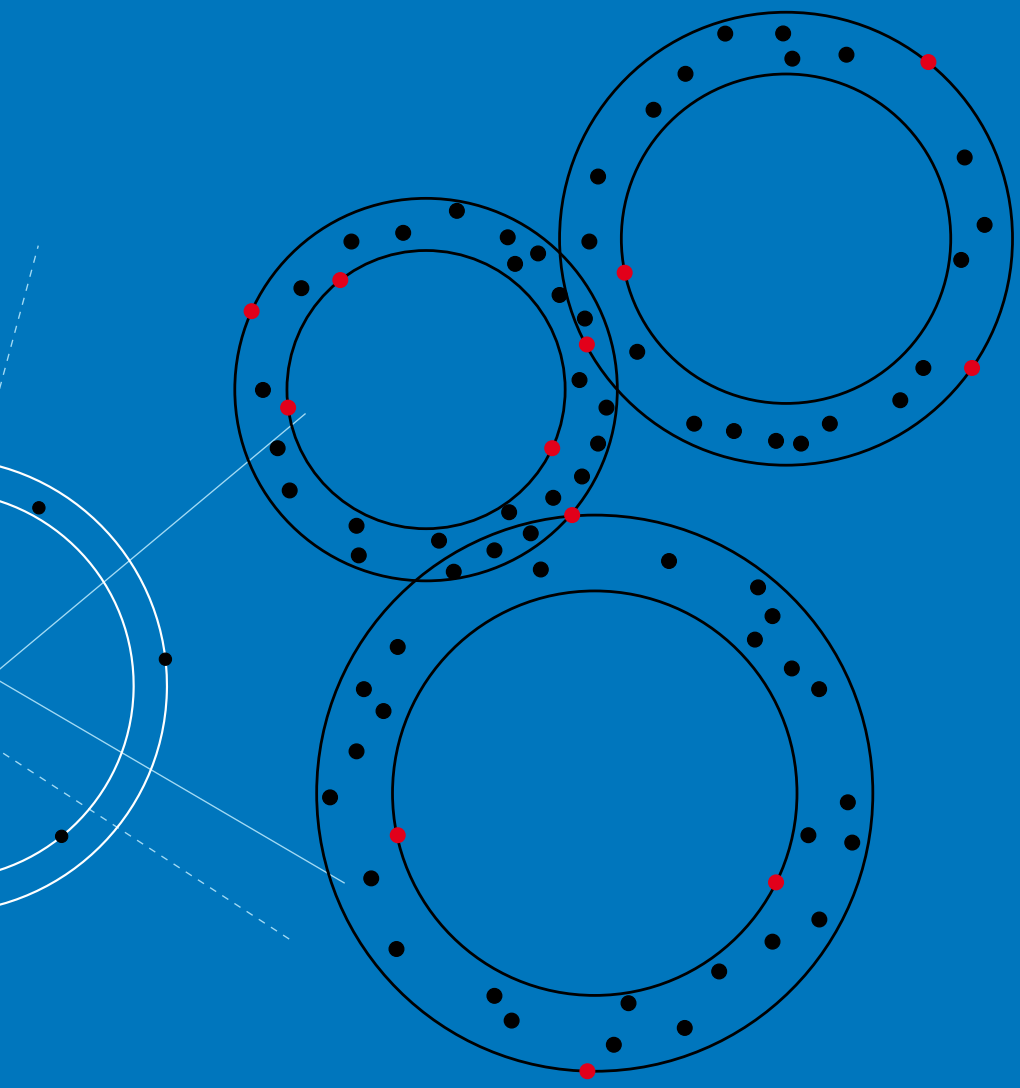
PYTHAGORAS

WISKUNDETIJDSCHRIFT VOOR JONGEREN



52ste JAARGANG - NUMMER 1 - SEPTEMBER 2012

3TU.AMI

TU Delft

TU/e

UNIVERSITY OF TWENTE.

Het Applied Mathematics Institute 3TU.AMI, een samenwerkingsverband van de drie technische universiteiten Delft, Eindhoven en Twente, organiseert elk jaar samen met het Duitse wiskunde-instituut MATHEON een wiskundewedstrijd voor middelbare scholieren. Deze wedstrijd wordt via het internet gespeeld in de vorm van een digitale adventskalender, de zogenaamde Mathekalender.

Van 1 tot en met 24 december wordt dagelijks op de Mathekalender een vakje 'geopend' waarachter een wiskundeopgave verschijnt met tien mogelijke antwoorden. Deze opgaven zijn uitdagend, en soms van het niveau van de finale van de Nederlandse Wiskunde Olympiade. Omdat het meerkeuzevraagstukken zijn, worden er geen toelichtingen of bewijzen gevraagd. De opgaven zijn ontleend aan leuke praktische problemen.

Internationale Wiskundewedstrijd MATHEON/AMI

Registratie en spelregels

Het is een individuele wedstrijd. Je kunt je daarom alleen als persoon voor deelname registreren, maar het is natuurlijk leuk om met een groep of schoolklas te proberen het goede antwoord van een opgave te vinden. Op de website

http://ami.3tu.nl/Mathekalender.html

staat hoe je je voor de wedstrijd kunt opgeven. Bovendien bevat deze website de spelregels en een archief van opgaven die in vorige versies van de Mathekalender zijn verschenen. Daarmee krijg je een indruk van het niveau van de opgaven.

Prijzen

Het instituut 3TU.AMI stelt een laptop beschikbaar als prijs voor de Nederlandse scholier die de beste score haalt. Daarnaast stelt MATHEON elke dag prijzen beschikbaar en elke deelnemer kan daarnaar meedingen.

Meer informatie

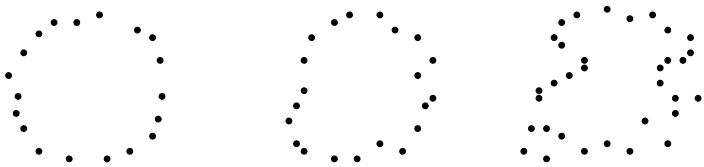
Als je verder nog vragen hebt, dan kun je deze stellen via e-mail: 3tuami-ewi@tudelft.nl.

INHOUD

DUIZEND KLUISJES
Duizend kluisjes worden door duizend leerlingen volgens bepaalde spelregels geopend en gesloten. Welke kluisjes zijn uiteindelijk geopend?

HET LIEGEBEESTSPEL
De Internationale Wiskunde Olympiade afgelopen zomer pakte voor Nederland beter uit dan ooit: tweemaal goud en driemaal brons. Quintijn Puite, een van de begeleiders van het Nederlandse team, bespreekt een opgave.

10



HOE ROND IS EEN GROEP PUNTEN?
Kunnen we wiskundig vaststellen in hoeverre een verzameling punten in het vlak een cirkelvorm beschrijft? Op deze vraag uit de computationele meetkunde gaat Marc van Kreveld van de Universiteit Utrecht in.

EN VERDER
2 Kleine nootjes
8 Journaal
9 Factorisatiepuzzels
15 Dobbelen met een twaalfvlak
16 De mars van Napoleon naar Moskou
18 De computer leren wat jij al kan
20 De Vliegende Hollander
29 Oplossing 3d-puzzel nr. 6
30 Pythagoras Olympiade

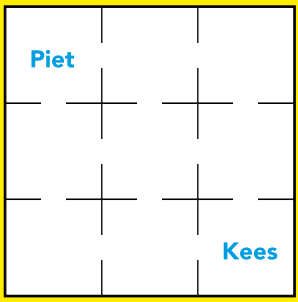
NIVEAUBALKJES Pagina's met één of meer zwarte balkjes (onder de paginanummering) geven de moeilijkheidsgraad aan. Eén balkje: lastig. Twee balkjes: vereist wiskundekennis uit de vijfde of zesde klas. Drie balkjes: net iets moeilijker.

KLEINE NOOTJES

■ door Jan Guichelaar

GEKLEURDE BALLEN

In een doos zitten een witte, twee rode, drie blauwe, vier gele, vijf zwarte en zes groene ballen. Als je blind trekt, hoeveel ballen moet je dan minstens trekken om er zeker van te zijn dat je vier ballen van dezelfde kleur hebt?



NEGEN ZALEN

Een museum heeft negen zalen met twaalf inwendige deuren, volgens de plattegrond hiernaast. Piet bevindt zich links-boven en Kees rechtsonder. Piet wil in vier stappen, van zaal naar zaal, naar rechtsonder. Kees wil in vier stappen naar linksboven. Telkens op een hele minuut gaan ze beiden een deur door. Soms kunnen ze kiezen uit twee mogelijkheden, dan kiezen ze willekeurig. Soms is er maar één mogelijkheid. Hoe groot is de kans dat ze een keer tegelijkertijd in dezelfde zaal komen?

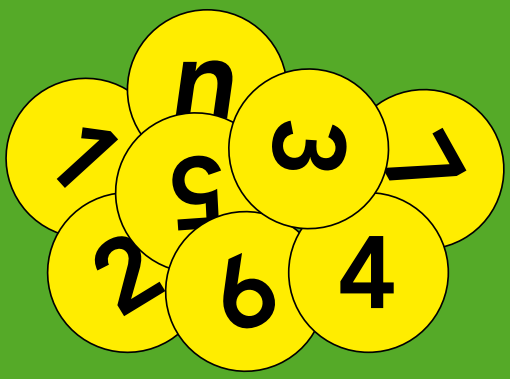
SOM EN VERSCHIL

In een bak zitten vier ballen, genummerd van 1 tot en met 4. Ik pak willekeurig twee ballen en fluister Simon de som van de twee getrokken getallen in het oor, en Vera het (niet-negatieve) verschil. Tegelijkertijd kijken Simon en Vera sip: ze weten klaarblijkelijk niet wat de twee getallen zijn. Als ze elkaar zo zien, klaren beide gezichten op en roepen ze tegelijk: 'Ik weet wat de twee getallen zijn.' Kun je de getallen vinden?

Kleine nootjes zijn eenvoudige opgaven die weinig of geen wiskundige voorkennis vereisen om opgelost te kunnen worden. De antwoorden vind je in het volgende nummer van *Pythagoras*.

HARDLOPEN

Eise, Jip en Anique doen een hardloopwedstrijd over 100 meter. Anique wint in precies 20 seconden. Dan heeft Jip een achterstand van 10 meter. Even later gaat Jip over de eindstreep en heeft dan een voorsprong van 20 meter op Eise. Hoe hard loopt Eise?



FICHES

Willemijn heeft *n* fiches, genummerd van 1 tot en met *n*. Ze probeert met alle mogelijke combinaties van twee of meer fiches de som *n* te krijgen. Tot haar verbazing merkt ze dat het precies op *n* manieren kan. Hoe groot is *n*?

OPLOSSINGEN KLEINE NOOTJES NR. 6

Bespottelijke balans. Nummer de gewichtjes 1 tot en met 7. Leg 1 op de schaal met de lange arm en 2, 3 en 4 op de schaal met de korte arm. Bij evenwicht zit het gezochte gewichtje bij 5, 6 en 7. Als gewichtje 1 naar boven komt, is dat het gezochte gewichtje en is een tweede weging dus niet nodig. En als 2, 3 en 4 naar boven komen, zit het gezochte gewichtje daarbij. Neem 2, 3 en 4 (bij 5, 6 en 7 gaat het net zo). Leg 2, 5 en 6 op de korte schaal en 3 op de lange (5 en 6 zijn het zeker niet). Is er evenwicht, dan is 4 het gezochte gewichtje. Komt 2 naar boven, dan is 2 het gezochte gewichtje. Komt 3 naar boven, dan is 3 het gezochte gewichtje.

Dobbelsteen. Je kunt een enkele zijde zien, twee zijden naast elkaar of drie zijden om een hoekpunt. Alleen 13 ogen kun je niet zien.

Hoeveel bladzijden? Het boek telt 100 bladzijden. Het cijfer 1 komt dan 21 keer voor (1, 10 tot en met 19, 21, 31, 41, 51, 61, 71, 81, 91, 100; let op: het getal 11 bevat twee keer het cijfer 1) en de cijfers 2, 3, 4 en 5 komen elk 20 keer voor.

Pythagoras in letters en cijfers. De letters staan voor hun plaats in het alfabet. Dus P = 16, Y = 25, T = 20, H = 8, A = 1, G = 7, O = 15, R = 18, S = 19. Dus $O^2 + T^2 = Y^2$ staat voor $15^2 + 20^2 = 25^2$ en $(Y - A)^2 + G^2 = Y^2$ staat voor $24^2 + 7^2 = 25^2$. Een andere mogelijkheid is $((A + A) \times O)^2 + (P \times T : H)^2 = (Y + G + R)^2$, ofwel $30^2 + 40^2 = 50^2$, en een stelling van Pythagoras met alle letters is $G^2 + (H + O + R - A - P)^2 = (T \times Y : (A + S))^2$, ofwel $7^2 + 24^2 = 25^2$.

Zagen en schaven. Stephen bracht 200 kg naar de zagerij en kreeg 180 kg retour. Daarvan hield de schaver 18 kg achter. Er blijft dan nog 162 kg over.

DUIZEND KLUISJES

door Merlijn Staps

Op een school zitten 1000 leerlingen. Er zijn bovendien 1000 kluisjes genummerd van 1 tot en met 1000, voor elke leerling één. Op de eerste dag van het nieuwe schooljaar wordt een bijzonder ritueel uitgevoerd. Hierbij stellen alle 1000 leerlingen zich in een rij op.
In het begin zijn alle kluisjes gesloten. De eerste leerling opent alle kluisjes. Vervolgens verandert de tweede leerling de status van elk tweede kluisje (dus van de kluisjes 2, 4, 6, ...): hij opent het kluisje als het gesloten is en hij sluit het kluisje als het geopend is. De derde leerling verandert nu de status van elk derde kluisje. Dit gaat zo door voor alle leerlingen tot en met de laatste leerling, die alleen het laatste kluisje van status verandert. Hoeveel kluisjes zijn er aan het eind van de dag geopend?

Foto: Emily Peterson

Scott Franklin is een wiskundige van Wayland Baptist University (Texas, Verenigde Staten). Op zijn weblog blog.drscottfranklin.net schrijft hij over van alles wat met wiskunde te maken heeft. De kluisjespuzzel op de linkerpagina is een van de dingen van Franklins blog. Als je eerst zelf wilt puzzelen, lees dan nog niet verder, want dit artikel gaat over de oplossing.

PATROONHERKENNING In figuur 1 op de volgende pagina is te zien wat er op de eerste schooldag met de eerste achttien kluisjes gebeurt. Op rij *i* is hier te zien wat de status van ieder kluisje is nadat de leerlingen 1, 2, ..., *i* zijn geweest. Zo zien we bijvoorbeeld dat na de eerste twee leerlingen precies de oneven kluisjes geopend zijn en dat na de eerste drie leerlingen steeds drie gesloten en drie open kluisjes elkaar afwisselen. Verder valt op dat er linksonder in de tabel (onder de hoofddiagonaal) geen veranderingen meer optreden. Dit is niet verwonderlijk, omdat kluisje *i* niet meer van status verandert nadat de leerlingen 1, 2, ..., *i* aan de beurt zijn geweest.

Van de eerste achttien kluisjes zien we nu dat aan het eind van de dag de kluisjes 1, 4, 9 en 16 geopend zijn. Het valt op dat dit de eerste vier kwadraten zijn. Geldt dit algemeen? Met andere woorden: zijn aan het eind van de dag precies de kluisjes waarvan het nummer een kwadraat is geopend?

Om deze vraag te beantwoorden, kijken we nog eens goed naar figuur 1. Over het algemeen ziet het er een beetje onoverzichtelijk uit: er zit geen duidelijk patroon in de plekken waar er een O staat en de plekken waar er een G staat. Laten we eens één kluisje volgen en kijken wat er met dat kluisje gebeurt. Kies bijvoorbeeld kluisje 10. We zien dat dit kluisje van status wordt veranderd door de leerlingen 1, 2, 5 en 10. Dit zijn precies de *delers* van 10. Dit kunnen we simpel verklaren: de *i*-de leerling verandert elk *i*-de kluisje van status en dat zijn de kluisjes waarvan het nummer een veelvoud van *i* is. Als we dus kluisje *m* bekijken, zal dit kluisje van status veranderd worden door de *i*-de leerling als *m* een veelvoud is van *i*, dus als *i* een deler is van *m*. Kluisje *m* wordt dus van status veranderd door de leerlingen waarvan het nummer een deler van *m* is.

Om te kunnen vertellen of een kluisje aan het

kluisje / leerling	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
0	G	G	G	G	G	G	G	G	G	G	G	G	G	G	G	G	G	G
1	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O
2	O	G	O	G	O	G	O	G	O	G	O	G	O	G	O	G	O	G
3	O	G	G	G	O	O	O	G	G	G	O	O	O	G	G	G	O	O
4	O	G	G	O	O	O	O	O	G	G	O	G	O	G	G	O	O	O
5	O	G	G	O	G	O	O	O	G	O	O	G	O	G	O	O	O	O
6	O	G	G	O	G	G	O	O	G	O	O	O	O	G	O	O	O	G
7	O	G	G	O	G	G	G	O	G	O	O	O	O	O	O	O	O	G
8	O	G	G	O	G	G	G	G	G	O	O	O	O	O	O	G	O	G
9	O	G	G	O	G	G	G	G	O	O	O	O	O	O	O	G	O	O
10	O	G	G	O	G	G	G	G	O	G	O	O	O	O	O	G	O	O
11	O	G	G	O	G	G	G	G	O	G	G	O	O	O	O	G	O	O
12	O	G	G	O	G	G	G	G	O	G	G	G	O	O	O	G	O	O
13	O	G	G	O	G	G	G	G	O	G	G	G	G	O	O	G	O	O
14	O	G	G	O	G	G	G	G	O	G	G	G	G	G	O	G	O	O
15	O	G	G	O	G	G	G	G	O	G	G	G	G	G	G	G	O	O
16	O	G	G	O	G	G	G	G	O	G	G	G	G	G	G	O	O	O
17	O	G	G	O	G	G	G	G	O	G	G	G	G	G	G	O	G	O
18	O	G	G	O	G	G	G	G	O	G	G	G	G	G	G	O	G	G

Figuur 1 O = open, G = gesloten.

eind van de dag geopend zal zijn of niet, merken we nog op dat een kluisje geopend is als het een even aantal keer van status veranderd is en juist gesloten als het een oneven aantal keer van status veranderd is. Om ons vermoeden te bewijzen, moeten we dus laten zien dat een getal een oneven aantal delers heeft precies als het een kwadraat is.

PAREN Als het getal m een deler d heeft, is m/d ook een deler van m. We kunnen de delers van m nu gaan opdelen in paren $\{d, e\}$ waarbij het product van d en e gelijk is aan m. Laten we dit eens uitproberen voor $m = 30$ met als delers 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 en 30. De opdeling die we in dit geval maken is dus $\{1, 30\}$, $\{2, 15\}$, $\{3, 10\}$, $\{5, 6\}$.

Je bent nu misschien geneigd om te denken dat ieder getal een even aantal delers heeft, omdat we de delers in paren kunnen opdelen. Het kan echter gebeuren dat het quotiënt m/d precies gelijk is aan d, dus dat we d in een paar met zichzelf proberen te stoppen. Als $d = m/d$, geldt $m = d^2$, dus dan is m inderdaad een kwadraat. Ter illustratie geven we de opdeling voor het kwadraat $m = 36$ met als delers 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36: we krijgen $\{1, 36\}$, $\{2, 18\}$, $\{3, 12\}$, $\{4, 9\}$ en we houden 6 over aangezien $6^2 = 36$. De delers van een kwadraat zijn dus op te delen in allemaal paren en één los getal, dus een kwadraat heeft inderdaad een oneven aantal delers.

We hadden al gezien dat de kluisjes die aan het eind van de dag open staan de kluisjes m zijn waarvoor m een oneven aantal delers heeft (want die kluisjes wisselen een oneven aantal keer van status).

Dit zijn dus inderdaad de kluisjes m waarvoor m een kwadraat is: we hebben ons vermoeden bewezen! Omdat er in totaal 1000 kluisjes zijn, zullen er aan het eind van de dag 31 kluisjes open staan, er zijn immers 31 kwadraten onder de 1000 (1000 zit tussen $31^2 = 961$ en $32^2 = 1024$ in).

EEN VARIANT Stel nu eens dat er op de eerste schooldag een aantal leerlingen ziek waren en dat de rest het ritueel toch heeft uitgevoerd (waarbij de leerlingen niet opnieuw genummerd zijn). Aan het eind van de schooldag bleek dat kluisje 1 gesloten was en dat alle andere kluisjes geopend waren. Welke leerlingen waren er dan aanwezig?

We kunnen makkelijk nagaan van de eerste leerlingen welke aanwezig moeten zijn: 1 mag niet aanwezig zijn, 2 en 3 moeten er juist wel zijn, 4 dan niet, 5 wel en 6 ook. We kunnen zo doorgaan door bij elk volgend kluisje te kijken of we de bijbehorende leerling moeten oproepen om dit kluisje aan het eind van de dag open te krijgen. Op deze manier vinden we van de eerste 30 leerlingen dat de volgende aanwezig moeten zijn: 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 19, 21, 22, 23, 26, 29, 30.

We zouden natuurlijk zo door kunnen gaan tot en met 1000, maar dat is erg veel werk. Is er niet een patroon in bovenstaande getallen? Dat wordt duidelijk als we ieder getal opschrijven in zijn unieke priemfactorontbinding: 1, 2, 3, $4 = 2 \times 2$, 5, $6 = 2 \times 3$, 7, $8 = 2 \times 2 \times 2$, $9 = 3 \times 3$, $10 = 2 \times 5$, 11, $12 = 2 \times 2 \times 3$, 13, $14 = 2 \times 7$, $15 = 3 \times 5$, $16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$, 17, $18 = 2 \times 3 \times 3$, 19, $20 = 2 \times 2 \times 5$, $21 = 3 \times 7$, $22 = 2 \times 11$ enzovoort.

De groen genummerde leerlingen moeten aanwezig zijn, de rode niet. Wat opvalt, is dat de groene getallen precies díe getallen zijn waarin elke priemfactor maximaal één keer voorkomt. Een getal met zo'n eigenschap heet *kwadraatvrij*, omdat de delers van zo'n getal (op 1 na) allemaal niet-kwadraten zijn (omdat we de leerling 1 niet willen oproepen beschouwen we 1 hier als niet-kwadraatvrij). Om te bewijzen dat het inderdaad werkt om de 'kwadraatvrije leerlingen' op te roepen, moeten we laten zien dat ieder getal m (op het getal 1 na) een oneven aantal kwadraatvrije delers heeft. Dan wordt kluisje m immers een oneven aantal keer van status veranderd en zal het aan het einde van de dag open staan.

Neem bijvoorbeeld $m = 720 = 2^4 \times 3^2 \times 5$. Een kwadraatvrije deler van 720 is van de vorm $2^i \times 3^j \times 5^k$ waarbij i, j en k alle drie 0 of 1 zijn (een hogere exponent kiezen mag niet). We hebben dus $2 \times 2 \times 2 = 8$ mogelijkheden. We mogen echter niet $i = j = k = 0$ kiezen, omdat we dan de deler 1 van 720 hebben en die wilden we nou juist niet. Al met al vinden we $2^3 - 1 = 7$ kwadraatvrije delers van 720 en dat is inderdaad een oneven aantal. In het algemeen geldt dat een getal met k verschillende priemfactoren $2^k - 1$ kwadraatvrije delers heeft: een oneven aantal.

OM ZELF OVER NA TE DENKEN

1. Stel nu eens dat op de eerste schooldag de tweede leerling ziek is. Welke kluisjes staan dan aan het eind van de dag open?

2. We hebben gezien dat na de eerste twee leerlingen en na de eerste drie leerlingen het patroon dat in de kluisjes zat periodiek was (na de eerste twee leerlingen met periode 2, na de eerste drie leerlingen met periode 6). Is dit na de eerste vier leerlingen ook nog zo? En daarna?

3. De conciërge heeft een willekeurig aantal kluisjes rood geverfd. Kunnen we dan een aantal leerlingen selecteren zodat aan het eind van de dag precies de rode kluisjes gesloten zijn? ■

ANTWOORDEN

1. Dit zijn de oneven kwadraten en de even niet-kwadraten.

2. Ja, na elk aantal leerlingen is dit het geval en de periode na n leerlingen is het kleinste gemeene veelvoud K van de getallen 1, 2, ..., n. Dit kun je inzien door op te merken dat de leerlingen 1, 2, ..., n precies hetzelfde doen met kluisje i en kluisje $K + i$ voor willekeurige i.

3. Ja, dat kan. Als kluisje 1 rood is, selecteren we leerling 1 en anders niet. Vervolgens kiezen we leerling 2 zodat kluisje 2 aan het eind open is als dat kluisje rood is en anders gesloten. Vervolgens kiezen we leerling 3 zodat kluisje 3 aan het eind de goede status heeft. Zo gaan we door tot en met leerling 1000.

JOURNAAL

■ door Alex van den Brandhof

Escher for real

De Nederlandse kunstenaar Maurits Escher (1898-1972) staat bekend om zijn tweedimensionale tekeningen van figuren die in drie dimensies onmogelijk zijn te maken. Beroemd zijn *Belvedere* en de *Waterval*. Gershon Elber, een informaticus van Technion – Israel Institute of Technology, heeft Eschers objecten zodanig gemanipuleerd dat hij ze écht uit een 3d-printer kan laten rollen.

Hoe krijgt Elber dat voor elkaar? In feite licht hij de boel op: gezien vanuit een bepaalde hoek ziet de 3d-illusie eruit zoals Escher het heeft bedoeld, maar draai je het object, dan zie je alle listige trucs die Elber gebruikte om zijn creatie mogelijk te maken.

De 3d-printer had 27 uur nodig voor Elbers versie van Eschers *Belvedere*. Hierboven zie je links het driedimensionale object vanuit de juiste hoek. En rechts zie je hoe Elber gemanipuleerd heeft om deze creatie mogelijk te maken.

Elber heeft zijn 3d-illusies op zijn website gezet: www.cs.technion.ac.il/~gershon/EscherForReal, met uitleg, plaatjes en een youtube-filmpje.

Overigens: tot en met zondag 18 november 2012 (do.-zo., 10:00-17:00 uur) is er in Paleis Soestdijk een unieke Eschertentoonstelling: 'Wandelingen in de tijd, van Italië naar Baarn'.

Een versie van Eschers *Belvedere* uit een 3d-printer. © Gershon Elber

Doorbraak in kwantumcryptografie

Het ontbinden van een getal in zijn priemfactoren klinkt misschien als een elementair wiskundeprobleem, maar probeer het maar eens met een getal van 600 cijfers: dat is zelfs voor een computer een onmogelijke taak.

Een team van wiskundigen van UC Santa Barbara heeft onlangs een kwantumprocessor ontworpen en gefabriceerd, waarmee dergelijke klussen in de toekomst mogelijk kunnen worden geklaard. Met het getal 15 deden ze een test, en inderdaad: bliksemsnel werd de priemfactorontbinding gegeven: 3 × 5.

Hoewel niet bepaald een resultaat om trots op te zijn – elke eenvoudige pc kan 15 óók factoriseren – betekent het resultaat toch een mijlpaal: het opent een deur naar kwantumcomputers die in staat zijn om gigantische getallen te factoriseren.

Als het inderdaad zover komt, heeft dat aanzienlijke gevolgen voor de cryptografie. De veiligheid van internetbankieren berust bijvoorbeeld op het feit dat het makkelijk is om twee grote priemgetallen met elkaar te vermenigvuldigen, maar ondoenlijk om – gegeven het product – de twee priemfactoren te achterhalen. Als er kwantumcomputers komen die een dergelijke taak aankunnen, betekent dat voor RSA, het in de praktijk veelgebruikte encryptiesysteem, einde oefening.

Volgens Erik Lucero, een van de onderzoekers, is kwantumcryptografie de toekomst: 'Het is niet alleen moeilijker te breken, het stelt je ook in staat om te achterhalen of iemand je heeft afgeluisterd. Iemand die een gesprek van je telefoon aftapt, wordt gedetecteerd als de lijn gebruikmaakt van kwantumcryptografie.'

FACTORISATIEPUZZEL

door Derk Pik en Paul Levrie

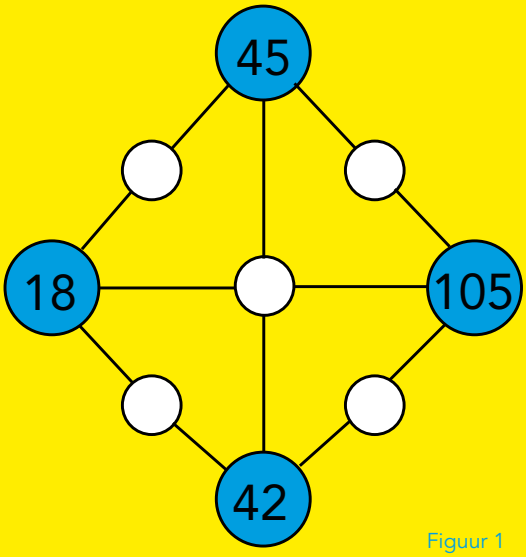
Zoals je weet, zijn priemgetallen natuurlijke getallen met precies twee delers. De eerste vijf priemgetallen zijn dus 2, 3, 5, 7, 11. Het getal 45 is bijvoorbeeld niet priem, er geldt immers $45 = 3 \times 3 \times 5$. De getallen 3, 3 en 5 heten de *priemfactoren* van 45.

De priemfactoren van 12 zijn 2, 2 en 3, en die van 15 zijn 3 en 5. Je ziet: 12 en 15 hebben 3 als gemeenschappelijke priemfactor. En 12 en 18 hebben 2 en 3 als gemeenschappelijke priemfactoren.

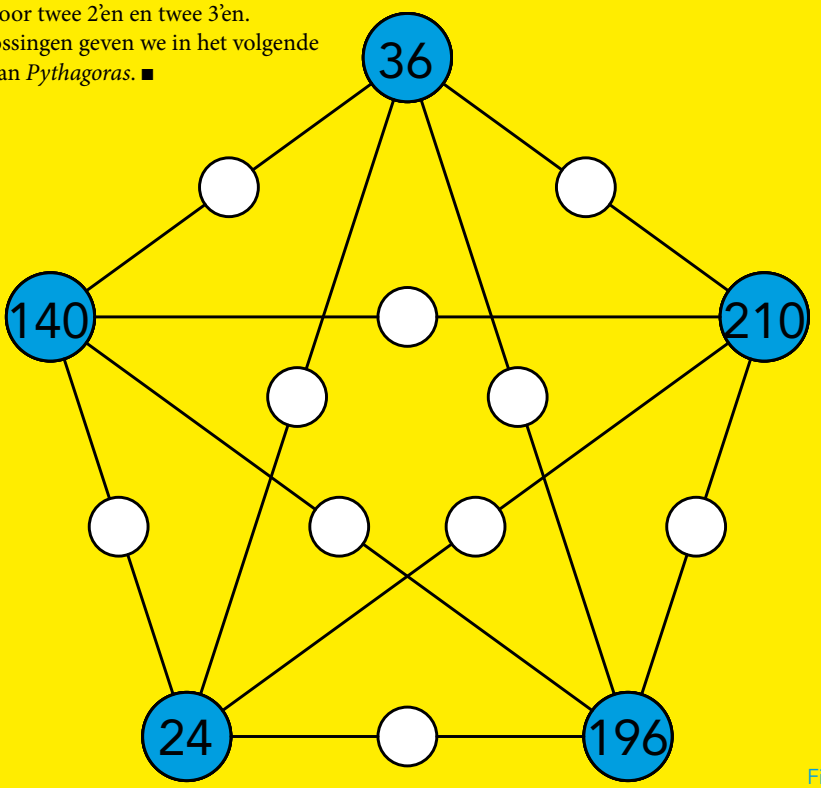
In figuur 1 en 2 zie je twee *factorisatiepuzzels*. Zet in de witte cirkels een gemeenschappelijke priemfactor van de beide getallen in de blauwe aangrenzende cirkels. Het product van de priemfactoren in de witte cirkels die aan een blauwe cirkel grenzen, levert het getal in die blauwe cirkel.

Dus het getal 45 in figuur 1 is omringd door twee 3'en en een 5. En het getal 36 in figuur 2 is omringd door twee 2'en en twee 3'en.

De oplossingen geven we in het volgende nummer van *Pythagoras*. ■



Figuur 1



Figuur 2

Kijk eens naar de plaatjes onderaan. Waarschijnlijk vind je de linker puntenverzameling tamelijk rond, de middelste al wat minder en de rechter helemaal niet rond. Kunnen we dit gevoelsmatige idee over rondheid wiskundig exact formuleren? En heeft dat trouwens zin? Op deze vragen geeft Marc van Kreveld, informaticus aan de Universiteit Utrecht, antwoord.

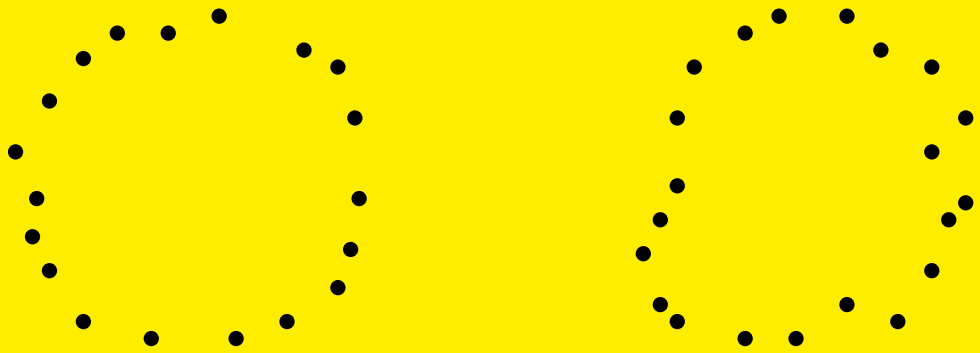
■ door Marc van Kreveld

HOE ROND IS EEN GROEP PUNTEN?

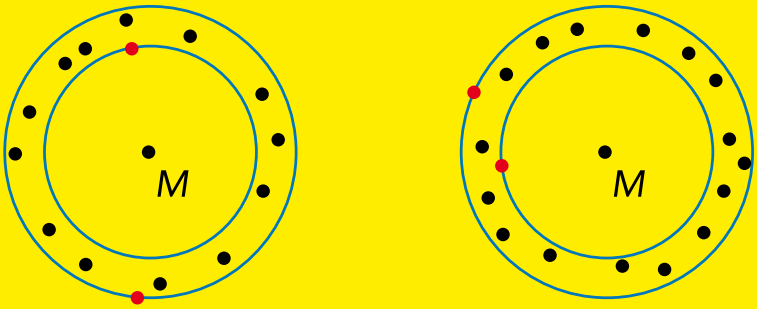
In machines komen talloze ronde, draaiende onderdelen voor: assen, tandwielen, koppelstukken en nog veel meer. Elke minieme afwijking van perfecte rondheid zorgt daarbij voor meer slijtage en een kortere levensduur. Daarom worden ronde objecten in de fabriek met coördinatenmeetmachines getest op rondheid. Zo'n machine tast een object af en registreert een groot aantal punten op het oppervlak, waarvan de coördinaten digitaal worden opgeslagen. Coördinatenmeetmachines kunnen ook niet-ronde onderdelen opmeten, waarna de computer het onderdeel digitaal reconstrueert en test of het aan de vereisten voldoet.

In dit artikel beperken we ons tot de platte versie van dit probleem, zoals in figuur 1. Hoe definieren we nu de rondheid van zo'n verzameling punten? Een van de mogelijkheden is het gebruik van een *annulus* (Latijn voor 'ring'). Een annulus is het gebied tussen twee concentrische cirkels, dus tussen twee cirkels met hetzelfde middelpunt. Als een verzameling punten goed past in een smalle annulus, dan is de verzameling rond, maar als er geen smalle annulus bestaat die de punten bevat, dan is de verzameling niet rond (het middelpunt van de twee cirkels kies je natuurlijk zo gunstig mogelijk).

Hierbij laten we toe dat de punten op de cirkels



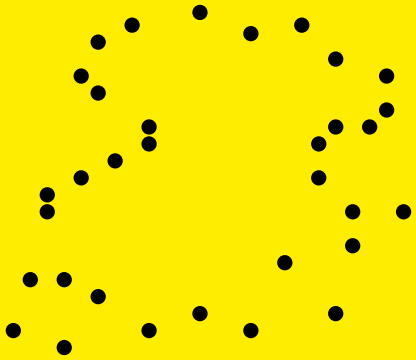
Figuur 1 Rond, minder rond, en helemaal niet rond.



Figuur 2 Hoe kun je de annulus smaller maken?

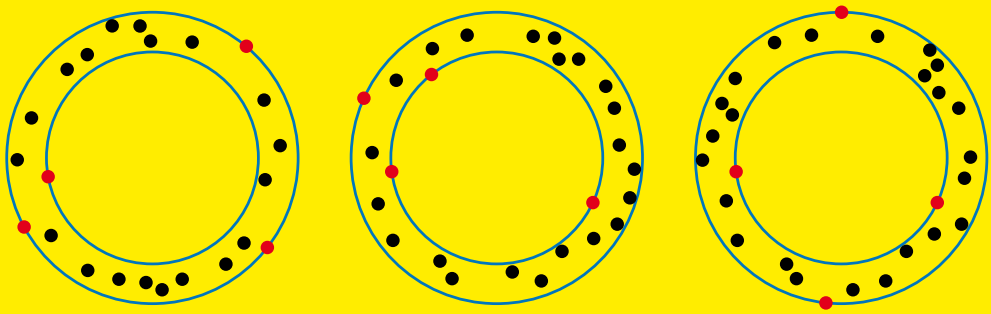
zelf liggen, maar niet binnen de kleinste cirkel en niet buiten de grootste cirkel. De breedte van een annulus is simpel te definiëren als het verschil in straal van de twee cirkels. De *rondheid* van een verzameling punten is nu te definiëren als de inverse van de breedte van de smalste annulus die alle punten van de verzameling bevat. Bijvoorbeeld: als alle punten passen tussen twee concentrische cirkels met straal 1 en straal 1,2, dan is de rondheid gelijk aan $1/(1{,}2 - 1) = 5$.

Er zijn nog andere manieren om rondheid te definiëren, maar die laten we nu buiten beschouwing. De annulusdefinitie is zeker niet perfect, maar ze werkt goed voor objecten die 'op het oog' rond zijn en waarvan voldoende punten op het oppervlak gemeten zijn.



CIRKELBEWEGING De volgende vraag is natuurlijk: hoe bepaal je de smalste annulus? We bepalen eerst wat eigenschappen van de smalste annulus A van een eindige verzameling P van punten. Dan bevat de buitencirkel van A zeker een punt van P, anders konden we de buitencirkel een beetje verkleinen zonder een punt te verliezen. Evenzo bevat de binnencirkel zeker een punt van P, anders konden we die vergroten.

Maar een annulus die slechts één punt van P op de buiten- en één punt op de binnencirkel heeft, kan nog niet de smalste zijn. Dan kunnen we namelijk altijd het middelpunt verplaatsen, zodanig dat de binnencirkel groter wordt en de buitencirkel kleiner; de annulus wordt dan smaller. Als je dit niet direct inziet: bekijk de twee annuli in figuur 2. Bedenk in welke richting je het middelpunt kunt verplaatsen zonder punten te verliezen, terwijl de



Figuur 3 Vier punten op de cirkels die een annulus begrenzen.

annulus smaller wordt. Ga ervan uit (zowel links als rechts) dat beide rode punten weer precies op de nieuwe cirkels liggen.

Uiteindelijk kunnen we beredeneren (dat doen we hier niet) dat de smalste annulus altijd minstens vier punten op de twee begrenzende cirkels heeft, en bovendien minstens één op beide cirkels. Ze zijn dus 3-1, 1-3, of 2-2 verdeeld over de buiten- en de binnencirkel (zie figuur 3).

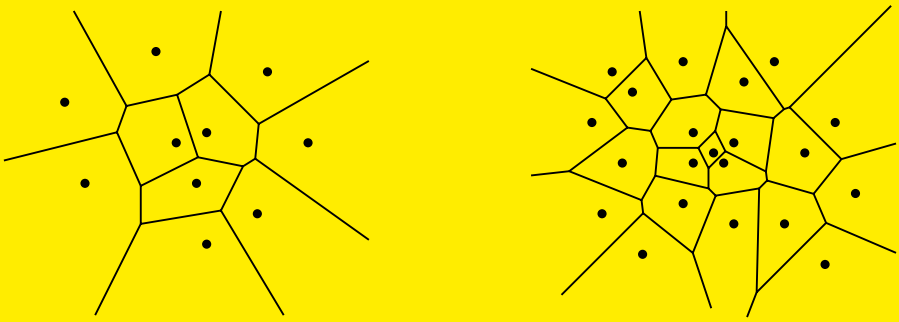
VORONOIDIAGRAMMEN Het *Voronoidiagram* van een verzameling punten Q in het vlak is een opdeling van het vlak in cellen. In elke cel ligt één punt van Q (noem dit punt Q_i), en voor alle punten binnen de cel geldt dat Q_i het dichtstbijzijnde punt uit de verzameling Q is.

Het Voronoidiagram van twee punten bestaat dus uit twee halfvlakken, elk begrensd door de middelloodlijn van deze twee punten. Het Voronoidiagram van drie punten bestaat uit drie sectoren, begrensd door drie halflijnen die samenkomen in één punt, een *Voronoivertex* geheten. Deze halflijnen liggen op de drie middelloodlijnen van de punten, en de Voronoivertex is het midden van de cirkel die precies door de drie punten gaat. Dat volgt uit het feit dat de Voronoivertex op de drie middelloodlijnen ligt, en dus even ver is van alle drie de punten.

Met nog meer punten krijgen we diagrammen zoals in figuur 4. De cellen van het diagram heten *Voronoicellen*, de lijnstukken en halflijnen die deze cellen begrenzen heten *Voronoikanten*, en de punten waar de kanten samenkomen heten *Voronoivertices*. Je ziet dat veel cellen begrensd zijn, terwijl dat niet zo was bij het *Voronoidiagram* van drie punten. Verder zijn alle cellen convex. De Voronoikanten liggen allemaal op middelloodlijnen. De Voronoivertices zijn steeds punten waar drie middelloodlijnen samenkomen, en hebben dus een gelijke afstand tot de drie punten die het dichtstbij zijn. Met andere woorden: elke Voronoivertex is het middelpunt van een cirkel die door drie punten van de verzameling gaat, terwijl deze cirkel geen punten van de verzameling in het binnengebied heeft.

Over Voronoidiagrammen is al veel bekend. Bijvoorbeeld: in een diagram van n punten leveren hooguit $3n - 6$ van de $\binom{n}{2} = n(n-1)/2$ middelloodlijnen een Voronoikant, en het aantal vertices is hooguit $2n - 5$. Kun je bedenken wat het kleinste aantal Voronoikanten en Voronoivertices is voor n punten?

Er zijn ook veel varianten op Voronoidiagrammen. Je kunt de afstand tussen punten op een andere manier afmeten, andere objecten dan punten ge-



Figuur 4 Twee voorbeelden van Voronoidiagrammen.

bruiken, en zelfs verschillende afstanden definiëren in de ene of de andere richting.

De variant die voor ons van belang is, is het 'verste-punt Voronoidiagram'. Dat is eigenlijk het omgekeerde van een gewoon Voronoidiagram: elke cel bestaat uit dat deel van het vlak waarvoor geldt dat van de verzameling Q hetzelfde punt Q_i het verst weg gelegen punt is. Verste-punt Voronoidiagrammen zien er anders uit dan gewone Voronoidiagrammen, kijk maar naar figuur 5. Alle cellen zijn onbegrensd. Verder hoort niet bij elk punt van Q een cel. Immers, een punt 'middenin' Q is voor geen enkel stukje van het vlak het verste punt.

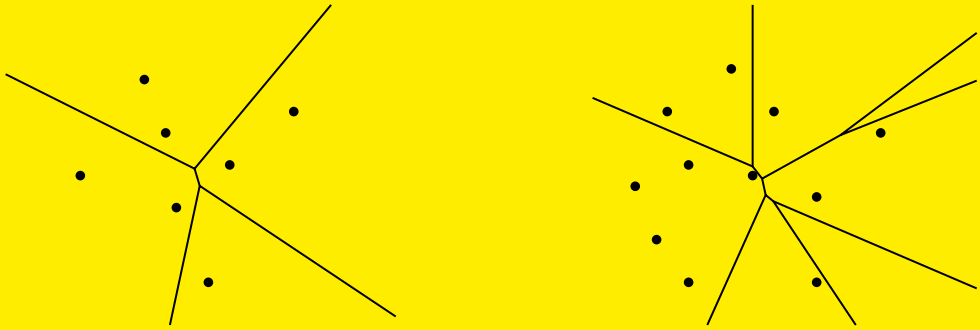
Om precies te zijn, het is bewezen dat een punt van Q een cel heeft in het verste-punt Voronoidiagram dan en slechts dan als je een rechte lijn door dat punt kunt trekken, zodanig dat alle andere punten van Q aan één kant van deze lijn liggen.

Verder geldt opnieuw dat alle kanten van het diagram delen zijn van middelloodlijnen tussen paren punten. Alleen, nu geldt voor elk punt op zo'n kant dat twee punten van Q het verste en precies evenver weg zijn. Voor de vertices in het verste-punt Voronoidiagram geldt dat drie of meer punten het verste, en precies evenver weg zijn.

Probeer zelf maar eens te bepalen wat het grootste en kleinste aantal kanten en vertices is van een verzameling Q met n punten.

SMALSTE ANNULUS Terug naar ons oorspronkelijke probleem. Hoe helpen Voronoidiagrammen om de smalste annulus te bepalen? We bekijken eerst de mogelijkheid dat de smalste annulus drie punten op de kleinste cirkel heeft en één punt op de grootste cirkel. Voor zo'n annulus moet gelden dat het middelpunt op een gewone Voronoivertex ligt: er is namelijk een cirkel door drie punten waar geen ander punt binnen ligt. Net zo geldt: als de grootste cirkel drie punten bevat en de kleinste één, dan ligt het middelpunt van die annulus op een vertex van het verste-punt Voronoidiagram. Er is dan namelijk een cirkel door drie punten waar alle andere punten in liggen.

Dan rest het geval van twee punten op de kleinste cirkel en twee punten op de grootste cirkel. Twee punten op de kleinste cirkel betekent dat het middelpunt op een kant van het gewone Voronoidiagram ligt, en twee punten op de grootste cirkel betekent dat het middelpunt op een kant van het verste-punt Voronoidiagram ligt. Maar de cirkels hebben hetzelfde middelpunt als ze een annulus vormen. Dus het middelpunt van zo'n annulus ligt op een snijpunt van de kanten van de twee diagrammen.



Figuur 5 Twee voorbeelden van verste-punt Voronoidiagrammen.

MEETKUNDIGE ALGORITMIEK In principe hebben we nu alle bouwstenen om een computerprogramma te schrijven dat de rondheid van een verzameling punten P bepaalt. Er bestaan al computerprogramma's die Voronoidiagrammen berekenen. Het algoritme (stappenplan) voor het bepalen van de rondheid van een verzameling P zou kunnen zijn:

1. Bereken het Voronoidiagram D van P (D voor dichtbij).
2. Bereken het verste-punt Voronoidiagram V van P (V voor ver).
3. Voor elke Voronoivertex z van D:
   - Bepaal het dichtstbijzijnde punt p_d van P en het verste punt p_v van P.
   - Bereken $|p_v z| - |p_d z|$; onthoud de kleinste waarde (dit is het verschil in straal van de twee cirkels van de annulus).
4. Voor elke Voronoivertex z van V:
   - Bepaal het dichtstbijzijnde punt p_d van P en het verste punt p_v van P.
   - Bereken $|p_v z| - |p_d z|$; onthoud de kleinste waarde.
5. Voor elk snijpunt s van een kant van D en een kant van V:
   - Bepaal het dichtstbijzijnde punt p_d van P en het verste punt p_v van P.
   - Bereken $|p_v s| - |p_d s|$; onthoud de kleinste waarde.

Het uiteindelijke antwoord, de rondheid, is de inverse van de kleinste gevonden waarde over alle mogelijkheden. In het vakgebied *computationele meetkunde* worden zulke algoritmen verzonnen voor allerlei meetkundige problemen. Dit is wiskundig werk dat vooraf gaat aan het schrijven van computerprogramma's om praktische rekenproblemen op te lossen.

VERDER LEZEN Welke stappen zijn nodig om het Voronoidiagram en het verste-punt Voronoidiagram te berekenen? Dit kun je lezen in het boek *Computational Geometry, algorithms and applications* van Mark de Berg, Otfried Cheong, Marc van Kreveld en Mark Overmars (Springer, 2008). Hoofdstuk 7 van dit boek bevat algoritmen voor het berekenen van Voronoidiagrammen.
Dit artikel is gebaseerd op paragraaf 7.4 van dit boek. ■

DOBBELEN MET EEN TWAALFVLAK

■ door Paul Levrie

In het gelijknamige artikel in het vorige nummer van *Pythagoras* stelde Frank Roos de vraag: hoeveel verschillende twaalfvlakkige dobbelstenen zijn er? Met 'verschillende' bedoelen we dat je de ene oplossing niet in de andere kan doen overgaan door de dobbelsteen gewoon te draaien.

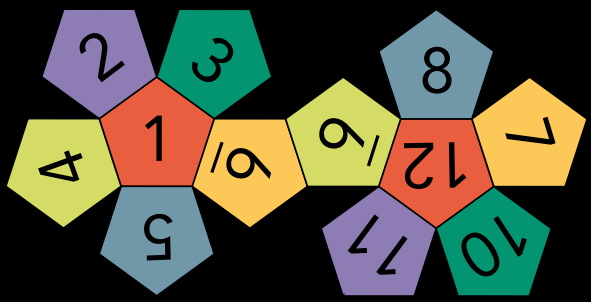
Het juiste antwoord is 768. Om tot dit antwoord te komen, is enig vernuftig telwerk nodig.

Het aantal ogen op overstaande zijvlakken (met gelijke kleur: zie figuur 1) is samen 13. We spreken af dat de rode vijfhoeken de getallen 1 en 12 bevatten, en we plaatsen onze dobbelsteen zó, dat het rode vlak met de 1 onderaan zit.

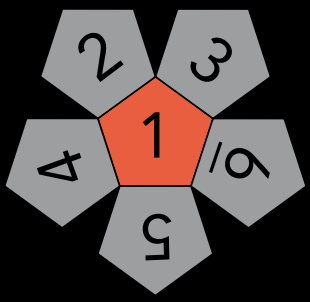
We vullen nu de onderste helft van de dodecaeder verder aan. In de grijze zijvlakken (figuur 2) plaatsen we de getallen 2 tot en met 6. We beginnen met de 2 en draaien de figuur (en dus de dodecaëder) dan zo, dat die linksboven komt te staan. We vullen verder op, voor de andere zijvlakken blijven hiervoor de getallen 3, 4, 5 en 6 over. Deze vier getallen kunnen we op $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ verschillende manieren plaatsen in de vier overige zijvlakken.

De rest van de dobbelsteen ligt dan vast. Op deze manier hebben we dus 24 oplossingen gevonden. Maar het omwisselen van de getallen in gelijkgekleurde zijvlakken levert nieuwe oplossingen op. Er zijn vijf paren zijvlakken; per paar zijvlakken kunnen we de getallen wel of niet omwisselen. Dit geeft $2^5 = 32$ mogelijkheden.

Het *grand total* is dan $24 \times 32 = 768$. ■

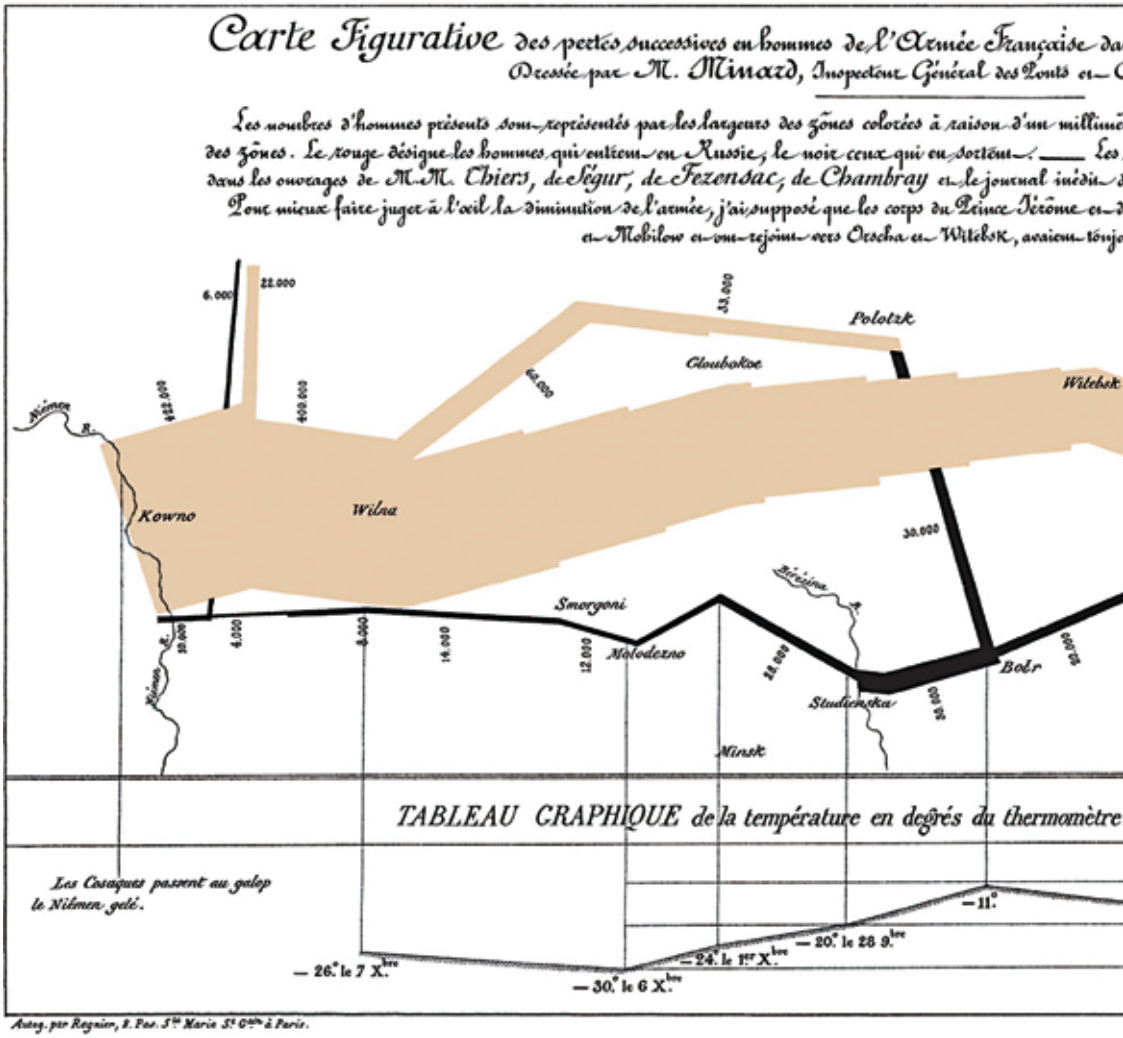


Figuur 1



Figuur 2

DE MARS VAN NAPOL



In 1812 startte Napoleon Bonaparte (1769-1821) zijn veldtocht naar Moskou. Het catastrofale verloop van de tocht werd voor het eerst in beeld gebracht door de civiel ingenieur Charles Joseph Minard (1781-1870). Minard was een meester in het grafisch weergeven van statistische gegevens. De kaart die je hier ziet, maakte hij in 1869. Wat zien we op deze kaart?

■ door Derk Pik

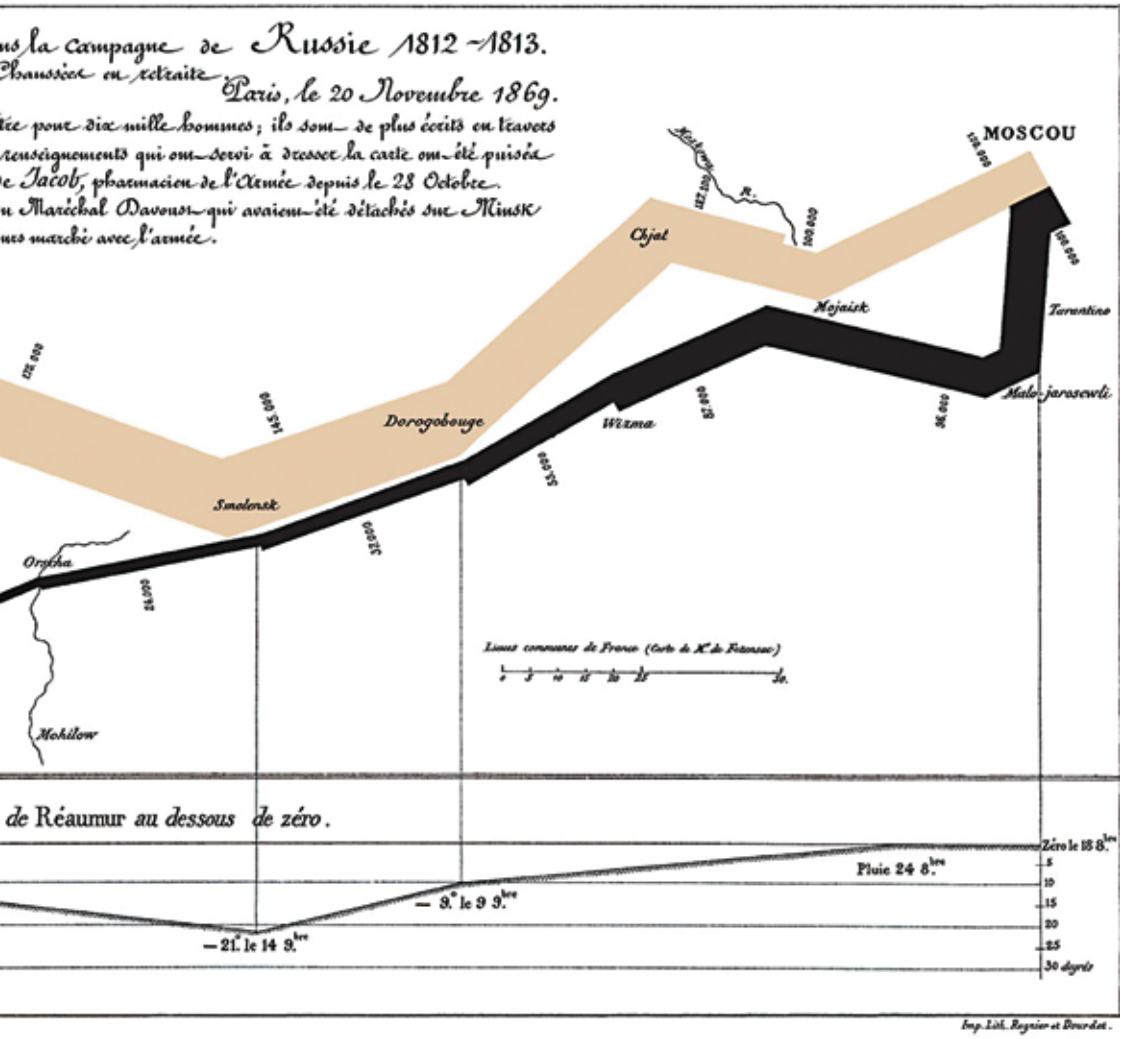
Aan de linkerkant zien we de rivier de Memel (le Niémen), die tijdens Napoleons veldtocht de grens vormde van Rusland met het Groothertogdom Warschau. Vierhonderdduizend soldaten steken deze rivier over. Dit aantal is weergegeven door middel van een okerkleurige band.

Elke millimeter breedte komt overeen met tienduizend soldaten. De strook wordt meteen smaller. In Witebsk is al meer dan de helft van het leger verdwenen.

De schaalverdeling rechts is in 'lieues communes de France'. De lieue is afgeleid uit de afstand die een mens in één uur kan afleggen en komt overeen met ongeveer 4450 meter. De afgebeelde afstand van 50 lieues stelt dus 223 kilometer voor.

Na Smolensk zijn er dertigduizend soldaten

LEON NAAR MOSKOU



minder die de tocht nog voort kunnen zetten; bij de slag om Smolensk sneuvelen 7000 Fransen en 11000 Russen. De Russen hebben de stad bij het verlaten in brand gestoken en alle voorraden vernietigd. De slag bij Borodino (op de kaart is alleen de rivier de Moskwa aangegeven) is de grootste veldslag tot dusver: er sneuvelen volgens de kaart 28000 Franse soldaten. Aan Russische zijde is dit aantal 45000. Volgens huidige schattingen zijn de aantallen nog hoger.

Op 14 september trekt Napoleon Moskou binnen met honderdduizend man. De inwoners hebben de stad dan al verlaten. De grotendeels uit houten gebouwen bestaande stad brandt in vijf dagen bijna helemaal af.

Op 18 oktober wordt de slag bij Tarutino geleverd. Er sneuvelen volgens de kaart vierduizend Fransen. De in het zwart weergegeven terugtocht wordt ingezet en de kaart maakt melding van een temperatuur van 0 graden Réamur op 18 oktober (x graden Réamur komt overeen met $1{,}25x$ graden Celsius).

Vanaf 24 oktober gaat het regenen en vriezen. Twee weken later, op 9 november, zijn er nog 37000 soldaten. Het vriest inmiddels $-9 \times 1{,}25 = -11{,}25$ °C. Een paar dagen later vriest het al meer dan 26 °C. De laagste temperatuur wordt gemeten op 6 december: –37,5 °C. Van het leger zijn nog twaalfduizend man over. ■

Elk jaar looft de Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen (KNAW) twaalf prijzen uit voor de beste vwo-profielwerkstukken van Nederland. Jaarlijks zenden bijna tweehonderd scholen tussen de vier- en vijfhonderd profielwerkstukken in. Willem Melching van het Vierde Gymnasium te Amsterdam won een van de drie prijzen in de categorie Natuur & Techniek. Zijn klasgenote Sam van den Brink interviewt hem.

■ door Sam van den Brink

DE COMPUTER LEREN WAT JIJ AL KAN

interview met Willem Melching

Wat heb jij voor profielwerkstuk gemaakt? Ik heb een robot-zeilboot gemaakt, die zelfstandig een route kan varen en daarbij rekening houdt met de golven en de wind.

Kan hij ook zelf die route bedenken? Nee, de route moet je er van tevoren inzetten. Hóe hij van A naar B moet komen, bedenkt hij wel zelf. Als de wind bijvoorbeeld niet goed staat, verzint hij toch een manier om bij B aan te komen.

Hoe ben je op dit idee gekomen? Bij mij in de kelder lag een oud bootje onder een dikke laag stof. Dit heb ik omgebouwd naar een op afstand bestuurbaar bootje, waar ik een kompas en een GPS heb ingebouwd. Het bootje bleek alleen te lekken. Daarom maakte ik een tweede versie van de boot. Toen vroeg ik me af: als de boot informatie heeft over waar hij is en waar hij naartoe gaat, waarom kan hij zichzelf dan niet zeilen?

Is er ook iets nuttigs aan het bootje dat je gemaakt hebt? Je zou met het bootje metingen kunnen doen, bijvoorbeeld op de Waddenzee, naar de dieren die daar leven, zonder dat je het ecosysteem kapot maakt. Ook kan je het systeem toepassen op grotere boten. Dan kan het systeem dienen als transportmiddel over water, op een goedkope, automatische en milieuvriendelijke manier.

De boot heeft wel elektriciteit nodig. Inderdaad: voor de instrumenten, de boordcomputer en de bediening van de roeren en de zeilen is stroom nodig. Dit is echter maar een fractie van de energie die nodig is voor de echte voortstuwing, die bij, bijvoorbeeld, een motorboot ook door de boot zelf geleverd moet worden. Bij een zeilboot is er zo weinig energie nodig dat deze tijdens de tocht gewonnen kan worden uit zonnepanelen. In principe is er eigenlijk geen energie meer nodig: hij kan 24 uur per dag en 365 dagen per jaar doorvaren!

Hoeveel werk heb je er aan gehad? Ik denk minstens driehonderd uur. Dat is veel meer dan de tachtig uren die normaal voor een profielwerkstuk staan.

Wat heb je moeten leren om dit te kunnen? Ik had al kennis van programmeren en elektronica. Deze kon ik gebruiken om de boot in elkaar te zetten. Ik moest wel allerlei nieuwe dingen leren, bijvoorbeeld hoe je de zeilen en het roer moet besturen, hoe je op koers kunt blijven, en andere dingen over regeltechniek. Mijn basiskennis was wel heel nuttig: ik kon alles snel oppikken en ik kon snel uitzoeken wat ik nodig had.

Je zeilt zelf? Ja, ik zeil zelf. Het was zeker nuttig dat je zelf al weet hoe je het moet doen. Je hoeft het alleen nog maar aan de computer te vertellen.

Je moet de computer leren wat jij al lang kan. Ja, eigenlijk wel. Je moet eerst zorgen dat de computer alle informatie heeft die je als mens hebt. De computer moet weten waar hij is, waar hij heen gaat en ook wat zijn doel is. Als de computer die informatie heeft, dan kan hij met speciale algoritmen berekenen welke routes hij kan varen en hoe hij zijn zeilen moet zetten. Het lastigste is om de computer de boot die route ook daadwerkelijk te laten sturen. Als er een windvlaag of een golf is, moet de computer daar meteen op reageren. De computer moet continu bijgeregeld worden om op koers te blijven.

Willem Melching met zijn robot-zeilboot *De Vliegende Hollander.*

Een zeilboot kan niet tegen de wind in varen. Hoe doet jouw boot dat? Als de boot merkt dat er een traject binnen de route is dat tegen de wind in gaat, bedenkt hij een zigzagkoers. Daarmee kan het doel namelijk wel bereikt worden. Hierbij gebruikt de boot factoren als de afstand tot het doel en de inval van de wind.

Heb je dat zelf bedacht? Diverse wetenschappers zijn er al mee bezig geweest. Een van hen pakte het probleem op een heel andere manier aan. Hij keek op elk moment of het nuttig genoeg was om over de andere boeg te gaan varen. Zijn algoritme was misschien flexibeler, maar had ook nadelen: de uiteindelijke route was niet zo mooi. Hoe dichter je bij je doel kwam, hoe korter de slagen werden; het zag er eigenlijk niet uit. Mijn algoritme berekent aan het begin hoe lang elke slag moet worden. Dit kan onderweg wel aangepast worden als de wind draait, maar in principe weet de computer al vanaf het begin hoe hij gaat varen. De slagen zijn constant wat lengte betreft, waardoor er efficiënt overstag wordt gegaan.

Het lijkt dat je met één keer overstag gaan het meest efficiënt bij je einddoel komt, tenzij je in een kanaal vaart... In theorie kost draaien tijd, dus je wilt zo weinig mogelijk draaien. Maar er zijn ook nadelen als je weinig draait, bijvoorbeeld als de wind draait op het uiterste deel van de route. In feite had je helemaal niet naar dit punt hoeven varen, je hebt gewoon tijd verspild. Als je dichter bij de lijn blijft van je hoofdroute, van A naar B, dan heb je minder last van winddraaiingen. Ook is het gemakkelijker opkruisen in smaller vaarwater.

Houdt jouw boot ook rekening met de oevers van een meer? Nog niet. Ik wil dit nog wel gaan toevoegen, maar op dit moment vond ik dit niet heel relevant. Ik heb de boot ontworpen voor gebruik op groot water.

Dus je kan hem niet op de Keizersgracht zetten en hem zeggen dat hij naar mijn huis moet gaan. Nee. Je kunt er wel een route in programmeren zodat je op elke hoek van de gracht een punt uitzet, en dat hij bij het opkruisen niet meer ruimte mag gebruiken dan de breedte van de gracht. Hij kan dit echter niet zelfstandig uitrekenen aan de hand van een kaart met obstakels. Ook ziet hij geen andere boten. Een ander probleem is dat het GPS een precisie van drie meter heeft. Bij de meeste steden zal de boot niet eens kunnen bepalen of hij ín de gracht of ernaast zit! Als je dit wil, dan zou je iets met zicht moeten doen. Voor mijn onderzoek is dit niet belangrijk.

Hoe ga jij nu verder? Ik wil een volgende versie maken: een boot die geschikt is voor de zee. Ik ben aan het kijken wat daar voor nodig is en wat het gaat kosten. Hopelijk kan ik er sponsoring voor vinden. Het wordt een wat grotere boot die de golven op de oceaan aankan en die lange tochten kan varen. Mijn eerste doel is om te laten zien dat het inderdaad mogelijk is om 24 uur per dag door te zeilen in realistische omstandigheden. ■

Willem Melching won de KNAW Onderwijsprijs, een beurs van 1500 euro bestemd voor zijn eerste studiejaar. Op de vorige twee pagina's kun je een interview met Willem lezen. In dit artikel beschrijft Willem samen met zijn leraar Sven Aerts zijn onderzoek, over een zelfstandig varende robot-zeilboot, die Willem *De Vliegende Hollander* doopte.

■ door Willem Melching en Sven Aerts

DE VLIEGENDE HOLLANDER

DE WISKUNDE ACHTER HET ROBOTZEILEN

Een zeilboot zelfstandig laten varen is een complex project, waarbij zeker drie wiskundige problemen een essentiële rol spelen.

1. Wat is voor een boot de ideale route van A naar B als hij geen rekening hoeft te houden met zijn omgeving? Dit stuk bolmeetkunde is een zeer oud navigatieprobleem, en de oplossing die voor *De Vliegende Hollander* gebruikt wordt, is essentieel dezelfde als die die de navigators op de VOC-schepen ook al gebruikten. Het algoritme dat ik heb ontwikkeld, is in principe geschikt voor elke zeeroute.

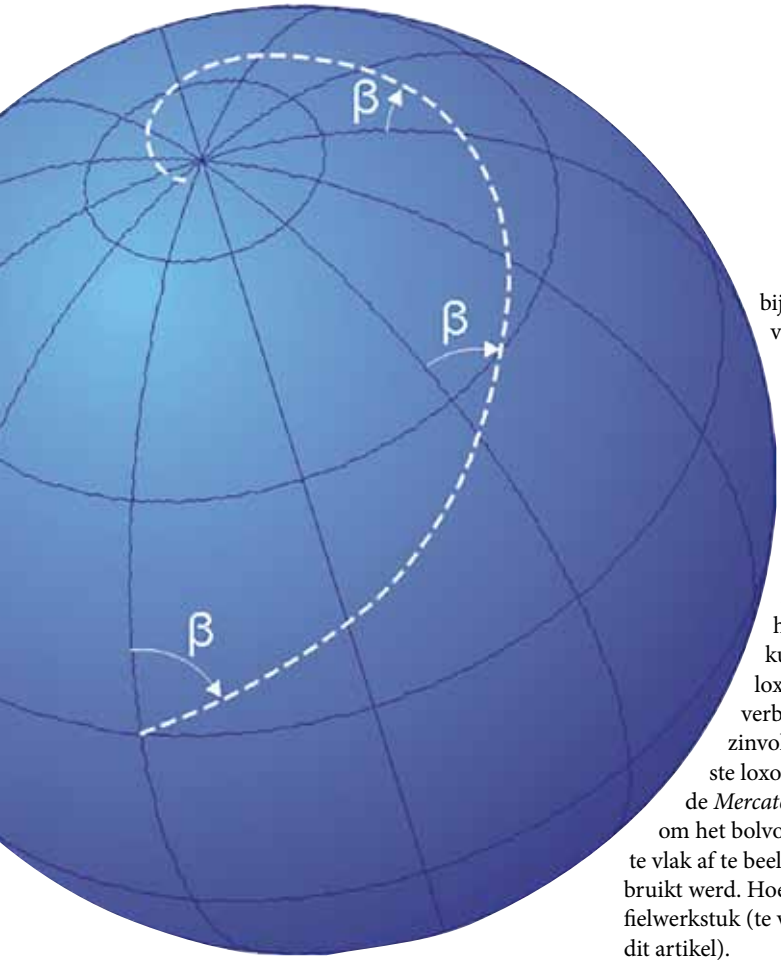
2. Hoe is de bestemming bezeilbaar? Het komt dikwijls voor dat een koers die recht op het doel afgaat in werkelijkheid niet te zeilen is, omdat de wind uit die richting komt. We moeten dan opkruisen (een zigzagkoers varen). Hoewel dit voor een menselijke zeiler niet moeilijk is, moet de zeilboot weten hoe en wanneer hij overstag moet gaan.

3. Hoe corrigeren we als de zeilboot een windvlaag of een grote golf tegenkomt? We dienen dan netjes bij te sturen tot we terug op koers zijn. Hiervoor maken we gebruik van een belangrijk concept uit de regeltechniek, de zogeheten PID-regelaar.

Zo voegen we telkens stukjes complexiteit aan het probleem toe, zodat zeilen bij een koers die in de wind ligt, bij windvlagen, bij stroming en golven haalbaar wordt.

DE IDEALE VERSUS DE PRAKTISCHE ROUTE De feitelijke route die een zeilboot vaart, is het resultaat van een complexe samenstelling van vele krachten. Maar stel dat al die krachten afwezig zijn, wat is dan de kortst mogelijke route van A naar B? Op een bol bestaan geen rechte lijnen, enkel krommen. Als de kromme een cirkel is, dienen we de cirkel te kiezen met de grootst mogelijke straal, die 'kromt' per kilometer immers het minste. De grootst mogelijke cirkel op een bol heeft een straal die gelijk is aan de straal van die bol. Zo'n cirkel noemen we een *grootcirkel* of *orthodroom*. Het middelpunt van elke grootcirkel valt samen met het middelpunt van de bol. Het is niet moeilijk om de vergelijking op te stellen van de grootcirkel als je de coördinaten hebt van het begin- en eindpunt van de route.

De Vliegende Hollander wordt, zoals de meeste zeilboten, bestuurd aan de hand van een kompaskoers. Laten we de boot op elk moment dezelfde kompaskoers varen, dan vaart de boot niet volgens een orthodroom, maar volgens een route die *loxodroom* wordt genoemd (zie figuur 1). De naam loxodroom danken we aan de Nederlander Willebrord Snel (Snellius). Hij vertaalde in 1624 het woord *kromstrijk* dat de Vlaming Simon Stevin hanteerde als λοξος (schuin) en δρομος (lopen).



Figuur 1 Een loxodroom is een kromme op een bol die een constante hoek maakt met de meridianen (figuur: Wikipedia).

Het is goed mogelijk een boot onder min of meer constante kompaskoers te laten varen. Hoe dit kan, lees je op de volgende twee pagina's bij de PID-regelaar. Anders gezegd: een zeilroute bestaat, op schommelingen na, uit stukjes loxodroom.

Idealiter berekent de zeilboot op elk moment de kompasroute die hem op de orthodroom houdt. Het is echter bijzonder rekenintensief om dit voortdurend te doen en het blijkt gelukkig ook niet nodig. Voor routes die niet langer zijn dan enkele honderden kilometers, zal er steeds een loxodroom zijn die relatief dicht bij de orthodroom ligt. Zo zal bijvoorbeeld de reis van New York naar London ongeveer 230 km, ofwel 4%, langer zijn langs de loxodroom dan langs de orthodroom. Uitzondering hierop zijn routes die dicht bij de magnetische polen liggen; daar gaat de loxodroom in een oneindige spiraal naar de pool toe. Aangezien er dicht bij de polen geen water is, maakt dit voor onze doeleinden niet uit.

Zolang we dus uit de buurt van de polen blijven en geen duizenden kilometers gaan varen, is onze zoektocht naar een goede vaarroute wiskundig eenvoudig. Voor elk paar begin- en eindcoordinaten dient de boordcomputer enkel de kompaskoers te berekenen van de loxodroom die door het begin- en eindpunt gaat. (Wiskundig gesproken zijn er meerdere loxodromen die begin- en eindpunt verbinden, maar er is er slechts één zinvol.) Het berekenen van de gunstigste loxodroom gebeurt met behulp van de *Mercatorprojectie*, een speciale manier om het bolvormige aardoppervlak op het platte vlak af te beelden die ook al in de VOC-tijd gebruikt werd. Hoe het werkt, leg ik uit in mijn profielwerkstuk (te vinden op internet, zie het eind van dit artikel).

HOE MIJN BOOT OPKRUIST Hoewel een zeilboot niet tegen de wind in kan varen, is het toch mogelijk om naar een bovenwinds gelegen punt te varen. Dit doe je door op te kruisen. Bij het opkruisen vaar je niet direct, maar met een zigzagkoers naar je doel. Om de lengte van je route zo kort mogelijk te maken, probeer je wel tamelijk recht in de wind te varen. De mate waarin dit kan, is afhankelijk van de constructie van de boot en van de zeilen die gevoerd worden. Na een tijd gevaren te hebben, ga je door de wind en ga je over de andere boeg weer aan de wind varen. Eigenlijk hak je de route in stukjes: elk stuk noemen we een *rak*.

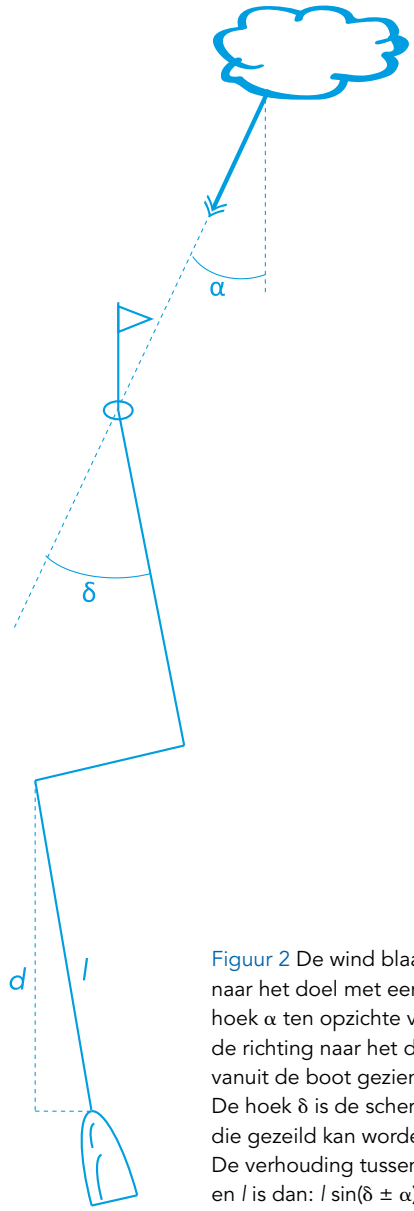
In theorie kun je elk bovenwinds doel bereiken met slechts één keer overstag te gaan. Weinig overstag gaan heeft voor- en nadelen. Wanneer je vaker dan één keer overstag gaat, wordt de totale afstand niet korter, maar verlies je bij elke draai veel snelheid en dus tijd. Slechts één keer overstag gaan is in theorie dus sneller, maar heeft een ander groot nadeel. Wanneer namelijk de wind draait terwijl je onderweg bent, is de kans erg groot dat dit nadelig is. Een route die eerst wel bezeilbaar was, kan

bijvoorbeeld opeens niet meer mogelijk zijn waardoor er een grotere afstand gevaren moet worden. Ook heeft een route waarbij maar één keer overstag wordt gegaan een veel breder vaarwater nodig. Daarom is er een alternatief nodig.

Mijn robot-zeilboot kan niet alleen de complete overstagmanoeuvre maken, maar bepaalt ook zelfstandig wanneer en hoe vaak de boot overstag moet gaan. Om dit voor elkaar te krijgen, heb ik zelf een algoritme moeten bedenken en programmeren. Ik heb nog wel een aantal bekende algoritmen bestudeerd, maar die waren omslachtig of gebruikten teveel rekenkracht. Bij opkruisen doorloopt mijn algoritme een drietal stappen. Als eerste wordt de huidige positie opgeslagen als begin van het opkruisen en als begin van het eerste rak. Deze positie wordt later nog gebruikt. Daarna moet de keuze gemaakt worden over welke boeg er wordt opgekruist. Hier wordt de kant gekozen die op dat moment het dichtst bij de richting van de boot ligt; die is immers het snelst te bereiken. Ten slotte moet de lengte van het te varen stuk worden uitgerekend. Die lengte is van verschillende dingen afhankelijk: de totale afstand van het traject en de hoek met de wind. Als er recht tegen de wind in opgekruist moet worden, zijn de twee stukken even lang, maar als de wind schuin inkomt, moet het ene stuk langer zijn dan het andere om zo efficiënt mogelijk naar het doel te gaan. De twee lengtes worden als volgt berekend:

$$l = \frac{d}{\sin(\delta \pm \alpha)}.$$

Hier is d de breedte van elke slag, α de hoek tussen de richting naar het doel en de wind en δ de scherpste hoek die gezeild kan worden (zie figuur 2). De plus of min onder de deelstreep is afhankelijk van de boeg waarover gevaren wordt.



Figuur 2 De wind blaast naar het doel met een hoek α ten opzichte van de richting naar het doel, vanuit de boot gezien. De hoek δ is de scherpste die gezeild kan worden. De verhouding tussen d en l is dan: $l \sin(\delta \pm \alpha) = d$.

DE PID-REGELAAR Alle regelaars, of ze nu mechanisch, analoog of digitaal zijn, werken volgens dezelfde basisprincipes. De regelaars hebben een input, afkomstig van een sensor die de werkelijkheid in de gaten houdt. De input wordt ook wel *process variable* genoemd. Ook heeft de regelaar een doel nodig, een waarde waar de input zo dicht mogelijk bij moet komen. Deze waarde heet het *setpoint*. Vervolgens worden de process variable en het setpoint vergeleken en vertaald in een output. Deze vertaalslag kan simpel zijn, maar kan ook gebeuren met ingewikkelde formules en algoritmes. Deze output stuurt het proces aan waardoor de toestand van het proces verandert. De regelaar krijgt vervolgens via de input weer terugkoppeling of *feedback* van zijn acties, en stelt zijn output weer bij als dat nodig is.

In de regelaar op het bootje zijn al deze elementen ook terug te vinden. De input is het kompas, die de richting meet waarin het bootje vaart. Het

setpoint is de koers die de boot moet varen om zijn doel te bereiken. Vervolgens wordt de afwijking berekend en worden hier drie formules op losgelaten. De output van de regelaar wordt dan gebruikt om het roer te bedienen. Het roer zorgt er dan weer voor dat de koers van het bootje verandert. Op deze manier krijgt de regelaar via het kompas weer feedback over hoe zijn eigen acties uitgepakt zijn. Om de roerstand van het bootje te berekenen en voortdurend aan de nieuwe omstandigheden aan te passen, maak ik gebruik van een *proportionele, integrerende en differentiërende regeling*, kortweg *PID-regeling*. De regelaar bestaat uit drie losse onderdelen die op het einde samengevoegd worden.

HET PROPORTIONELE DEEL Het proportionele deel is het deel van de uitgangswaarde dat recht evenredig is met de afwijking tot de ingestelde waarde. Dit is in formulevorm weer tegeven als

$$P(t) = e(t),$$

waarin $e(t)$ de afwijking tussen de te varen koers en de huidige koers optijdstip t is. Het proportionele deel is het belangrijkste deel van de regelaar. Dit deel elimineert namelijk de afwijking met een ingestelde waarde. Met alleen het proportionele deel zou de regelaar al redelijk werken. Er ontstaan dan wel vervelende effecten: oscillaties en een constante afwijking die niet wordt weggeregeld.

HET INTEGRERENDE DEEL Het integrerende deel van de uitgangswaarde meet de som van alle afwijkingen van het begin van de tocht tot het huidige tijdstip. Hiervoor bereken je de integraal van de afwijking (als functie van de tijd). In formulevorm:

$$I(t) = \int_0^t e(u)\,\mathrm{d}u.$$

Dit integrerende deel is vooral bedoeld om krachten te compenseren die constant op de boot werken. Stel dat een zijdelingse stroom de boot continu naar rechts duwt, dan moet de boot voortdurend naar links bijsturen. In het begin, als de boot nog niet op koers ligt, zal de waarde van dit deel blijven toenemen. Door de toenemende waarde zal de boot langzaam richting de juiste koers gaan. Als de boot op koers ligt en de afwijking (bijna) 0 geworden is, verandert het integrerende deel niet meer en behoudt het de juiste waarde om precies de stroom te compenseren.

HET DIFFERENTIËRENDE DEEL Het differentiërende deel van de uitgangswaarde geeft aan hoe snel de boot van koers verandert. Dit is te berekenen door de afgeleide te nemen van de afwijking, oftewel hoeveel de afwijking e de afgelopen t seconden veranderd is. In formulevorm:

$$D(t) = \frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t}.$$

Het differentiërende deel compenseert vooral de effecten van golven en korte invloeden zoals windvlagen.

COMBINEREN De delen moeten ook nog in de goede verhouding gecombineerd worden. Daarom vermenigvuldigen we ze elk met een eigen parameter en tellen ze op. In de ideale wereld kan de regelaar de afwijking op elk moment bepalen, maar in de echte wereld kan je natuurlijk slechts op een eindig aantal momenten t_i meten. Als we de tijdstippen t_i op regelmatige afstand Δt van elkaar plaatsen, krijgen we de volgende formule voor een PID-regelaar:

$$u(t_i) = A \cdot e(t_i) + B\sum_{k=0}^{i} e(t_k)\cdot\Delta t + C\cdot\frac{e(t_i)-e(t_{i-1})}{\Delta t}.$$

In deze formule zie je op tijdstip t_i achtereenvolgens het proportionele deel, het integrerende deel en het differentiërende deel. Het afstellen van de PID-regeling gebeurt door experimenteel de waarden van A, B en C te bepalen waarbij de boot zich het beste gedraagt. Dit is een lastig klusje, omdat de factoren elkaar onderling beïnvloeden. Er zijn ook formules en methodes om deze parameters te bepalen, maar experimenteel werkt het veel eenvoudiger en net zo goed. ■

Het complete profielwerkstuk van Willem Melching is te vinden op www.knawonderwijsprijs.nl/winnaars-2012/de-vliegende-hollander.

Van 8 tot 16 juli vond in het Argentijnse Mar del Plata de 53ste Internationale Wiskunde Olympiade (IMO) plaats. Nederland heeft het hier beter gedaan dan ooit: Jetze Zoethout en Jeroen Huijben kwamen thuis met een gouden medaille. Slechts twee keer eerder in de geschiedenis behaalde een Nederlander een gouden plak: in 1983 en in 1977. In het officieuze landenklassement eindigde Nederland op de 22ste plek, waarmee we alle andere West-Europese landen achter ons lieten.

■ door Quintijn Puite

HET LIEGEBEE

INTERNATIONALE WISKUNDE

Op de eerste wedstrijddag van de Internationale Wiskunde Olympiade, afgelopen zomer in Argentinië, ging een van de opgaven over het *liegebeestspel*. Dat is een spel tussen twee spelers A en B, waarbij A een getal x in gedachten heeft tussen vooraf afgesproken grenzen (bijvoorbeeld 1 en 10, of 1 en 100), en waarbij B dat getal moet zien te raden. Speler B mag steeds verzamelingen S vragen aan speler A, en A zegt dan of x hierin zit of niet. Maar er zit één addertje onder het gras: speler A geeft niet altijd eerlijk antwoord op de vragen. Hij mag liegen zo vaak hij wil, als hij maar niet meer dan k keer *achter elkaar* liegt, waarbij k een getal is dat A en B van tevoren hebben afgesproken. Na een keer de waarheid te hebben gesproken, mag A weer vrolijk opnieuw (hooguit) k keer liegen.

Op deze manier is het voor speler B natuurlijk lastig om het getal x te raden, met al die onbetrouwbare antwoorden van A. Hij mag daarom meerdere waarden voor x geven, maximaal 2^k stuks (met k nog steeds het maximale aantal leugens op rij dat A en B hadden afgesproken). Die verzameling mogelijke waarden voor x die B geeft, noemen we het *eindantwoord*. Als x daar in zit, dan wint hij. En anders wint speler A.

De opgave is om te bewijzen dat speler B altijd kan winnen. Blijkbaar moet B op een handige manier gebruik maken van het feit dat A niet meer dan k keer achter elkaar mag liegen. Hoe kan hij daarmee genoeg informatie over x vergaren?

EEN EENVOUDIG VOORBEELD Bekijk eerst eens een voorbeeldje met $k = 3$, zodat speler A niet meer dan 3 keer achter elkaar mag liegen en speler B als eindantwoord een verzameling met hooguit $2^3 = 8$ getallen mag noemen. Stel dat de vooraf afgesproken grenzen 1 en 10 zijn. In eerste instantie weet B dus niet méér over x dan dat het in de verzameling $\{1, 2, ..., 10\}$ ligt. Dit kun je beschouwen als B's voorlopige eindantwoord. Het is nu de kunst voor B om hier twee getallen uit te gooien waarvan hij zeker weet dat A die nooit gekozen kan hebben als waarde van x; dan kan hij als definitief eindantwoord de resterende acht getallen geven en wint hij.

Stel dat speler B vraagt of x in de verzamelingen $\{1, 3\}$, $\{2, 3, 4\}$, $\{4, 5\}$ of $\{1, 6\}$ zit, waarop A achter-

NEDERLANDSE WISKUNDE OLYMPIADE

STSPEL

OLYMPIADE 2012

vraag van *B*	antwoord van *A*	inconsistente getallen
{1, 3}	'ja'	2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10
{2, 3, 4}	'ja'	1, 5, 6, 7, 8, 9, 10
{4, 5}	'nee'	4, 5
{1, 6}	'ja'	2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10

Tabel 1

eenvolgens met 'ja', 'ja', 'nee', 'ja' antwoordt. De echte waarde van x kan nu best het getal 3 zijn; in dat geval heeft A namelijk alleen bij de laatste vraag gelogen. Maar x zou net zo goed 1, 2, 4, 6, 7, 8, 9 of 10 kunnen zijn. Het kan echter niet het getal 5 zijn; anders zou A namelijk 4 keer achter elkaar hebben gelogen. En dat is goed nieuws: B kan nu uit zijn voorlopige eindantwoord het getal 5 weggooien en houdt nog maar negen getallen over. Dit is nog steeds één getal te veel, maar misschien kunnen we iets soortgelijks nog eens doen.

INCONSISTENTE GETALLEN Waarom lukt het in dit voorbeeld nou om één getal uit te schakelen? Dat komt doordat er een getal y is waarvoor elk van de 4 antwoorden van A een leugen zou zijn als dat de echte waarde van x zou zijn. In tabel 1 staan voor elk van de gegeven antwoorden de getallen waarvoor dat antwoord een leugen zou zijn. We noemen dit voor het gemak de getallen die *inconsistent* zijn met dat antwoord van A op de vraag van B. Inderdaad zien we het getal 5 hier op elke rij terug. Dat betekent dus dat als x gelijk zou zijn aan 5, elk antwoord in dit rijtje gelogen zou zijn, maar dat mag niet volgens de regels. Dus weet B nu zeker dat x niet 5 kan zijn. En algemener: van een getal y dat in elke van $k + 1$ opeenvolgende rijen voorkomt als inconsistent getal, weet B dat het niet x kan zijn.

Had dit nou ook gewerkt als A andere antwoorden had gegeven? Stel dat A's laatste antwoord juist 'nee' was geweest (en de eerste drie antwoorden hetzelfde als hierboven), dan had er 1, 6 in de onderste rij van de tabel gestaan. Maar dan kunnen we zo'n y niet vinden, want volgens de derde rij moet y juist 4 of 5 zijn. Speler B kan er in dit geval dus helaas niets mee en moet dus iets nieuws verzinnen...

We zien hierdoor dat – als we ons tot $k + 1$ achtereenvolgende vragen beperken – het eigenlijk alleen maar zin heeft voor B om nog informatie te vragen over getallen die al eerder inconsistent waren. Na zijn derde vraag en het daarop gegeven antwoord was het bijvoorbeeld eigenlijk alleen nog zinvol om iets te vragen over de getallen 4 en 5, bijvoorbeeld door $S = \{5\}$ te vragen. (Overigens was het getal 4 vanwege het antwoord op de tweede vraag zelfs al niet meer interessant.) Aangezien

Figuur 1 Het Nederlandse team (v.l.n.r. Michelle Sweering, Guus Berkelmans, Jetze Zoethout, Jeroen Huijben, Jeroen Winkel en Matthijs Lip) op het strand in Mar del Plata. Jetze en Jeroen H. wonnen een gouden medaille. Jeroen W., Matthijs en Guus haalden een bronzen medaille en Michelle kreeg een eervolle vermelding. Foto: Birgit van Dalen

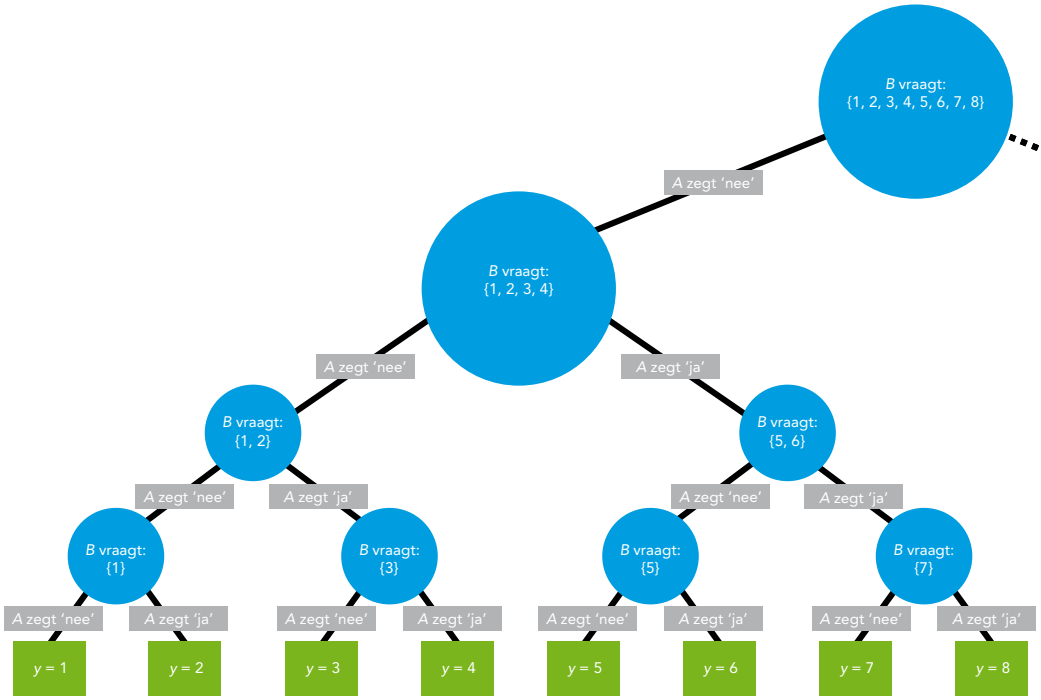
speler B het doel heeft om na zo'n reeks van $k + 1$ vragen één of meerdere getallen y over te houden die inconsistent zijn met alle antwoorden, kan hij dus het beste zijn vraag steeds beperken tot getallen die al inconsistent waren met de eerdere vragen. In tabel 2 zie je een voorbeeld van zo'n spelverloop, waarbij elke nieuwe vraag steeds gaat over inconsistente getallen uit de vorige rij, en ook alleen maar van deze laatste getallen wordt bekeken welke opnieuw inconsistent zijn met het nieuwe antwoord. Doel van B wordt nu om in de laatste rij ten minste één getal y over te houden; dat is dan namelijk automatisch inconsistent met de vorige k antwoorden.

Helaas is er in dit voorbeeld op het eind geen enkel getal y over. Speler B zou zijn vragen zodanig moeten stellen dat – onafhankelijk van de antwoorden van A – er altijd een getal y over blijft. Dat had hij na de eerste vraag (toen er nog acht inconsistente getallen over waren) op zich best voor elkaar kunnen krijgen. Hij had bijvoorbeeld steeds als vraag de onderste helft kunnen nemen van de vorige inconsistente verzameling. We illustreren deze methode aan de hand van een voorbeeld, waarbij B begint met vragen of x in $\{1, 2, ..., 2^k\}$ zit en het eerste antwoord 'nee' is. Dan zou het spelverloop er uit kunnen zien als in tabel 3.

In dit voorbeeld is het getal $y = 6$ blijkbaar inconsistent met elk van de antwoorden, want het is

vraag van B	antwoord van A	herhaaldelijk inconsistente getallen
{1, 3}	'ja'	2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10
{2, 4, 7, 8, 9}	'ja'	5, 6, 10
{10}	'nee'	10
{10}	'ja'	

Tabel 2



Figuur 2 Omdat *A* niet 4 keer achter elkaar mag liegen, leidt elk van de 2 × 2 × 2 antwoorden van *A* op de laatste drie vragen tot een getal *y* waaraan *x* zeker niet gelijk kan zijn.

op het eind nog over. Dus kan *B* het getal 6 weggooien uit zijn voorlopige eindantwoord. Was er ook zo'n *y* geweest als *A* andere antwoorden had gegeven? Wat betreft de laatste drie vragen zit dat wel snor. In figuur 2 zien we namelijk dat elk van de 2 × 2 × 2 mogelijke antwoorden van *A* tot precies één getal *y* in {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8} in de onderste rij leidt, waarvoor we dus vier leugens op rij hebben als dat *x* was geweest; dat getal *y* kan *B* dus uit zijn voorlopige eindantwoord weglaten.

Maar wat betreft de eerste vraag die *B* stelt, ligt het wat lastiger. Als het antwoord daarop 'ja' was geweest, hadden we als inconsistente getallen slechts 9, 10 gehad, en ging de truc niet op. Als de grenzen in het begin echter zodanig zouden zijn geweest dat er 16 of meer mogelijkheden voor *x* waren (bijvoorbeeld de grenzen 1 en 100), dan hadden we wél weer een getal kunnen afschieten op deze manier: we hadden dan na de eerste vraag als inconsistente getallen in ieder geval 9 tot en met 16 gevonden (alle getallen groter dan 16 vergeten we voor het gemak even) en daar weer dezelfde 'halveringsmethode' op kunnen toepassen en uiteindelijk een *y* uit de verzameling {9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16} gevonden waarvoor we vier leugens op rij hebben als dat *x* was geweest.

Al met al hebben we hier een mooi deelresultaat bereikt, dat bij de IMO dan ook met 1 punt werd

vraag van *B*	antwoord van *A*	herhaaldelijk inconsistente getallen
{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}	'nee'	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
{1, 2, 3, 4}	'ja'	5, 6, 7, 8
{5, 6}	'nee'	5, 6
{5}	'ja'	6

Tabel 3

beloond: speler B kan in ieder geval een eindantwoord geven bestaande uit $2^{k+1} - 1$ getallen. Als er namelijk oorspronkelijk meer getallen waren, dan zijn er dus ten minste 2^{k+1} en kunnen we $k + 1$ keer de halveringsstap doen zoals in het voorbeeld hierboven. Bij elke $k + 1$ antwoorden van A kan B precies één getal y met $1 \leq y \leq 2^{k+1}$ vinden dat inconsistent is met alle antwoorden. Dus kan B één getal uit zijn voorlopige eindantwoord weggooien. Als hij nu nog steeds meer dan 2^{k+1} getallen over heeft, noemt hij de eerste 2^{k+1} daarvan $a_1, a_2, ..., a_{2^{k+1}}$ en past hij hier dezelfde strategie op toe: hij vraagt eerst naar de onderste helft $\{a_1, a_2, ..., a_{2^k}\}$, vervolgens naar de onderste helft van $\{a_1, a_2, ..., a_{2^k}\}$ als het antwoord op de vorige vraag 'nee' was, of naar de onderste helft van $\{a_{2^k+1}, ..., a_{2^{k+1}}\}$ als het antwoord op de vorige vraag 'ja' was, et cetera.

VRAGEN NAAR DE BEKENDE WEG Hoe kan speler B zijn voorlopige eindantwoord toch nog verder reduceren tot een verzameling van 2^k getallen? Hierboven waren we op een probleem gestuit als het antwoord op de eerste vraag 'ja' was geweest; dan hadden we maar twee inconsistente getallen gehad (namelijk de getallen 9 en 10) in plaats van acht. Kunnen we speler A niet dwingen om hier 'nee' op te zeggen? Dat blijkt min of meer te kunnen! Speler B vraagt gewoon een aantal keren achter elkaar de verzameling $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Als er een keer als antwoord 'nee' komt, dan kan B meteen doorgaan met bovenstaande strategie en vragen naar de onderste helft, et cetera, en op het eind kan hij een getal in zijn voorlopige eindantwoord schrappen. Zolang er echter geen antwoord 'nee' komt, komt er als antwoord 'ja'. Maar na meer dan k keer het antwoord 'ja', moet één van deze antwoorden wel waar zijn (en dan zijn ze dus meteen allemaal waar). Dan zit x dus blijkbaar in $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, wat betekent dat B gewoon direct deze verzameling als definitief eindantwoord kan geven!

MOEILIJK! Het probleem dat we in dit artikel hebben besproken, was opgave 3a van de IMO en is in totaal door zo'n 50 van de 548 deelnemers opgelost, onder anderen door de Nederlanders Guus Berkelmans en Jeroen Winkel. Daarnaast was er nog een onderdeel b (zie www.imo-official.org, waarop ook alle andere opgaven te vinden zijn). Met maar acht volledige oplossingen bleek deze opgave naderhand de allermoeilijkste opgave van de IMO 2012 te zijn. ■

ONTMOET HET NEDERLANDSE IMO-TEAM!

Op zaterdag 6 oktober 2012 staat het Leidse Museum Boerhaave in het teken van wiskunde. Onder de titel *Goochelen met getallen* is er op die dag een vrolijk wiskundeprogramma, dat voor iedereen begrijpelijk is, ook voor wie nog nooit van de stelling van Pythagoras of van π heeft gehoord. De leden van het Nederlandse IMO-team van afgelopen zomer zullen hier als *special guests* optreden. Zij blikken terug op de wedstrijd, die twee gouden medailles en drie bronzen plakken opleverde. Ionica Smeets vertelt om 11:00 uur over alledaagse verschijnselen en legt uit hoe de wiskunde helpt deze te verklaren. En om 15:00 uur sluit Steven Wepster (Universiteit Utrecht) de dag af met een lezing over Simon Stevin (1548-1620), toegepast wiskundige, natuurkundige en ingenieur (zeilwagen), wiens werk is terug te vinden in Museum Boerhaave.

Ook op zondag 7 oktober gebeurt er van alles in Museum Boerhaave. Om 15:00 uur geeft André Kuipers een lezing over zijn ervaringen tijdens de missie naar ruimtestation ISS. Kuipers vertelt aan de hand van prachtige beelden over de raketvlucht en het leven en werk aan boord. Met 193 dagen heeft hij de langste ruimtemissie op zijn naam staan van alle Europese ruimtevaarders.

Op 6 en 7 oktober is Museum Boerhaave gratis toegankelijk. Adres: Lange St. Agnietenstraat 10, Leiden. Voor de lezing van André Kuipers is reserveren verplicht. Meer informatie kun je vinden op www.museumboerhaave.nl.

OPLOSSING 3D-PUZZEL NR. 6

De 3d-puzzel uit het vorige nummer staat bekend als de Slothouber-Graatsma-puzzel. Jan Slothouber (1918-2007) en William Graatsma (1925) zijn twee Nederlandse vormgevers. De kubus in de opgave kun je maken zoals aangegeven in de figuren.

Een iets moeilijker versie is de Conway-puzzel, die bestaat uit dertien blokken van 4 × 2 × 1, een blok van 2 × 2 × 2, een blok van 2 × 2 × 1, en drie blokken van 3 × 1 × 1.

Beide puzzels zijn voorbeelden van *verpakkingsproblemen*: bij beide hoort een kubusvormige doos waar je de stukken in moet passen.

IEDEREEN MET EEN SCHERPE GEEST KAN OP ONTDEKKINGSREIS IN

HET LABYRINT VAN OCCAM

Deze doolhof van breinbrekers is aangelegd door Arnout Jaspers, tot voor kort hoofdredacteur van *Pythagoras* en een van de redacteuren van *De Pythagoras Code*. Het Labyrint bevat nieuwe varianten op klassiekers als de sudoku en het magisch vierkant, maar ook volkomen originele raadsels als het openbreintentamen, de getalpaargenetica en de atoomkerntrisectie.

Abonnees van *Pythagoras* krijgen korting.
Bij inlevering van deze bon bij een boekhandel in Nederland betaalt u slechts € 15,00 in plaats van € 19,95.

Actienummer: 901-97185, geldig van 10-9-2012 t/m 9-12-2012.
Het Labyrint van Occam, Arnout Jaspers, Prometheus/Bert Bakker, ISBN 9789035137646.

PYTHAGORAS OLYMPIADE

■ door Matthijs Coster en Eddie Nijholt

Doe mee met de Pythagoras Olympiade! Elke aflevering bevat vier opgaven. De eerste twee zijn wat eenvoudiger; onder de goede inzendingen van leerlingen uit de klassen 1, 2 en 3 wordt een cadeaubon van Bol.com ter waarde van 20 euro verloot. De laatste twee zijn echte breinbrekers; onder de goede inzendingen van leerlingen (tot en met klas 6) wordt een Bol.com-bon van 20 euro verloot. Per aflevering wordt maximaal één bon per persoon vergeven.
Bovendien kun je je via de breinbrekers plaatsen voor de finale van de Nederlandse Wiskunde Olympiade, mocht het via de voorronden niet lukken: aan het eind van elke jaargang worden enkele leerlingen die regelmatig een correcte oplossing van de breinbrekers hebben ingestuurd, uitgenodigd voor de NWO-finale. Niet-leerlingen kunnen met de Pythagoras Olympiade meedoen voor de eer.

HOE IN TE ZENDEN? Inzendingen ontvangen we bij voorkeur per e-mail (getypt of een scan van een handgeschreven oplossing):
pytholym@gmail.com
Je ontvangt een automatisch antwoord zodra we je bericht hebben ontvangen.

Eventueel kun je je oplossing sturen naar
Pythagoras Olympiade, PWN
p.a. Centrum Wiskunde & Informatica
Postbus 94079
1090 GB Amsterdam

Voorzie het antwoord van een duidelijke toelichting (dat wil zeggen: een berekening of een bewijs). Vermeld je naam en adres; leerlingen moeten ook hun klas en de naam van hun school vermelden.
Je inzending moet bij ons binnen zijn vóór 31 oktober 2012.

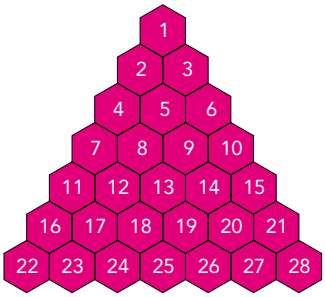
NEDERLANDSE WISKUNDE OLYMPIADE

DE GOEDE INZENDERS VAN APRIL 2012

234: Arie Heikoop, Kampen.
235: P. Dekker, Krimpen aan de Lek; Arie Heikoop, Kampen.
236: P. Dekker, Krimpen aan de Lek; Arie Heikoop, Kampen.
237: Arie Heikoop, Kampen.

OPGAVE 242

Hieronder zie je het speelveld van een smartphone-game. De bedoeling is dat alle 28 velden worden aangedaan. Is het mogelijk om dit te doen door elk veld éénmaal te bezoeken en door te eindigen in het beginveld? Het beginveld mag je zelf kiezen en bij het verplaatsen moet je naar een aangrenzend veld.



OPGAVE 243

De rij van kwadraten begint zo: 1, 4, 9, 25, 36, 49, ...

Bewijs dat elk getal van de volgende rij:

$$49,\ 4489,\ 444889,\ 44448889,\ \ldots,\ \underbrace{444\ldots4}_{n \text{ vieren}}\underbrace{88\ldots8}_{n-1 \text{ achten}}9$$

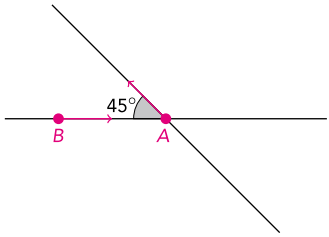
in de rij van kwadraten voorkomt.

OPGAVE 244

In deze opgave bekijken we getallen van de vorm $3n^2 + 3n + 1$ met n een positief geheel getal. Bewijs dat er oneindig veel van die getallen *niet* priem zijn. (Bijvoorbeeld $7 = 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1$ is priem, maar $91 = 3 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5 + 1$ niet, want $91 = 7 \cdot 13$.)

OPGAVE 245

Bas (B) fietst met constante snelheid op een weg die leidt naar een kruispunt. Op dit kruispunt snijden zich twee wegen onder een hoek van 45 graden. Precies wanneer hij op 1 km van dit kruispunt is, ziet hij Aad (A) het kruispunt oversteken over de andere weg (zie figuur). Aad rijdt even snel als Bas. Bas wil Aad roepen, maar wacht daarmee tot hij zo dicht mogelijk bij hem is. Hoever is het voor Bas nog tot het kruispunt op het tijdstip dat hij roept?



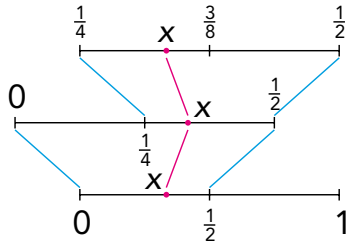
OPLOSSING 234

Het getal x heeft de volgende eigenschap. Het getal x zit tussen 0 en 1. Deel je dit interval in twee helften (dus $[0, \frac{1}{2}]$ en $[\frac{1}{2}, 1]$), dan zit x in de eerste helft. Deel je vervolgens dit interval in twee helften, dan zit x in de tweede helft. Ga je zo door, dan wisselt het getal x steeds tussen de eerste en tweede helft. Welk getal is x?

Oplossing. Eerst zit x in de eerste helft, zie het onderste lijnstuk in het plaatje. Daarna zit x in de tweede helft, zie het tweede lijnstuk waarbij het interval $[0, \frac{1}{2}]$ is uitgerekt tot een interval van lengte 1 waarbij het middelste getal ($\frac{1}{4}$) op zijn plaats blijft. Vervolgens zit x in de eerste helft, zie het bovenste lijnstuk waarbij het interval $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ weer is uitgerekt tot een interval van lengte 1 waarbij het middelste getal ($\frac{3}{8}$) op zijn plaats blijft. Nu moet de ligging van x weer samenvallen met de oorspronkelijke ligging van x. Dus

$$\frac{x-0}{1-0} = \frac{x-\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}$$

ofwel $x = 4x - 1$. Zo vind je $x = \frac{1}{3}$.



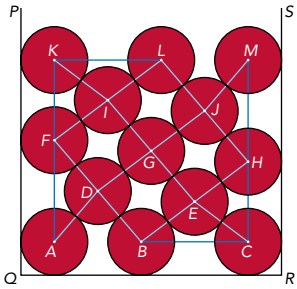
OPLOSSING 235

We hebben een balans en n gewichten van achtereenvolgens 1, 2, 3, ..., n gram. Alle gewichten worden op de balans gelegd; een aantal op de linkerschaal en een aantal op de rechterschaal. Voor welke waarden van n kunnen de gewichten zó worden neergelegd, dat de balans in evenwicht is?

Oplossing. Een minimale voorwaarde om de gewichten in balans te krijgen is dat de som van de gewichten even is. De som van de gewichten is $1 + 2 + \cdots + n = n(n + 1)/2$. Dit is uitsluitend even als n of $n + 1$ een viervoud is, ofwel als n een viervoud of een viervoud plus 3 is. Nu moeten we nog aantonen dat in deze gevallen de gewichten ook in de balans geplaatst kunnen worden. Voor $n = 3$ kunnen aan de ene kant de gewichten 1 en 2 worden geplaatst en aan de andere kant het gewicht 3. Voor $n = 4$ plaatsen we de gewichten 2 en 3 aan de ene kant en 1 en 4 aan de andere kant. Je kunt altijd 4 opeenvolgende gewichten in balans plaatsen door de lichtste en zwaarste gewichten aan de ene kant en de overige twee aan de andere kant te plaatsen. Voor de viervouden plus 3: plaats eerste de drie lichtste gewichten.

OPLOSSING 236

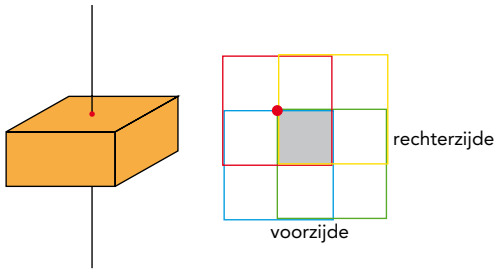
Er kunnen net geen vier flessen wijn naast elkaar liggen op de bodem van het rechthoekige wijnrek *PQRS*. Er liggen er drie, waarbij de flessen *A* en *C* tegen de zijkanten aanliggen. Fles *B* wordt op haar plaats gehouden door de flessen *D* en *E*. We kunnen er dan weer een rij van drie op leggen, *F*, *G* en *H*, waarbij *F* en *H* rusten tegen de zijkanten van het rek. Dan volgt een nieuwe laag met twee flessen *I* en *J*. Merk op dat de drie rijen (*D*, *E*), (*F*, *G*, *H*) en (*I*, *J*) hellen. Die helling hangt af van de plaatsing van de flessen in de onderste laag. Bewijs dat de volgende rij wijnflessen die je legt, (*K*, *L*, *M*), horizontaal ligt (dus niet helt).



Oplossing. In de figuur zijn alle lichtblauwe lijnstukken gelijk aan de afstand tussen twee middel-punten van twee wijnflessen. Driehoek *BCH* is rechthoekig en *E* is het midden van *BH*. Daarom is *BE* evenwijdig aan *EH*. Evenzo is *BD* evenwijdig aan *DF*. Derhalve vormt *BHLF* een ruit met als middelpunt *G*. Driehoek *KFL* is congruent met driehoek *CHB*, en driehoek *HMJ* met driehoek *FAD*. De figuur is puntsymmetrisch t.o.v. *G*. Aangezien *A*, *B* en *C* op één lijn liggen, volgt dat ook *M*, *L* en *K* op één lijn liggen.

OPLOSSING 237

Een massieve kubus van $20 \times 20 \times 20$ is opgebouwd uit 2000 blokjes met afmetingen $2 \times 2 \times 1$. Bewijs dat je een rechte lijn kunt vinden die loodrecht staat op een van de zijvlakken, door het binnenste van de kubus gaat, en toch geen enkel van de 2000 blokjes doorboort.



Oplossing. Het is duidelijk dat we de betreffende lijn moeten zoeken onder de inwendige lijnen die de hoekpunten van de eenheidskubusjes verbinden. De kubus kan van drie verschillende kanten benaderd worden en er zijn per richting $19 \cdot 19$ plaatsen waar de lijn de kubus zou kunnen doorboren. In totaal dus $19 \cdot 19 \cdot 3 = 1083$ plaatsen. Er is maar één manier waarop een dergelijke lijn een blokje kan doorboren: dwars door het midden van het blokje, zoals in het linkerplaatje. Dus 1083 is het minimale aantal blokjes, benodigd om elke lijn te blokkeren.

Als een lijn een blokje doorboort, doorboort het altijd een *even* aantal blokjes. Om dat in te zien, bekijken we eerst de lijnen die van boven naar beneden lopen. De enige obstakels voor deze lijnen zijn blokjes die plat liggen, dus zoals in het linkerplaatje. De lijn (binnen de kubus) op een hoek doorboort een even aantal blokjes. Immers: een hoek van de kubus is 20 hoog en bestaat uit n rechtopstaande (niet-doorboorde) blokjes en uit $20 - 2n$ platte blokjes. Het aantal platte blokjes is dus even.

Waarom doorboort nu elke lijn een even aantal blokjes? Dat bewijzen we *uit het ongerijmde*:

stel dat er lijnen zijn die een *oneven* aantal blokjes doorboren. Beschouw de lijn in de voorste en meest rechtse positie. In het rechterplaatje is deze lijn met de rode stip weergegeven, met wat blokjes in zijn omgeving.

Deze figuur is correct, want de rode stip staat niet op een hoekpunt. Vanwege de aanname doorsnijdt deze lijn een oneven aantal blokjes zoals het rode vierkant. Omdat het totaal aantal blokjes onder het grijze vierkant even (20) is, moet minstens één van de andere gekleurde vierkanten ook in een oneven aantal voorkomen (de rechtopstaande blokjes nemen weer een even aantal plaatsen in beslag). Dus er is een lijn die een oneven aantal blokjes doorboort, die méér naar voren of méér naar rechts ligt. Dat kan niet, want de lijn die we beschouwen, staat al het meest naar voren en het meest rechts!

Stel nu dat elke lijn een obstakel heeft. Dan heeft elke lijn minstens twee obstakels: dit zijn $2 \cdot 1083 = 2166$ blokjes. Echter: het blok bestaat slechts uit 2000 blokjes. Daarom moet ten minste één lijn geen obstakels ondervinden.

PYTHAGORAS

52ste jaargang nummer 1
september 2012
ISSN 0033 4766

***Pythagoras* stelt zich ten doel jongeren kennis te laten maken met de leuke en uitdagende kanten van wiskunde. *Pythagoras* richt zich tot leerlingen van vwo en havo en alle anderen die jong van geest zijn.**

Internet www.pythagoras.nu

Hoofdredacteur Derk Pik

Eindredacteur Alex van den Brandhof

Redactie Matthijs Coster, Jeanine Daems, Jan Guichelaar, Klaas Pieter Hart, Paul Levrie, Marc Seijlhouwer

Vormgeving Grafisch Team Digipage BV, Leidschendam

Druk Drukkerij Ten Brink, Meppel

Uitgever Koninklijk Wiskundig Genootschap

Verantwoordelijk uitgever Chris Zaal

Lezersreacties en kopij
Bij voorkeur per e-mail; lezersreacties naar Jan Guichelaar, jan@pythagoras.nu en kopij naar Derk Pik, derk@pythagoras.nu. Eventueel per post naar Jan Guichelaar, Pedro de Medinalaan 162, 1086 XR Amsterdam.

Abonnementen, bestellingen en mutaties
Drukkerij Ten Brink
Abonnementenadministratie
Postbus 41
7940 AA Meppel
Telefoon: 088 226 52 58
E-mail:
abonnementen@pythagoras.nu

Abonnementsprijs
(6 nummers per jaargang)
€ 26,00 (Nederland),
€ 29,00 (buitenland),
€ 17,00 (groepsabonnement NL),
€ 18,00 (groepsabonnement buitenland),
€ 26,00 (geschenkabonnement NL),
€ 29,00 (geschenkabonnement buitenland).
Een geschenkabonnement stopt automatisch na één jaar. Overige abonnemten gelden tot wederopzegging. Zie www.pythagoras.nu voor verdere toelichtingen.

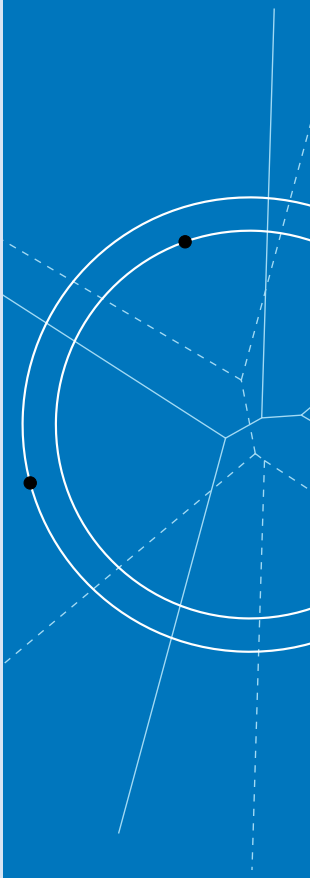
Aan dit nummer werkten mee
Sven Aerts (s.aerts@het4egymnasium.nl), Alex van den Brandhof (alex@pythagoras.nu), Sam van den Brink, Matthijs Coster (matthijs@pythagoras.nu), Jeanine Daems (jeanine@pythagoras.nu), Jan Guichelaar (jan@pythagoras.nu), Klaas Pieter Hart (kp@pythagoras.nu), Arnout Jaspers (arnoutjaspers@gmail.com), Marc van Kreveld (m.j.vankreveld@uu.nl), Paul Levrie (paul@pythagoras.nu), Willem Melching (willem.melching@gmail.com), Eddie Nijholt (eddie@pythagoras.nu), Derk Pik (derk@pythagoras.nu), Quintijn Puite (g.w.q.puite@tue.nl), Merlijn Staps (merlijnstaps@hotmail.com).

Pythagoras wordt mede mogelijk gemaakt door de bijdragen van de onderstaande instituten en instellingen.

SCHEEF

Een tor bewoonde al een poosje
het hulsje van een lucifersdoosje.
Totdat een koe een poot verzette
en zo de torrenwoning plette.
Het hele huisje uit het lood.
De kleine tor, nog net niet dood,
bewoont nu ietwat uit zijn hum
een parallellepipedum.

Marjolein Kool



Uit: Drs. P & Marjolein Kool, *Wis- en natuurlyriek*, p. 112
(Nijgh & Van Ditmar, 2000)