PYTHAGORAS

WISKUNDETIJDSCHRIFT VOOR JONGEREN

Wiskunde: óók voor meisjes

51ste JAARGANG - NUMMER 6 - JUNI 2012

EEN LEVEN LANG NIEUWSGIERIG

DOCUMENTAIRE OVER HANS DE RIJK

Toen Hans de Rijk in 1961 *Pythagoras* oprichtte, kon hij niet vermoeden dat nu, ruim vijftig jaar later, mede door zijn toedoen hele generaties geïnspireerd zouden zijn geraakt door de schoonheid van de wiskunde. Platlanders, onmogelijke figuren en raadseltjes; met onvermoeibare daadkracht wist Hans de Rijk op zijn lezers altijd weer zijn eigen verbazing en nieuwsgierigheid over een onderwerp over te brengen. In 1983 richtte hij *Ars et Mathesis* op, een vereniging die de relatie tussen kunst en wiskunde onder de aandacht brengt. Ook heeft hij een jarenlange vriendschap onderhouden met M.C. Escher. In 2008 won hij de NWO-oeuvreprijs voor zijn rol als wetenschapspopularisator. Regisseurs Sopa Bouman en Emily de Klerk maken momenteel – in samenwerking met Oogland Filmproducties en een filmcrew – een documentaire over deze inspirerende autodidact, wiens kinderlijke nieuwsgierigheid altijd weer de drijfveer vormde voor het verkennen van nieuwe terreinen. Niet voor niets publiceerde Hans de Rijk circa 250 boeken onder maar liefst zes pseudoniemen!

WORD DONATEUR Help mee om dit bijzondere eerbetoon aan de founding father van *Pythagoras* te realiseren. Word vriend met het project op www.facebook.com/eenlevenlangnieuwsgierig en doneer een bijdrage via www.cinecrowd.nl. Voor donaties vanaf 25 euro ontvang je een dvd van de film. Bovendien stelt *Pythagoras* een aantal exemplaren van *De Pythagoras Code* en dvd's met de complete eerste vijftig jaargangen ter beschikking, bestemd voor gulle donateurs!

INHOUD

DE KANSRIJKSTE VRIJE TRAP

HOE USAIN BOLT MET 0,11 SECONDEN WINT VAN USAIN BOLT

In dit laatste nummer van jaargang 51 twee artikelen in ons thema 'wiskunde en sport'. Van het artikel op pagina 4 kunnen 'onze jongens' wellicht nog wat leren, zodat ze niet zoals twee jaar geleden bij het WK de finale slechts *halen*, maar deze ook gaan *winnen* tijdens het EK dat deze maand plaatsvindt. En op pagina 22 kun je lezen hoe de sprinter Usain Bolt zijn eigen record kan verbeteren, zónder harder te rennen.

XY – XX > 0? ZIJN JONGENS ECHT BETER IN WISKUNDE DAN MEISJES?

Meisjes en wiskunde, een zeldzame combinatie. Toch is er eigenlijk geen goede reden om wiskunde als jongensvak te bestempelen. Welke sociaal-economische factoren hebben invloed op eventuele prestatieverschillen? Lees erover op pagina 8. En op pagina 27 wordt een opgave besproken uit de eerste wiskunde-olympiade die speciaal voor meisjes was georganiseerd. De foto hierboven toont de deelnemende meisjes.

FACEBOOK MET ONEINDIG VEEL GEBRUIKERS

EN VERDER

2 Kleine nootjes
13 Bartjenspuzzels
14 Blokkerende botsauto's en de Dwangmatige doorrijder
18 Sudoku's en locaties
20 Journaal
21 Oplossing Bartjenspuzzels
26 Dobbelen met een twaalfvlak
30 Pythagoras Olympiade
33 Oplossing sudoku en 3d-puzzel nr. 5

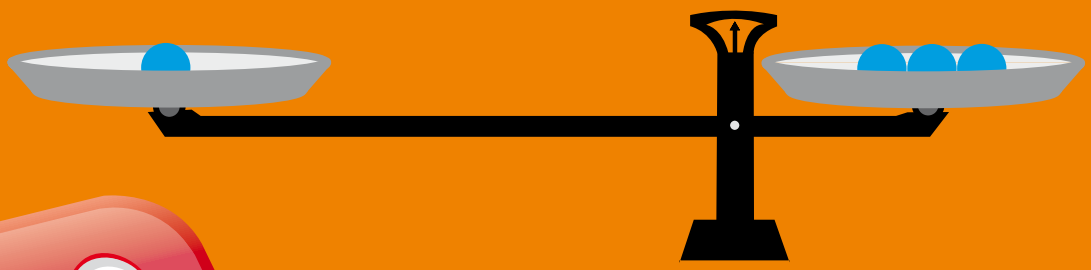
NIVEAUBALKJES Pagina's met één of meer zwarte balkjes (onder de paginanummering) geven de moeilijkheidsgraad aan. Eén balkje: lastig. Twee balkjes: vereist wiskundekennis uit de vijfde of zesde klas. Drie balkjes: net iets moeilijker.

KLEINE NOOTJES

■ door Jan Guichelaar

BESPOTTELIJKE BALANS

Jean-Pierre heeft een balans, waarvan de ene arm drie keer zolang is als de andere. Dat betekent dat als je van vier gelijke gewichtjes er drie op de schaal aan de korte arm legt en het vierde op de schaal met de lange arm, er precies evenwicht is. Jean-Pierre heeft zeven gewichtjes, die er allemaal precies hetzelfde uitzien. Hij weet dat er zes een gelijk gewicht hebben en één iets lichter is. Hoe kan hij met slechts twee keer wegen bepalen welk gewichtje het lichte is?



DOBBELSTEEN

Je kijkt met één oog dicht naar een dobbelsteen. Je kunt in totaal zien: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 of 15 ogen. Eén van deze aantallen is fout. Welk is dat?

HOEVEEL BLADZIJDEN?

De bladzijden van een boek zijn genummerd: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 enzovoort. In totaal staan er 101 cijfers 1, 2, 3, 4 en 5 in de paginanummers. Hoeveel bladzijden telt het boek?

Kleine nootjes zijn eenvoudige opgaven die weinig of geen wiskundige voorkennis vereisen om opgelost te kunnen worden. De antwoorden vind je in het volgende nummer van *Pythagoras*.

PYTHAGORAS IN LETTERS EN CIJFERS

De Pythagorasvergelijking, $a^2 + b^2 = c^2$, heeft oneindig veel geheeltallige oplossingen, zoals $3^2 + 4^2 = 5^2$.
Welke logica zit er achter de twee stellingen van Pythagoras die je hieronder ziet, waarin alleen maar letters van het woord PYTHAGORAS voorkomen?
Kun je nog meer stellingen van Pythagoras bedenken waarbij de waarden van *a*, *b* en *c* zijn samengesteld uit letters van PYTHAGORAS, gebruikmakend van +, –, × en : (en haakjes)?
Bestaat er één waarin elke letter van PYTHAGORAS precies één keer voorkomt?

$$O^2 + T^2 = Y^2$$
$$(Y - A)^2 + G^2 = Y^2$$

ZAGEN EN SCHAVEN

Stephen heeft een hoeveelheid hout die hij naar de zagerij brengt. De zager houdt als loon in natura 10% van het hout. De rest brengt Stephen naar de schaverij. De schaver houdt ook 10% als loon in. De verliezen aan zaagsel en schaafsel verwaarlozen we. Stephen weegt wat hij terugkrijgt aan gezaagd en geschaafd hout: 162 kilogram. Hoeveel bracht hij naar de zagerij?

OPLOSSINGEN KLEINE NOOTJES NR. 5

Legpuzzel. Er zijn in totaal vier oplossingen: voor de lengte *l* en de breedte *b* geldt dat $(l, b) = (30, 7), (18, 8), (14, 9)$ of $(12, 10)$. Het totale aantal stukjes is respectievelijk 210, 144, 126, 120.

Logische getallenrij. Als je de getallen uitschrijft, krijg je woorden van 3, 4, 5, 6, 7, 8 en 9 letters (triljoen heeft acht letters). Een getal dat je schrijft met tien letters is bijvoorbeeld 111: honderdelf.

Hoe oud? Kim is 12 jaar, Wouter is 8 jaar.

Koninginnenzet. Op de diagonalen blijf je altijd op zwart: 7 + 2 = 9 velden. Horizontaal heb je 3 zwarte en 4 witte velden, verticaal ook. De kans is dus 15/23.

Munten ruilen. Oplossing 1: vóór het ruilen heeft Anja 10 + 5 + 2 + 1 + 1 + 1 = 20 cent, Patricia heeft 10 + 5 + 5 = 20 cent en Ties 10 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 20 cent; na het ruilen heeft Anja 10 + 5 + 2 + 1 + 1 + 1 = 20 cent, Patricia 5 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 10 cent en Ties 10 + 10 + 5 + 2 + 2 + 1 = 30 cent. Oplossing 2: vóór het ruilen heeft Anja 5 + 5 + 5 + 2 + 2 + 1 = 20 cent, Patricia heeft 10 + 5 + 5 = 20 cent en Ties 5 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 1 = 20 cent; na het ruilen heeft Anja 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 10 = 20 cent, Patricia 2 + 2 + 2 + 2 + 1 + 1 = 10 cent en Ties 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 30 cent.

Nog net op tijd voor de laatste fase van het Europees Kampioenschap voetbal: wetenschappelijk verantwoorde tips bij het nemen van vrije trappen.

door Jaap Klouwen

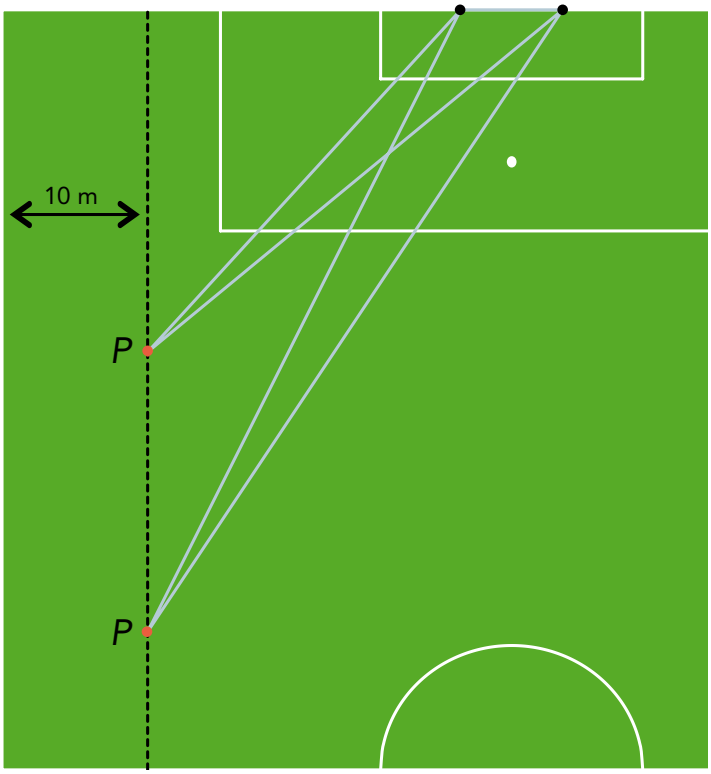
DE KANSRIJKSTE VRIJE TRAP

Wesley Sneijder mocht voor Inter Milan tijdens een van de laatste Champions Leaguewedstrijden een vrije trap op het vijandelijke doel nemen, op 10 meter van de zijlijn. Ik zag hem de bal een klein stukje smokkelen op die '10-meterlijn'. Toen ik daar goed naar keek, zag ik waarom hij dat deed. De plaats waar hij uiteindelijk de vrije schop nam was bijzonder: de hoek waaronder Sneijder het doel zag was daar namelijk het grootst. Het voetbalveld was 110 meter lang en 70 meter breed. Figuur 1 toont twee plaatsen op de 10-meterlijn die *niet* optimaal zijn voor zo'n vrije trap.

Wesley Sneijder nam de vrije trap op ongeveer 25 meter van de achterlijn. Is dit inderdaad de optimale plek op de 10-meterlijn? Deze vraag is een moderne variant op een oud probleem, dat onder andere bekend staat als het 'standbeeldprobleem', ook bekend als het 'hanging picture problem'. De oorspronkelijke formulering is uit 1471, door de Duitse wiskundige met de Asterixachtige naam Regiomontanus (Latijns pseudoniem voor Johann Müller, 1436-1476). Een latere formulering hiervan is als volgt (ik hoop dat de analogie met het voetbalvoorbeeld duidelijk is):

Op welke afstand moet je staan van een standbeeld, geplaatst op een meer dan manshoge sokkel, zodanig dat de zichthoek maximaal is?

Ga maar na: sta je (te) *dicht bij* het standbeeld, dan moet je sterk omhoog kijken en is de hoek waaronder je het beeld ziet erg klein. Sta je *ver* van het standbeeld, dan is de zichthoek ook klein. Er moet



Figuur 1 Twee mogelijke plaatsen voor de vrije trap.

dus een punt zijn waar de zichthoek zo groot mogelijk is. In figuur 1 is dit probleem getekend in de voetbalversie, met twee punten waar de zichthoek van het doel niet optimaal is.
We gaan nu (ook letterlijk) nog een stapje verder. Zoek ook het optimale punt voor een vrije trap in drie andere situaties: op de zijlijn, op 5 meter van de zijlijn en op 15 meter van de zijlijn. Ontdek het fraaie verband tussen de optimale punten die daarbij horen. Er volgt een mooie vuistregel uit voor vrijetrapnemers, die onafhankelijk is van de afmetingen van een voetbalveld!

We zullen op twee manieren laten zien waar Wesley Sneijder zijn optimale vrije trap moet nemen: intuïtief (maar gelukkig is dat hier wel goed…!) en meetkundig.

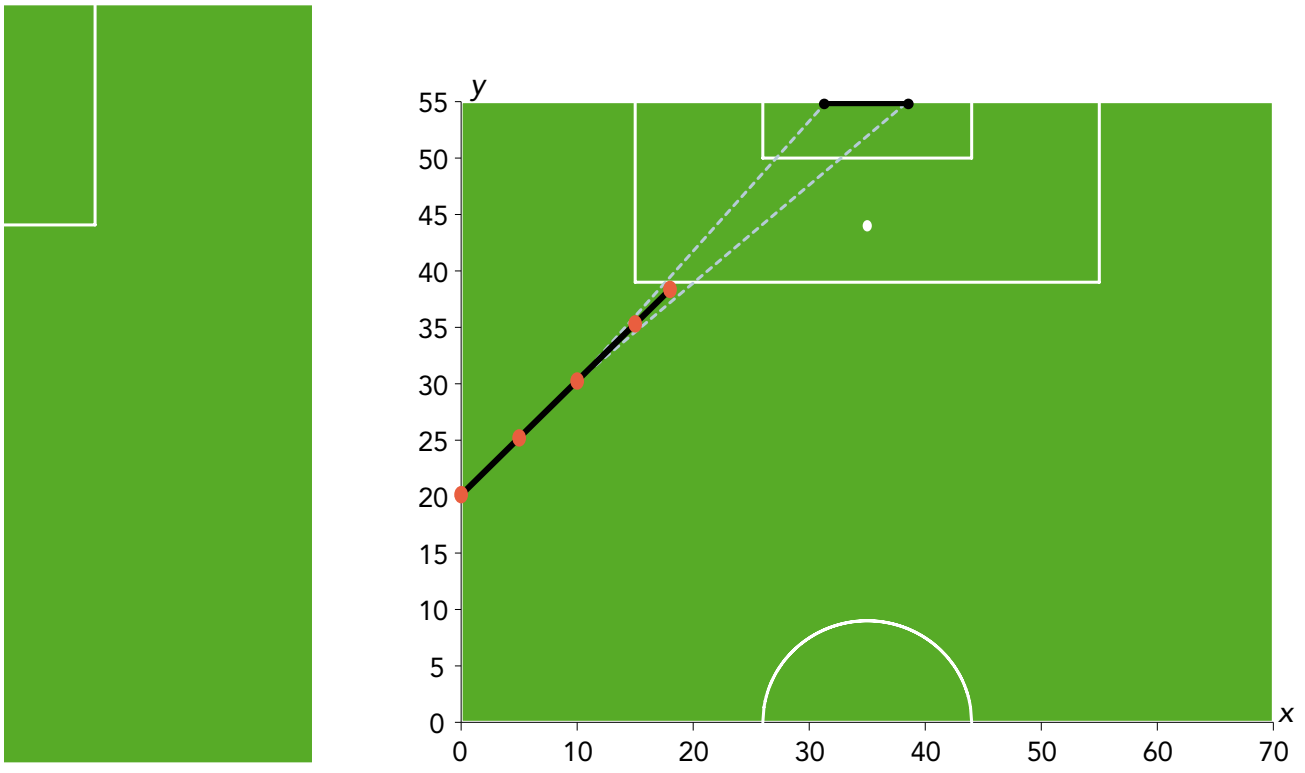
INTUÏTIEF Als Wesley Sneijder zijn vrije trap neemt, wil hij een zo groot mogelijke zichthoek op het doel hebben. De voorwaarde was dat hij die vrije trap op een afstand van 10 meter vanaf de zijlijn moest nemen. Staat Wesley op die 10-meterlijn óp of heel dicht bij de achterlijn, dan ziet hij het doel niet of nauwelijks; op de middenlijn is ook niet ideaal, want daar is het doel erg ver weg, waardoor de zichthoek ook erg klein wordt. Het optimale punt op die 10-meterlijn moet dus 'ergens in het midden' van deze twee genoemde punten liggen.

Het lijkt wel alsof de zichthoek op het doel het grootst is op de 45-gradenlijn vanuit het midden van het doel. Dat is ook (zo goed als) waar, en dat is dus direct ook de simpelste oplossing: trek een 45-gradenlijn vanuit het midden van het doel naar de zijlijn. Op elk punt van die lijn is de zichthoek op het doel maximaal. Een prachtige vuistregel voor voetballers!

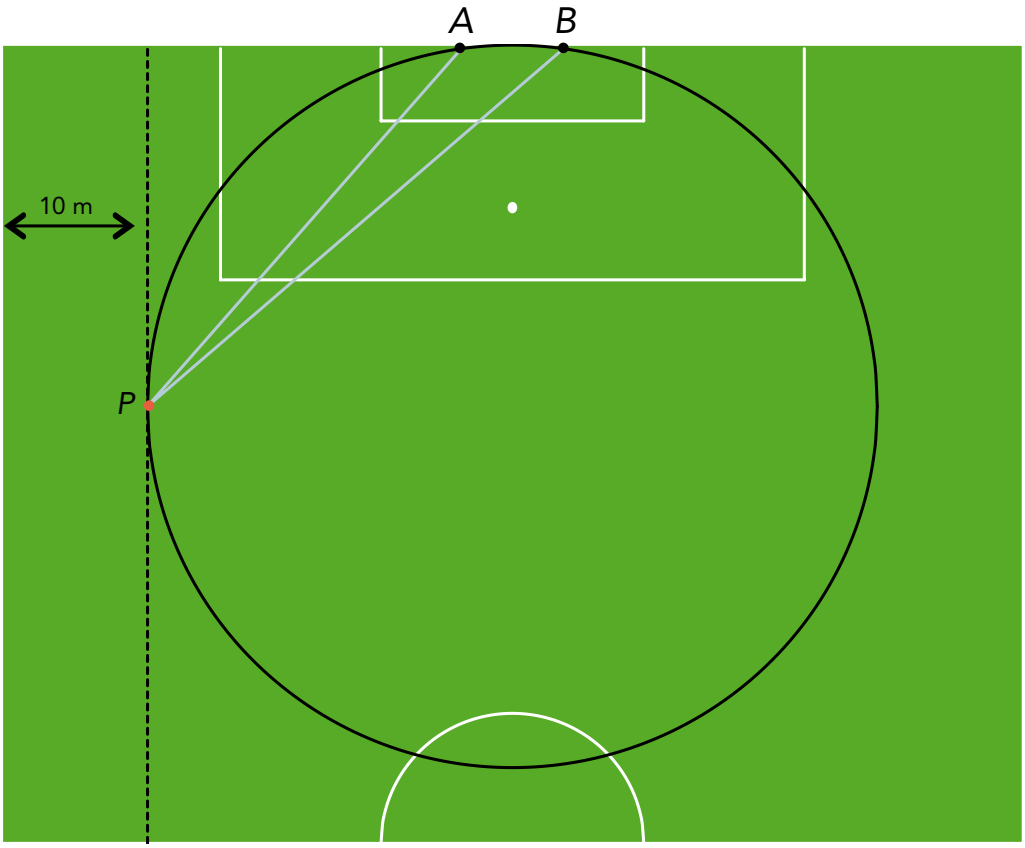
In figuur 2 is die 45-gradenlijn getekend. De lijn is niet doorgetrokken in het strafschopgebied, omdat daar in het algemeen weinig directe vrije trappen worden gegeven… De coördinaten van het optimale punt op de 10-meterlijn zijn dus $x = 10$ en $y \approx 30$, als we een assenstelsel met oorsprong links op de middenlijn kiezen. De zichthoek in dat optimale punt is ongeveer 8 graden (zie het kader op pagina 7).

MEETKUNDIG Er is ook een meetkundige methode voor het bepalen van het optimale punt van Wesleys vrije trap. De oplossing is ook daar verrassend eenvoudig, als je tenminste op de hoogte bent van de boeken van Euclides… Een gevolg van een van de stellingen van Euclides is dat de zichthoek van het doel maximaal is als P het raakpunt met de 10-meterlijn is van een cirkel door A en B (de doelpalen). Deze eigenschap is geïllustreerd in figuur 3.

We gaan de juistheid van dit Euclidesgevolg bewijzen met behulp van figuur 4, die betrekking heeft op het al genoemde standbeeldprobleem van



Figuur 2 De vuistregel: optimale punten voor een vrije trap op een n-meterlijn.



Figuur 3 *A* en *B* zijn de doelpalen. ∠*APB* is maximaal als de cirkel door *A* en *B* de 10-meterlijn raakt in *P*.

Regiomontanus. In figuur 4 is de lijn *P′P* de 10-meterlijn waarop Sneijder zijn vrije trap neemt. Het lijnstuk *AB* is het doel.

Er is precies één cirkel die door *A* en *B* gaat en de 10-meterlijn raakt, in *P*. Stel dat *P′* een punt op de 10-meterlijn is dat links van *P* ligt. We gaan bewijzen dat $\varepsilon = \angle APB$ groter is dan $\gamma = \angle AP'B$.

Noteer met *S* het snijpunt van *BP′* met de cirkel. Dan zijn $\beta = \angle ASB$ en $\varepsilon = \angle APB$ gelijk aan elkaar. Dit is stelling 21 uit boek III van de *Elementen* van Euclides (alle omtrekshoeken bij een koorde zijn gelijk).

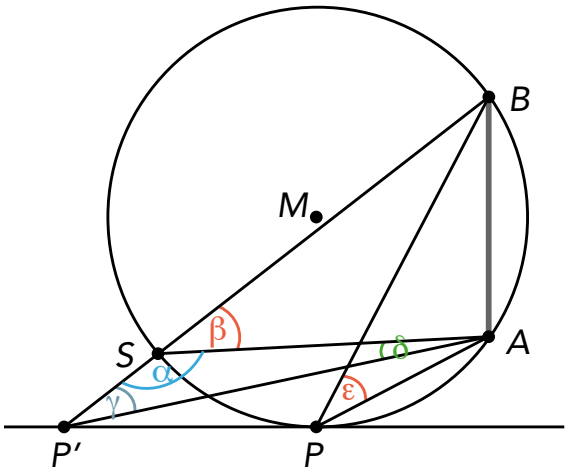
Verder geldt dat $\alpha + \beta = \alpha + \gamma + \delta$. Beide optellingen zijn namelijk 180°; de eerste betreft een gestrekte hoek en de tweede optelling is de som van drie hoeken in een driehoek. Dus $\beta = \gamma + \delta$. Maar dan is $\varepsilon = \beta = \gamma + \delta > \gamma$.

Op eenzelfde manier kun je de maximaliteit van ε bewijzen als *P′* rechts van *P* ligt.

De cirkel in figuur 4 kun je zelf construeren; dat gaat als volgt.

1. Construeer de middelloodlijn *m* van *A* en *B*.
2. Noem het midden van *AB* punt *C*. Dit is het snijpunt van *AB* en *m*. Noteer met *D* het snijpunt van de rechte door *A* en *B*, en de 'ooghoogtelijn' (de lijn door *P* en *P′*).
3. *CD* is de straal van de gezochte cirkel. Trek de cirkel met straal *CD* en middelpunt *A*. Het snijpunt van deze cirkel met *m* is het middelpunt *M* van de gezochte cirkel.

Bepalen we met deze meetkundige manier ook de optimale punten voor vrije trap op de '0-meterlijn' (de zijlijn zelf), de 5-meterlijn, de 15-meterlijn et cetera, dan volgt dat deze punten op een (bijna) 45-gradenlijn vanaf de zijlijn door het midden van het doel gaan! Dat is dus de vuistregel voor voetballers weer. (Inderdaad de 'bijna' 45-gradenlijn, want het zou *precies* een 45-gradenlijn zijn als de doelpalen samenvallen, maar dat is paaltjesvoetbal, en daar doet Wesley Sneijder niet aan...) ■



Figuur 4 Bewijs van de optimaliteit van ∠*APB*.

VOETBAL EN VECTOREN

In figuur 2 zien we dat voor de coördinaten van het optimale punt op de 10-meterlijn geldt dat $(x, y) \approx (10, 30)$, en de zichthoek in dat optimale punt ($\angle APB$, in dit kader genoteerd met θ) ongeveer 8 graden is. Hoe groot zijn de y-coördinaat en θ *precies*? Met behulp van *vectormeetkunde* kunnen we die vraag beantwoorden.

De coördinaten van P zijn $(10, y)$, de y-coordinaat is de (nog te bepalen) afstand van P tot de middenlijn. Voor θ geldt:

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{PA} \circ \overrightarrow{PB}}{|PA| \cdot |PB|}.$$

In de teller staat het *inproduct* van de vectoren $\overrightarrow{PA}$ en $\overrightarrow{PB}$ (het product van de beide x-coördinaten plus het product van de beide y-coördinaten) en in de noemer staat het product van de lengtes van die twee vectoren (te berekenen met de stelling van Pythagoras).

De coördinaten van A en B zijn respectievelijk (31,5; 55) en (38,5; 55), even voor het gemak aannemend dat een voetbaldoel 7 meter breed is (officieel is dit 7,3 meter). Hiermee kunnen we de vectoren $\overrightarrow{PA}$ en $\overrightarrow{PB}$ bepalen:

$$\overrightarrow{PA} = \begin{pmatrix} 31{,}5 \\ 55 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21{,}5 \\ 55-y \end{pmatrix},$$

$$\overrightarrow{PB} = \begin{pmatrix} 38{,}5 \\ 55 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28{,}5 \\ 55-y \end{pmatrix}.$$

Invullen levert

$$\cos\theta = \frac{\begin{pmatrix} 21{,}5 \\ 55-y \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 28{,}5 \\ 55-y \end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix} 21{,}5 \\ 55-y \end{pmatrix}\right\| \cdot \left\|\begin{pmatrix} 28{,}5 \\ 55-y \end{pmatrix}\right\|} =$$

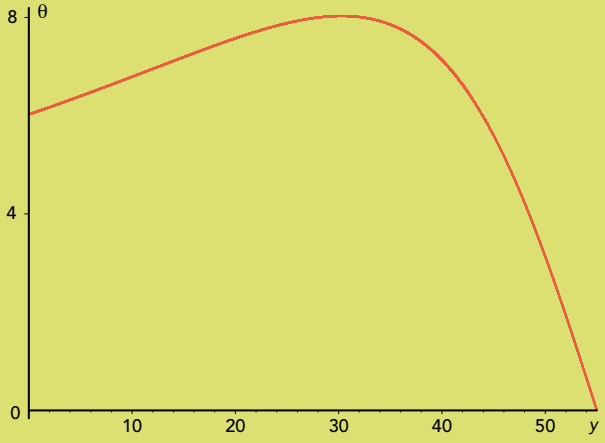
$$\frac{21{,}5 \cdot 28{,}5 + (55-y)^2}{\sqrt{(21{,}5^2 + (55-y)^2} \cdot \sqrt{28{,}5^2 + (55-y)^2}}. \quad (*)$$

Varieer je y van 0 (middenlijn) tot 55 (achterlijn), dan krijg je de grafiek in figuur 5 voor de zichthoek θ. Je ziet dat er een maximale hoek is bij ongeveer $y = 30$. Om deze waarde *exact* te bepalen, bedenken we dat de hoek *maximaal* is als de cosinus *minimaal* is. We minimaliseren daarom de functie

$$f(y) = \frac{21{,}5 \cdot 28{,}5 + (55-y)^2}{\sqrt{(21{,}5^2 + (55-y)^2} \cdot \sqrt{28{,}5^2 + (55-y)^2}}.$$

Het differentiëren om het gezochte minimum te bepalen, slaan we hier over. Je kunt het functievoorschrift ook invoeren in de 'antwoordmachine' www.wolframalpha.com; de computer geeft je dan onmiddellijk antwoord: f heeft een minimum voor $y = 55 - \sqrt{612{,}75} \approx 30{,}246$.

Ten slotte berekenen we de optimale zichthoek. Daartoe vullen we de waarde 30,246 in in $(*)$; dat levert $\cos\theta \approx 0{,}99015$, en dus $\theta \approx \cos^{-1}(0{,}99015) \approx 8{,}05°$.



Figuur 5 De zichthoek θ (in graden) als functie van de afstand y tot de middellijn.

Met enige regelmaat verschijnt er onderzoek naar de prestatieverschillen in wiskunde tussen jongens en meisjes. Bijvoorbeeld in januari 2012: *Debunking Myths about Gender and Mathematics Performance*, ofwel: *Het ontkrachten van mythes over geslacht en wiskundeprestaties*. Het ging over de sociaal-economische factoren die wereldwijd beïnvloeden of meisjes wel of niet goed scoren op wiskunde, vergeleken met jongens. Hoe gaat dat eigenlijk, dit soort gecompliceerde verbanden ontrafelen?

door Jeanine Daems

XY – XX > 0?

ZIJN JONGENS ECHT BETER IN WISKUNDE DAN MEISJES?

In Nederland gaan veel minder meisjes wiskunde studeren dan jongens (al is dat op de lerarenopleidingen in het hbo niet zo). Ook komen er veel minder meisjes dan jongens in het Nederlandse team voor de Internationale Wiskunde Olympiade terecht. Maar misschien vinden meisjes wiskunde wel minder leuk terwijl ze het even goed zouden kunnen. Of misschien zijn er toch nog steeds docenten of ouders die vinden dat wiskunde eigenlijk niets voor meisjes is. Zo zouden ze ervoor kunnen zorgen dat meisjes zich minder makkelijk met het vak identificeren en er dus ook minder hun best voor gaan doen.

Hoe het ook zit: de studie die de kranten haalde, onderzoekt niet *of* er een verschil is in wiskundeprestaties, maar welke factoren hier invloed op hebben.

DE DATA Om dit probleem te ontrafelen, hebben de onderzoekers, Jonathan Kane en Janet Mertz, gegevens verzameld over de wiskundeprestaties van grote aantallen scholieren in een heleboel landen. Want als je alleen in Nederland of alleen in de VS zou kijken, kom je er nooit achter of er bijvoorbeeld een verband bestaat tussen factoren die per land voor iedereen hetzelfde zijn en wiskundeprestaties. Een factor als 'gelijkheid tussen mannen en vrouwen in een land' kun je dan niet onderscheiden.

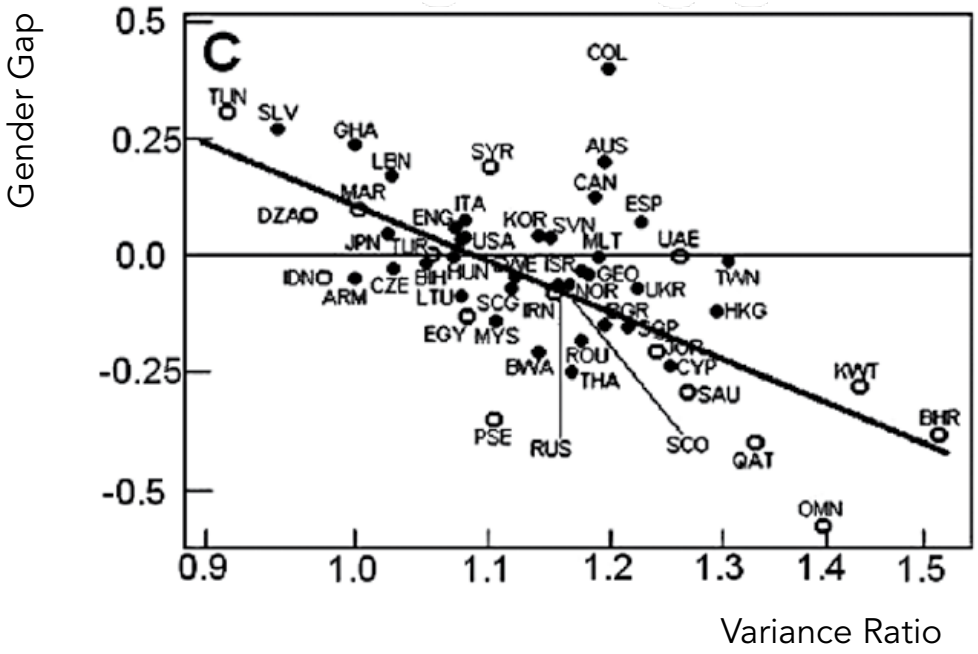
De meeste gegevens komen uit TIMSS 2007 (*Trends in International Mathematics and Science Study*), een vierjaarlijkse studie naar de prestaties van scholieren in de exacte vakken die loopt sinds 1995. Landen kunnen meedoen aan de meting voor tienjarigen of veertienjarigen, of allebei. Nederland doet alleen mee met leerlingen uit groep 6, de tienjarigen dus. In totaal doen ongeveer vijftig landen mee.

Verder keken de onderzoekers naar PISA 2009. PISA (*Program for International Student Assessment*) inventariseert wat vijftienjarige scholieren weten en kunnen op allerlei gebieden, in het bijzonder wiskunde. PISA bestaat sinds 2000 en meer dan zeventig landen hebben meegedaan.

De laatste bron zijn de gegevens over de deelnemers van de Internationale Wiskunde Olympiade (IMO, *International Mathematical Olympiad*) tussen 2001 en 2010. Voor deze jaarlijkse wedstrijd kan elk land een team van maximaal zes scholieren afvaardigen, de topscholieren van het land in kwestie. In die gegevens zijn meer landen vertegenwoordigd, met meer diversiteit in cultuur, onderwijssysteem en welvaart.

HOE MEET JE (ON)GELIJKHEID? Kane en Mertz onderzochten het verband tussen, enerzijds, het verschil in wiskundeprestaties tussen meisjes en jongens, en anderzijds de maatschappelijke ongelijkheid tussen mannen en vrouwen. Daarvoor zijn diverse maatstaven.

De *Gender Gap Index* (GGI, 'genderkloof'-index) meet de kloof tussen mannen en vrouwen wat betreft deelname aan de economie, onderwijsniveau, politieke invloed en gezondheid. Al die ingrediënten worden in een getal uitgedrukt en krijgen



Figuur 1 Correlatie tussen *Variance Ratio* en *Gender Gap* voor diverse landen (TIMSS 2007). Islamitische landen zijn aangegeven met open rondjes.

een weegfactor, die bepaalt hoe zwaar dit meetelt voor het eindresultaat. De GGI is een getal tussen 0 tot 1, waarbij 1 volkomen gelijkheid betekent. Om een idee te geven: de laagste GGI in 2007 was die van Jemen (0,4510), terwijl Zweden het hoogste scoorde (0,8146).

De GGI bleek in eerder onderzoek *negatief gecorreleerd* (zie het kader op pagina 12) met het verschil tussen de gemiddelde wiskunderesultaten van jongens en meisjes. Dit verband geldt ook als je alleen naar de beste 5% leerlingen in PISA 2003 kijkt. Anders gezegd: in landen met een hoge GGI (weinig ongelijkheid) waren de wiskundeprestaties van jongens en meisjes ongeveer even goed.

Een andere maatstaf voor ongelijkheid is de *Gender Equity Index* (GEI), waarin de economische participatie en inkomen, geletterdheid en onderwijsdeelname, en het percentage vrouwen in technische, management- en overheidsfuncties verwerkt zit. De GEI is een getal tussen 0 tot 100, waarbij 100 voor volkomen gelijkheid staat. In 2007 had Jemen een GEI van 31 en Zweden van 89.

Daarnaast keken Kane en Mertz ook naar het BBP (bruto binnenlands product), wat een maat is voor de welvaart, en naar de belangrijkste religie in een land.

DE HYPOTHESEN Over de oorzaak van de verschillen in wiskundeprestaties is heel wat afgefilosofeerd. Zo is uit eerder onderzoek het vermoeden voortgekomen dat in allerlei opzichten de verschillen tussen jongens onderling veel groter zijn dan tussen meisjes onderling, vanwege aangeboren, biologische verschillen tussen de seksen. Ook de *spreiding* van intelligentie onder jongens is groter dan onder meisjes, waardoor jongens zowel aan de bovenkant van het spectrum (deelnemers aan de Internationale Wiskunde Olympiade) als aan de onderkant (kinderen in het speciaal onderwijs, bijvoorbeeld) oververtegenwoordigd zijn. Als je alleen naar de top kijkt, lijken de jongens daardoor beter. Maar als dat werkelijk de reden is, zou je dit fenomeen in alle landen moeten terugzien, onafhankelijk van cultuur of tijdperk.

Een andere hypothese is dat jongens en meisjes gelijk geboren worden wat betreft intellectuele mogelijkheden, maar dat ze uiteindelijk verschillend presteren door allerlei sociaal-culturele factoren in hun omgeving (*gender stratification*). In dat geval verwacht je juist wél verschillen tussen culturen en veranderingen in de loop van de tijd. Ook ongelijke behandeling, waardoor meisjes niet dezelfde kansen krijgen als jongens, kan een oorzaak zijn.

Dan zijn er nog de moslimcultuurhypothese en de gescheiden-onderwijshypothese. Er bleek namelijk geen verband tussen de GGI en verschillen in wiskundeprestaties te zijn als je alleen naar moslimlanden kijkt. In die landen komt bovendien veel gescheiden onderwijs voor. In Bahrein bijvoorbeeld, waar de GGI heel laag is, doen meisjes het beter dan jongens wat betreft wiskunde. Dan zou dus de moslimcultuur of het gescheiden onderwijs een positief effect hebben op de wiskundeprestaties van meisjes.

	2003 TIMSS						2007 TIMSS						2009 PISA		
	4th Graders			8th Graders			4th Graders			8th Graders			15-year-olds		
	Gap[1]	Girls	Boys	Gap	Girls	Boys	Gap	Girls	Boys	Gap	Girls	Boys	Gap	Girls	Boys
GGI[3]	.144	.302	.304	-.027	.281†[2]	.283†	.577***	.624***	.660***	.295*	.408**	.462***	.083	.400***	.405***
EPO	.174	.547**	.546**	-.044	.327*	.330*	.511***	.757***	.780***	.258†	.442**	.488***	-.025	.398***	.387**
POL	.233	.019	.039	.073	.007	.020	.557***	.315†	.362*	.262†	.262†	.314*	.123	.340**	.352**
ED	.126	.420*	.417*	-.292†	.246	.207	.317†	.550***	.562***	-.168	.248†	.200	.043	.003	.010
H & S	.385†	.053	.089	.247	.098	.136	.433**	.136	.181	.279†	.177	.231	.146	-.129	-.102
No.Countries[4]:		24			43			36			46			61	
GEI[5]	.210	.525**	.529**	-.075	.425**	.424**	.637***	.698***	.738***	.176	.479***	.510***	.136	.333**	.345**
EPI	.259	.572**	.581**	-.029	.420**	.427**	.564***	.691***	.723***	.261†	.453**	.506***	.015	.412***	.405***
TMG	.121	.423*	.420*	-.039	.341*	.342*	.681***	.603***	.651***	.160	.422**	.450**	.196	.320*	.342**
ED	.187	.381†	.386†	-.235	.268†	.237	.386*	.543***	.566***	-.160	.263†	.219	.058	-.366**	-.350**
No.Countries:		24			44			35			46			61	

Tabel 1 Diverse correlatiecoefficiënten, bijvoorbeeld die tussen de GGI en de gemiddelde wiskundeprestatie van jongens, die tussen de GGI en de gemiddelde wiskundeprestatie van meisjes, en die tussen de GGI en het gat (*gender gap*) tussen de resultaten van jongens en meisjes.

HET ONDERZOEK De onderzoekers hebben de bergen gegevens bij elkaar geveegd en gezocht naar correlaties tussen de verschillen in wiskundeprestaties en de factoren waarvan de hypothesen zeggen dat ze invloed hebben.

In tabel 1 zie je bijvoorbeeld correlatiecoefficiënten tussen de GGI en de gemiddelde wiskundeprestatie van jongens, tussen de GGI en die van meisjes, en die tussen de GGI en het gat (*gender gap*) tussen de resultaten van jongens en meisjes. Daaronder zie je dezelfde resultaten voor de GEI.

Het gat is berekend met de formule

$$\frac{\bar{x}_j - \bar{x}_m}{s},$$

waarbij $\bar{x}_j$ en $\bar{x}_m$ de gemiddelde prestaties van jongens respectievelijk meisjes zijn, en s de *standaardafwijking* in de scores van alle leerlingen, jongens en meisjes.

In tabel 2 is de *variantie* $\mathrm{Var}(x_j)$ van de scores van jongens uitgerekend per land en ook de variantie $\mathrm{Var}(x_m)$ van de meisjesscores per land. Vervolgens is de *variance ratio VR* uitgerekend:

$$VR = \frac{\mathrm{Var}(x_j)}{\mathrm{Var}(x_m)}.$$

De *VR* is dus groter dan 1 als de variantie van de jongens groter is dan die van de meisjes. Als de hypothese dat verschillen tussen jongens onderling groter zijn dan die tussen meisjes onderling klopt, verwachten we dat de *VR* in bijna alle landen groter dan 1 is.

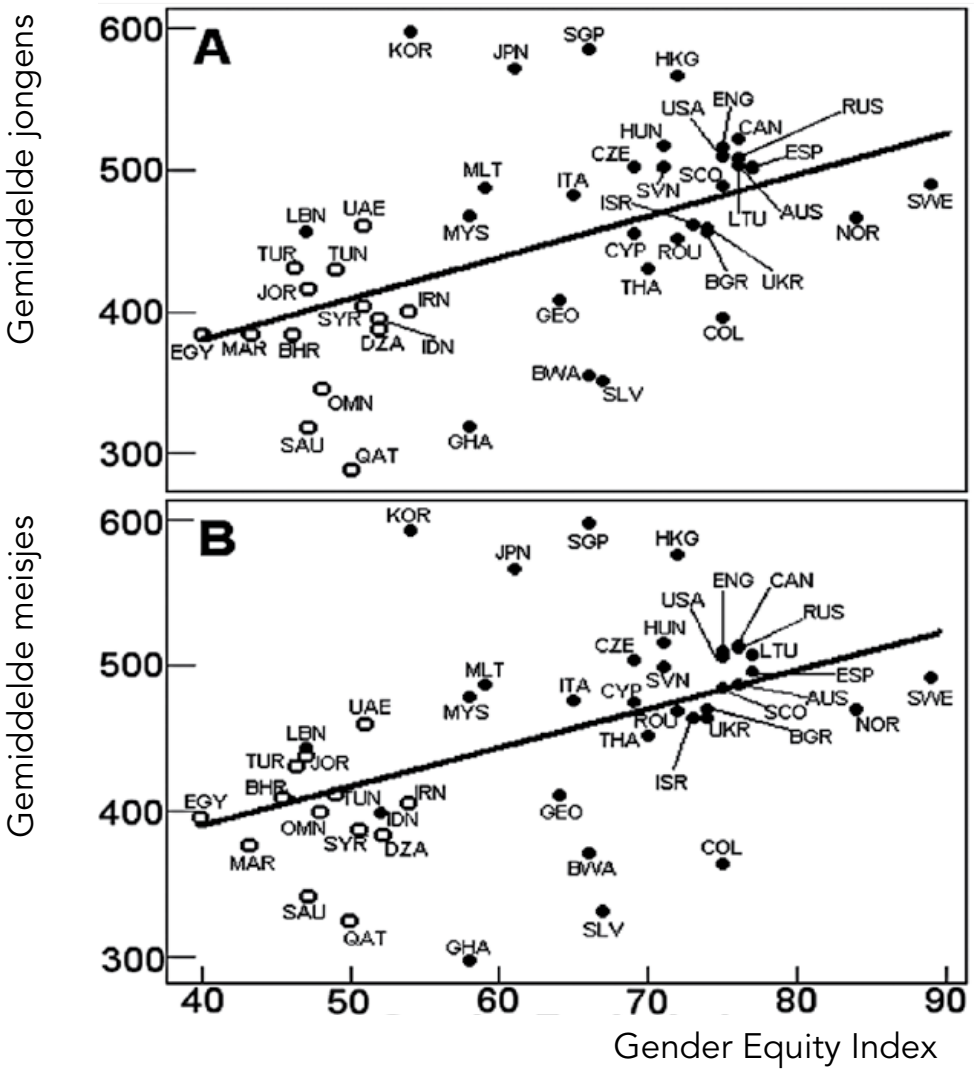
GEMIDDELDE, VARIANTIE EN STANDAARDAFWIJKING

Als je een heleboel gegevens wilt combineren, gebruik je statistische begrippen zoals het *gemiddelde*. Als je de wiskundeprestaties van jongens in de klas wilt vergelijken met die van meisjes, is het handig om het gemiddelde van de jongens en het gemiddelde van de meisjes met elkaar te vergelijken.

Maar zo'n gemiddelde zegt niet alles. Het vertelt bijvoorbeeld niets over hoe de *spreiding* van de resultaten is. Misschien hebben alle jongens wel tussen een 5,5 en een 7 gescoord met een 6 gemiddeld, terwijl er meisjes zijn met een 8 en meisjes met een 3, en hun gemiddelde ook een 6 kan zijn. Dat soort gegevens zijn ook interessant. Daarom wordt er in de statistiek ook gebruik gemaakt van maten waaruit de spreiding van meetpunten rondom het gemiddelde duidelijk wordt.

Een bekende spreidingsmaat is de *variantie*. Die bereken je als volgt. Stel dat er in een klas elf meisjes zitten, waarvan er 1 een 3 heeft, 2 een 5, 4 een 6, 3 een 7 en 1 een 8. Gemiddeld hebben ze dan een 6. De variantie bereken je dan als volgt: je neemt per cijfer het verschil met het gemiddelde (6 dus) en doet dat in het kwadraat, al die elf waardes tel je op, en deel je door 11. Oftewel: $((3-6)^2 + 2(5-6)^2 + 4(6-6)^2 + 3(7-6)^2 + (8-6)^2)/11 = 1{,}64$.

Omdat de variantie de gemiddelde *kwadratische* afwijking van het gemiddelde is, heeft de variantie een andere eenheid dan het gemiddelde. Daarom hanteert men vaak ook de *wortel* uit de variantie; deze spreidingsmaat heet *standaardafwijking*.



Figuur 2 Correlatie tussen *Gender Equity Index* en wiskundeprestaties voor diverse landen (TIMMS 2007).

CONCLUSIES Op deze manier werden al de hypothesen getoetst. De onderzoekers concluderen dan dat de hypothese over de grotere variantie bij jongens niet klopt. Hun argument hiervoor is, dat op 5 van de meer dan 100 tests in 31 landen de *VR* iets kleiner is dan 1. Verder zou volgens hen, als de variantie onder jongens door aangeboren oorzaken groter was, het effect altijd even groot moeten zijn, terwijl het nogal varieert van land tot land.

Dit is wel een vreemde redenatie, want in statistische gegevens zit altijd variatie. Strikt genomen kun je dan een hypothese niet verwerpen met als argument dat er een paar uitzonderingen op de regel zijn en het effect niet in elk land even groot is.

Ook de moslimcultuurhypothese en de gescheiden-onderwijshypothese verwerpen de onderzoekers. In sommige landen doen meisjes het in gescheiden scholen inderdaad beter dan jongens, maar dat zijn landen waar de jongens het juist erg slecht doen.

Er blijkt wel een negatieve correlatie ($r = -0{,}640$) te bestaan tussen de *VR* en het *gender gap* (het gat tussen de prestaties van jongens en meisjes), zie figuur 1.

Dus: in landen waar de jongens een grotere variantie tentoonspreiden dan de meisjes, is het *gender gap* het grootst in het voordeel van de meisjes, en in landen waar de *VR* ongeveer 1 is, is het *gender gap* het grootst in het voordeel van de jongens. En die correlatie is nog sterker in moslimlanden. Echter, het percentage moslims in een land is niet gecorreleerd met het *gender gap*. De onderzoekers verwerpen de moslimcultuurhypothese dus ook, omdat de *VR* hier de bepalende factor lijkt te zijn.

Bij de gelijkheidsmaten worden wel verbanden gevonden: de GGI en GEI geven een sterke positieve correlatie met wiskundeprestaties, van zowel jongens als meisjes. Voor de GGI zie je de resultaten in figuur 2. Maar, misschien een beetje onverwacht: de gelijkheidsindices correleren niet significant met het *verschil* in wiskundeprestaties tussen jongens en meisjes. Kortom: zowel jongens als

meisjes profiteren ervan als mannen en vrouwen meer gelijk zijn in een land! En vooral die onderdelen van de GGI en GEI die met inkomen en arbeidsparticipatie van vrouwen te maken hebben, blijken hier doorslaggevend te zijn. Oftewel: globaal gezien geldt dat hoe meer vrouwen gelijk zijn aan mannen wat betreft werk en inkomen, hoe beter de kinderen in een land presteren in de wiskunde. ■

LITERATUUR Het onderzoek van Jonathan M. Kane en Janet E. Mertz is te lezen in het artikel 'Debunking Myths about Gender and Mathematics Performance', *Notices of the AMS*, Vol. 59, No. 1, January 2012. Het artikel staat op internet en is via Google eenvoudig te vinden.

Country	2003			2007	
	PISA[2] 15-year -olds	TIMSS 4th Graders	TIMSS 8th Graders	TIMSS 4th Graders	TIMSS 8th Graders
Armenia	-	1.12	1.13	0.98	1.00
Australia	1.18	1.10	1.16	1.21	1.20
Belgium	1.19	1.11	1.06	-	-
Canada	1.24	1.09	1.06	1.12	1.19
Cyprus	-	1.15	1.16	-	1.25
Czech Rep	1.07	-	-	1.18	1.03
England	1.06	1.12	1.05	1.12	1.07
Hong Kong	1.36	1.21	1.12	1.20	1.29
Hungary	1.10	1.03	1.08	1.07	1.07
Indonesia	0.95	-	1.02	-	0.98
Iran	-	1.10	1.15	1.21	1.15
Italy	1.27	1.08	1.14	1.05	1.08
Japan	1.29	1.28	1.19	1.17	1.02
Korea	1.10	-	1.10	-	1.14
Latvia	1.19	1.18	1.18	1.15	-
Lithuania	-	1.08	1.13	1.17	1.08
Morocco	-	0.96	1.00	1.04	1.00
Netherlands	1.00	0.96	1.03	1.00	-
New Zealand	1.16	1.10	1.20	1.20	-
Norway	1.20	1.11	1.09	1.00	1.17
Russian Fed	1.20	1.00	1.14	1.10	1.16
Scotland	-	1.17	1.14	1.22	1.08
Serbia	1.30	-	1.14	-	1.12
Singapore	-	1.21	1.25	1.21	1.22
Slovak Rep	1.10	-	1.16	1.00	-
Slovenia	-	1.17	1.18	1.18	1.15
Spain	1.20	-	1.28	-	1.23
Sweden	1.10	-	1.06	1.13	1.12
Taiwan	-	1.25	1.25	1.26	1.31
Tunisia	1.03	1.06	0.93	1.09	0.91
United States	1.19	1.11	1.11	1.08	1.08

Tabel 2 *Variance Ratios* in wiskundeprestaties.

LINEAIRE REGRESSIE EN DE CORRELATIECOËFFICIËNT

In de statistiek onderzoekt men verbanden tussen meetbare factoren. Bijvoorbeeld het verband tussen lengte en gewicht van een groep mensen. Je kunt van al die mensen de lengte en het gewicht meten. Vervolgens zet je die meetpunten in een grafiek. Dan krijg je een zogenaamde *puntenwolk*, of *spreidingsdiagram*, zoals figuur 1 en 2 in dit artikel.

Als er ongeveer een lineair verband tussen de twee grootheden bestaat, zal de puntenwolk min of meer op een rechte lijn lijken. In dat geval zeggen we dat de twee grootheden *gecorreleerd* zijn, er treedt correlatie op. Maar let op: het feit dat correlatie optreedt, betekent niet meteen dat de ene grootheid de andere veroorzaakt!

De correlatiecoëfficiënt r is een maat voor hoe sterk het verband tussen de twee grootheden is. Je kunt door de puntenwolk heen de lijn tekenen (de *regressielijn*) die het verband tussen de twee grootheden het beste benadert. Als die lijn stijgt, heet de correlatie positief, als de lijn daalt heet de correlatie negatief. Bij lengte en gewicht zal de correlatie dus positief zijn. Het getal r ligt tussen -1 en 1, waarbij 1 betekent dat er volkomen positieve correlatie is, en -1 dat er volkomen negatieve correlatie is (in beide gevallen liggen alle meetpunten precies op een rechte lijn). Als r dicht bij 0 ligt, is er geen correlatie tussen de gemeten grootheden en is de puntenwolk geheel vormeloos.

BARTJENSPUZZELS

■ door Jan Broekhuizen

De twee diagrammen die je hier ziet, zijn rekenpuzzels. De opdracht is om steeds een van de vier rekenhandelingen +, –, × en : in de gele hokjes te plaatsen, en in de smalle kolommen eventueel haakjes. Dit doe je met de vier horizontale en de vier verticale opgaven in elk diagram. Wellicht ten overvloede de rekenregels:

- Vermenigvuldigen en delen gaan voor optellen en aftrekken.
- Vermenigvuldigen en delen worden uitgevoerd in de volgorde zoals ze voorkomen, dus van links naar rechts. Vermenigvuldigen heeft dus geen voorrang boven delen!
- Bewerkingen tussen haakjes moeten eerst opgelost worden.
- Helemaal ten overvloede: min keer min is plus.

Daarna volgt de grote uitdaging. De rijen bestaande uit de vier verticale en horizontale oplossingen vormen beide ook weer een som, alleen staat het antwoord (het rode vakje) niet ingevuld. Het is aan jou om beide sommen zodanig te maken, dat het antwoord voor zowel de horizontale als verticale rij hetzelfde is en uiteraard klopt. De enige restrictie is, dat het antwoord tussen 0 en 100 moet liggen (0 en 100 zijn dus uitgesloten). Veel plezier met de Bartjenspuzzels! ■

De oplossingen staan op pagina 21.

3		3		7		3	=	6
	■		■		■			
1		5		4		9	=	15
	■		■		■			
2		7		9		5	=	4
	■		■		■			
7		9		6		3	=	14
=		=		=		=		=
14		3		21		3	=	

6		3		2		5	=	4
	■		■		■			
8		7		9		4	=	20
	■		■		■			
3		1		5		8	=	12
	■		■		■			
2		3		4		6	=	18
=		=		=		=		=
15		6		4		16	=	

Files heeft de prijsvraag 2012 niet veroorzaakt, want er kwamen slechts vier inzendingen binnen, drie uit België en een uit Nederland. Wel had dit selecte gezelschap veel werk gemaakt van de inzendingen en gaven ze er uitgebreide toelichtingen bij. De redactie is benieuwd waarom de prijsvraag dit jaar maar zo matig aansloeg. Was er te weinig interessants te ontdekken? We horen het alsnog graag.

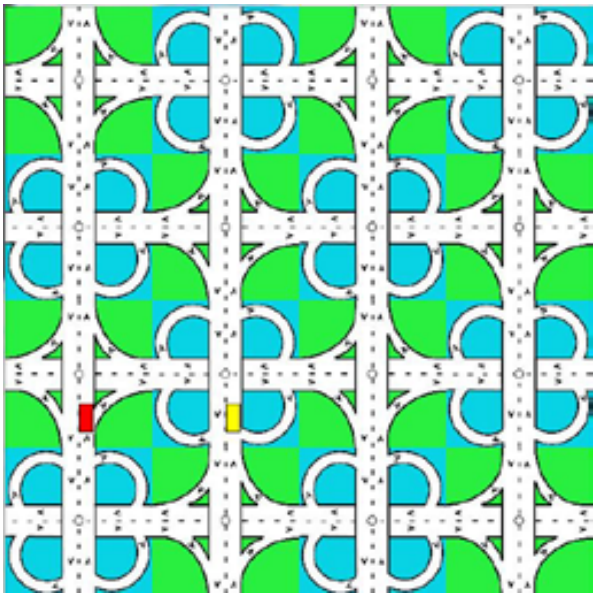
■ door Matthijs Coster

BLOKKERENDE BOTSAUTO'S EN DE DWANGMATIGE DOORRIJDER

BLOKKERENDE BOTSAUTO'S

Uitdaging 1: bedenk een goede, zo mogelijk zelfs winnende strategie.

Liesbet Deconinck (Don Boscocollege Zwijnaarde, België) was de enige die inzond op deze opgave, zie figuur 1. Zij ontdekte dat een auto verloren heeft als die auto langs de rand rijdt, terwijl de andere auto op gelijke hoogte net in de ring erbinnen rijdt. De auto aan de buitenzijde kan niet naar de middentegels, want daar wordt de auto geblokkeerd. Maar rechtdoor betekent vroeg of laat het veld verlaten. Deze opmerking is inderdaad heel belangrijk, maar het is nog niet de allesbepalende strategie.



Figuur 1

Van links naar rechts:

Figuur 1 De beginpositie van Blokkerende botsauto's.

Figuur 2 De dwangmatige doorrijder: op dit bord bestaat een route langs 14 tegels zonder zelfdoorsnijding. Het gele rechthoekje rechtsonder is de startpositie van de auto.

Figuur 3 De dwangmatige doorrijder: een route langs 35 tegels met zelfdoorsnijding. Het gele rechthoekje linksboven is de start-positie van de auto.

DE DWANGMATIGE DOORRIJDER

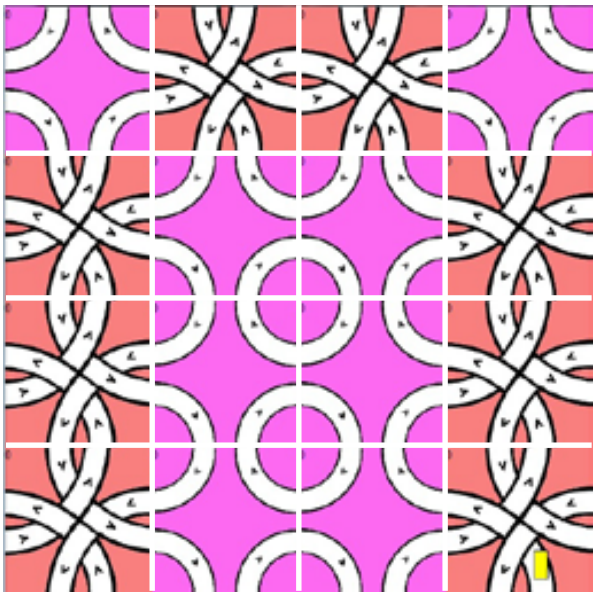
Uitdaging 2a: vind de langst mogelijke route op een 4 × 4 tegelvloer.
In het geval de route zichzelf niet mag doorsnijden, bestaat de langste route uit 14 tegels. In de inzending van Akif Celiköz, Halil Yilmaz, Ahmet Kabak, Mehmet Ünal, Mustafa Colaker (WET3, Lucernacollege in Melle, België) leggen ze uit dat een hoekpunt nooit onderweg aangedaan kan worden. De redenering is eigenlijk heel simpel.

Als je route onderweg langs een hoekpunt zou gaan, moet je eerst heen, dan terug. Maar hoe je de tegels ook neerlegt in het hoekpunt en de drie tegels daar omheen, je route zal altijd heen en terug door dezelfde tegel gaan, namelijk de binnentegel diagonaal aan het hoekpunt, en dat mag niet. Probeer het maar uit, er zijn immers maar $2^4 = 16$ mogelijkheden om deze vier tegels met de rode/paarse kant boven te leggen, en altijd loopt de route door deze diagonale binnentegel. Je kunt maximaal dus 14 tegels aandoen, als de route begint en eindigt in een hoekpunt. Ook Liesbet Deconinck vond een route langs 14 tegels. In figuur 2 is de tegelvloer, met de startpositie van de auto, getekend.

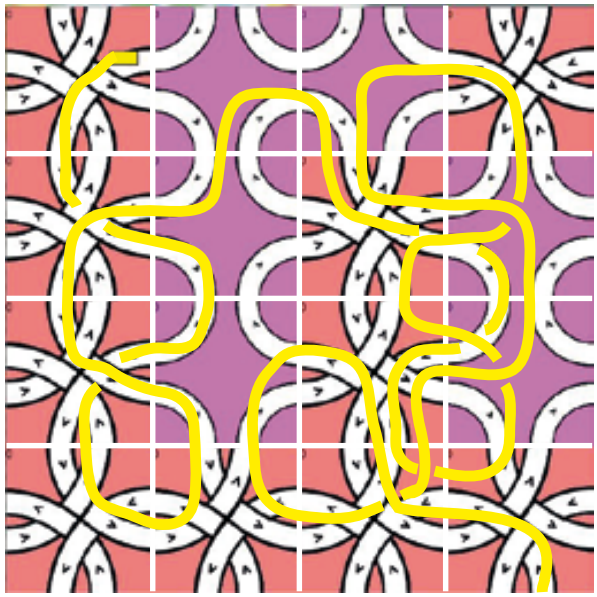
In het geval de route zichzelf wél mag doorsnijden, kan er een veel langere route worden gemaakt. Liesbet vond een pad met een lengte van 35, zie figuur 3. Een heel goede prestatie, want wij konden zelf geen betere route vinden.

Uitdaging 2b: vind de langst mogelijke route die zichzelf niet doorsnijdt op een $n \times n$ tegelvloer.
De leerlingen Hilmi Emre Bayat, Mikail Serin, Ceren Akgedik en Mustafa Kilinc (WET4, Lucernacollege in Melle, België) vonden oplossingen voor $n = 3$ tot en met 10. Hun idee was om oneven en even oplossingen los van elkaar te bekijken. Je kunt een oplossing voor een oneven afmeting vinden uit een kleinere afmeting. Zo vind je voor een 3 × 3 bord een route langs 7 tegels, voor een 5 × 5 bord een route langs 19 tegels, voor een 7 × 7 bord een route langs 39 tegels en voor een 9 × 9 bord een route langs 67 tegels, zie figuur 4a. Hierin zijn de verschillende borden door middel van verschillende kleuren weergegeven. In het even geval heb je voor een 4 × 4 bord een route langs 14 tegels, voor een 6 × 6 bord een route langs 32 tegels, voor een 8 × 8 bord een route langs 58 tegels en voor een 10 × 10 bord een route langs 92 tegels, zie figuur 4b.

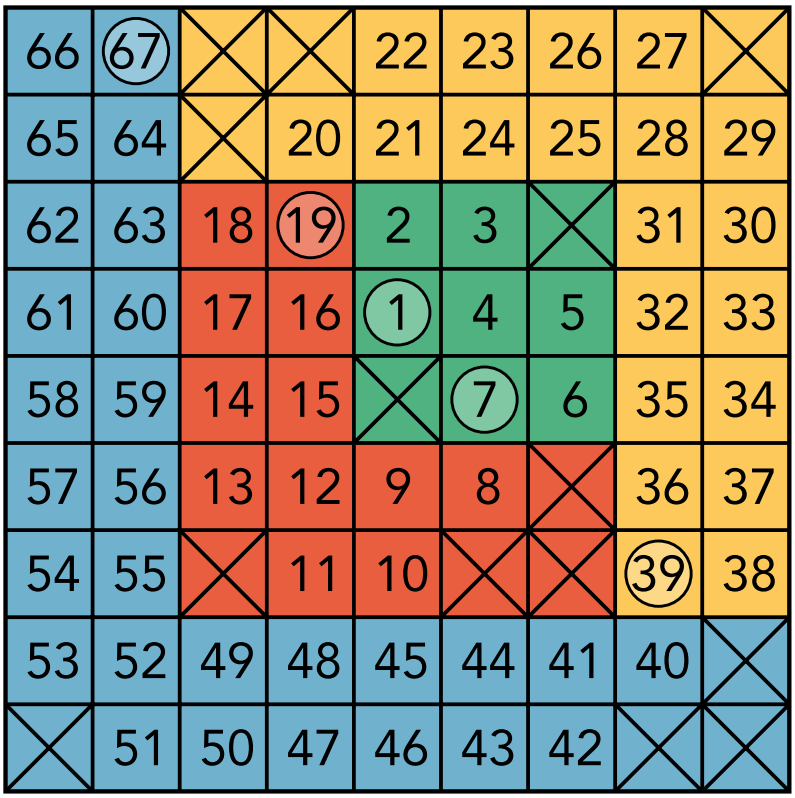
Uitdaging 2c: vind de langst mogelijke route op een $n \times n$ tegelvloer.
Deze uitdaging was te lastig of men had er gewoon



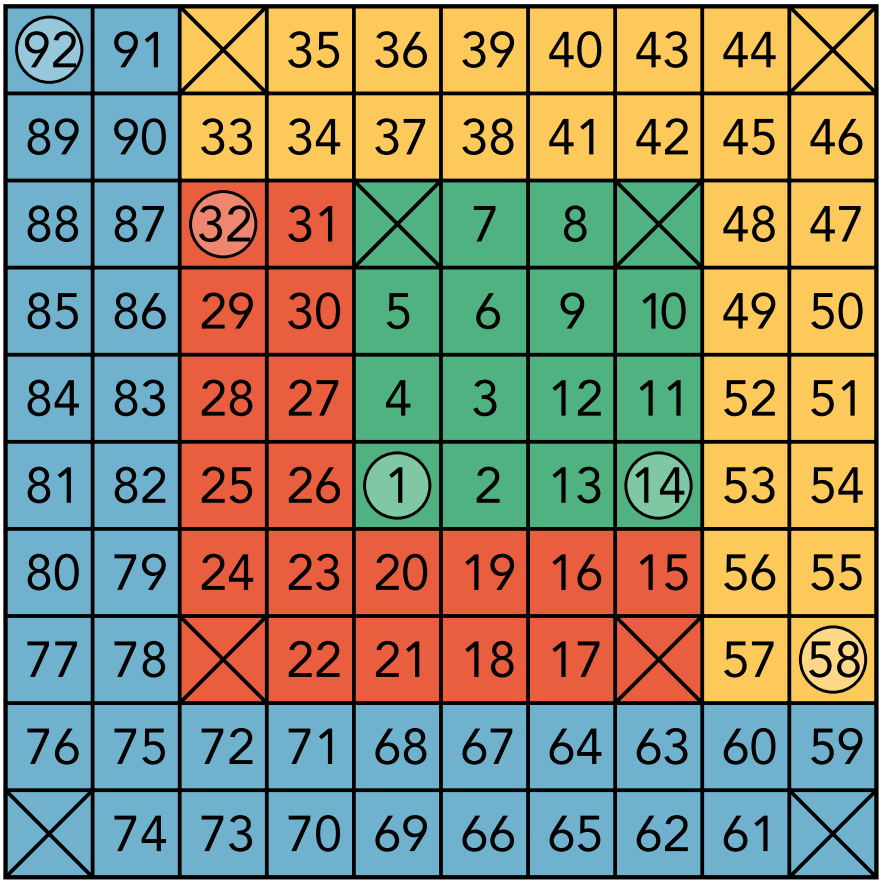
Figuur 2



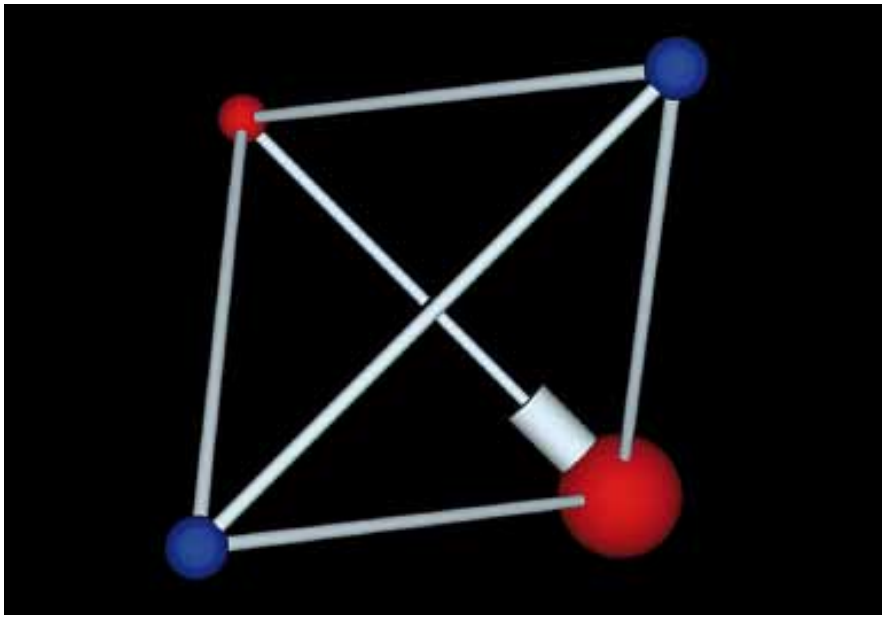
Figuur 23



Figuur 4a De dwangmatige doorrijder: een route die zichzelf niet doorsnijdt op borden van 3 × 3, 5 × 5, 7 × 7 en 9 × 9.



Figuur 4b De dwangmatige doorrijder: een route die zichzelf niet doorsnijdt op borden van 4 × 4, 6 × 6, 8 × 8 en 10 × 10.



Figuur 5 Een screenshot uit het filmpje van Jan Verbakel.

geen zin in, want we kregen geen inzendingen binnen...

We hebben zelf een paar experimenten gedaan. Voor $n = 8$ kwamen we uit op een route langs 135 tegels. Maar het is moeilijk om een algemeen verband tussen n en de lengte van de langst mogelijke route te vinden.

Uitdaging 3: vind het mooiste patroon.
Liesbet Deconinck schreef drie varianten op *Blokkerende botsauto's*, met de suggestie om het spel speelbaar te maken voor vier spelers. Bovendien ontvingen we een uitgebreid document van Jan Verbakel uit Eindhoven. Jan vond het jammer dat er geen oneindige oplossingen mogelijk waren en dat het bord tot slechts twee dimensies beperkt bleef. Hij ging uit van een regelmatig veelvlak, waarbij de hoekpunten de tegels voorstelden, en de ribben de verbindingen tussen de tegels. Rechtsaf en linksaf zijn goed gedefinieerd. Het aardige is nu natuurlijk dat een auto nooit van het 'bord' af kan vallen. Hij onderzocht de tetraëder (viervlak), octaëder (achtvlak) en icosaëder (twintigvlak). Een 'status' definieerde hij als een toestand waarin alle hoekpunten voorzien zijn van een label 'rechtsaf' of 'linksaf' en de auto op een bepaalde ribbe geplaatst is (in een rijrichting naar keuze).

Jan becijferde alle mogelijke statussen die kunnen optreden: 192 voor het viervlak, 6144 voor het achtvlak en 62914560 voor het twintigvlak. Elke status heeft een opvolger. Na een aantal statussen doorlopen te hebben, kom je weer uit bij je oorspronkelijke status en dan heb je een volledige route doorlopen.

Jan berekende met een computer al deze routes, en constateerde dat een heleboel routes erg veel op elkaar lijken. Door dergelijke routes als identiek te beschouwen, kwam hij tot 1 route in het geval van het viervlak, 10 routes in het geval van het achtvlak en 1011 routes in het geval van een twintigvlak. In dit laatste geval heeft de kortste route een lengte van 64 statussen en de langste route 1720. Ten slotte heeft Jan een filmpje gemaakt van de route op het viervlak, dat in mp4-formaat te vinden is op www.pythagoras.nu. Figuur 5 is afkomstig uit het filmpje.

PRIJZEN De vier leerlingen van WET4 van het Lucernacollege in Melle, België, ontvangen elk een exemplaar van *De Pythagoras Code* en een dvd met de eerste vijftig jaargangen van *Pythagoras*. Bovendien ontvangen zij een exemplaar van *Newton's Cradle* (we laten het aan hunzelf over wie dit klassieke science gadget hebben mag). Aan WET3 geven we een exemplaar van *Philippi Plex*. Liesbet Deconinck wint *Spiraculum* en voor Jan Verbakel hebben we *Kogelspiraal*. Van harte gefeliciteerd! ■

In deze jaargang van *Pythagoras* schreven Aad Thoen en Aad van de Wetering in elke aflevering een artikel over sudoku's; niet over het oplossen ervan, maar over fraaie eigenschappen van het ingevulde 9 × 9 diagram. In deze zesde en laatste aflevering demonstreren ze de *locatieve constructie* voor het maken van sudoku's.

■ door Aad Thoen en Aad van de Wetering

SUDOKU'S EN LOCATIES

Eerst maken we een *modulaire sudoku* waarin elk cijfer op paardensprongafstand een gelijk cijfer heeft. We leggen eerst de posities van één cijfer vast, en plaatsen middels verschuiving de overige cijfers. In figuur 1 zijn de 5'en draaisymmetrisch gekozen; ga na dat elke 5 op paardensprongafstand minstens één andere 5 heeft staan. Je moet wel de sudoku als torus opvatten (dus in gedachten plak je de onder- aan de bovenkant vast en de linker- aan de rechterkant, zodat de paardensprong over de randen heen kan).

Hoe zet je vervolgens alle overige cijfers neer? Bijvoorbeeld de 4'en: verschuif het patroon van de 5'en drie hokjes naar links, zodat de centrale 5 op de rode 4 terecht komt. Vul nu overal waar een 5 staat een 4 in. Om de 3'en in te vullen, verschuif

							5	
5	1			2			3	
					5			
		5						
	4			5			6	
						5		
			5					
	7			8			9	5
	5							

Figuur 1 Plaatsing van 5'en

7	6	2	8	4	3	9	5	1
5	1	9	6	2	7	4	3	8
3	8	4	1	9	5	2	7	6
1	9	5	2	7	6	3	8	4
8	4	3	9	5	1	7	6	2
6	2	7	4	3	8	5	1	9
4	3	8	5	1	9	6	2	7
2	7	6	3	8	4	1	9	5
9	5	1	7	6	2	8	4	3

Figuur 2 Voltooiing van figuur 1

1	4	7	2	5	8	3	6	9
9	3	6	7	1	4	8	2	5
5	8	2	6	9	3	4	7	1
3	6	9	1	4	7	2	5	8
8	2	5	9	3	6	7	1	4
4	7	1	5	8	2	6	9	3
2	5	8	3	6	9	1	4	7
7	1	4	8	2	5	9	3	6
6	9	3	4	7	1	5	8	2

Figuur 3 Rechtsmidden locatie

7	3	6	8	1	4	9	2	5
9	1	4	7	2	5	8	3	6
8	5	2	9	6	3	7	4	1
1	6	9	2	4	7	3	5	8
3	4	7	1	5	8	2	6	9
2	8	5	3	9	6	1	7	4
4	9	3	5	7	1	6	8	2
6	7	1	4	8	2	5	9	3
5	2	8	6	3	9	4	1	7

Figuur 7 2 x 2 Latijnse vierkantjes

8	6	3	9	4	1	7	5	2
4	1	7	5	2	8	6	3	9
9	2	5	7	3	6	8	1	4
2	9	6	3	7	4	1	8	5
7	4	1	8	5	2	9	6	3
3	5	8	1	6	9	2	4	7
5	3	9	6	1	7	4	2	8
1	7	4	2	8	5	3	9	6
6	8	2	4	9	3	5	7	1

Figuur 8 Nog meer diagelijk

		5						
					5			
							5	
5								
				5				
								5
	5							
			5					
						5		

Figuur 9 Zgn. damesplaatsing

je het patroon drie hokjes naar rechts en drie hokjes naar boven, zodat de centrale 5 op de rode 3 terecht komt, enzovoort.

Dit resulteert in figuur 2. Waarom levert deze constructie een correcte sudoku op? Waarom vielen er geen cijfers over elkaar? Om dat in te zien voeren we het begrip *locatie* in.

LOCATIE Een locatie is een eenheid van negen dezelfde posities in de negen 3 × 3 vakken. Zo geeft figuur 3 de locatie 'rechts-midden' aan, en figuur 4 'links-onder'. De rode cijfers in figuur 2 vormen de 'centrum'-locatie. Ga nu na, dat in figuur 1 élke 5 op een andere locatie staat.

Triviaal maar belangrijk is dat *verschuiving over drie hokjes (horizontaal, verticaal of diagonaal) de locatie behoudt*. Dit verklaart de correctheid van de constructie. Een direct gevolg van deze constructie is dat (a) alle locaties *vlijnen* zijn (een vlijn is elke verzameling van negen hokjes met de cijfers 1 tot en met 9), en (b) de sudoku *bandsymmetrisch* is.

We noemen een sudoku met eigenschap (a) kortweg *locatief*. Ook de plaatsing van 5'en in figuur 1 noemen we zo.

We kunnen nu naar hartelust locatieve variaties op figuur 1 bedenken. We tonen een aantal kandidaten voor de schoonheidswedstrijd (we laten de paardensprongeis vallen, maar vatten de sudoku nog steeds als torus op). Figuur 5: elk niet-centraal cijfer heeft diagonaal een identieke buurman. We noemen dit 'identieke diaburen'. Figuur 6: zes diagonalen bestaande uit drie trio's van gelijke cijfers (vergelijk met figuur 8 in aflevering 4). Figuur 7: negen 2 × 2 Latijnse vierkantjes. Figuur 8: kijk zelf maar!

Ten slotte tonen we nog een extra bijzondere locatieve stand in figuur 9. Ga na dat in de / richting elke complete diagonaal precies één 5 bevat. Het gevolg is dat in de bijbehorende voltooide figuur 10 alle diagonalen vlijnen zijn (vergelijk met figuur 2 in aflevering 4). ■

7	8	4	1	6	5	2	3	9
9	1	3	4	8	2	5	7	6
6	5	2	9	7	3	4	1	8
5	6	9	2	1	4	3	8	7
8	4	1	3	5	7	9	6	2
3	2	7	6	9	8	1	4	5
2	9	6	7	3	1	8	5	4
4	3	5	8	2	6	7	9	1
1	7	8	5	4	9	6	2	3

Figuur 4 Linksonder locatie

6	2	9	4	3	7	5	1	8
7	1	4	8	2	5	9	3	6
5	3	8	6	1	9	4	2	7
9	5	3	7	6	1	8	4	2
1	4	7	2	5	8	3	6	9
8	6	2	9	4	3	7	5	1
3	8	6	1	9	4	2	7	5
4	7	1	5	8	2	6	9	3
2	9	5	3	7	6	1	8	4

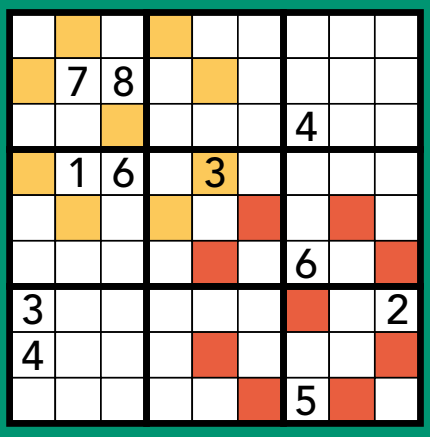
Figuur 5 Diagelijke koppels

9	2	6	7	3	4	8	1	5
4	1	7	5	2	8	6	3	9
8	3	5	9	1	6	7	2	4
3	5	9	1	6	7	2	4	8
7	4	1	8	5	2	9	6	3
2	6	8	3	4	9	1	5	7
6	8	3	4	9	1	5	7	2
1	7	4	2	8	5	3	9	6
5	9	2	6	7	3	4	8	1

Figuur 6 Diagelijke trio's

2	8	5	3	9	6	1	7	4
7	1	4	8	2	5	9	3	6
9	6	3	7	4	1	8	5	2
5	2	8	6	3	9	4	1	7
1	4	7	2	5	8	3	6	9
3	9	6	1	7	4	2	8	5
8	5	2	9	6	3	7	4	1
4	7	1	5	8	2	6	9	3
6	3	9	4	1	7	5	2	8

Figuur 10 Voltooiing van figuur 9



Figuur 11 Paardpuzzel

PUZZEL

De voorwaarden van de puzzel in figuur 11 zijn:
- ongelijke diaburen;
- hoofddiagonalen zijn vlijnen;
- gekleurde cellen vormen 2 extra 'paardvlijnen'.

De oplossing staat op pagina 33.

JOURNAAL

■ door Alex van den Brandhof

Wiskundig vastgesteld: Mario is complex

Sommige problemen kunnen door een computer efficiënt worden opgelost, andere niet. Het vermoeden bestaat dat een bepaalde categorie van niet-efficiënt-op-te-lossen problemen, de zogeheten *NP-volledige problemen*, in feite allemaal hetzelfde zijn. In die categorie bevindt zich ook het befaamde Nintendospel *Mario*.

Een analyse van de computationele complexiteit van diverse Nintendospelletjes, waaronder Mario, Donkey Kong, Legend of Zelda en Pokémon, bewijst dat deze spelletjes verdomd moeilijk zijn. Moeilijk, in de zin dat het praktisch onmogelijk is om vast te stellen of een spel, hoe goed je ook speelt, überhaupt tot een goed einde gebracht kan worden.

De versies die op de markt zijn gebracht, zijn natuurlijk zo ontworpen dat ze te doen zijn: ook in het moeilijkste level is het nog mogelijk om Mario veilig langs alle bananenschillen, bliksemschichten, vliegende inktvissen en andere ongemakken te loodsen.

Erik Demaine van het Massachusetts Institute of Technology bestudeerde versies zonder die beperking: de obstakels kunnen in principe ook zodanig voorbijkomen, dat het voor Mario onmogelijk is om de eindstreep te halen, hoe goed je ook speelt. In deze geïdealiseerde versie kan het speelveld willekeurig groot worden. De vraag is nu: hoe bepaal je of het mogelijk is om de finish te halen?

Demaine heeft bewezen dat deze vraag *NP-volledig* is. Dat betekent dat het beslissen of een spel tot een goed einde gebracht kan worden, even moeilijk is als het befaamde *Handelsreizigersprobleem*: wat is de kortste route voor een reiziger die een aantal steden moet bezoeken? Naar efficiënte methoden om een dergelijk probleem op te lossen, wordt al jaren gezocht, maar zonder succes. Daarom geloven de meeste wiskundigen dat zo'n efficiënt algoritme niet bestaat.

Zulke intrinsiek moeilijke problemen heten 'NP' (non-deterministisch polynomiaal). De rekentijd om zulke problemen via *trial and error* op te lossen, groeit exponentieel naarmate de omvang van het probleem groter wordt. In het geval van het Handelsreizigersprobleem is dat het aantal te bezoeken steden, bij de Nintendospelen de grootte van het speelveld.

Voor NP-volledige problemen, een deelklasse van alle NP-problemen, geldt: als je voor één NP-volledig probleem een efficiënt algoritme vindt, werkt dit bij álle NP-problemen. En als je voor één NP-volledig probleem kunt bewijzen dat een efficient algoritme niet bestaat, geldt datzelfde voor alle NP-volledige problemen. Wie het *P-versus-NP-probleem* weet te kraken, is een miljoen dollar rijker, want het staat op de lijst van millenniumproblemen van het Clay Mathematics Institute.

Wiskunderoute in Museum Boerhaave Leiden

Deze zomer kun je in Museum Boerhaave, Leiden, een wiskunderoute doen. Met een koffer met replica's van historische wiskundige voorwerpen ga je zelf aan de slag. Wiskunde moet je doen en met deze wiskunderoute komen zowel de voorwerpen als de wiskunde zelf tot leven. Met het *kwadrant van Blaeu* meet je bijvoorbeeld hoeken op en met een *tekenaap* verklein je een tekening. Verder worden de volgende museumvoorwerpen besproken: de prent met de zeilwagen van Simon Stevin, anamorfosen, rekenstaafjes, voetmaten, en de cilinder, bol en kegel van Archimedes. En dan is er ook nog een bonusopdracht in de binnentuin van het museum. Leerlingen die dit jaar hebben meegedaan aan de Kangoeroewedstrijd, kunnen voor slechts één euro de wiskunderoute doen. Deze actie geldt tot zondag 30 september 2012. De wiskunderoute is geschreven voor twee doelgroepen: voor groep 7 en 8 basisschool en klas 1 en 2 voortgezet onderwijs, en voor leerlingen vanaf klas 3 voortgezet onderwijs.

Een platte torus in drie dimensies

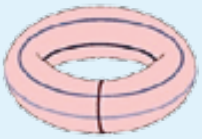
Een team van Franse wiskundigen en informatici is het gelukt om een abstract wiskundig object te visualiseren in de driedimensionale ruimte. Het resultaat bevat een fractal-achtige structuur.

Een vierkante platte torus is een vierkant waarvan de tegenoverliggende zijden paarsgewijs met elkaar zijn geïdentificeerd. Denk aan het computerspelletje *Pac-Man*, dat zich afspeelt op een torus: als het 'happertje' aan de bovenkant het veld verlaat, komt het aan de onderkant weer tevoorschijn. En voor links en rechts geldt hetzelfde.

Van een platte torus kan een echte (dat wil zeggen: driedimensionale) torus gemaakt worden door de boven- en onderkant van het vierkant aan elkaar te plakken, zodat een cilinder ontstaat, en vervolgens de uiteinden van de cilinder aan elkaar te plakken. Het resultaat heeft de vorm van een binnenband van een fiets. Dat knutselwerk lukt alleen als het vierkant van een rekbaar materiaal is gemaakt. Je ziet het aan onderstaand plaatje: de verticale en de drie horizontale lijnen op de platte torus zijn even lang, maar op de driedimensionale torus niet. Met een vierkant vel papier (niet elastisch) lukt het daarom niet om er een mooie fietsband van te maken.

Tot in het midden van de jaren 1950 werd gedacht dat de vierkante platte torus zonder vervorming van de afstanden niet gevisualiseerd kon worden in drie dimensies. Het was daarom een grote verrassing toen Nobelprijswinnaar John Nash en de Nederlandse wiskundige Nicolaas Kuiper bewezen dat een driedimensionale variant van de platte torus wél bestaat. Zij konden dit object echter niet construeren. Met andere woorden: hoewel ze de existentie ervan hadden aangetoond, wisten ze niet hoe dit object eruit moet zien.

Over die vorm is nu eindelijk duidelijkheid. Een team van Franse onderzoekers onder leiding van Vincent Borrelli van de universiteit van Lyon is erin geslaagd om een vierkante platte torus met afstandbehoud driedimensionaal te visualiseren. Zij maakten daarbij gebruik van een wiskundige techniek, *convexe integratie* geheten. Het resultaat: een fietsband met ribbelachtige vormen die zich oneindig vaak, op steeds kleinere schaal, herhalen. Onderstaande figuur toont de buiten- en binnenkant van de driedimensionale variant van de vierkante platte torus.



OPLOSSING BARTJENSPUZZELS (pagina 13)

(	3	x	3	–	7	)	x	3	=	6
+		x		–		x		x
(	1	+	5	)	x	4	–	9	=	15
:		–		x		–		:
2	:	7	x	(	9	+	5	)	=	4
x		+		–		–		+
7	:	9	x	6	x	3	=	14
=		=		=		=		=
14	x	3	:	21	+	3	=	5

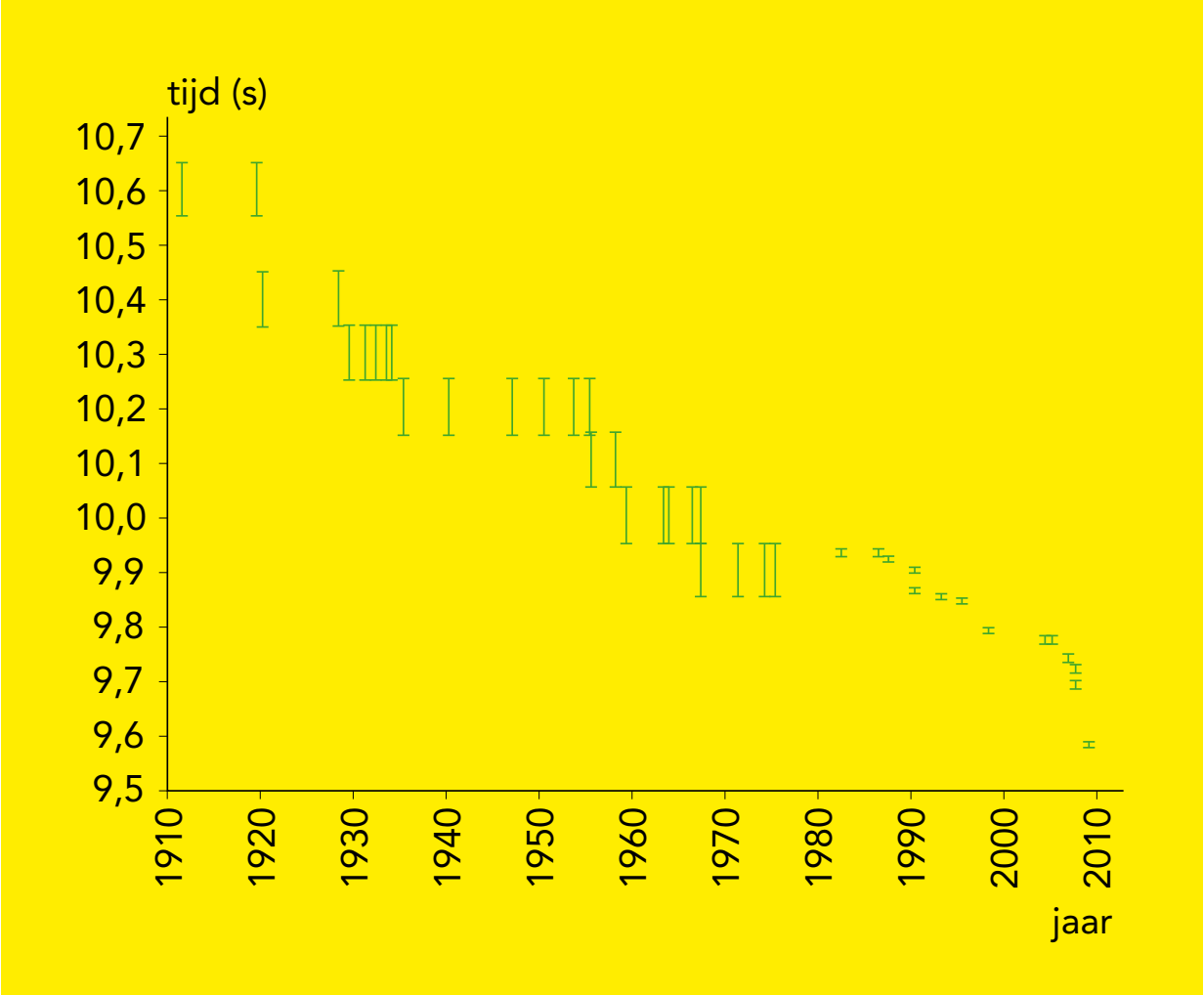
6	x	3	:	2	–	5	=	4
x		x		x		:		x
8	x	7	–	9	x	4	=	20
–		–		–		x		–
(	3	+	1	)	x	5	–	8	=	12
:		:		–		+		+
2	x	3	x	4	–	6	=	18
=		=		=		=		=
15	:	6	x	(	4	+	16	)	=	50

In het februarinummer schreven we over de relatie tussen wiskunde en records in de topsport. In dit artikel gaat het opnieuw over records, bekeken vanuit een andere invalshoek. Alles draait nu om het wereldrecord op de 100 meter: dit staat met een tijd van 9,58 seconden op naam van Usain Bolt. John D. Barrow van Cambridge University heeft becijferd dat Bolt zijn eigen record kan verbeteren zónder harder te lopen.

■ door Klaas Pieter Hart

HOE USAIN BOLT MET 0,11 SECONDEN WINT VAN USAIN BOLT

Usain Bolt bracht op 16 augustus 2009 het nieuwe wereldrecord op de 100 meter sprint op 9,58 seconden. Hij leverde deze prestatie tijdens de wereldkampioenschappen in Berlijn. Foto © Erki Pictures



Figuur 1 Verbeteringen van de records op de 100 meter sprint voor mannen. Elektronische tijdsmeting (in honderdsten van seconden nauwkeurig) werd verplicht in 1977.

Hardlooptijden worden tegenwoordig in honderdsten van seconden weergegeven (en veel nauwkeuriger gemeten). Maar in de jaren 2008 en 2009 haalde de Jamaicaanse sprinter Usain Bolt het wereldrecord met ongeveer 0,2 s naar beneden: van 9,74 s naar 9,58 s. Probeer, om te zien hoeveel dat is, maar eens uit te rekenen hoever Bolt voor de vorige recordhouder (Asafa Powell) uit gelopen moet hebben.

De Engelse wiskundige John D. Barrow publiceerde in april van dit jaar een artikel getiteld 'How Usain Bolt can run faster – effortlessly'. Figuur 1 komt uit dat artikel; in deze grafiek is te zien hoe onregelmatig de recordverbeteringen eigenlijk verlopen zijn. De verbeteringen van Bolt zien er dan heel dramatisch uit.

En toch kan Bolt het record nog onder de 9,5 s krijgen, zónder harder te lopen. Hoe dat kan, heeft Barrow ons voorgerekend.

SNELLER STARTEN Om te beginnen: de tijd die geregistreerd wordt, is niet de zuivere looptijd, maar de som van de starttijd en die looptijd. Die starttijd mag niet minder zijn dan 0,1 s; anders heb je vóór het startschot gereageerd en wordt het signaal 'valse start' gegeven. Die 0,1 s is experimenteel vastgesteld: een mens kan niet sneller reageren.

Uit allerlei tabellen blijkt dat Usain Bolt een langzame starter is. Toen hij zijn laatste wereldrecord haalde, was zijn starttijd 0,146 s, de op twee na langste. Zijn zuivere looptijd, 9,434 s, was meer dan één-tiende seconde sneller dan nummer twee. Het is onwaarschijnlijk dat Bolt in 0,1 s zal reageren, maar als hij er 0,12 s van kan maken, wordt zijn record 9,55 s, zonder sneller te lopen.

RUGWIND Om een record geldig te doen zijn, mag de snelheid van de rugwind niet meer dan 2 m/s bedragen. Nu is het effect van de wind niet

zo eenvoudig als dat van de starttijd. De kracht die een renner van de lucht ondervindt, is gelijk aan

$$D = -\rho \cdot c \cdot A \cdot (V - W)^2.$$

Hierin is V de snelheid van de renner, W de snelheid van de wind ($W > 0$ betekent 'wind mee'), A de oppervlakte van de renner (gezien van voren), c een constante (afhankelijk van kleding enzovoort) en ρ de dichtheid van de lucht. We plaatsen een minteken voor ρ, omdat de lucht tegen zal werken: W is bij een geldige race kleiner dan V, V is immers ongeveer 10 m/s en W mag niet meer zijn dan 2 m/s.

We noteren de tijd bij windsnelheid W als $T(W)$. In zijn artikel geeft Barrow de volgende relatie tussen $T(W)$ en $T(0)$:

$$\frac{T(0)}{T(W)} = 1{,}03 + 0{,}03\left(1 - \frac{W \cdot T(W)}{100}\right)^2. \qquad (*)$$

Dit is een benadering van de precieze relatie, maar voor onze doeleinden nauwkeurig genoeg; in het onderstaande kader vind je een afleiding van deze formule.

Om te zien wat een rugwind van 2 m/s oplevert, vullen we $W = 2$ in en lossen de resulterende vergelijking op naar $T(W)$: dit is een derdegraadsvergelijking die je het best met de SOLVE-functie van je rekenmachientje kunt oplossen. De winst is ongeveer 0,11 s, ten opzichte van geen wind. In 2009, in Berlijn, had Bolt al 0,9 m/s wind mee, in dit geval zou de maximale rugwind 0,05 s tijdwinst opleveren.

HET VERBAND TUSSEN $T(W)$ EN $T(0)$

De afleiding van de relatie tussen $T(W)$ en $T(0)$ gaat met behulp van het vermogen P dat Bolt genereert en de energie E die hij verbruikt. Er geldt immers dat $E = P \cdot T$. Schrijf even $T = T(W)$ en $T_0 = T(0)$; dan zijn de verbruikte energieën gelijk aan $E_0 = PT_0$ en $E = PT$. Dan geldt natuurlijk $T_0/T = E_0/E$; we bekijken dat laatste quotiënt. De energie die Bolt gebruikt om de 100 m af te leggen noemen we e; dan geldt

$$E_0 = e + \rho \cdot c \cdot A \cdot V_0^2 \cdot 100$$

en

$$E = e + \rho \cdot c \cdot A \cdot (V - W)^2 \cdot 100.$$

In beide gevallen wordt dus de energie nodig om de luchtweerstand te overwinnen bij e opgeteld. Nu volgt dus, door delen, dat

$$\frac{T_0}{T} = \frac{e + \rho \cdot c \cdot A \cdot V_0^2 \cdot 100}{e + \rho \cdot c \cdot A \cdot (V - W)^2 \cdot 100}. \qquad (1)$$

We delen teller en noemer door e en korten $\rho \cdot c \cdot A \cdot 100/e$ even af met α; dan krijgen we

$$\frac{T_0}{T} = \frac{1 + \alpha V_0^2}{1 + \alpha (V - W)^2}.$$

Dit is een breuk van de vorm $(1 + x)/(1 + y)$, waarbij, zoals we zullen zien, de absolute waarden van x en y vrij klein zijn. In dat geval kunnen we $1/(1 + y)$ goed benaderen met $1 - y$ en de breuk dus met $(1 + x)(1 - y)$. In ons geval vinden we dan

$$\frac{T_0}{T} \approx (1 + \alpha V_0^2)(1 - \alpha (V - W)^2).$$

Nu halen we nog V buiten de haakjes in $(V - W)^2$; dat geeft

$$V^2\left(1 - \frac{W}{V}\right)^2 = V^2\left(1 - \frac{TW}{100}\right)^2,$$

want de snelheid V is natuurlijk gelijk aan $100/T$ m/s. Als we nu verder nog αV_0^2 afkorten met β,

LUCHTDICHTHEID De luchtdichtheid, ρ, vinden we via het getal β uit de afleiding in de vergelijking terug. Deze is afhankelijk van de hoogte waarop hardgelopen wordt. In 1968 werd in Mexico op 2240 m hoogte gelopen; de lage luchtdruk had voor velen een te gunstig effect op de tijden, daarom wordt een record alleen erkend als het op een baan gelopen wordt die niet hoger dan 1000 m ligt.

Op de website http://tinyurl.com/76w6gj6 kun je de luchtdichtheid op verschillende hoogtes laten bepalen. Deze kun je dan in de afleiding in het onderstaande kader invullen en kijken wat het effect op de tijd van Usain Bolt zal zijn.

De berekening van Barrow komt uit op een tijdwinst van 0,03 s op een hoogte van 1000 m.

ALLES BIJ ELKAAR Als Usain Bolt heel snel zou reageren, 2 m/s rugwind zou hebben en op een hoogte van 1000 m zou lopen, zou hij met dezelfde inspanning als in 2009 zijn tijd op de 100 m terug kunnen brengen van 9,58 tot 9,58 – 0,026 – 0,05 – 0,03 = 9,474 seconden (en dat wordt afgerond tot 9,47 s). ■

LITERATUUR Het artikel 'How Usain Bolt can run faster – effortlessly' van John D. Barrow verscheen in april 2012 in *Significance*, het tijdschrift van de Royal Statistical Society en de American Statistical Association. Een pdf is te downloaden via http://tinyurl.com/caejg4r.

komen we op de volgende uitdrukking:

$$\frac{T_0}{T} \approx (1+\beta)\left(1-\alpha V^2\left(1-\frac{TW}{100}\right)^2\right).$$

Dus het quotiënt is gelijk aan het verschil van

$$1+\beta-\alpha V^2\left(1-\frac{TW}{100}\right)^2$$

en

$$\beta\alpha V^2\left(1-\frac{TW}{100}\right)^2. \qquad (2)$$

We gaan de waarde van β bepalen en we zullen zien dat de tweede term verwaarloosbaar is en dat we αV^2 ook door β kunnen vervangen.

Sommige waarden kun je opzoeken: ρ = 1,23 kg/m^3 en e = 230.000 J. Andere moeten we schatten: c = 1 en A = 0,6 m^2 en V_0 = 10 m/s. Dan volgt β ≈ 0,034 (reken maar na).

Als je voor V waarden dicht bij V_0 invult, zul je zien dat αV^2 nagenoeg gelijk is aan β. Dit levert de volgende vereenvoudigingen op: de uitdrukking in (2) is ongeveer β^2 en dat is veel kleiner dan β zelf, daarom kun je deze term weglaten. Voor het quotiënt T_0/T komen we dan op de volgende benaderende formule uit:

$$\frac{T_0}{T} = 1+\beta-\beta\left(1-\frac{TW}{100}\right)^2.$$

Door β af te ronden op twee cijfers achter de komma, komen we ten slotte uit op formule (⋆) op pagina 24.

Opgave 1. We hebben $1/(1 + y)$ benaderd met $1 - y$. Ga voor jezelf na hoe goed die benadering is, bijvoorbeeld door het verschil $1/(1 + y) - (1 - y)$ uit te schrijven en te kijken voor welke y dat verschil klein genoeg is.

Opgave 2 (voor onderzoekers). Je kunt ook direct met vergelijking (1) aan de slag gaan. Probeer, met behulp van een rekenmachientje, de waarde $T(W)$ direct uit die vergelijking op te lossen, voor diverse waarden van de parameters. Hoe erg wijken de benaderde antwoorden af van de echte?

DOBBELEN MET EEN TWAALFVLAK

■ door Frank Roos

Bij een gewone dobbelsteen is het totaal aantal ogen op tegenoverliggende zijvlakken steeds 7. Er zijn twee varianten mogelijk die de chemicus *optische isomeren* zou noemen. Ze zijn elkaars spiegelbeeld als je niet let op de stand van de ogen op een zijvlak.

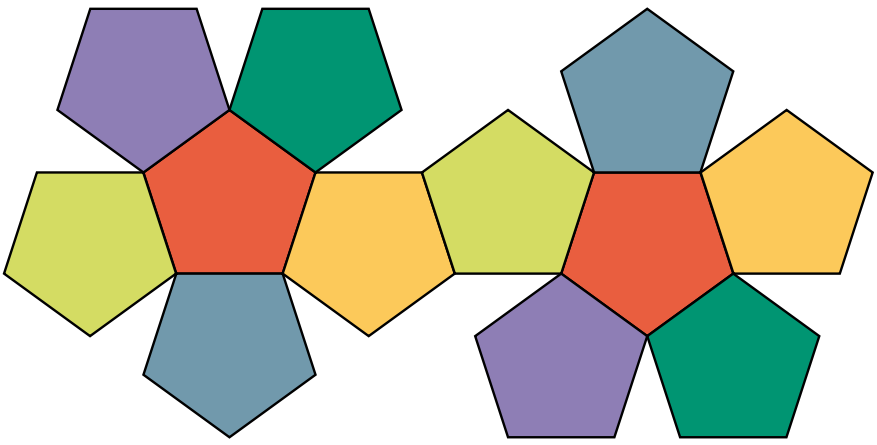
DE DODECAËDER ALS DOBBELSTEEN

We proberen een *dodecaëder* (regelmatig twaalfvlak) als dobbelsteen te ontwerpen. Ook bij dit exemplaar willen we dat de som van de ogen op evenwijdige vlakken steeds hetzelfde is. Wat moet die som zijn?

Er zijn twaalf zijvlakken, de naam van het object zegt het al. Het totaal aantal ogen is dan $(1+ 12) + (2 + 11) + \cdots + (6 + 7) = 6 \times 13$. Dit moet verdeeld worden over zes paren vlakken. De som van elk paar moet dan 13 worden.

De haakjes waren geplaatst om gemakkelijk de som van de twaalf termen te kunnen vinden, een rekenkundige rij. Maar we zien tussen de haakjes tegelijkertijd de ogen van de vlakken die evenwijdig lopen.

OPGAVE Bij de kubusvorm heeft de dobbelsteen twee varianten. Hoeveel mogelijkheden zie je bij de dodecaëder? Let op: eventuele rotatiesymmetrische oplossingen beschouwen we als identiek. Misschien kan onderstaande figuur je daar bij helpen. Staan de kleuren van evenwijdige vlakken wel goed ten opzichte van elkaar? ■



In Cambridge (Verenigd Koninkrijk) waren in april scholieren uit zestien Europese en drie niet-Europese landen bij elkaar. Elk land mocht zijn vier grootste wiskundetalenten afvaardigen, onder één voorwaarde: het moesten allemaal meisjes zijn. Het was namelijk de eerste editie van de *European Girls' Mathematical Olympiad*. In dit artikel bekijken we opgave 6 van deze nieuwe wedstrijd.

door Birgit van Dalen

FACEBOOK

MET ONEINDIG VEEL GEBRUIKERS

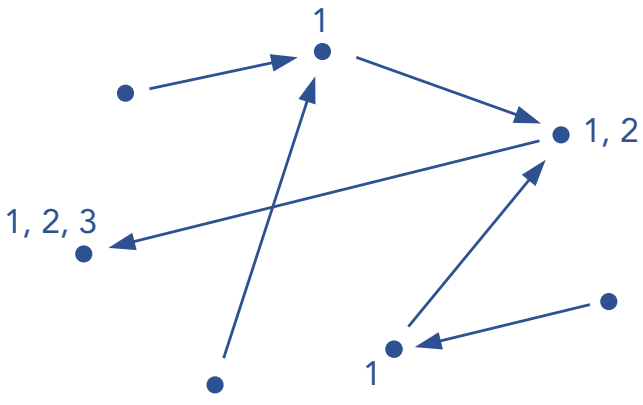
Eerst even dit: zo'n wedstrijd speciaal voor meisjes, is dat niet een beetje vreemd? Er is toch ook geen wiskundewedstrijd speciaal voor jongens? Inderdaad, maar bij de wiskundewedstrijden op hoog niveau zie je veel meer jongens dan meisjes. Zo is het idee ontstaan om meisjes een extra stimulans te geven om aan dit soort wedstrijden mee te doen.

In het Verenigd Koninkrijk is het plan gemaakt om een aparte internationale meisjesolympiade te organiseren: twee wedstrijddagen met pittige wiskundeopgaven en daarnaast veel sociale activiteiten.

Ook Nederland heeft deelgenomen. Om de vier meisjes te selecteren, zijn er bij de Nederlandse Wiskunde Olympiade extra meisjes uitgenodigd voor de finale, en na extra training was er in maart een selectietoets om uit te vechten wie er naar Cambridge mochten: Loes Bazuin, Carina Both, Michelle Sweering en Marieke van der Wegen.

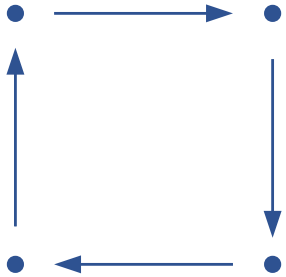
SMOELENBOEK Eén van de opgaven die zij voor hun kiezen kregen, ging over de website *Smoelenboek*. Deze website lijkt erg op Facebook, maar bij Smoelenboek zijn oneindig veel gebruikers geregistreerd. Dat zal bij Facebook nooit lukken, maar in een wiskundeopgave kunnen zulke dingen gelukkig gewoon. Net als bij Facebook kunnen de gebruikers van Smoelenboek elkaars vrienden worden. Maar daarnaast moet elke gebruiker van Smoelenboek ook één van zijn vrienden benoemen tot zijn *beste vriend*. Iedereen heeft dus in elk geval één beste vriend en daarnaast nog een aantal vrienden die niet zijn beste vriend zijn.

Een gebruiker van Smoelenboek kan *vriendschapsgetallen* sparen. Hij heeft vriendschapsgetal 1 als hij benoemd is tot de beste vriend van een andere gebruiker. Hij heeft verder vriendschapsgetal 2 als hij benoemd is tot de beste vriend van een gebruiker die vriendschapsgetal 1 heeft. En hij heeft vriendschapsgetal 3 als hij benoemd is tot de beste vriend van een gebruiker die vriendschapsgetal 2 heeft. Enzovoorts. In figuur 1 zie je een aantal Smoelenboekgebruikers met hun vriendschapsgetallen. Van



Figuur 1 Zeven Smoelenboekgebruikers. De vermelde getallen zijn hun vriendschapsgetallen.

NEDERLANDSE WISKUNDE OLYMPIADE



Figuur 2 Vier gebruikers die allemaal alle positieve gehele getallen als vriendschapsgetal hebben.

elke gebruiker wijst een pijl naar zijn beste vriend.

In figuur 2 zie je nog een voorbeeld. Omdat alle vier de gebruikers de beste vriend van een ander zijn, hebben ze allemaal vriendschapsgetal 1. Maar omdat ze alle vier vriendschapsgetal 1 hebben, hebben hun beste vrienden ook vriendschapsgetal 2. Dus ze hebben alle vier ook vriendschapsgetal 2. Maar dan natuurlijk ook vriendschapsgetal 3, en 4, en .... Elk van deze vier gebruikers heeft dus álle positieve gehele getallen (1, 2, 3, 4, 5, ...) als vriendschapsgetal, oneindig veel getallen dus. Zo'n gebruiker die alle positieve gehele getallen als vriendschapsgetal heeft, noemen we een *populaire* gebruiker.

Omdat er oneindig veel gebruikers van Smoelenboek zijn, hoeft zo'n populaire gebruiker niet in een cirkeltje van beste vrienden te zitten zoals in figuur 2. We kunnen ook oneindig veel gebruikers A_1, A_2, A_3, ... nemen. Als dan A_1 de beste vriend is van A_2, A_2 de beste vriend van A_3, A_3 de beste vriend van A_4, enzovoorts, dan is A_1 populair. Zie figuur 3. Wie weet zijn er nog wel meer manieren.

DE OPGAVEN Nu we een beetje gewend zijn aan de begrippen die bij Smoelenboek een rol spelen, kijken we wat er eigenlijk gevraagd werd in deze opgave. Dat zijn twee dingen:

Onderdeel a. Stel dat elke gebruiker maar eindig veel vrienden heeft. Laat zien dat een populaire gebruiker altijd de beste vriend is van een andere populaire gebruiker.

Onderdeel b. Stel dat gebruikers oneindig veel vrienden mogen hebben. Laat zien dat het dan mogelijk is dat een populaire gebruiker van geen enkele andere populaire gebruiker de beste vriend is.

Onderdeel a lijkt logisch: in allebei de manieren die we gevonden hadden om een populaire gebruiker te maken (het cirkeltje en de oneindig lange keten) klopt het. Maar hoe bewijzen we nou dat het *altijd* klopt? Stel maar eens dat het niet klopt; we gaan laten zien dat dat niet kan.

We voeren nu eerst een nieuwe term in: als persoon X persoon Y benoemd heeft tot zijn beste vriend, dan noemen we X een *fan* van Y. Er geldt dan dat persoon X vriendschapsgetal 1 heeft als hij een fan heeft, vriendschapsgetal 2 heeft als hij een fan heeft met vriendschapsgetal 1, enzovoorts. We moeten nu voor onderdeel a laten zien dat een populaire gebruiker met eindig veel vrienden (en dus ook eindig veel fans) een fan heeft die zelf ook populair is. En we nemen juist het omgekeerde aan: A is populair, maar geen van zijn fans is ook populair. Wat weten we dan? Persoon A heeft tussen al zijn vriendschapsgetallen ook vriendschapsgetal 10 zitten, dus één van zijn fans moet wel vriendschapsgetal 9 hebben. Verder heeft A vriendschapsgetal 100, dus één van zijn fans moet wel vriendschapsgetal 99 hebben. En zo ook moet A een fan hebben met vriendschapsgetal 3000, en eentje met vriendschapsgetal 1.000.000, enzovoorts.

Kan het misschien zo zijn dat één van de fans van A alle even vriendschapsgetallen (2, 4, 6, ...) heeft en een andere alle oneven (1, 3, 5, ...), zodat ze samen alles hebben? De fan die vriendschapsgetal 2 heeft, heeft zelf ook vriendschapsgetal 1, anders zou hij niet de beste vriend van iemand zijn en dus ook nooit vriendschapsgetal 2 hebben. En zo ook heeft iemand met vriendschapsgetal 4 ook vriendschapsgetal 3 (kun je bedenken waarom dat is?) en trouwens ook 2 en 1. In het algemeen heeft iemand met vriendschapsgetal m ook de vriendschapsgetallen $m - 1$, $m - 2$, ..., 3, 2 en 1.

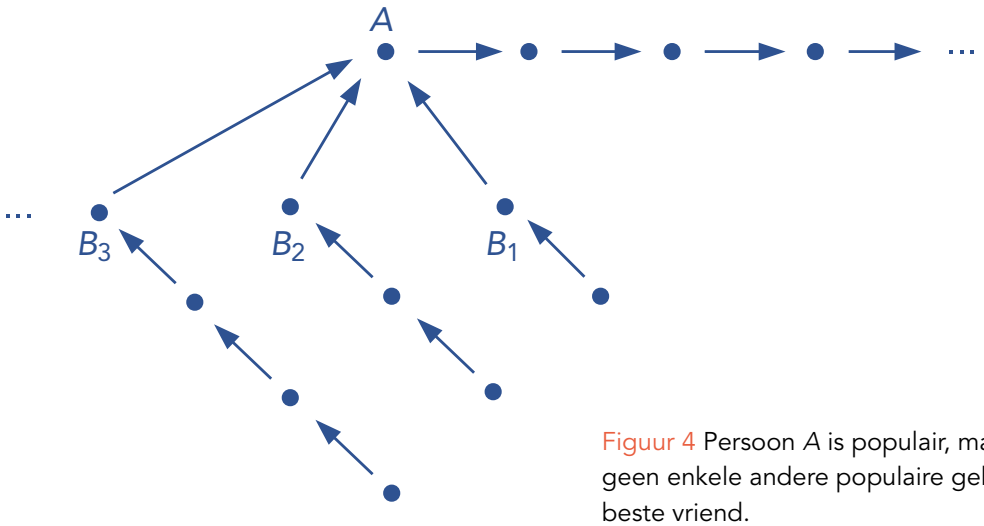
Figuur 3 Persoon A_1 is populair.

Er zijn dus eigenlijk maar twee mogelijkheden voor de vriendschapsgetallen van een gebruiker: hij heeft er eindig veel, namelijk 1 tot en met m voor een of andere positieve gehele m, of hij heeft er oneindig veel, namelijk alle positieve gehele getallen 1, 2, 3, 4, 5, ... In het laatste geval is deze gebruiker populair, in het eerste geval juist niet. Laten we nu weer even kijken naar de fans van A, waarvan we hadden aangenomen dat ze allemaal niet populair waren. Dan zitten ze dus allemaal in het eerste geval en hebben ze een *grootste* vriendschapsgetal m. Die m hoeft niet voor elke fan van A hetzelfde te zijn. Maar het zijn maar eindig veel fans, dus we kunnen al die getallen m wel even op een rijtje zetten en de grootste eruit kiezen. Laten we die M noemen. Dan is dus het grootste vriendschapsgetal dat voorkomt tussen de fans van A, gelijk aan M. Dan is automatisch het grootste vriendschapsgetal van A gelijk aan $M + 1$. Maar dat kan niet! Onze populaire persoon A moet namelijk ook vriendschapsgetal $M + 2$ hebben, en $M + 3$, enzovoorts. We concluderen dat het niet kan dat A alleen maar niet-populaire fans heeft, terwijl hij zelf populair is. Hij moet dus wel een fan hebben die populair is. We hebben nu onderdeel a opgelost.

Waarom werkt het bij **onderdeel b** anders, als A oneindig veel vrienden kan hebben? Waarom kan A dan ineens wel populair zijn zonder dat hij populaire fans heeft? Nog steeds moet elke niet-populaire fan van A een grootste vriendschapsgetal m hebben. Maar nu zijn er oneindig veel fans, dus we kunnen bijvoorbeeld een fan B_1 hebben met grootste vriendschapsgetal 1, een fan B_2 met grootste vriendschapsgetal 2, een fan B_3 met grootste vriendschapsgetal 3, enzovoorts. Omdat A oneindig veel fans kan hebben, kan dit oneindig lang doorgaan en heeft A dus zelf alle positieve gehele getallen als vriendschapsgetal, zodat hij zelf wel populair is.

Overigens moet A zelf ook nog wel een beste vriend hebben. Dat mag niet één van de gebruikers B_i zijn, want de beste vriend van A is automatisch zelf ook populair. Als we echter gewoon nog een oneindige keten van beste vrienden maken die begint bij A, dan is dat ook opgelost. Al met al krijgen we nu een situatie zoals in figuur 4. Hiermee hebben we dus ook onderdeel b opgelost.

BRONZEN MEDAILLE Van het Nederlandse team hadden Carina en Michelle de Smoelenboek-opgave grotendeels gekraakt. Michelle had ook nog zoveel punten bij andere opgaven gehaald dat ze één van de bronzen medailles wist binnen te slepen. Marieke en Loes hebben beiden een eervolle vermelding verdiend voor het helemaal correct oplossen van één van de andere opgaven. Alle opgaven en uitwerkingen zijn te vinden op de website www.egmo2012.org.uk. ■



Figuur 4 Persoon A is populair, maar is van geen enkele andere populaire gebruiker de beste vriend.

PYTHAGORAS OLYMPIADE

■ door Matthijs Coster, Alexander van Hoorn en Eddie Nijholt

Doe mee met de Pythagoras Olympiade! Elke aflevering bevat vier opgaven. De eerste twee zijn wat eenvoudiger; onder de goede inzendingen van leerlingen uit de klassen 1, 2 en 3 wordt een cadeaubon van Bol.com ter waarde van 20 euro verloot. De laatste twee zijn echte breinbrekers; onder de goede inzendingen van leerlingen (tot en met klas 6) wordt een Bol.com-bon van 20 euro verloot. Per aflevering wordt maximaal één bon per persoon vergeven.
Bovendien kun je je via de breinbrekers plaatsen voor de finale van de Nederlandse Wiskunde Olympiade, mocht het via de voorronden niet lukken: aan het eind van elke jaargang worden enkele leerlingen die regelmatig een correcte oplossing van de breinbrekers hebben ingestuurd, uitgenodigd voor de NWO-finale. Niet-leerlingen kunnen met de Pythagoras Olympiade meedoen voor de eer.

HOE IN TE ZENDEN? Inzendingen ontvangen we bij voorkeur per e-mail (getypt of een scan van een handgeschreven oplossing): pytholym@gmail.com.
Je ontvangt een automatisch antwoord zodra we je bericht hebben ontvangen.

Eventueel kun je je oplossing sturen naar
Pythagoras Olympiade
Korteweg-de Vries Instituut
Universiteit van Amsterdam
Postbus 94248
1090 GE Amsterdam.

Voorzie het antwoord van een duidelijke toelichting (dat wil zeggen: een berekening of een bewijs). Vermeld je naam en adres; leerlingen moeten ook hun klas en de naam van hun school vermelden.
Je inzending moet bij ons binnen zijn vóór 15 september 2012.

DE GOEDE INZENDERS VAN FEBRUARI 2012

230: Rombout van Amstel (klas 4), Gymnasium Felisenum, Velsen-Zuid; Elien Cambie (klas 3), Sint-Janscollege, Poperinge; P. Dekker, Krimpen aan de Lek; Arie Heikoop, Kampen; Michelle Sweering (klas 4), Erasmiaans Gymnasium, Rotterdam; Djurre Tijsma (klas 5), Christelijk Gymnasium Beyers Naudé, Leeuwarden.
231: Rombout van Amstel (klas 4), Gymnasium Felisenum, Velsen-Zuid; Elien Cambie (klas 3), Sint-Janscollege, Poperinge; P. Dekker, Krimpen aan de Lek; Arie Heikoop, Kampen; Michelle Sweering (klas 4), Erasmiaans Gymnasium, Rotterdam; Djurre Tijsma (klas 5), Christelijk Gymnasium Beyers Naudé, Leeuwarden.
232: Rombout van Amstel (klas 4), Gymnasium Felisenum, Velsen-Zuid; Kees Boersma, Vlissingen; Elien Cambie (klas 3), Sint-Janscollege Poperinge; P. Dekker, Krimpen aan de Lek; Arie Heikoop, Kampen; Vidan Samardzic (klas 5), Corlaer College, Nijkerk; Michelle Sweering (klas 4), Erasmiaans Gymnasium, Rotterdam; Djurre Tijsma (klas 5), Christelijk Gymnasium Beyers Naudé, Leeuwarden.
233: Rombout van Amstel (klas 4), Gymnasium Felisenum, Velsen-Zuid; Kees Boersma, Vlissingen; Elien Cambie (klas 3), Sint-Janscollege Poperinge; P. Dekker, Krimpen aan de Lek; Arie Heikoop, Kampen; Vidan Samardzic (klas 5), Corlaer College, Nijkerk; Michelle Sweering (klas 4), Erasmiaans Gymnasium, Rotterdam.
De cadeaubonnen gaan naar Elien Cambie en Rombout van Amstel.

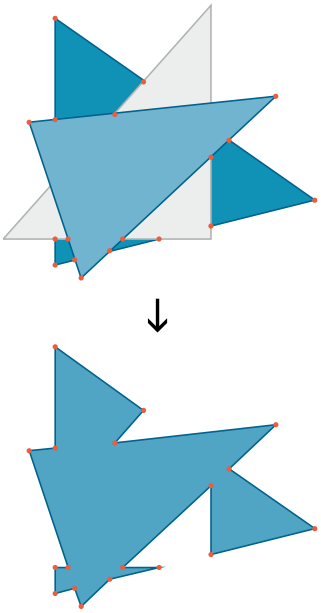
OPGAVE 238

Laat zien dat $\sqrt{14-6\sqrt{5}}+\sqrt{5}$ een positief geheel getal is. (Het gegeven getal invoeren in je rekenmachine en daaruit concluderen dat dit getal geheel is, is natuurlijk geen bewijs.)

$$\sqrt{14-6\sqrt{5}}+\sqrt{5} \in \mathbb{N}$$

OPGAVE 239

Je begint met een wit vel papier. Daarop plak je een blauwe driehoek; de vorm van die driehoek mag je zelf kiezen. Vervolgens plak je een witte driehoek naar keuze op het geheel en ten slotte plak je er weer een blauwe driehoek naar keuze bovenop. Het blauwe gebied dat dan nog zichtbaar is, bestaat uit één of meer veelhoeken. In de getekende situatie bestaat het blauwe gebied uit een achttienhoek. Laat zien dat door op een slimme manier de driehoeken te kiezen en te plaatsen, een blauwe twintighoek te verkrijgen is.

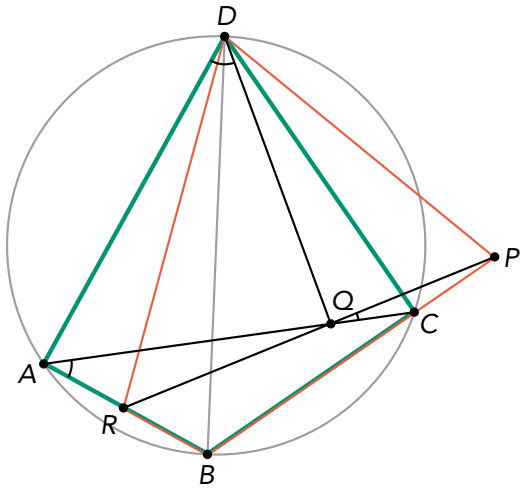


OPGAVE 240

Gegeven is een positief geheel getal n. Bewijs dat het aantal gehele oplossingen (x, y) van de vergelijking $x^2 + xy + y^2 = n$ eindig is en een veelvoud van 6.

OPGAVE 241

Vierhoek $ABCD$ is een koordenvierhoek (een vierhoek waarvan de vier hoekpunten op een cirkel liggen) zodanig dat BD een middellijn van de omgeschreven cirkel is. Punt P is een punt op het verlengde van BC (aan de kant van C) en R een punt op het inwendige van AB. Verder is Q het snijpunt van PR en CA. Als $\angle CQP + \angle BAC = \angle ADQ$, bewijs dan dat $RBPD$ opnieuw een koordenvierhoek is.



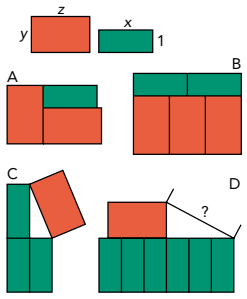
OPLOSSING 230

Willem fietst dagelijks van huis naar school en weer terug. Hij passeert daarbij twee kerken met kerktorens met een uurwerk die beide ongeveer de juiste tijd weergeven. Op de heenweg geven de uurwerken op de kerken op het moment van passeren exact dezelfde tijd weer, en op de terugweg is het uurwerk van de tweede kerk exact 5 minuten later dan het uurwerk op de eerste kerk. Willem fietst met een constante snelheid van 15 km/uur. Wat is de afstand tussen de twee kerken?

Oplossing. Noem de kerken A en B. Als Willem van A naar B en direct weer terug naar A zou fietsen, zou hij bij A een tijd van t minuten meten, aangekomen bij B diezelfde tijd t meten, en terug aangekomen bij A de tijd van $t + 5$ minuten meten. Hij heeft dan dus een afstand $2 \cdot AB$ afgelegd in 5 minuten, ofwel $\frac{1}{12}$ uur. Er geldt dus $2 \cdot AB = \frac{1}{12} \cdot 15$ km, ofwel $AB = 625$ meter.

OPLOSSING 231

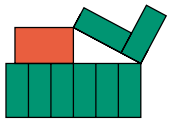
Jannie heeft een aantal rechthoeken van karton. Er zijn twee soorten rechthoeken, rode en groene: zie de figuur. Daarmee kan zij onder meer de figuren A, B en C leggen. Ook kan ze figuur D maken, waarbij een aantal rechthoeken exact passend langs de diagonaal met het vraagteken liggen. Welke rechthoeken zijn dat, en hoe liggen die?



Oplossing. Stel dat de korte zijde van de groene rechthoek gelijk is aan 1 en de lange zijde x, en dat de korte zijde van de rode rechthoek y is en de lange zijde z. Uit (A) volgt $z = y + 1$. Uit (B) volgt $x = \frac{3}{2}y$. Uit (C) volgt, met de stelling van Pythagoras: $z^2 = x^2 + 1^2$, ofwel $(y + 1)^2 = (\frac{3}{2}y)^2 + 1$, met als oplossing $y = \frac{8}{5}$, zodat $x = \frac{12}{5}$. In (D) heeft de zijde met het vraagteken dus een lengte van

$$\sqrt{(1+1+1)^2 + (\tfrac{8}{5})^2} = \sqrt{9 + \tfrac{64}{25}} = \sqrt{\tfrac{289}{25}} = \tfrac{17}{5}.$$

Dit is gelijk aan $x + 1$, dus passen er twee groene rechthoeken naast elkaar, waarvan een gekanteld, zie nevenstaande figuur.



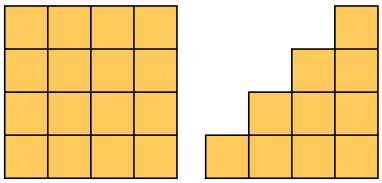
OPLOSSING 232

Uit een onderzoek naar het dopen van koekjes in de koffie blijkt dat 25% van de mensen het koekje loodrecht in de koffie steekt, 19,2% geeft de voorkeur aan een hoek van ongeveer 45 graden, terwijl 35% de hoek liever wat steiler ziet. De rest doopt nooit een koekje. Gegeven het feit dat deze percentages exact zijn, wat is dan het kleinste aantal mensen dat mee heeft gedaan aan dit onderzoek? (Als er bijvoorbeeld 4 mensen meedoen, dan kunnen de resultaten alleen maar veelvouden van 25% zijn.)

Oplossing. De percentages zijn als volgt als breuken te schrijven: $25\% = \frac{1}{4}$, $19{,}2\% = \frac{24}{125}$, $35\% = \frac{7}{20}$ en $20{,}8\% = \frac{26}{125}$. Het aantal mensen in elke groep moet geheel zijn, dus is het totale aantal deelnemers deelbaar door 4, 125 en 20, en dus ook door het kleinste gemene veelvoud van deze drie getallen; dat is 500. Het kleinst mogelijke aantal mensen dat heeft meegedaan is dus 500 (met 125, 96, 175 en 104 mensen in de respectievelijke groepen).

OPLOSSING 233

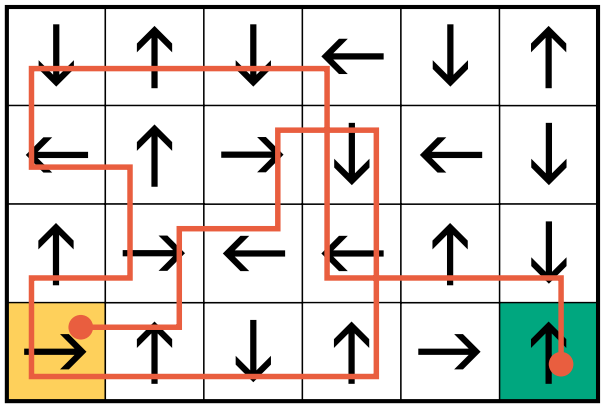
Hoeveel verschillende bouwwerken, gemaakt van identieke kubusjes, waarbij de kubusjes alleen recht op elkaar mogen staan en niet mogen zweven, leveren het onderstaande vooraanzicht en zijaanzicht op?



Oplossing. Bekijk het zijaanzicht. In de meest linkse kolom mogen de stapeltjes niet hoger zijn dan 1, dus heeft elk stapeltje hoogte 0 of 1. Het aantal mogelijkheden hiervoor is $2^4 = 16$. Maar niet elk stapeltje mag hoogte 0 hebben, dus zijn er maar 15 mogelijkheden. In de tweede kolom moet elk stapeltje hoogte 0, 1 of 2 hebben, dus zijn daarvoor 3^4 mogelijkheden, maar voor 2^4 daarvan is er geen enkel stapeltje met hoogte 2, dus is het totale aantal mogelijkheden slechts $3^4 - 2^4 = 65$.
Op dezelfde manier vinden we voor de derde kolom $4^4 - 3^4 = 175$ mogelijkheden. Tot slot de vierde kolom. Elk stapeltje moet hier hoogte 4 hebben, opdat het bouwwerk aan het vooraanzicht voldoet. Het totale aantal mogelijke bouwwerken is dus $15 \times 65 \times 175 \times 1 = 170625$.

OPLOSSING SUDOKU EN 3D-PUZZEL NR. 5

1	5	4	7	2	6	8	9	3
6	7	8	3	4	9	2	1	5
9	3	2	5	8	1	4	6	7
8	1	6	4	3	2	7	5	9
5	9	7	1	6	8	3	2	4
2	4	3	9	7	5	6	8	1
3	6	5	8	1	4	9	7	2
4	8	9	2	5	7	1	3	6
7	2	1	6	9	3	5	4	8



Links: de oplossing van figuur 9 op pagina 19. Rechts: de oplossing van de 3d-puzzel uit het aprilnummer.

PYTHAGORAS

51ste jaargang nummer 6
juni 2012
ISSN 0033 4766

***Pythagoras* stelt zich ten doel jongeren kennis te laten maken met de leuke en uitdagende kanten van wiskunde. *Pythagoras* richt zich tot leerlingen van vwo en havo en alle anderen die jong van geest zijn.**

Internet www.pythagoras.nu

Hoofdredacteur Arnout Jaspers

Eindredacteur Alex van den Brandhof

Redactie Matthijs Coster, Jeanine Daems, Jan Guichelaar, Klaas Pieter Hart, Paul Levrie, Marc Seijlhouwer

Vormgeving Grafisch Team Digipage BV, Leidschendam

Druk Drukkerij Ten Brink, Meppel

Uitgever Koninklijk Wiskundig Genootschap

Verantwoordelijk uitgever Chris Zaal

Lezersreacties en kopij
Bij voorkeur per e-mail; lezersreacties naar Jan Guichelaar, jan@pythagoras.nu en kopij naar Arnout Jaspers, arnout@pythagoras.nu. Eventueel per post naar Jan Guichelaar, Pedro de Medinalaan 162, 1086 XR Amsterdam.

Abonnementen, bestellingen en mutaties
Drukkerij Ten Brink
Abonnementenadministratie
Postbus 41
7940 AA Meppel
Telefoon: 088 226 52 58
E-mail:
abonnementen@pythagoras.nu

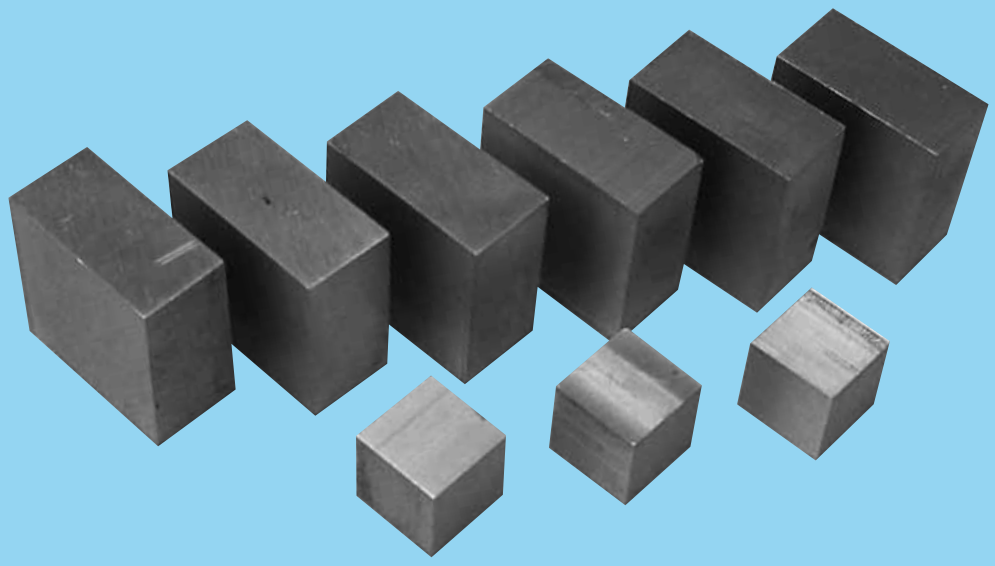
Abonnementsprijs
(6 nummers per jaargang)
€ 26,00 (Nederland),
€ 29,00 (België),
€ 32,00 (overig buitenland),
€ 17,00 (groepsabonnement NL),
€ 18,00 (groepsabonnement B).
Zie www.pythagoras.nu voor toelichtingen.

Aan dit nummer werkten mee
Alex van den Brandhof (alex@pythagoras.nu),
Jan Broekhuizen (jbroekhuizen2@home.nl),
Matthijs Coster (matthijs@pythagoras.nu),
Jeanine Daems (jeanine@pythagoras.nu),
Birgit van Dalen (bevandalen@gmail.com),
Jan Guichelaar (jan@pythagoras.nu),
Klaas Pieter Hart (kp@pythagoras.nu),
Alexander van Hoorn (alexander@pythagoras.nu),
Arnout Jaspers (arnout@pythagoras.nu),
Jaap Klouwen (j.klouwen@hva.nl)
Paul Levrie (paul@pythagoras.nu),
Eddie Nijholt (eddie@pythagoras.nu),
Frank Roos (fd_r@yahoo.com),
Jean-Pierre Smet (jeanpierre.smet@kdg.be)
Aad Thoen (thoenaad37@gmail.com),
Aad van de Wetering (avdw3b@wxs.nl).

Pythagoras wordt mede mogelijk gemaakt door de bijdragen van de onderstaande instituten en instellingen.

3D-PUZZEL

■ door Paul Levrie en Jean-Pierre Smet
(Departement IWT, Karel de Grote-Hogeschool, Hoboken (Antwerpen))



Je ziet hier negen puzzelstukjes: zes stuks met afmetingen $2 \times 2 \times 1$ en drie stuks van $1 \times 1 \times 1$. De bedoeling is om van deze negen stukjes een kubus te maken van $3 \times 3 \times 3$.