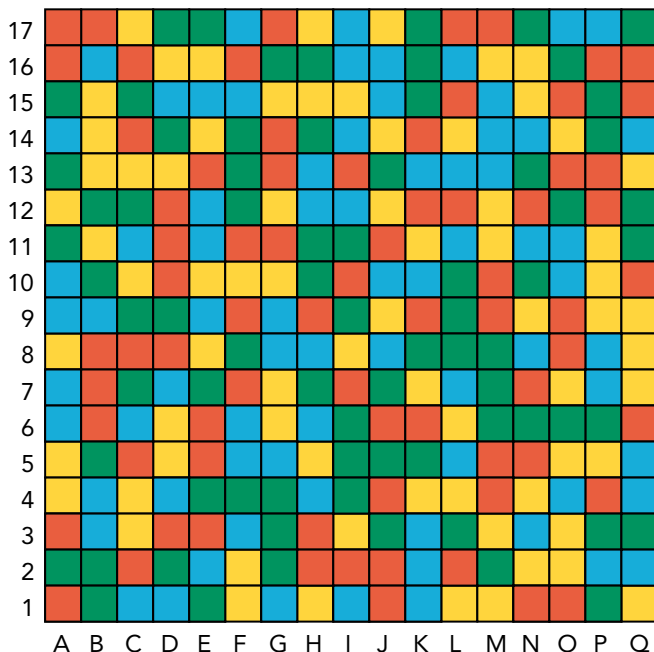
er meestal één pad dat een soort compromis is tussen het ideale opwaartse pad en het ideale neerwaartse pad.

Tot besluit de volgende vraag: hoe komt het dat de kritieke grens voor het afdalen ($12,5^\circ$) niet gelijk is aan de hoek waaronder je het makkelijkste loopt: 10° bergafwaarts, zoals we eerder zagen? Dat komt doordat je in dat geval de minste energie *per afgelegde meter horizontaal in de looprichting* verbruikt. Maar omdat je een langere weg aflegt, is de totaal verbruikte energie toch nog iets groter dan wanneer je afdalt onder een hoek van $12,5^\circ$. Je loopt dan weliswaar iets (maar niet veel) minder makkelijk, maar de *totaal bestede energie* is wel minimaal. Wordt het steiler dan $12,5^\circ$, dan stijgt het energieverbruik snel en wordt het zigzagen. ■

LITERATUUR De resultaten in dit artikel zijn gebaseerd op werk van M. Llobera en T.J. Sluckin. Hun onderzoek is gepubliceerd in het artikel 'Zigzagging: Theoretical insights on climbing strategies', *Journal of Theoretical Biology*, Vol. 249 (2007), 206-217.

17×17 PROBLEEM

■ door Alex van den Brandhof



Op internet kom je soms leuke, uitdagende puzzels tegen. In 2009 plaatsten Lance Fortnow en Bill Gasarch op hun blog computationalcomplexity.org een puzzel die zij het *17 × 17 probleem* doopten. Voor een oplossing loofden zij $17 \times 17 = 289$ dollar uit.

Uitgangspunt van de puzzel is een vierkant bestaande uit 17×17 vakjes. Je mag vier verschillende kleuren gebruiken. De bedoeling is om elk van de 289 vakjes een kleur te geven, en wel zodanig dat er geen *monochromatische rechthoek* ontstaat. Een monochromatische rechthoek is een rechthoek waarvan de vier hoekvakjes dezelfde kleur hebben. Alleen rechthoeken waarvan de vier zijden op de roosterlijnen liggen en waarvan de lengte en de breedte groter dan 1 zijn, tellen mee.

Hoe eenvoudig het raadsel ook klinkt, het duurde meer dan twee jaar totdat iemand met een oplossing kwam. De credits zijn voor Bernd Steinbach en Christian Posthoff. Hun oplossing zie je hierboven. Welke rechthoek je ook kiest, nooit hebben de vier hoekvakjes allemaal dezelfde kleur. Neem

bijvoorbeeld de rechthoek waarvan de hoekvakjes de coördinaten (B, 3), (F, 3), (F, 11) en (B, 11) hebben: deze hebben respectievelijk de kleuren blauw, blauw, rood, geel.

COMPLEXITEITSTHEORIE De puzzel is niet alleen een recreatieve bezigheid. Het is een puzzel uit een dieperliggend probleem over het kleuren van grids zonder monochromatische rechthoeken. De resultaten zijn van belang binnen de complexiteitstheorie, een tak van de wiskunde en theoretische informatica die als doel heeft computationele problemen (problemen die door een computer kunnen worden opgelost) te classificeren in een aantal categorieën die de inherente moeilijkheidsgraad van deze problemen aangeven. Het beroemde *P-versus-NP-probleem*, waarover we schreven in *Pythagoras* 49-4 (februari 2010), is uit dit deelgebied van de wiskunde afkomstig. Dat probleem staat op de lijst van millenniumproblemen van het Clay Mathematics Institute. Wie zo'n millenniumprobleem oplost, verdient een miljoen dollar. ■

Je kunt vandaag de dag geen dagblad openslaan, of je vindt er wel een sudoku in. Het oplossen kan behoorlijk verslavend zijn. In deze jaargang van *Pythagoras* schrijven Aad Thoen en Aad van de Wetering in elke aflevering een artikel over sudoku's; niet over het oplossen ervan, maar over fraaie eigenschappen van het ingevulde 9×9 diagram. In deze vijfde aflevering draait alles om *verschuiving*.

■ door Aad Thoen en Aad van de Wetering

SUDOKU'S EN VERSCHUIVING

1	2	3						
4	5	6	7					
7	8	9	4	3				
	3	2	1	8	7			
		7	6	5	2	3		
			3	4	9	6	7	
				7	8	1	4	6
					3	2	5	7
						8	3	9

Figuur 1 3×3 verschuiving

2	7	1	5	6	4	9	3	8
4	3	9	8	7	2	5	6	1
6	5	8	3	9	1	7	2	4
8	9	6	1	2	3	4	5	7
1	2	7	4	5	6	8	9	3
3	4	5	7	8	9	2	1	6
9	8	2	6	1	7	3	4	5
7	1	3	9	4	5	6	8	2
5	6	4	2	3	8	1	7	9

Figuur 3 \ verschuiving

1	2	3	8	9	5	7	6	4
4	5	6	7	2	1	9	8	3
7	8	9	4	3	6	5	2	1
6	3	2	1	8	7	4	9	5
9	4	7	6	5	2	3	1	8
5	1	8	3	4	9	6	7	2
3	9	5	2	7	8	1	4	6
8	6	4	9	1	3	2	5	7
2	7	1	5	6	4	8	3	9

Figuur 2 Sudoku-verschuiving

2	7	1	5	6	4	9	3	8
4	3	9	8	7	2	5	6	1
6	5	8	3	9	1	7	2	4
8	9	6	1	2	3	4	5	7
1	2	7	4	5	6	8	9	3
3	4	5	7	8	9	2	1	6
9	8	2	6	1	7	3	4	5
7	1	3	9	4	5	6	8	2
5	6	4	2	3	8	1	7	9

Figuur 4 / verschuiving

In de vorige aflevering van onze sudokuserie zagen we al een voorbeeld van *verschuiving*, namelijk van identieke rijen en kolommen ten opzichte van elkaar. Hier beschouwen we een andersoortige, grootschalige, verschuiving.

Maar eerst hanteren we een 3×3 raam. Als we in figuur 1 een 3×3 raam langs de diagonaal van boven naar beneden schuiven, blijkt elk raam gevuld te worden met de cijfers 1 tot en met 9, er staan zogezegd vier extra 3×3 vlijnen in (een *vlijn* is een set van negen hokjes met de cijfers 1 tot en met 9 erin). Maar wat echt wonderlijk is: na voltooiing (zie figuur 2) heeft deze sudoku nog een verborgen Siamese tweeling. Deze is aangegeven met kleuren; het complete 9×9 raam is over de torus verschoven. Ter herinnering: een sudoku-vierkant kun je veranderen in een torus, door in gedachten de linker- aan de rechterrand te plakken, en de onder- aan de bovenkant. De verschuiving lijkt in het geheel niet op de originele sudoku die je in SF-termen een *shape-shifter* zou kunnen noemen.

De sudoku van figuur 3 en 4 gaat een stapje verder. Deze verschuiver kent twee verschuivingen,

één langs de \ diagonaal (figuur 3), de ander langs de / diagonaal (figuur 4). Onderling zijn die twee orthogonaal verschoven. Een kameleon zou hier nog moeite mee hebben!

De volgende verschuiver (figuur 5 en 6) is nota bene een Xudoku. Als je van het vierkant opnieuw een torus maakt, staan langs de \ diagonaal niet minder dan negen 3×3 vlijnen (figuur 5)! Zoals te verwachten, schuift langs *die* diagonaal het 9×9 raam naar twee nieuwe sudoku's (waarvan de / diagonalen echter géén vlijnen zijn).

PUZZEL Het toppunt van verschuiving is de opgave voor deze keer. Hoeveel sudoku's kun je in het torus-diagram van figuur 7 ontdekken? De oplossing vind je op pagina 21.

De sudoku die de basis vormt voor de puzzel behoort tot een speciale klasse van sudoku's die het onderwerp van de laatste aflevering is. Tot diezelfde klasse behoort ook een sudoku – als torus beschouwd – met de eigenschap dat elk cijfer op paardensprongafstand een gelijk cijfer heeft. Kun je zelf zo'n sudoku construeren? ■

1	2	3	8	9	5	4	6	7
4	5	6	1	7	2	3	8	9
7	8	9	3	4	6	5	1	2
5	4	2	7	1	9	8	3	6
9	3	8	5	6	4	7	2	1
6	7	1	2	8	3	9	5	4
8	9	4	6	5	1	2	7	3
2	1	7	9	3	8	6	4	5
3	6	5	4	2	7	1	9	8

Figuur 5 Eerste verschuiving

1	2	3	8	9	5	4	6	7
4	5	6	1	7	2	3	8	9
7	8	9	3	4	6	5	1	2
5	4	2	7	1	9	8	3	6
9	3	8	5	6	4	7	2	1
6	7	1	2	8	3	9	5	4
8	9	4	6	5	1	2	7	3
2	1	7	9	3	8	6	4	5
3	6	5	4	2	7	1	9	8

Figuur 6 Tweede verschuiving

2	6	9	3	4	7	1	5	8	2	6	9	3
1	8	5	2	9	6	3	7	4	1	8	5	2
3	7	4	1	8	5	2	9	6	3	7	4	1
5	9	3	6	7	1	4	8	2	5	9	3	6
4	2	8	5	3	9	6	1	7	4	2	8	5
6	1	7	4	2	8	5	3	9	6	1	7	4
8	3	6	9	1	4	7	2	5	8	3	6	9
7	5	2	8	6	3	9	4	1	7	5	2	8
9	4	1	7	5	2	8	6	3	9	4	1	7
2	6	9	3	4	7	1	5	8	2	6	9	3
1	8	5	2	9	6	3	7	4	1	8	5	2
3	7	4	1	8	5	2	9	6	3	7	4	1
5	9	3	6	7	1	4	8	2	5	9	3	6

Figuur 7 Hoeveel sudoku's bevat dit torus-diagram?

Speelt Barcelona beter zonder Lionel Messi in de ploeg? Het lijkt absurd, maar als je een sportwedstrijd modelleert als een netwerk, zijn er situaties waarin het loont om de beste route af te sluiten. Voor basketbal is 'de prijs van de anarchie' in detail geanalyseerd.

■ door Arnout Jaspers



DE VEDETTE ALS BLOK AAN HET BEEN

12

Een sport als basketbal of voetbal kun je zien als een netwerkprobleem: de bal begint ergens, bijvoorbeeld op de middenstip of bij de doelman, en gaat dan via een aantal tussenstations, de spelers, in de basket of het doel – of niet natuurlijk, en dan mag de tegenpartij het proberen. Op elke schakel in het traject kun je kansrekening en andere wiskundige instrumenten loslaten.

Op het eerste gezicht zou je denken dat het voor een team altijd het gunstigst is om de beste speler zo snel mogelijk aan de bal te krijgen, maar dat is lang niet altijd waar. Fysicus Brian Skinner, van de universiteit van Minnesota, paste netwerkanalyse toe op basketbal en kwam tot de verrassende conclusie dat het team als geheel het beste scoort als ze alle andere teamleden net zo vaak aanspelen als hun sterspeler, hoewel die per schotpoging het hoogste succespercentage heeft.

Om te begrijpen hoe dit kan, begint hij met een heel simpel netwerk van twee wegen – een snelweg en een tweebaansweg – tussen twee stadjes, A en B, zie figuur 1. Er moeten 10 auto's van A naar B. Over de snelweg rij je in tien minuten van A naar B, on-

geacht hoeveel auto's deze weg nemen.

De tweebaansweg is veel korter, dus als je de enige bent, duurt het slechts een minuut om van A naar B te komen. Maar zodra het drukker wordt, stroomt het verkeer steeds langzamer door, en in dit fictieve voorbeeld doen 2 auto's er 2 minuten over, 3 auto's 3 minuten, enzovoort.

Wat gebeurt er als elke automobilist zelf mag kiezen? Over de tweebaansweg doe je er ten hoogste 10 minuten over, net zo lang als over de snelweg, maar als ook maar één iemand de snelweg kiest, doe je er minder dan 10 minuten over, dus jij kiest de tweebaansweg. Echter, omdat iedereen zo redeneert, zal iedereen over de tweebaansweg rijden en is de gemiddelde reistijd 10 minuten. Dit is het zogeheten *Nash-evenwicht*: niemand kan individueel zijn reistijd verbeteren door een andere keuze te maken, dus is dit een *stabiele verdeling*.

Maar het Nash-evenwicht geeft geen optimale doorstroming: als 5 mensen de tweebaansweg nemen en 5 mensen de snelweg, is de gemiddelde reistijd slechts $(5 \times 5 + 5 \times 10) / 10 = 7,5$ minuten. Als je de regel invoert dat (on)even nummerplaten

op (on)even dagen over de snelweg moeten, wordt iedereen gelijk behandeld en is iedereen beter af. Dit is wat netwerkanalisten de *prijs van de anarchie* noemen: als iedereen zelf mag kiezen, wordt niet het resultaat bereikt dat voor iedereen het beste is.

In ingewikkeldere wegnetten kan zelfs het compleet afsluiten van een weg de totale doorstroming bevorderen, omdat mensen een keus ontnomen wordt die tot een ongunstig Nash-evenwicht leidt.

VERTALING NAAR SPORT In bovenstaand model komen de tweebaansweg en de snelweg overeen met respectievelijk de vedette van het team en de overige teamspelers. Het aantal keren dat een speler aan de bal komt, komt overeen met het aantal auto's dat over de weg gaat, en een kortere reistijd komt overeen met een hogere scoringskans.

De vedette heeft, vergeleken met zijn medespelers in eenzelfde situatie, de beste kans om te scoren. Dit voordeel zal afnemen naarmate hij vaker in het spel betrokken wordt, omdat de tegenstander dit doorheeft en, bijvoorbeeld, overgaat op dubbele dekking van de vedette. Toch is het voor de spelers verleidelijk om te denken: 'zelfs als we alle ballen op onze vedette spelen, wordt zijn scoringskans niet kleiner dan die van ons, dus nadelig is het zeker niet'. Dit blijkt dus niet waar: er is een omslagpunt waarop je de potentiële meerwaarde van je vedette tenietdoet en het team als geheel benadeelt.

Dit is natuurlijk maar een heel simpel model.

Skinner heeft een model voor een basketbalteam doorgerekend met vijf routes (spelers) van de ingooi naar de basket, die elk een verschillende scoringskans hebben, die afneemt naarmate een speler vaker aan de bal komt.

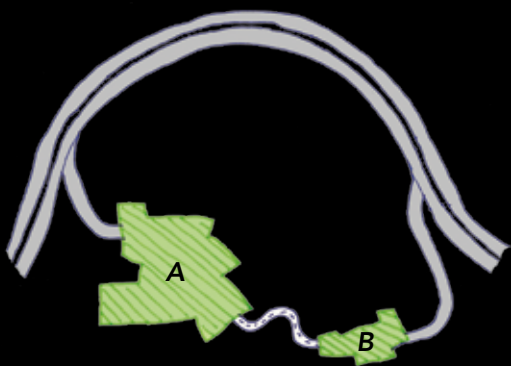
Hoe snel iemands scoringskans afneemt naarmate hij meer doelpogingen doet (de zogeheten *skill curve*) is nooit goed uitgezocht. Dat is ook heel moeilijk, omdat een team telkens tegen een ander team speelt, en in goed ingespeelde basketbalteams zit er weinig variatie in hoe vaak een speler een doelpoging doet vergeleken met zijn teamgenoten. Voor Ray Allen, sterspeler van de Boston Celtics, is de *skill curve* afgeleid uit zijn prestaties over zijn hele carrière in de National Basketball Association (NBA) in de Verenigde Staten. De aanname is dan, dat de gemiddelde kwaliteit van de verdediging in de NBA van jaar tot jaar hetzelfde is. De *skill curve* is dan ongeveer een dalende rechte lijn met functievoorschrift

$$f_A(x_A) = 0,75 - 0,62x_A.$$

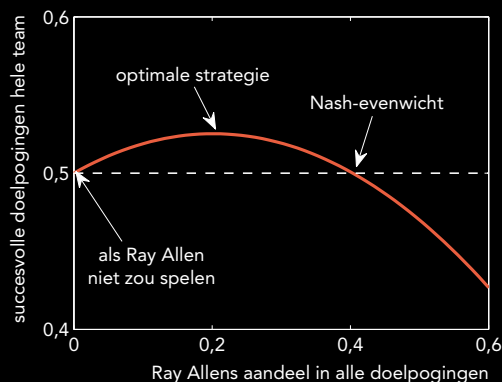
Hierin is x_A de fractie van het totaal aantal doelpogingen van de Boston Celtics dat Allen voor zijn rekening nam, en $f_A(x_A)$ de fractie geslaagde doelpogingen door Allen. Voor andere spelers dan Allen heeft het functievoorschrift van de *skill curve* eveneens de vorm $f_i(x_i) = a - bx_i$, met $0 < a \leq 1$ en $0 < b \leq a$.

Voor $x_A = 0$ is $f_A = 0,75$ (ofwel 75%). Dit komt overeen met de fictieve situatie dat de Boston Celtics voor het eerst Ray Allen in het spel brengen, tegen een team dat nog nooit van hem gehoord heeft. Als alle spelers evenveel op de basket schieten, heeft iedereen $x = 0,2$ (ofwel 20%).

Als een team bestaat uit één sterspeler en vier – even goede – middelmatige spelers met een constante $f = 0,5$, dan zou je denken dat de sterspeler in de optimale strategie veel vaker de bal moet krijgen dan zijn teamgenoten. Immers, Allen blijft beter scoren dan zijn teamgenoten totdat hij meer dan 40% van alle doelpogingen van het team voor zijn rekening neemt: uit $f_A(x_A) > 0,5$ volgt namelijk dat $x_A < (0,75 - 0,5)/0,62 \approx 0,403$. Toch is dit niet waar. Skinner rekende dit model door met deze *skill curves*; het resultaat zie je in figuur 2.



Figuur 1 Een simpel wegnetwerk



Figuur 2 De fractie succesvolle doelpogingen van het team als geheel, uitgezet tegen het aandeel van sterspeler Ray Allen in het totaal aantal doelpogingen. Naarmate Allen vaker op de basket schiet, raakt de verdediging beter op hem ingespeeld en neemt zijn succes af. Verrassend is, dat het teamsucces meteen begint af te nemen zodra Allens aandeel groter wordt dan dat van zijn middelmatige medespelers.

PARADOX De curve laat iets heel opmerkelijks zien: de optimale teamprestatie wordt al bereikt bij $x_A = 0,202$, dat wil zeggen: als de vier teamgenoten van Allen vrijwel net zo vaak op de basket schieten als Allen zelf. Als Allen 40% van de doelpogingen voor zich op zou eisen (dus $x_A = 0,4$), kan hij net zo goed niet meespelen en zich door een middelmatige teamgenoot laten vervangen.

De paradox is: als je het per spelsituatie bekijkt, is het voor het team gunstiger om de bal aan Allen te geven voor een doelpoging zolang zijn f nog boven de 0,5 ligt (dus x_A maximaal 0,4), want al zijn teamgenoten hebben een constante $f = 0,5$. Deze situatie, waarin Allen 40% van de doelpogingen doet, komt min of meer overeen met het Nash-evenwicht.

Het intuïtieve idee, dat je je beste speler het vaakst moet aanspelen is dus niet waar. Het grootste rendement haal je juist uit een vedette als je hem net zo vaak aanspeelt als anderen. Dan kan de verdediging zich niet op zijn acties instellen en haalt hij een hoger rendement uit zijn aandeel.

Overigens is Skinner de eerste om toe te geven dat zijn theoretische beschouwing maar een beginnetje is, en dat sportcoaches dergelijke redanaties eigenlijk al toepassen. Zo blijken alle professionele teams in het Amerikaans voetbal gemiddeld meer terreinwinst te boeken als er een verre bal goegoid wordt (*passing play*), dan wanneer het team van achteruit met de bal gaat lopen (*running play*).

Toch hanteert geen enkel team een taktiek van alleen maar *passing play*, ze blijven ook *running play* spelen om de tegenstander in onzekerheid te houden.

In Europees voetbal zie je iets soortgelijks: menigmaal scoort de sterspeler juist niet in belangrijke wedstrijden, maar bewijst hij zijn waarde door ‘gaten te trekken’ in de verdediging, zodat zijn minder getalenteerde teamgenoten doel treffen. De vedette wordt pas echt een blok aan het been als die alle ballen blijft opeisen, ook als hij zich telkens vastloopt in de verdediging. Kies zelf maar wie hier Ronaldo is, en wie Messi. ■

LITERATUUR Het onderzoek van Brian Skinner is te lezen in het artikel ‘The Price of Anarchy in Basketball’ dat op internet beschikbaar is (via Google snel te vinden).



Figuur 3 Basketballer Ray Allen

In de Verenigde Staten zijn reeds enige jaren magnetische balletjes te koop waarmee ruimtelijke objecten te bouwen zijn. In Europa begint dat nu ook populair te worden. In dit blad zijn we natuurlijk vooral geïnteresseerd in de fraaie geometrische vormen die ermee gemaakt kunnen worden.

■ door Edo Timmermans

BOUWEN MET MAGNETISCHE BALLETJES

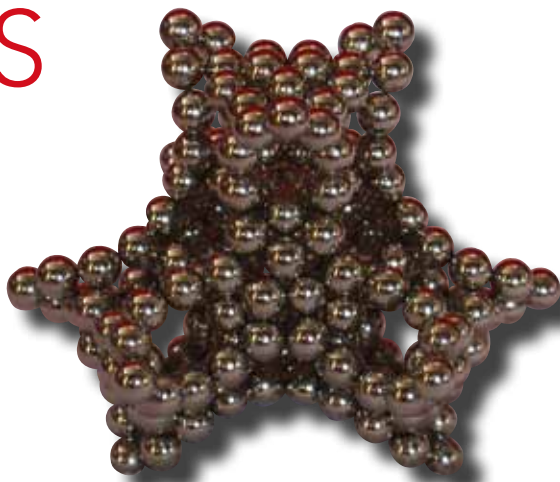
De magnetische balletjes staan bekend als *Neocubes*, omdat ze vaak in de vorm van een $6 \times 6 \times 6$ kubus verkocht worden. Neo verwijst naar neodimium, een zeldzaam sporenelement. Het sterkste magneetmateriaal dat we kennen is een legering van nikkel, neodimium en borium. Voor de industrie zijn zeer krachtige magneten nodig die hun magnetisme goed vasthouden. De magnetische balletjes zijn minder krachtig dan zou kunnen, omdat er anders niet mee te werken valt.

Zelf werk ik voornamelijk met stalen balletjes van *Ningboballs*. Er zijn ook balletjes in diverse kleuren te koop, maar bij intensief gebruik zal de kleurlaag snel slijten. Magneten kunnen door hitte of hard vallen hun magnetisme grotendeels kwijtraken, dus je moet de balletjes voorzichtig behandelen.

KETTING Ongeacht welke vorm je maakt, is het altijd het handigst om uit te gaan van een ketting van balletjes. Ze zitten dan netjes geordend met hun noord- en zuidpolen dezelfde kant op. Deze polariteit is erg belangrijk bij het bouwen: je kunt daardoor elk object op twee manieren bouwen die met het oog niet te onderscheiden zijn. Wanneer je ingewikkelde structuren bouwt, is het dan ook



Figuur 1 Cubic octahedron



Figuur 2 Sneeuwvlok

noodzakelijk om hier heel gedisciplineerd mee om te gaan.

Bij geometrische vormen is het doorgaans het interessantst om van één basisvorm uit te gaan, er hier veel van te bouwen, soms wel honderden, om ze vervolgens op een slimme manier aan elkaar te koppelen. Een vorm die voor beginnende magneetbouwers erg geschikt is, is een driehoekje van 9 magneetballetjes, dat je weer maakt uit een ring van 9 balletjes. Met deze driehoekjes kun je bijvoorbeeld een tetraëder, een octaëder of een icosae-der bouwen. Op de site van neoClicks zijn leuke



Figuur 3 Infinite star dodecahedron

instructiefilmpjes te vinden waarin deze en andere vormen worden gemaakt. Bij deze driehoekjes is het zo, dat je de polariteit kunt omkeren door gewoon de driehoek om te keren.

Bij de ontwerpen die ik zelf maak, is het noodzakelijk om mijn vaak ingewikkelde basisvormen op exact dezelfde manier te bouwen, vanuit dezelfde ketting. Wanneer je een object bouwt van meer dan 200 balletjes, is het natuurlijk niet handig om een hele lange ketting te maken en deze te gebruiken om de basisvormen op te bouwen. Het is veel handiger om de ketting telkens aan te vullen van de achterkant wanneer het aantal balletjes te klein wordt. Het is aan te raden om tijdens het bouwen de ketting nooit korter te laten worden dan 10 balletjes, behalve op het eind indien je al je balletjes nodig hebt.

Sommige vormen worden zo zwaar tijdens het bouwen dat ze instorten door hun eigen gewicht.

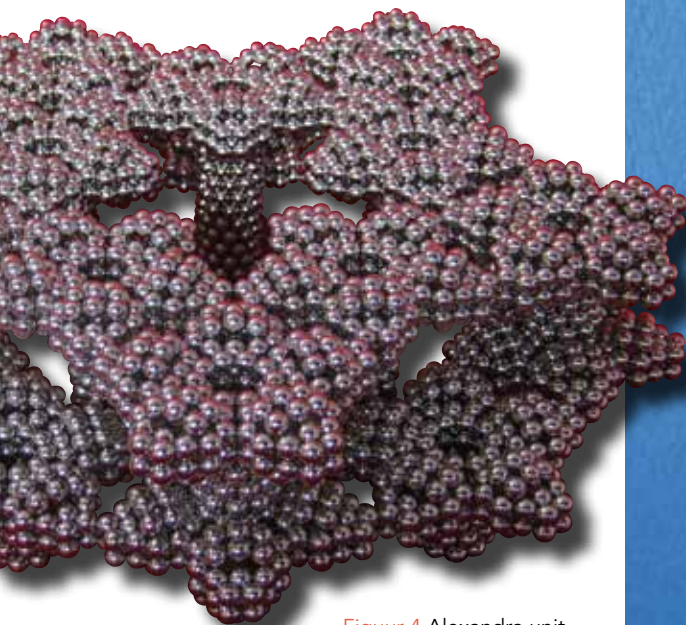
Soms is het mogelijk binnenin extra versteviging aan te brengen. Voor het bouwen van een hoge toren is het belangrijk om van tevoren te testen wat het gewicht is dat de onderste verdieping kan dragen zonder in te storten. Maar wanneer je vervolgens de toren tot limiethoogte bouwt, kan het alsnog misgaan doordat onderin een paar balletjes niet op de ideale plek zitten...

FILMPJES Op Youtube heb ik een heleboel (Engelstalige) instructiefilmpjes geplaatst waarop te zien is hoe ik mijn ontwerpen opbouw. Ga naar youtube.com en tik in de zoekbalk "Edo Timmermans's magnet tutorials" in, of ga direct naar <http://bit.ly/AgJ2Ps>.

Op de volgende drie pagina's geef ik van een aantal vormen een beschrijving en de naam van het bijbehorende instructiefilmpje.



Figuur 6 Balancerend op de rand



Figuur 4 Alexandra unit

CUBIC OCTAHEDRON In het filmpje *Make a cubic octahedron, tessellation, Ningboballs* kun je zien hoe een vorm met de symmetrie van een octaeder wordt opgebouwd uit 6 vormen met de symmetrie van een kubus, in dit geval een kubus waar aan elke zijde van een centrale kubus een kubus van gelijke grootte is geplakt. Het is erg moeilijk om de basisvorm uit dit filmpje te maken. In figuur 1 is een object te zien dat bestaat uit 10 van dezelfde basisvormen van elk 432 magneetballetjes.



Figuur 5 Tienhoekige toren



Figuur 7 Gebogen wand

SNEEUWVLOK In mijn filmpje *Make a 3D-snowflake, Ningbobbles, Christmas-tree decoration 7* wordt een fraaie vorm gemaakt die dezelfde symmetrie heeft als een tetraëder (216 balletjes), zie figuur 2.

DODECAËDER Er zijn heel veel vormen te bouwen met de symmetrie van de dodecaëder. In *Make a star dodecahedron, Ningbobbles* zie je een vorm die vanuit een dodecaëder ontstaat door de hoekpunten evenveel naar buiten te trekken als de middelpunten van de vijfhoeken naar binnen te drukken (960 balletjes).

Het filmpje *Make a 'Christmas dodecahedron', Ningbobbles* toont een vorm waarin de vijfhoeken uit de dodecaëder zijn vervangen door sterren (2880 balletjes).

En *Begin infinite star-dodecahedra grid, tessellation, Ningbobbles* laat een vorm zien die is opgebouwd met basisvormen die de symmetrie hebben van een tetraëder (156 balletjes per tetraëder), zie figuur 3. Hier lijkt het dat in theorie met die basisvorm een regelmatig oneindig netwerk van met elkaar verbonden dodecaëders kan worden gebouwd.

ALEXANDRA UNIT In *Make & use the Alexandra unit, Ningbobbles* laat ik een bouwwerk zien, waarin twee lagen van patronen met elk 10 vijfpuntige sterren verticaal met elkaar verbonden zijn, zie figuur 4.

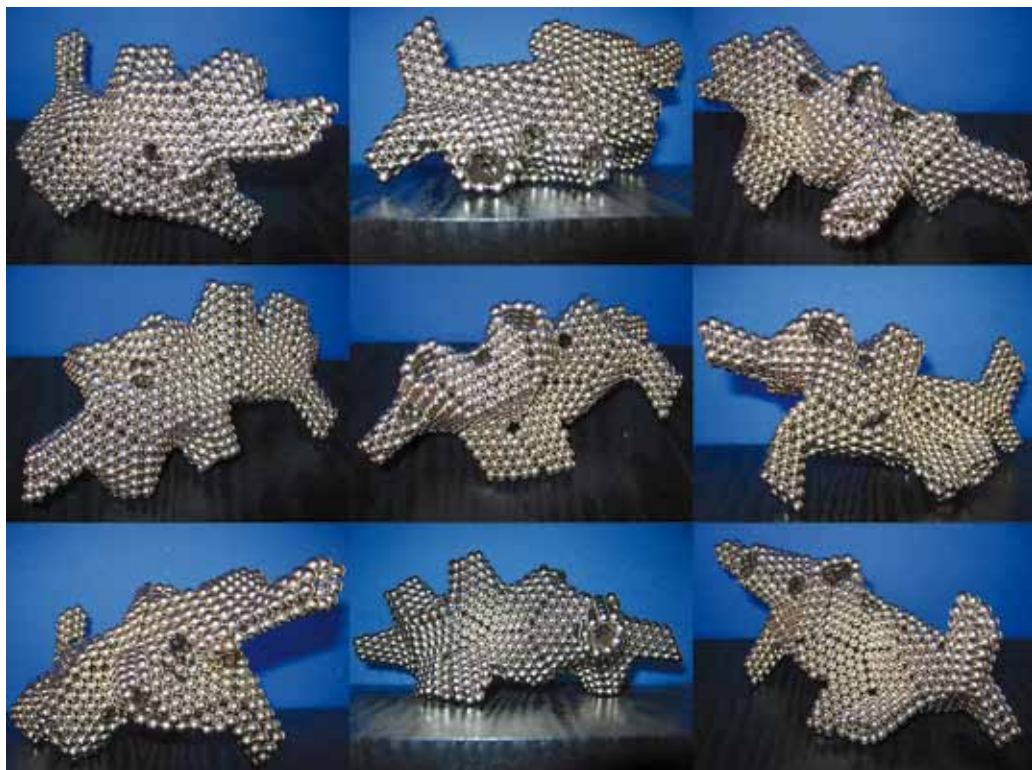
HOGE TORENS Met de magnetische balletjes kun je ook behoorlijk hoge torens bouwen, zoals te zien is in de tienhoekige toren uit het filmpje *Make a decagonal tower, Ningbobbles*, zie figuur 5, en misschien wel de hoogste magneetballetjestoren op Youtube *Make spiral tower with oval unit, Ningbobbles*. Die laatste is tevens bijzonder omdat ik nog geen andere spiraalvormige toren heb gevonden. Ook ben ik nog geen stabiele benadering van een (niet ronde) ovaal tegengekomen op Youtube. Het maken van de basiseenheid is erg moeilijk. Deze toren, met een hoogte van 40 verdiepingen, is ongeveer 67 cm hoog en de ovaal is 3,3 cm breed en 4,3 cm lang. Op mijn kanaal zijn nog andere spiraalvormige objecten te vinden.

Natuurkundig gezien is mijn filmpje *Balancing on the edge, Ningbobbles* interessant, omdat daarin een torentje bestaande uit 4 kubussen van verschillende grootte te zien is, die alleen op een voldoende vlakke ondergrond kan blijven staan, zie figuur 6. Wanneer je dit torentje op een toiletpapertje op een vlakke tafel plaatst dan valt hij meteen om, terwijl het torentje op die tafel wel blijft staan. Het kan daarbij nodig zijn om de bovenste kubussen een beetje richting het zwaartepunt te duwen, maar ook dat is niet voldoende om een balans op het wc-papertje te vinden.

CURVED WALL *Curved wall* is interessant, omdat het met de daarin gebruikte basisvorm mogelijk is om gedeeltelijke cirkels met 11 basisvormen met de opening naar binnen gericht af te wisselen met gedeeltelijke cirkels van 10 basisvormen met de ope-



Figuur 8 Gebogen wand revisited



Figuur 9 Negenhoeke sculptuur

ning naar buiten gericht, zie het filmpje *CURVED WALL - Masterclass Ningbobbles* by Edo Timmermans en figuur 7. Er zijn voor een enkele laag 15 keer 21 ($= 10 + 11$) basiseenheden nodig. Aangezien elke eenheid 36 balletjes bevat, heb je alleen al voor die ene laag 11340 balletjes nodig. Deze vorm is te zien in het filmpje *Curved wall revisited, Ningbobbles* en figuur 8, die ik gemaakt heb toen ik voldoende magnetische balletjes tot mijn beschikking had.

KUNSTVORMEN Ook is het mogelijk om je kunstzinnig te uiten, zoals te zien is in het filmpje *Enneagon sculpture, Ningbobbles* en figuur 9, waar ik het idee om negenhoeken uit te breiden, met in de tweede laag 18 balletjes, in de derde 27 et cetera, heb gebruikt om een merkwaardige vorm te bouwen van 990 balletjes die er vanuit verschillende gezichtspunten totaal verschillend uitziet. Deze negenhoeken hebben een interessante gebogen vorm, net als de zeven- en achthoeken die je op vergelijkbare wijze kunt maken. Het idee hiervoor heb ik gevonden op het Youtube-kanaal Koozdra.

ANDERE NINGBOBALLS-GEBRUIKERS Ik besluit met het noemen van enkele andere bouwers, die interessante vormen laten zien op hun

Youtube-kanaal. Dimitri Tishchenko uit British Columbia, Canada, heeft enorm veel op zijn Youtube-kanaal Koozdra staan, waaronder een fraaie rombische dodecaëder.

Nederlandse bouwers zijn Roeland Kooijman (kanaal Roeland007) en Doortje (Dorus67), die een instructiefilmpje heeft gemaakt over wat je met een door haar gevonden basisvorm kunt doen.

Greg uit Nieuw-Zeeland heeft op zijn kanaal Ledwatchman onder andere een interessante vorm staan die lijkt op de DNA-helix.

Philippe Miron uit Quebec maakt fraaie objecten die op zijn kanaal sxeStracraft te zien zijn.

Tim Jones uit Georgia laat op zijn kanaal YoyoBandalore onder andere zien hoe je een octaëder kunt transformeren tot wat hij een smaragd noemt in zijn filmpje *Transform Octahedron into an Emerald*.

De anonieme COCOAUB uit Canada heeft meer dan 400 filmpjes over magnetische balletjes op zijn kanaal COCOAUB staan en laat onder meer fraaie geometrische vormen zien, zoals zijn *Chained Dodecahedron 5940 Dots*, *Giant Spiked Dodecahedron 8860 Dots* en de *Triple-Capped Dodecahedron 9084 Dots*. ■

JOURNAAL

■ door Alex van den Brandhof

Abelprijs 2012 voor Hongaar Szemerédi

De fameuze Abelprijs is dit jaar toegekend aan de 71-jarige wiskundige Endre Szemerédi. Dat heeft de Noorse Academie van Wetenschappen en Letteren op 21 maart bekendgemaakt.

Met het toekennen van de Abelprijs, met een waarde van bijna 800.000 euro de grootste prijs in de wiskunde, erkent de Noorse Academie van Wetenschappen Szemerédi's 'diepgaande en blijvende impact' op de discrete wiskunde en de theoretische informatica. Szemerédi was een van de eerste wiskundigen die het fundamentele belang van de discrete wiskunde voor de theoretische informatica erkenden.

Szemerédi's beroemdste resultaat is zijn bewijs van het *Erdős-Turán-vermoeden* uit 1936. Dit vermoeden gaat over rekenkundige rijen. Een rekenkundige rij is een rij getallen waarvoor geldt dat het verschil tussen twee opvolgende getallen steeds

hetzelfde is. Een voorbeeld van een rekenkundige rij van lengte 5 is 2, 5, 8, 11, 14: het verschil is steeds 3. Het vermoeden zegt dat *elke verzameling van natuurlijke getallen met positieve dichtheid willekeurig lange rekenkundige rijen bevat*. Ruwweg kun je zeggen dat de dichtheid van een verzameling de fractie is van het aantal natuurlijke getallen dat tot die verzameling behoort. Bijvoorbeeld de verzameling van even getallen (2, 4, 6, ...) heeft dichtheid 0,5, omdat 'de helft van alle natuurlijke getallen even is'.

Toen Szemerédi in 1975 met een bewijs kwam – bijna vijftig bladzijden lang! –, betekende dit een doorbraak in de discrete wiskunde. Paul Erdős loofde geldprijzen uit voor de problemen die hij voorstelde. De hoogste prijs die Erdős ooit betaald heeft, was aan Szemerédi, 3000 dollar. Dit nieuws ging destijds als een lopend vuurtje de wereld rond.



Nils Christian Stenseth, de president van de Noorse Academie van Wetenschappen en Letteren, maakt bekend dat Endre Szemerédi de winnaar is van de Abelprijs 2012.

De rekenfouten van Leonardo da Vinci

De Gentse wiskundige Dirk Huylebrouck heeft een rekenfout ontdekt in een manuscript uit 1490 van Leonardo Da Vinci.

De *homo universalis* uit de renaissance maakte een verdubbelingsfout in het manuscript *Codex Madrid I* uit 1490. In een tabel met verdubbelingen van 2 gaat Da Vinci in de fout bij het getal 4096: hij verdubbelt tot 8092 in plaats van 8192. Daarna verdubbelt hij (correct) verder met dat verkeerde getal. 'Het gaat om een ondubbelzinnig rekenfoutje, dat overigens niet in de schoenen van slordige kopiisten geschoven kan worden, want de misser staat in het (gespiegelde) handschrift van Da Vinci zelf,'

aldus Huylebrouck. De wiskundige ontdekte de fout bij het lezen van een publicatie van Hongaarse auteurs. Die ontdekten hoe het genie op dezelfde pagina in de mist ging bij het achtereenvolgend vermenigvuldigen met 3.

Vorig jaar kwam ook al een fout van Da Vinci aan het licht: Rinus Roelofs vond een fout in een afbeelding van een 'romboëdrische kuboctaëder', zie het Journaal van *Pythagoras* 51-1 (september 2011).

Dirk Huylebrouck publiceerde zijn bevindingen over de rekenfouten van Da Vinci in het tijdschrift *Eos*. Zijn artikel is ook te lezen op www.kennislink.nl.

Mobiele communicatie tien keer sneller

De vraag naar snelle draadloze netwerken is de laatste jaren sterk toegenomen. Gerard Hoekstra liet in zijn promotie-onderzoek zien dat het gebruik van meerdere netwerken tegelijkertijd mobiele communicatie tien keer sneller kan maken.

In zijn onderzoek ontwikkelde Hoekstra verschillende wiskundige methoden voor het verdelen van verkeersstromen over meerdere draadloze netwerken. Hierbij wordt de informatie die verstuurd dient te worden verdeeld over alle beschikbare netwerken om zodoende de totale duur om alle informatie over te brengen te minimaliseren.

Tijdens het onderzoek is gebleken dat er een kloof bestond tussen de ontwikkelingen op technisch gebied en het wiskundig modelleren ervan. Hoekstra: 'De gevolgen van het splitsen van netwerkverkeer zijn voor een wiskundige modellering zeer complex. Een download wordt namelijk gelijk-

tijdig op de netwerken gestart en de getransporteerde hoeveelheden door ieder netwerk zijn – door de bestands grootte – van elkaar afhankelijk.'

Hoekstra stelde een wiskundig model op van een enkel netwerk waarin gebruikers bestanden downloaden. Hiermee kon hij exact uitrekenen wat de belasting in het netwerk is en wat de downloadtijden zijn van de gebruikers. Daarna kon hij een oplossing vinden om informatie over meerdere parallelle netwerken optimaal te verdelen. Hoekstra: 'De meest effectieve verdeelmethoden verkorten de wachttijd in de netwerken zodanig dat een flinke snelheidswinst merkbaar is. Het is niet simpelweg zo dat verdeling over twee netwerken de communicatie twee keer zo snel maakt: bij een wisselende netwerkbezetting kan de ervaren gebruikerssnelheid zelfs met een factor vijf tot tien toenemen.'

21

OPLOSSING SUDOKU

Hier zie je de oplossing van de sudoku-puzzel op pagina 11. In het torus-diagram van figuur 7 kun je vijf sudoku's ontdekken: een verschuiver (figuur 8) en haar vier verschuivingen (figuur 9, één gekleurd vak per verschuiving). Merkwaardig (en jammer) dat het groene vak afwijkt van het Ritmeesterkwartet! (Ritmeester heeft in *NRC Handelsblad* een sudoku-rubriek met 4 extra 3×3 vierkanten in de sudoku's.)

5	2	9	6	3	7	4	1	8
4	1	8	5	2	9	6	3	7
3	6	7	1	4	8	2	5	9
8	5	3	9	6	1	7	4	2
7	4	2	8	5	3	9	6	1
6	9	1	4	7	2	5	8	3
2	8	6	3	9	4	1	7	5
1	7	5	2	8	6	3	9	4
9	3	4	7	1	5	8	2	6

Figuur 8 Verschuiver

5	2	9	6	3	7	4	1	8
4	1	8	5	2	9	6	3	7
3	6	7	1	4	8	2	5	9
8	5	3	9	6	1	7	4	2
7	4	2	8	5	3	9	6	1
6	9	1	4	7	2	5	8	3
2	8	6	3	9	4	1	7	5
1	7	5	2	8	6	3	9	4
9	3	4	7	1	5	8	2	6

Figuur 9 Verschuivingen

Wiskunde was vroeger wellicht nog prettiger dan nu. Er viel toen veel meer te ontdekken. In dit artikel verplaatsen we ons even terug in de tijd, naar het jaar 1643.

■ door Paul Levrie

DE KUSSENDE CIRKELS VAN DE PRINSES

In het jaar 1643 was René Descartes 47 jaar oud. Hij had rechten gestudeerd, maar nooit het beroep van advocaat uitgeoefend. In plaats daarvan was hij gaan 'flierefluiten en reizen' (zoals Wikipedia het verwoordt). Van 1628 tot 1649 verbleef hij zo in Nederland, waar hij onder andere de cartesische coördinaten uitvond.

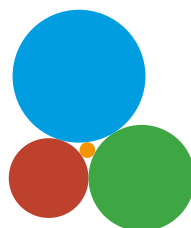
CIRKELSTELLING In 1643 komt Descartes in contact met een prinses die zich met wiskunde bezighield. Het gaat om Elisabeth van Bohemen (of Elisabeth van de Palts), een dochter van de winterkoning en -koningin. Zij beginnen elkaar brieven te schrijven, en in één van deze brieven formuleert Descartes het volgende vraagstuk:

Gegeven drie cirkels, bepaal de vierde cirkel die raakt aan deze drie.

Descartes ziet al snel zelf in dat dit wel een erg moeilijke opgave is. Hij zendt haar dus de methode om het probleem op te lossen, en zegt hierbij *'le reste ne sert point pour cultiver ou recréer l'esprit, mais seulement pour exercer la patience de quelque calculateur laborieux'* ('de rest is niet nuttig om de geest mee te oefenen of te vermaken, maar kan wel dienen om het geduld van een ijverige rekenaar op de proef te stellen').

In een volgende brief maakt hij het haar gemakkelijker door te vragen naar de cirkel die raakt aan drie gegeven cirkels die elkaar ook al raken, zie figuur 1. Dit probleem blijkt evenmin eenvoudig, en Descartes schrijft in de volgende brief dan ook: als je dat en dat doet, dan krijg je uiteindelijk:

$$\begin{array}{lcl} ddeeff & \propto & 2deffxx + 2deeffx \\ + ddeexx & & + 2deeffxx + 2ddeeffx \\ + dddffx & & + 2ddeffxx + 2ddeeffx \\ + eeffxx, & & \end{array}$$



Figuur 1 Cirkel die raakt aan drie gegeven cirkels die elkaar ook raken.

Hierbij stellen d , e en f de stralen voor van de drie gegeven cirkels, en x de gezochte straal van de vierde. Let op de keuze van de letters: het was Descartes die voorstelde om kleine letters uit het begin van het alfabet te gebruiken voor bekende grootheden en kleine letters achteraan in het alfabet voor onbekenden. Let ook op de voorloper van het gelijkheidsteken. Hoe Descartes precies tot deze vergelijking is gekomen, is nog steeds niet duidelijk.

Deze stelling wordt tegenwoordig de *Cirkelstelling van Descartes* genoemd. We nemen de stelling wat nader onder de loep. We onderscheiden drie gevallen.

Geval 1: twee cirkels en twee rechten (een rechte is een cirkel met straal oneindig).

Omdat elk drietal cirkels moet raken aan de vierde, zullen de twee rechten evenwijdig zijn, en dus beide raken aan de twee cirkels. Dat kan alleen als beide cirkels dezelfde straal hebben, zie figuur 2.

We spreken af dat we de stralen van de cirkels voorstellen met de letter r met een index. We hebben dus in dit geval dat er voldaan moet zijn aan: $r_1 = r_2$. Vooruitlopend op de feiten merken we op dat we dit ook zo kunnen schrijven:

$$\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)^2.$$

Geval 2: drie cirkels en één rechte.

We starten met twee cirkels die tegen elkaar aanliggen op een rechte, zie figuur 3 (boven). Bij het tekenen van deze figuur met de computer had ik al dadelijk het volgende probleem: hoever liggen de raakpunten van de cirkels met de rechte uit elkaar? De stelling van Pythagoras geeft het antwoord, zie figuur 3 (onder). We vinden dat

$$x = \sqrt{(r_1 + r_2)^2 - (r_1 - r_2)^2} = 2\sqrt{r_1 r_2}.$$

De eerste figuur vinden we als *sangaku* terug in een Japanse tempel. Een sangaku is een plaatje dat een wiskundige stelling voorstelt. De bedoeling is dat je achterhaalt wat de stelling is, en die dan ook bewijst. Dat hebben we voor figuur 3 hierboven gedaan.

We kunnen tussen de twee grote cirkels perfect een kleintje inpassen, zie figuur 4. Dit is ook een sangaku (Gunma Prefectuur, 1824). Omdat we de vorige al hebben opgelost, is het enige probleem hier nog: wat is de straal van de kleine cirkel? Als we de afstanden tussen de raakpunten op de rechte voorstellen door x_1 en x_2 , dan hebben we dus: $x = x_1 + x_2$. De drie x -en kunnen we met behulp van stralen uitdrukken dankzij de vorige formule:

$$2\sqrt{r_1 r_2} = 2\sqrt{r_1 r_3} + 2\sqrt{r_3 r_2}.$$

We delen nu door 2 en door $\sqrt{r_1 r_2 r_3}$:

$$\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}.$$

Ook dit schrijven we nog even anders: kwadrateren geeft

$$\frac{1}{r_3} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{2}{\sqrt{r_1 r_2}}.$$

We brengen de eerste twee termen van het rechterlid over naar het linkerlid, kwadrateren opnieuw en herordenen wat. Zo vinden we:

$$\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{1}{r_3^2} = \frac{2}{r_1 r_3} + \frac{2}{r_2 r_3} + \frac{2}{r_1 r_2}.$$

Als we nu bij beide leden de drie termen van het linkerlid optellen, dan kunnen we deze vergelijking herschrijven als:

$$\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{1}{r_3^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} \right)^2.$$

Geval 3: vier cirkels.

Zie figuur 1. De formule laat zich raden in dit geval:

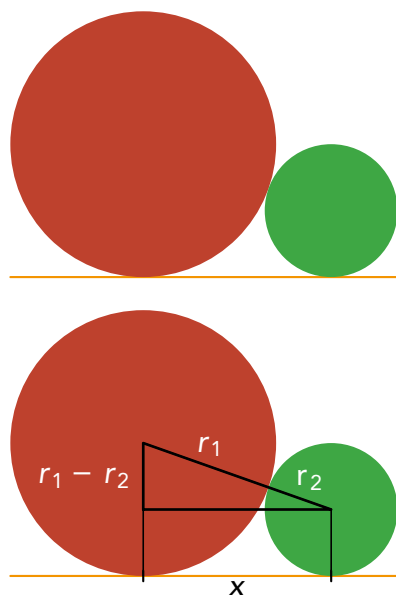
$$\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{1}{r_3^2} + \frac{1}{r_4^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4} \right)^2.$$

Het is eenvoudig na te gaan dat dit equivalent is met wat Descartes vond (deel zijn resultaat door $ddeefferxx$, en dan ben je er in één stap).

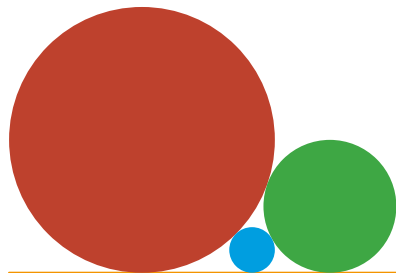
In het laatste geval is het duidelijk dat er ook nog een andere oplossing is, namelijk een cirkel die rond de gegeven drie cirkels loopt. Omdat we bij gegeven stralen r_1 , r_2 en r_3 voor het bepalen van de vierde straal r_4 een vierkantsvergelijking hebben, vinden we inderdaad twee oplossingen. Een van de twee oplossingen is negatief, en deze moeten we dan interpreteren als het tegengestelde van de straal van de omringende cirkel, zie figuur 5. (Maar hoe bepaal je het middelpunt van deze cirkel?)



Figuur 2 Situatie bij geval 1.



Figuur 3 Voorbereiding bij geval 2.



Figuur 4 Situatie bij geval 2.

HERONTDEKKING De geschiedenis gaat verder. Het resultaat raakt gedurende 150 jaar in de vergeetelheid en wordt dan opnieuw ontdekt in Japan, en ook in Europa. In Europa eerst door Jakob Steiner (rond 1820), en dan onafhankelijk van Steiner door een amateurwiskundige, Philip Beecroft (in 1842). Honderd jaar later, in 1936, herontdekt Sir Frederick Soddy (winnaar van de Nobelprijs scheikunde in 1921) de stelling. Hij geeft ook een bewijs en een uitbreiding, en schrijft er zelfs een gedicht over, waarvan dit de eerste twee strofen zijn:

The Kiss Precise door Frederick Soddy
(Nature, 1936)

*For pairs of lips to kiss maybe
Involves no trigonometry.
'Tis not so when four circles kiss
Each one the other three.
To bring this off the four must be
As three in one or one in three.
If one in three, beyond a doubt
Each gets three kisses from without.
If three in one, then is that one
Thrice kissed internally.*

*Four circles to the kissing come.
The smaller are the benter.
The bend is just the inverse of
The distance from the center.
Though their intrigue left Euclid dumb
There's now no need for rule of thumb.
Since zero bend's a dead straight line
And concave bends have minus sign,
The sum of the squares of all four bends
Is half the square of their sum.*

Er werden allerlei veralgemeningen gevonden, voor rakende bollen bijvoorbeeld, en hyperbollen, zie figuur 6. En ook het gedicht werd veralgemeend (door Thorold Gosset in 1937). Ook in de niet-euclidische meetkunde werden er versies gevonden van de stelling van Descartes. En het gedicht werd verder veralgemeend (door Fred Lunnon).



Figuur 5 Situatie bij geval 3.

SNEEUWMAN Bij de sangaku in figuur 7 is het de bedoeling dat je de straal van de oranje cirkels schrijft als functie van de straal van de grootste (groene) cirkel. Het probleem dat wij nu te lijf gaan, lijkt er een beetje op. Je ziet de opgave in figuur 8. De straal van de grote cirkels stellen we gelijk aan 1 voor de eenvoud. De 'sneeuwman' bestaat uit oneindig veel kleine witte cirkels. De vraag is: hoe hoog is deze sneeuwman?

We verklappen het antwoord:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots = 1.$$

Merkwaardig genoeg zijn de termen van deze som precies de diameters van de witte cirkels in figuur 8. Om dat te bewijzen, beginnen we met de grote witte cirkel onderaan. We hebben drie rakende cirkels (waarvan twee met straal 1) en een rakende rechte. We zitten dus in geval 2:

$$\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{1}{r_3^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} \right)^2$$

waaruit volgt dat

$$1 + 1 + \frac{1}{r_3^2} = \frac{1}{2} \left(1 + 1 + \frac{1}{r_3} \right)^2.$$

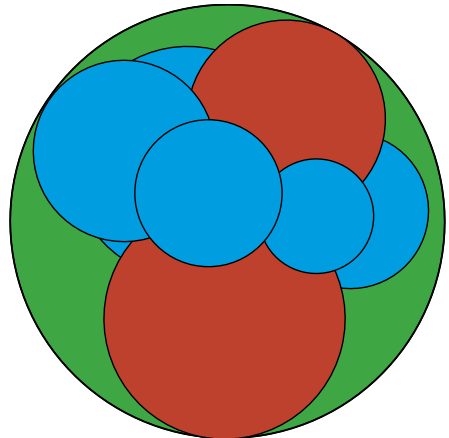
Dit geeft ons de straal van de onderste witte cirkel, namelijk $r_3 = \frac{1}{4}$. De diameter is dan $\frac{1}{2}$.

Om de straal van de tweede cirkel te bepalen, gebruiken we de algemene formule:

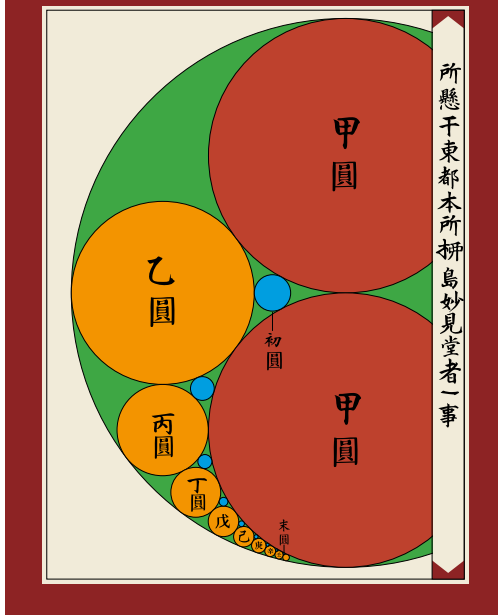
$$\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{1}{r_3^2} + \frac{1}{r_4^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4} \right)^2,$$

dus

$$1 + 1 + 16 + \frac{1}{r_4^2} = \frac{1}{2} \left(1 + 1 + 4 + \frac{1}{r_4} \right)^2$$



Figuur 6 Rakende bollen. Afbeelding: Tony Rothman, Scientific American, May 1998.



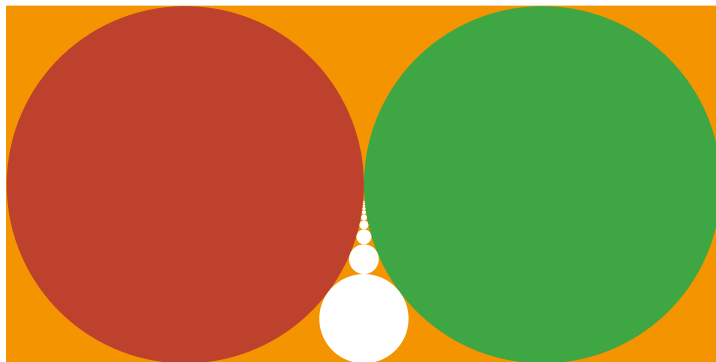
Figuur 7 Japanse sangaku. Afbeelding: Tony Rothman, *Scientific American*, May 1998.

en dit geeft ons $r_4 = \frac{1}{12}$ en diameter $\frac{1}{6}$. Voor de andere cirkels kunnen we op dezelfde manier te werk gaan, met de algemene formule. En het is duidelijk dat we er via *volledige inductie* kunnen komen (zie ook het artikel op pagina 26). Stel namelijk dat we vertrekken van de cirkel met straal $1/(2n(n+1))$, dan zou de volgende als straal $1/(2(n+1)(n+2))$ moeten hebben. Je kunt eenvoudig nagaan dat dit klopt door in te vullen:

$$1 + 1 + (2n(n+1))^2 + (2(n+1)(n+2))^2 = \frac{1}{2} (1 + 1 + 2n(n+1) + 2(n+1)(n+2))^2$$

(wat toch wel een merkwaardig resultaat is).

We hebben nu ontdekt dat de diameters van de witte cirkels precies gelijk zijn aan de termen in de som. Als je naar figuur 8 kijkt, is het bovendien duidelijk dat de totale hoogte van de sneeuwman gelijk is aan de straal van de twee grote cirkels, en die is 1. Daarmee is onze eigenschap bewezen.



Figuur 8 Hoe hoog is de sneeuwman?

DUIVELSUITVINDING Tot besluit iets om over na te denken: is de zojuist gevonden som wel echt gelijk aan 1? We kunnen deze (zonder de eerste term) toch ook zo schrijven:

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \dots = \left(1 - \frac{5}{6}\right) + \left(\frac{5}{6} - \frac{9}{12}\right) + \left(\frac{9}{12} - \frac{14}{20}\right) + \left(\frac{14}{20} - \frac{20}{30}\right) + \dots = 1.$$

Maar evengoed ook zo:

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \dots = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \dots = \frac{1}{2}.$$

Als beide resultaten juist zijn, dan hebben we nu net bewezen dat $\frac{1}{2} = 1$. De Noorse wiskundige Niels Henrik Abel (1802-1829) zei het al: dergelijke reeksen zijn een uitvinding van de duivel. ■

LITERATUUR

- H. Fukagawa en T. Rothman, *Sacred Mathematics: Japanese Temple Geometry*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2008.
- St. Kifowit, *Serious About that 1 Series*, 2011 (beschikbaar op internet).
- T. Rothman, 'Japanese Temple Geometry', *Scientific American*, May 1998, p. 85-91.
- J. Stewart, *Essential Calculus*, Brooks/Cole Publishing Co, 2010.
- Th. Teunis, 'De kus van de winterprinses', in: Studentenproject *Tapas of Descartian Geometry, Essays related to René Descartes and/or his Géométrie* (2009) (beschikbaar op internet).

Paul Levrie is verbonden aan Departement IWT van de Karel de Grote-Hogeschool, Hoboken, Antwerpen. Hij schreef dit artikel voor zijn collega Gie Zonnekeyn, bij zijn pensionering.

Op 23 maart deden zo'n 800 leerlingen mee aan de tweede ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade (NWO). In september zullen de 130 beste kandidaten met elkaar de strijd aangaan tijdens de finale. Daar krijgen zij vijf opgaven, waarvoor een volledige berekening of een sluitend bewijs gegeven moet worden. Tot die tijd kunnen de leerlingen op universiteiten terecht voor trainingen, waarin bewijstechnieken en nieuwe onderwerpen geëoefend worden. Een van die bewijstechnieken is het principe van volledige inductie.

■ door Jan Brinkhuis en Adriana Gabor

INDUCTIE BIJ DE WIS

Stel je een oneindig lange rij dominostenen voor, genummerd 1, 2, 3, Als je steen 1 een zetje geeft, valt steen 2 om, die er op zijn beurt voor zorgt dat steen 3 omvalt. Dit gaat zo eindeloos door, maar dat tikje tegen steen 1 is wel noodzakelijk, anders wordt de *wave* niet in gang gezet.

De oneindige rij dominostenen is de klassieke metafoor voor het bewijsprincipe van *volledige inductie*. Dit principe komt vaak van pas als je iets wilt bewijzen voor alle natuurlijke getallen.

Opgave 1. Bewijs dat de som van de eerste n derdemachten een kwadraat is.

26 Begin gewoon met uitrekenen van de eerste paar gevallen: $1^3 + 2^3 = 9 = 3^2$, $1^3 + 2^3 + 3^3 = 36 = 6^2$, en $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 100 = 10^2$. Er lijkt te gelden:

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2. \quad (*)$$

Met volledige inductie kunnen we deze bewering echt hardmaken. Dat gaat in twee stappen.

Stap 1 (inductiebasis). Ga na dat de formule geldt voor $n = 1$; inderdaad, 1^3 en 1^2 zijn aan elkaar gelijk: ze zijn allebei gelijk aan 1.

Stap 2 (inductiestap). Stel, we weten dat de formule geldt voor $n = k$:

$$1^3 + 2^3 + \dots + k^3 = (1 + 2 + \dots + k)^2.$$

We gaan de formule nu bewijzen voor $n = k + 1$:

$$1^3 + 2^3 + \dots + k^3 + (k + 1)^3 = (1 + 2 + \dots + k + (k + 1))^2.$$

Aan de linkerkant is er $(k + 1)^3$ bijgekomen. Wat verandert er aan de rechterkant? Gebruik de for-

mule $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, waarbij a staat voor $(1 + 2 + \dots + k + (k + 1))$ en b voor $(1 + 2 + \dots + k)$. Dan komt er aan de rechterkant bij:

$$(k + 1)((1 + 2 + \dots + k) + (1 + 2 + \dots + (k + 1))).$$

Met behulp van de formule $1 + 2 + \dots + k = k(k + 1)/2$ zie je dat dit te schrijven is als $(k + 1)(2 \cdot k(k + 1)/2 + (k + 1))$. Haal nu $(k + 1)$ buiten haakjes; binnen die haakjes blijft dan $k + 1$ over. Alles bij elkaar genomen geeft dit $(k + 1)^3$.

We kunnen nu concluderen dat formule (*) geldt voor alle gehele getallen $n \geq 1$. Waarom is deze conclusie gerechtvaardigd? Neem bijvoorbeeld $n = 3$. De inductiebasis stelt dat de formule klopt voor $n = 1$ (bij de dominostenen is dat het handmatig gegeven zetje). Vervolgens stelt de inductiestap dat de formule klopt voor $n = k + 1 = 2$. Nog een keer de inductiestap toepassen levert op dat de formule klopt voor $n = 3$. Op dezelfde manier kunnen we voor elke vaste maar willekeurig gekozen n bewijzen dat de formule geldt: we beginnen met de inductiebasis en dan doen we $n - 1$ keer de inductiestap, voor successievelijk $k = 1, 2, \dots, n - 1$. Dit bewijst de bewering voor het gekozen getal n .

Het bewijsprincipe van volledige inductie is heel krachtig, maar het heeft ook een nadeel. Het lukt niet om 'rechtstreeks' te bewijzen dat de som van de eerste n derdemachten een kwadraat is. Formule (*) heb je echt nodig.

Trouwens, die formule geeft voorbeelden van een stel getallen waarvan de som van de derdemachten gelijk is aan het kwadraat van de som. Zou dat ook kunnen met stelletjes getallen die niet alleen maar opeenvolgend zijn? Ja, er geldt bijvoorbeeld:

$$6^3 + 3^3 + 4^3 + 2^3 + 2^3 + 1^3 = (6 + 3 + 4 + 2 + 2 + 1)^2.$$

KUNDE OLYMPIADE

Hoe zijn we hier aan gekomen? Eerst hebben we een willekeurig getal gekozen, hier het getal 75. Daarna hebben we alle delers bepaald en van iedere deler het aantal delers geteld: de delers zijn 75, 25, 15, 5, 3, 1 met respectievelijk 6, 3, 4, 2, 2, 1 delers. Dit werkt altijd; probeer dat zelf maar eens te bewijzen.

INDUCTIE EN MEETKUNDE Inductie kun je soms ook gebruiken als er helemaal geen sprake is van getallen, zoals uit de volgende opgave blijkt.

Opgave 2. Teken n lijnen in het vlak. Bewijs dat de gebieden die op deze manier ontstaan, zó gekleurd kunnen worden met geel en blauw, dat geen twee aan elkaar grenzende gebieden dezelfde kleur hebben.

Stap 1 (inductiebasis). Voor $n = 1$ zijn er 2 gebieden. Die kleuren we met geel en blauw.

Stap 2 (inductiestap). We nemen aan dat we gebieden, gevormd door k lijnen, altijd met geel en blauw kunnen kleuren.

Bekijk nu $k + 1$ lijnen (teken een paar plaatjes mee, dan zie je hoe de kleuren veranderen na het trekken van lijn $k + 1$). Haal lijn $k + 1$ even weg en kleur de gebieden gevormd door de eerste k lijnen volgens de regels. Dit is mogelijk wegens onze aanname. Lijn $k + 1$ verdeelt het vlak in twee halve vlakken. In een van de twee halfvlakken laten we alle gebieden hun kleur behouden en in het andere halfvlak veranderen we juist alle gebieden van kleur. Neem nu twee gebieden die aan elkaar grenzen met een lijnstuk. We kunnen drie situaties onderscheiden:

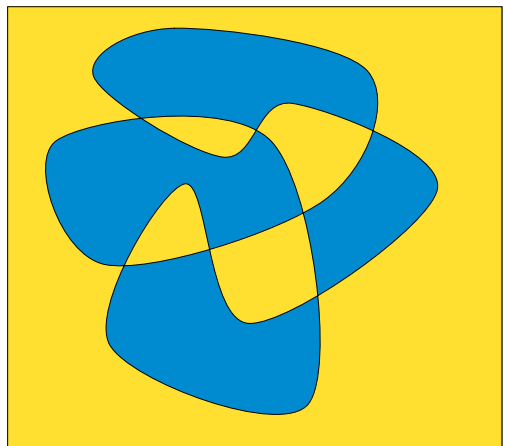
1. Hun grens ligt op lijn $k + 1$. Dan zijn de twee gebieden uit één gebied ontstaan bij het trekken van lijn $k + 1$. Aanvankelijk had dat gebied één kleur, maar daarna hebben wij de kleur van één van

de twee gebieden veranderd. Dus de twee gebieden hebben nu verschillende kleuren.

2. Hun grens ligt in het halfvlak waar we niets veranderd hebben. Dan hebben de gebieden nog steeds verschillende kleuren.

3. Hun grens ligt in het halfvlak waar we de kleur veranderd hebben. Oorspronkelijk hadden de gebieden verschillende kleuren. Omdat we de kleuren omgewisseld hebben, is dat nog steeds zo.

Je kunt ook een gesloten kromme lijn trekken die zichzelf mag snijden, zie figuur 1. Dan kun je nog steeds alle gebieden correct kleuren met alleen geel en blauw. Het bewijs mag je zelf proberen te ontdekken. Het moeilijkste punt is misschien: hoe vertaal je het kleuren van een landkaart in een bewering die afhangt van een natuurlijk getal n ? Wat goed blijkt te werken, is om voor n het aantal pun-



Figuur 1 Kleuren van gebieden gevormd door een gesloten kromme.

ten te nemen waarin de kromme lijn zichzelf snijdt. Hoe zou je zo'n snijpunt kunnen weghalen?

Je kunt met dezelfde methode willekeurige landkaarten analyseren, en dan zie je dat twee kleuren voldoende zijn, dan en slechts dan als er geen drie- en vijflandenpunten zijn, noch andere punten waar een oneven aantal landen samenkomt.

Dit brengt ons bij een beroemde stelling die in de twintigste eeuw bewezen is: voor iedere kaart heb je aan vier kleuren genoeg als buurlanden niet dezelfde kleur mogen hebben. Bedenk zelf eens een kaart die niet met drie kleuren gekleurd kan worden. Het bewijs van de stelling gebruikt ook volledige inductie, maar er zijn zoveel technische details in het bewijs dat deze met een computer uitgevoerd moesten worden en niet met de hand gecontroleerd kunnen worden!

EEN OUDE OLYMPIADE-OPGAVE Nu een echte Wiskunde Olympiade opgave, een van meer dan veertig jaar geleden:

Opgave 3. (NWO, finale 1971). Voor ieder natuurlijk getal m definiëren we $a(m)$ als het aantal priemfactoren 2 in zijn priemontbinding. Voor positieve gehele n definiëren we $S(n)$ door:

$$S(n) = a(1) + a(2) + a(3) + \dots + a(2^n).$$

Druk $S(n)$ uit in n .

We berekenen eerst $S(n)$ voor een paar kleine waarden van n . Het getal 1 heeft geen factor 2 in zijn ontbinding, dus $a(1) = 0$. Verder heeft 2 één factor 2, dus $a(2) = 1$. Dus $S(1) = 0 + 1 = 1$. Zo gaan we verder, en we krijgen de tabel die je in figuur 2 ziet.

Het is duidelijk dat $a(m) = 0$ voor alle oneven getallen: oneven getallen hebben geen factor 2 in hun priemontbinding. De laatste kolom suggereert

$$S(n) = 2^n - 1.$$

We gaan dit vermoeden met volledige inductie hard maken.

Stap 1 (inductiebasis). $S(1) = 1 = 2^1 - 1$, dus de bewering is waar voor $n = 1$.

Stap 2 (inductiestap). Stel dat voor $n = k$ geldt

$$S(k) = 2^k - 1.$$

We willen bewijzen dat $S(k + 1) = 2^{k+1} - 1$. We moeten een verband leggen tussen $S(k)$ en $S(k + 1)$. Probeer eerst $k = 2$. Het getal $S(3)$ is het aantal factoren 2 in de rij 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. De oneven getallen 1, 3, 5, 7 hebben geen factor 2, dus die kun je weglaten. De resterende even getallen 2, 4, 6, 8 hebben uiteraard allemaal minstens één factor 2. Deel ieder van die getallen door 2, dan we krijgen 1, 2, 3, 4. Het aantal factoren 2 hierin is $S(2)$. Dus $S(3) = 2^2 + S(2)$.

Dezelfde redenering kunnen we gebruiken voor het algemene geval $S(k + 1)$. Het getal $S(k + 1)$ is het aantal factoren 2 in de rij 1, 2, 3, ..., 2^{k+1} . Weglaten van de oneven getallen geeft de rij 2, 4, 6, ..., 2^{k+1} . Deel alles door 2, dit geeft de rij 1, 2, 3, ..., 2^k ; het aantal factoren 2 in deze rij is $S(k)$. Deze redenering bewijst $S(k + 1) = 2^k + S(k)$. We hebben verondersteld dat $S(k) = 2^k - 1$. We krijgen dus

$$S(k + 1) = 2^k + (2^k - 1) = 2^{k+1} - 1.$$

n	$S(n) = a(1) + a(2) + a(3) + \dots + a(2^n)$	en dit is
1	$0 + 1$	1
2	$0 + 1 + 0 + 2$	3
3	$0 + 1 + 0 + 2 + 0 + 1 + 0 + 3$	7
4	$0 + 1 + 0 + 2 + 0 + 1 + 0 + 3 + 0 + 1 + 0 + 2 + 0 + 1 + 0 + 4$	15

Figuur 2 De waarden van $S(1)$, $S(2)$, $S(3)$ en $S(4)$.

De formule $S(n) = 2^n - 1$ geldt dus voor alle positieve gehele getallen n .

Je kunt deze opgave ook zo formuleren: druk het aantal factoren 2 in de priemontbinding van $(2^n)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2^n$ uit in n . Je kunt met precies dezelfde methode voor ieder priemgetal p het aantal factoren p in $(p^n)!$ uitdrukken in p en n . Probeer dit eens, bijvoorbeeld voor $p = 3$.

TORENS VAN HANOI We eindigen met een klassieke puzzel: de *Torens van Hanoi*.

Opgave 4. Breng een toren van 64 schijven (met een gat in het midden) over van het eerste naar het derde stokje. Bij iedere zet mag maar één schijf naar een ander stokje verplaatst worden; hierbij mag nooit een grotere schijf boven op een kleinere schijf liggen. Hoe kan dit in zo min mogelijk zetten?

Stel we hebben een *k*-strategie gevonden, dat wil zeggen, de snelste manier om een toren van k schijven te verplaatsen naar een ander stokje. Noem $s(k)$ het aantal zetten voor de *k*-strategie. We proberen nu de $(k + 1)$ -strategie te vinden. Bekijk de stap waarop de grootste schijf verplaatst wordt. Je ziet snel in dat je het beste zowel ervoor als erna de *k*-strategie toe kan passen: ervoor om de bovenste k schijven opzij te zetten, zodat je de onderste schijf naar een leeg stokje kunt verplaatsen; erna om de bovenste k schijven op de verplaatste schijf te krijgen. Dus

$$s(k + 1) = 2s(k) + 1.$$



Figuur 3 De Torens van Hanoi met vier schijven.

Uiteraard is $s(1) = 1$: beweeg de ene schijf waaruit een 1-toren bestaat naar een ander stokje: dat is een zet. Met bovenstaande formule gaan we $s(2)$, $s(3)$, ... berekenen: $s(2) = 2s(1) + 1 = 3$, enzovoorts. Zo krijgen we de rij 1, 3, 7, 15, 31, 63, 127, ..., ofwel de machten van 2 min één. Dat wil zeggen, het lijkt erop dat

$$s(n) = 2^n - 1$$

voor ieder aantal schijven n . Probeer zelf deze formule met volledige inductie te bewijzen.

Bij deze puzzel hoort een legende over priesters die iedere seconde een zet doen; als de toren helemaal verplaatst is, zou de wereld vergaan. Reken maar uit hoeveel jaren het duurt voordat alle $2^{64} - 1$ zetten gedaan zijn, en je zult concluderen dat er vooralsnog geen reden tot paniek is. ■

OEFENEN OP DE UNIVERSITEIT

De trainingen voor de NWO-finale zijn in april, mei en juni op diverse Nederlandse universiteiten. Tijdens een training wordt individueel of in groepjes nieuwe stof behandeld onder begeleiding van universitaire trainers. Het trainingsmateriaal van de Nederlandse Wiskunde Olympiade, met onderwerpen als volledige inductie, priemgetallen, deelbaarheidscriteria, het extremenprincipe en het ladenprincipe, is te vinden op www.wiskundeolympiade.nl/ft.

PYTHAGORAS OLYMPIADE

■ door Matthijs Coster, Alexander van Hoorn en Eddie Nijholt

Doe mee met de Pythagoras Olympiade! Elke aflevering bevat vier opgaven. De eerste twee zijn wat eenvoudiger; onder de goede inzendingen van leerlingen uit de klassen 1, 2 en 3 wordt een cadeaubon van Bol.com ter waarde van 20 euro verloot. De laatste twee zijn echte breinbrekers; onder de goede inzendingen van leerlingen (tot en met klas 6) wordt een Bol.com-bon van 20 euro verloot. Per aflevering wordt maximaal één bon per persoon vergeven.

Bovendien kun je je via de breinbrekers plaatsen voor de finale van de Nederlandse Wiskunde Olympiade, mocht het via de voorronden niet lukken: aan het eind van elke jaargang worden enkele leerlingen die regelmatig een correcte oplossing van de breinbrekers hebben ingestuurd, uitgenodigd voor de NWO-finale. Niet-leerlingen kunnen met de Pythagoras Olympiade meedoen voor de eer.



HOE IN TE ZENDEN? Inzendingen ontvangen we bij voorkeur per e-mail (getypt of een scan van een handgeschreven oplossing): pytholym@gmail.com.

Je ontvangt een automatisch antwoord zodra we je bericht hebben ontvangen.

Eventueel kun je je oplossing sturen naar
Pythagoras Olympiade
Korteweg-de Vries Instituut
Universiteit van Amsterdam
Postbus 94248
1090 GE Amsterdam.

Voorzie het antwoord van een duidelijke toelichting (dat wil zeggen: een berekening of een bewijs). Vermeld je naam en adres; leerlingen moeten ook hun klas en de naam van hun school vermelden.

Je inzending moet bij ons binnen zijn vóór 30 juni 2012.

DE GOEDE INZENDERS VAN JANUARI 2012

226: Rombout van Amstel (klas 4), Gymnasium Felisenum, Velsen-Zuid; Stijn Cambie (klas 6), VTI Poperinge; P. Dekker, Krimpen aan de Lek; Arie Heikoop, Kampen; Tom de Jong (klas 6), Farel College, Ridderkerk; Jolien Kerssens (klas 6), Jac. P. Thijssse College, Castricum; Peter van der Lecq, Utrecht; Vidan Samardzic (klas 5), Corlaer College, Nijkerk; Michelle Sweering (klas 4), Erasmiaans Gymnasium, Rotterdam; Paul van de Veen, Enschede; Bas Verseveldt (klas 4), Theresialyceum, Tilburg; Marieke van der Wegen (klas 6), Stedelijk Lyceum Kottenpark, Enschede.

227: Rombout van Amstel (klas 4), Gymnasium Felisenum, Velsen-Zuid; Stijn Cambie (klas 6), VTI Poperinge; P. Dekker, Krimpen aan de Lek; Arie Heikoop, Kampen; Jolien Kerssens (klas 6), Jac. P. Thijssse College, Castricum; Peter van der Lecq, Utrecht; Vidan Samardzic (klas 5), Corlaer College, Nijkerk; Michelle Sweering (klas 4), Erasmiaans Gymnasium, Rotterdam; Djurre Tijsma (klas 5), Christelijk Gymnasium Beyers Naudé, Leeuwarden; Paul van de Veen, Enschede; Bas Verseveldt (klas 4), Theresialyceum, Tilburg.

228: Rombout van Amstel (klas 4), Gymnasium Felisenum, Velsen-Zuid; Andreas Bally (klas 4), Europese

school van Luxemburg; Kees Boersma, Vlissingen; Stijn Cambie (klas 6), VTI Poperinge; P. Dekker, Krimpen aan de Lek; Tessa Heeroma (klas 4), Barlaeusgymnasium, Amsterdam; Arie Heikoop, Kampen; Tom de Jong (klas 6), Farel College, Ridderkerk; Jolien Kerssens (klas 6), Jac. P. Thijssse College, Castricum; Peter van der Lecq, Utrecht; Rogier Nell (klas 5), Stedelijk Gymnasium, Leiden; Vidan Samardzic (klas 5), Corlaer College, Nijkerk; Michelle Sweering (klas 4), Erasmiaans Gymnasium, Rotterdam; Djurre Tijsma (klas 5), Christelijk Gymnasium Beyers Naudé, Leeuwarden; Paul van de Veen, Enschede; Bas Verseveldt (klas 4), Theresialyceum, Tilburg; Marieke van der Wegen (klas 6), Stedelijk Lyceum Kottenpark, Enschede.

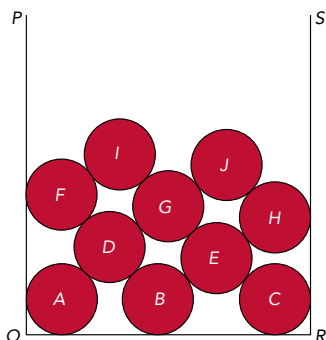
229: Rombout van Amstel (klas 4), Gymnasium Felisenum, Velsen-Zuid; Kees Boersma, Vlissingen; Stijn Cambie (klas 6), VTI Poperinge; Arie Heikoop, Kampen; Jolien Kerssens (klas 6), Jac. P. Thijssse College, Castricum; Djurre Tijsma (klas 5), Christelijk Gymnasium Beyers Naudé, Leeuwarden; Paul van de Veen, Enschede; Bas Verseveldt (klas 4), Theresialyceum, Tilburg.
De cadeaubon gaat naar Jolien Kerssens.

OPGAVE 234

Het getal x heeft de volgende eigenschap. Het getal x zit tussen 0 en 1. Deel je dit interval in twee helften (dus $[0, \frac{1}{2}]$ en $[\frac{1}{2}, 1]$), dan zit x in de eerste helft. Deel je vervolgens dit interval in twee helften, dan zit x in de tweede helft. Ga je zo door, dan wisselt het getal x steeds tussen de eerste en tweede helft. Welk getal is x ?

OPGAVE 236

Er kunnen net geen vier flessen wijn naast elkaar liggen op de bodem van het rechthoekige wijnrek $PQRS$. Er liggen er drie, waarbij de flessen A en C tegen de zijanten aanliggen. Fles B wordt op haar plaats gehouden door de flessen D en E . We kunnen er dan weer een rij van drie op leggen, F , G en H , waarbij F en H rusten tegen de zijanten van het rek. Dan volgt een nieuwe laag met twee flessen I en J . Merk op dat de drie rijen (D, E) , (F, G, H) en (I, J) hellen. Die helling hangt af van de plaatsing van de flessen in de onderste laag. Bewijs dat de volgende rij wijnflessen die je legt, horizontaal ligt (dus niet helt).



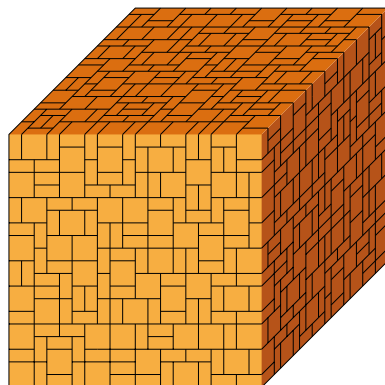
OPGAVE 235

We hebben een balans en n gewichten van achtereenvolgens 1, 2, 3, ..., n gram. Alle gewichten worden op de balans gelegd; een aantal op de linkerschaal en een aantal op de rechterschaal. Voor welke waarden van n kunnen de gewichten zó worden neergelegd, dat de balans in evenwicht is?



OPGAVE 237

Een massieve kubus van $20 \times 20 \times 20$ is opgebouwd uit 2000 blokjes met afmetingen $2 \times 2 \times 1$. Bewijs dat je een rechte lijn kunt vinden die loodrecht staat op een van de zijvlakken, door het binnenste van de kubus gaat, en toch geen enkel van de 2000 blokjes doorboort.



OPLOSSING 226

In de Pythagorasstraat staan aan beide kanten huizen: aan de ene kant zijn de huisnummers oneven, aan de andere kant even. A en B wonen aan dezelfde kant en zijn burens van elkaar. P , Q en R wonen in drie naast elkaar gelegen huizen aan de overkant van A en B . De som van de huisnummers van A en B is gelijk aan de som van de huisnummers van P , Q en R . Tevens zijn twee van de vijf huisnummers een kwadraat. Om welke vijf huisnummers gaat het? (Alle huisnummers in de Pythagorasstraat zijn kleiner dan 1000.)

Oplossing. Neem aan dat $A < B$ en $P < Q < R$. De som van drie oneven getallen is oneven, wat niet gelijk kan zijn aan de som van twee even getallen, dus A en B wonen aan de oneven kant. Bovendien liggen de kwadraten niet aan dezelfde kant van de straat, omdat ze dan 2, 4 of 6 zouden verschillen, wat niet kan. Er geldt $B = A + 2$, $P = Q - 2$ en $R = Q + 2$. We hebben dus $2A + 2 = 3Q$. Hieruit volgt dat 3 een deler is van $2A + 2$, zodat A van de vorm $3k + 2$ is, en dus geen kwadraat. We zoeken voor B dus een oneven kwadraat zodat 3 een deler is van $2B - 2$ en zodat voor $Q = (2B - 2)/3$ een van de getallen $Q - 2$, Q en $Q + 2$ een kwadraat is. We vinden $B = 25$, zodat $A = 23$, $P = 14$, $Q = 16$ en $R = 18$.

32

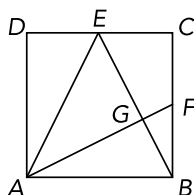
OPLOSSING 227

Een boot vaart over een snelstromende rivier tussen A en B (A ligt stroomopwaarts en B ligt stroomafwaarts). De boot doet er een uur over om van A naar B te varen, en twee uur van B naar A . De boot wordt vervangen door een (snellere) nieuwe boot. Deze nieuwe boot doet er drie kwartier over om van A naar B te varen. Hoe lang verwacht je dat de boot erover zal doen om van B naar A te varen: anderhalf uur, meer dan anderhalf uur of minder dan anderhalf uur?

Oplossing. Noem Δx de afstand tussen A en B , v_1 en v_2 de snelheden van de boten ten opzichte van het water en r de stroomsnelheid van het water. Er is gegeven dat $\Delta x = 1 \cdot (v_1 + r) = 2 \cdot (v_1 - r)$, zodat $v_1 = 3r$ en dus $\Delta x = 4r$. Daarmee volgt uit $\frac{3}{4}(v_2 + r) = \Delta x$ dat $v_2 = \frac{13}{3}r$ en dus is de tijd die de tweede boot erover doet om van B naar A te varen gelijk aan $\Delta x / (v_2 - r) = 4r / (\frac{13}{3}r - r) = 1\frac{1}{5}$, minder dan anderhalf uur dus.

OPLOSSING 228

Gegeven is een vierkant $ABCD$. Punt E is het midden van CD . Punt F is het midden van BC . Punt G is het snijpunt van AF en BE . Bewijs dat driehoek AEG rechthoekig is, waarbij voor de zijden geldt dat $AE : AG : EG = 5 : 4 : 3$.



Oplossing. Eerst bewijzen we dat $\triangle AEG$ rechthoekig is. De driehoeken ABF en BCE zijn congruent (ZHZ), dus $\angle AFB = \angle BEC$. In $\triangle BFG$ vinden we $\angle G = 180^\circ - \angle GBF - \angle BFG = 180^\circ - \angle EBC - \angle BEC = \angle C = 90^\circ$, dus $BE \perp AF$.

Vervolgens tonen we aan dat $AE : AG : EG = 5 : 4 : 3$. Zij x de zijde van het vierkant. Met behulp van de stelling van Pythagoras vinden we:

$$AE = BE = \sqrt{x^2 + \left(\frac{1}{2}x\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{5} \cdot x.$$

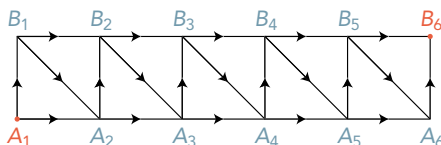
We hebben $\text{opp}(\triangle ABE) = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AD = \frac{1}{2}x^2$, maar ook $\text{opp}(\triangle ABE) = \frac{1}{2} \cdot BE \cdot AG = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{5} \cdot x \cdot AG$, zodat $AG = x / (\frac{1}{2}\sqrt{5}) = \frac{2}{5}\sqrt{5} \cdot x$. De stelling van Pythagoras levert dan

$$EG = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{5} \cdot x\right)^2 - \left(\frac{2}{5}\sqrt{5} \cdot x\right)^2} = \frac{3}{10}\sqrt{5} \cdot x.$$

Er geldt dus $AE : AG : EG = \frac{1}{2} : \frac{2}{5} : \frac{3}{10} = 5 : 4 : 3$.

OPLOSSING 229

In onderstaande plattegrond geven de pijlen aan in welke richting je mag lopen. Hoeveel verschillende wegen zijn er van $A = A_1$ naar $B = B_6$?



Oplossing. Schrijf het aantal manieren om van A naar A_i te komen als a_i en het aantal manieren om van A naar B_i te komen als b_i . Voor $i > 1$ geldt: $a_i = a_{i-1} + b_{i-1}$ en $b_i = a_i + b_{i-1}$. Met $a_1 = 1$ en $b_1 = 1$ vinden we achtereenvolgens: $a_2 = 2$, $b_2 = 3$, $a_3 = 5$, $b_3 = 8$, $a_4 = 13$, $b_4 = 21$, $a_5 = 34$, $b_5 = 55$, $a_6 = 89$ en uiteindelijk $b_6 = 144$.

OPLOSSING 3D-PUZZEL NR. 4



Hier zie je twee oplossingen (er zijn er nog meer) van de 3d-puzzel uit het februarinummer.

PYTHAGORAS

51ste jaargang nummer 5
april 2012
ISSN 0033 4766

Pythagoras stelt zich ten doel jongeren kennis te laten maken met de leuke en uitdagende kanten van wiskunde. Pythagoras richt zich tot leerlingen van vwo en havo en alle anderen die jong van geest zijn.

Internet www.pythagoras.nu

Hoofredacteur Arnout Jaspers

Eindredacteur Alex van den Brandhof

Redactie Matthijs Coster,
Jeanine Daems, Jan Guichelaar,
Klaas Pieter Hart, Paul Levrie,
Marc Seijlhouwer

Vormgeving Grafisch Team
Digipage BV, Leidschendam

Druk Drukkerij Ten Brink, Meppel

Uitgever Koninklijk Wiskundig
Genootschap

Verantwoordelijk uitgever Chris Zaal

Lezersreacties en kopij

Bij voorkeur per e-mail; lezersreacties naar Jan Guichelaar, jan@pythagoras.nu en kopij naar Arnout Jaspers, arnout@pythagoras.nu. Eventueel per post naar Jan Guichelaar, Pedro de Medinalaan 162, 1086 XR Amsterdam.

Abonnementen, bestellingen en mutaties

Drukkerij Ten Brink
Abonnementenadministratie
Postbus 41
7940 AA Meppel
Telefoon: 088 226 52 58
E-mail:
abonementen@pythagoras.nu

Abonnementsprijzen

(6 nummers per jaargang)
€ 26,00 (Nederland),
€ 29,00 (België),
€ 32,00 (overig buitenland),
€ 17,00 (groepsabbonement NL),
€ 18,00 (groepsabbonement B).
Zie www.pythagoras.nu voor toelichtingen.

Aan dit nummer werkten mee

Alex van den Brandhof
(alex@pythagoras.nu),
Jan Brinkhuis
(brinkhuis@ese.eur.nl),
Matthijs Coster
(matthijs@pythagoras.nu),
Jeanine Daems
(jeanine@pythagoras.nu),
Adriana Gabor
(gabor@ese.eur.nl),
Jan Guichelaar
(jan@pythagoras.nu),
Klaas Pieter Hart
(kp@pythagoras.nu),
Alexander van Hoorn
(alexander@pythagoras.nu),
Arnout Jaspers
(arnout@pythagoras.nu),
Paul Levrie
(paul@pythagoras.nu),
Eddie Nijholt
(eddie@pythagoras.nu),
Aad Thoen
(thoenaad37@gmail.com),
Edo Timmermans
(edotimmermans@hotmail.com),
Aad van de Wetering
(avdw3b@wxs.nl).

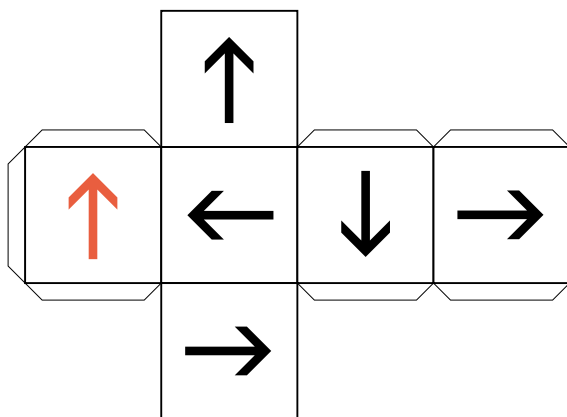
Pythagoras wordt mede mogelijk gemaakt door de bijdragen van de onderstaande instituten en instellingen.

33



3D-PUZZEL

■ door Paul Levrie en Alex van den Brandhof



↓	↑	↓	←	↓	↑
←	↑	→	↓	←	↓
↑	→	←	←	↑	↓
→	↑	↓	↑	→	↑

Hierboven zie je een bouwplaat van een dobbelsteen en een plattegrond. Maak de dobbelsteen en leg die met de rode pijl boven in het gele vakje linksonder zodanig, dat de rode pijl naar boven wijst. Rol de dobbelsteen steeds naar een naastgelegen vakje volgens de volgende spelregel: de pijl op de bovenkant van de dobbelsteen moet dezelfde richting hebben als de pijl op het vakje waarnaar je de dobbelsteen rolt. Voor de eerste zet zijn er dus twee mogelijkheden: naar boven of naar rechts. Het doel is om zo het groene vakje rechtsonder te bereiken.

Deze puzzel is van de beroemde puzzelmaker Ed Pegg Jr. De oplossing vind je in het volgende nummer van *Pythagoras*.

