PYTHAGORAS

WISKUNDETIJDSCHRIFT VOOR JONGEREN

52ste JAARGANG - NUMMER 5 - APRIL 2013

NIEUWSGIERIG?

Afgelopen jaar is de oprichter van *Pythagoras*, Hans de Rijk (alias Bruno Ernst), op de voet gevolgd door regisseurs Sopa Bouman en Emily de Klerk voor hun documentaire *Een leven lang nieuwsgierig*. De film vormt een intiem portret van deze eigenzinnige, humoristische duizendpoot. Gedurende de laatste draaidagen zijn er diverse interviews bij Hans thuis opgenomen en brachten Sopa en Emily samen met hem en zijn vrouw Lenie een bezoek aan de grote Eschertentoonstelling in Paleis Soestdijk. Hier hing de prent waar Hans tijdens zijn kloostertijd uren naar zat te staren en die hem uiteindelijk naar Escher zelf heeft geleid.

Op 12 maart vond in Leiden de allerlaatste draaidag plaats. Op Hans de Rijks initiatief is een eerste replica van de buisloze Huygenstelescoop gebouwd. Sopa en Emily filmden hem toen hij de telescoop dan eindelijk voor het eerst in het écht zag. Op het moment dat hij – in het bijzijn van onder meer astrofysicus Vincent Icke, enkele sponsors en familie – op het zonovergoten terrein van de Oude Sterrenwacht voorzichtig door de kijker tuurde, leek hij weer heel eventjes op het nieuwsgierige jongetje van tien die met behulp van een tube tandpasta en een brillenlens zijn eerste sterrenkijkertje in elkaar knutselde!

De datum van de première van *Een leven lang nieuwsgierig* staat bij het ter perse gaan van dit nummer nog niet vast, maar zal naar alle waarschijnlijkheid in juni plaatsvinden. Volg daarom de laatste ontwikkelingen via facebook.com/eenlevenlangnieuwsgierig.

Links: een fragment uit de documentaire waarin Hans de Rijk in een oude *Pythagoras* (jaargang 1, nr. 2) bladert.

Lees op pagina 13 het artikel 'Het raadsel van de mercatorprojectie' van Hans de Rijk.

INHOUD

4

HET PLANETARIUM

In de tweede aflevering van onze serie over het computertekenprogramma Geogebra maken we modellen van planeetbanen.

22

EGYPTISCHE BREUKEN

2013 is het honderdste geboortejaar van de legendarische wiskundige Paul Erdős. Daarom besteedt *Pythagoras* dit jaar veel aandacht aan de wiskunde waarmee hij zich bezighield. In de derde aflevering bespreken we een vermoeden over stambreuken: breuken waarvan de tellers gelijk zijn aan 1.

13

HET RAADSEL VAN DE MERCATORPROJECTIE

Gerardus Mercator werd beroemd vanwege zijn uitvinding van een nieuwe kaartprojectie, die zijn naam draagt: de *mercatorprojectie*.

EN VERDER

2 Kleine nootjes
9 Tegels van lezers
10 Journaal
12 Vrolijke wiskunde
20 Regelmatige zevenhoeken
26 Een extreem handig principe
29 Priempropper
30 Pythagoras Olympiade
33 Oplossingen Regelmatige zevenhoeken

Omslagillustratie: Alex van den Brandhof

NIVEAUBALKJES Pagina's met één of meer zwarte balkjes (onder de paginanummering) geven de moeilijkheidsgraad aan. Eén balkje: lastig. Twee balkjes: vereist wiskundekennis uit de vijfde of zesde klas. Drie balkjes: net iets moeilijker.

KLEINE NOOTJES

■ door Jan Guichelaar

EVENWICHTEN

Je hebt vier even grote blokjes, met gewichten 1, 2, 3 en 4. Op een balans kun je deze vier blokjes precies naast elkaar plaatsen. Als je dat doet, is er nooit evenwicht. Als je blokjes ook op elkaar mag plaatsen, kan er wel evenwicht ontstaan. Hiernaast zie je hoe dit bijvoorbeeld kan. Welke evenwichten kun je nog meer maken? Je hoeft niet alle vier de blokjes te plaatsen. Blokjes 'halverwege' plaatsen mag niet.

GETALLEN KEREN

Draai een getal *abc* om, dan krijg je *cba*. Kun je getallen bedenken waarvoor geldt: $abc = c \times ba$?

Bron: Nico van Wageningen

$$abc = c \times ba$$

CENTEN SPRINGEN

Leg zes centen op een rij. Een zet is: pak de bovenste munt van een stapeltje, spring over twee munten heen en leg hem op het eerstvolgende (niet-lege) stapeltje. Een munt kan dus over twee aparte munten springen of over één stapeltje van twee munten. Zorg dat je na een aantal zetten drie stapeltjes van twee hebt.

Kleine nootjes zijn eenvoudige opgaven die weinig of geen wiskundige voorkennis vereisen om opgelost te kunnen worden. De antwoorden vind je in het volgende nummer van *Pythagoras*.

1 TOT EN MET 9 IS 10

Maak onderstaande gelijkheid kloppend, door in elk vakje een van de bewerkingen +, –, × of : te zetten.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8 ☐ 9 = 10

VIERKANT SPLITSEN

Met 25 vierkantjes kun je precies één groot vierkant leggen. De omtrek daarvan is 4 × 5 = 20. Kun je met de 25 vierkantjes ook twee rechthoeken leggen die beide omtrek 20 hebben? Je moet alle vierkantjes gebruiken.
Hoeveel vierkantjes heb je nodig waarmee je een groot vierkant kunt leggen, en ook drie rechthoeken die alle drie dezelfde omtrek hebben als het grote vierkant?

OPLOSSINGEN KLEINE NOOTJES NR. 4

Puzzelstukken. Vijf stukken is het minimum:

Romeinse sommen. 1 = III/III, 2 = VI/III, 3 = IV/I – I, 4 = V × I – I, 5 = VII – II, 6 = II × III, 7 = VIII – I, 8 = XI – III, 9 = X × I – I, 10 = L/V/I, 11 = V + VI, 12 = XIII – I, 13 = X + III, 14 = X + IV, 15 = III × V, 16 = X + VI, 17 = LI/III, 18 = XX – II, 19 = XIX/1, 20 = IV × V, 21 = XX + 1, 22 = II × XI, 23 = XXIII, 24 = L/II – 1, 25 = L/II/I, 26 = ?

Passerende treinen. Als de korte trein van links komt, kunnen de machinisten elkaar passeren tussen de 25 meter en 50 meter van het linkereinde van het dubbele spoor.

Vermenigvuldiging. 44 × 77 = 3388.

Balansgokje. Noem de drie gewichtjes van 1 gram A, B en C, en het gewichtje van 3 gram D. Als je twee gewichtjes pakt, zijn er zes mogelijkheden: A-B, A-C, A-D, B-C, B-D, C-D. Bij drie ervan is de balans in evenwicht: A-B, A-C en B-C (je legt uiteraard op elke schaal één gewichtje). De kans dat je het spelletje wint, is dus 3/6 = 1/2. Als je alle vier gewichtjes pakt, moet je A, B en C samen op een schaal zien te krijgen en D op de andere schaal. De kans dat dit goed gaat, is 1/4 (van de vier mogelijkheden ABC-D, ABD-C, ACD-B, BCD-A is alleen de eerste goed). Voor je grootste winstkans moet je dus kiezen voor twee gewichtjes.

In *Pythagoras* laten we in een serie artikelen allerlei aspecten van het computertekenprogramma *Geogebra* zien. In deze tweede aflevering maken we modellen van planeetbanen. We maken daarbij kennis met bewegende objecten. Eerst construeren we de baan die de maan maakt als zij om de aarde draait, terwijl de aarde om de zon beweegt. Dit model zal niet op schaal zijn. Bij het tweede model, het planetarium, zijn de afstanden wel op schaal.

■ door Derk Pik

HET PLANETARIUM

We beginnen met het tekenen van een grote cirkel. Langs deze cirkel zal straks de aarde bewegen. Start Geogebra op, en verwijder het algebravenster en het assenstelsel. Klik op de knop 'Cirkel door twee punten' en teken een grote cirkel. Er verschijnt een cirkel met middelpunt A door het punt B. Vervang de naam van het punt A door 'Zon' en maak er meteen een mooi en groot oranje punt van.
Trek ook een horizontale lijn van de zon naar B (zie figuur 1).

We willen de aarde langs de cirkel laten bewegen. Eerst hebben we een hoek α nodig die alle waarden van 0 tot 360° kan aannemen. Om dit te bereiken klikken we op de knop bovenaan, de tweede van rechts (zie figuur 2). Plaats de schuifknop in het tekenveld, door daar ergens te klikken. Er verschijnt een venster waar we allerlei parameters in kunnen vullen.

We klikken links 'Hoek' aan en als het goed is, staan alle velden meteen goed ingevuld (zie figuur 3). De hoek α kan variëren van 0 tot en met 360°, met stappen van 1°. Druk daarna op 'Toepassen'. Er verschijnt een schuifknop in beeld: je kunt het zwarte bolletje aanklikken en het bewegen.

Nu gaan we de variabele α gebruiken. We tekenen een hoek. Ga naar het menu van de knop bovenaan, de vijfde van rechts: 'Hoek met gegeven grootte' (zie figuur 4). Klik achtereenvolgens het punt B en de zon aan. Er verschijnt een menu. Vul als hoek α in; dit kan door op het vakje rechts met speciale symbolen te klikken. Klik op 'OK'. Er verschijnt een tweede punt op de cirkel; geef dit de naam 'Aarde'.

We kunnen de aarde nu al om de zon laten draaien! Dit gaat als volgt. Klik op het pijltje linksboven en vervolgens op de schuifknop. Selecteer 'Eigenschappen'. Het bekende venster verschijnt (zie figuur 5). Onder 'Schuifknop' selecteer je rechtsonder 'Toenemen', en onder 'Basis' (niet afgebeeld) selecteer je 'Animatie aan'. De aarde beweegt om de zon (zie figuur 6). Linksonder in het tekenblad kan je de animatie uit- en aanzetten. In het venster dat we net zagen, kunnen we nog allerlei dingen aan de schuifknop veranderen, zoals het af-

Figuur 1

Figuur 2

Figuur 3

Figuur 4

Figuur 5

vinken van 'Vast'. Nu is de schuifknop over de gehele tekening te verplaatsen. De breedte van de knop stel je in door het aantal pixels in te vullen. De animatie kan ook van rechts naar links of heen en weer gaan (oscilleren).

HET TOEVOEGEN VAN DE MAAN De omlooptijd van de aarde om de zon is 365,26 dagen. Ten opzichte van de sterren doet de maan er 27,5 dagen over om één rotatie om de aarde te maken. Als de aarde één keer rond de zon is gedraaid, moet de maan 13,3 keer om de aarde zijn gedraaid. Deze gegevens zijn slechts benaderingen: de banen zijn niet cirkelvormig en bovendien is er in werkelijkheid ook nog sprake van driedimensionale bewegingen.

We gaan de baan met Geogebra in beeld brengen. We doen dit niet op schaal, omdat de afstand van de zon naar de aarde (150 miljoen kilometer) geweldig veel groter is dan de afstand van de aarde naar de maan (384 duizend kilometer).

Teken een loodlijn (met de loodlijnknop) op de lijn van de zon naar B en vervolgens een loodlijn vanuit de aarde op de vorige loodlijn. Noem het snijpunt van deze twee lijnen D (zie figuur 7). Maak nog een schuifknop, met hoek γ. Bij 'Eigen-

Figuur 6

Figuur 7

schappen' zet je de animatiesnelheid 13.3 (het programma schrijft kommagetallen met een punt). Zet de animatie aan: je kunt de animaties vervolgens in de linkeronderhoek van het tekenveld stilzetten.

Teken een cirkeltje om de aarde, teken een hoek met grootte γ door eerst D aan te klikken en vervolgens het punt 'Aarde'. Het snijpunt met de cirkel noem je 'Maan'.

Als je alles goed hebt gedaan, kan je de animatie weer aanzetten: we zien de aarde om de zon draaien en de maan ongeveer dertien keer zo snel om de zon. We kunnen de figuur mooier maken door de aarde en de maan wat te vergroten en door alle hulplijnen, -hoeken en -cirkels onzichtbaar te maken. Je ziet dan dus nog maar drie punten: de zon, de aarde en de maan.

Figuur 8

Figuur 9

Als je wilt zien wat de baan van de maan is, klik je op de maan en zet je in het menu het 'Spoor' aan (zie figuur 8). Als je de simulatie lang laat lopen, zal je zien dat de maan toch nooit precies op zijn oorspronkelijke punt terugkeert.

PLANETEN OM DE ZON Elke planeet in ons zonnestelsel heeft een andere omlooptijd. In de onderstaande tabel staat de omlooptijd en de straal van de baan van verschillende planeten. Deze straal is gegeven in astronomische eenheden. Eén astronomische eenheid (1 AU) is de afstand van de aarde tot de zon.

planeet	afstand tot de zon in AU	omlooptijd in jaren
Mercurius	0.39	0.24
Venus	0.72	0.62
Aarde	1.00	1.00
Mars	1.52	1.88
Jupiter	5.20	11.86

Als we ons planetarium op schaal willen maken, is de straal van de cirkelbaan van Jupiter meer dan vijf keer zo groot als de straal van de aarde, en de straal van de baan van Mercurius 0.4 keer de straal van de aarde. Je kunt er dus ook voor kiezen om het planetarium niet op schaal te maken. Wij zullen dat wel doen.

Het is leuk wanneer we de planeten op realistische hoeken in het zonnestelsel plaatsen. Op 24 april 2013 zijn de onderlinge hoeken van de planeten met de zon als volgt:

planeet	hoek
Mercurius	0°
Venus	85°
Aarde	250°
Mars	65°
Jupiter	120°

Ons gezichtspunt is hierbij recht boven de zon. Het woord 'boven' betekent hier: aan dezelfde kant als de Noordpool van de aarde. De hoeken in de tabel zijn de hoeken ten opzichte van Mercurius, op deze dag, en zijn natuurlijk ruwe benaderingen. We hebben ze van de website van de NASA gehaald.

We maken ons planetarium zo, dat we vanuit de begintoestand zowel in de toekomst als in het verleden kunnen reizen. Het eindresultaat ziet er dan uit als in figuur 9. Deze situatie is ongeveer hoe het eruitziet op 24 april 2013.

Rechts zie je schuifknoppen waarmee we de beginstand van de planeten kunnen instellen. Onderaan zie je een lange schuifknop die de tijd in jaren voorstelt. De knop is zo gemaakt dat de tijd van 10 jaar in het verleden tot 10 jaar in de toekomst loopt. Als je de animatie aanzet, zullen alle planeten, elk met zijn eigen snelheid, om de zon heen draaien.

DE CONSTRUCTIE Begin met een leeg scherm, zet het ruitjespapier aan en ook het algebravenster. Eerst maken we de tijdas. Klik op schuifknop, plaats de knop onder op het ruitjespapier en geef er de naam *tijd* aan. We willen dat de tijd langzaam verloopt van –10 naar 10 jaren. Voer de gegevens in zoals in figuur 10 is aangegeven.

Figuur 10

Figuur 12

Figuur 11

Figuur 13

Klik op 'Schuifknop'. Haal het vinkje weg voor 'Vast'. Nu kan je de schuifknop overal naar toe verplaatsen. Kies als breedte 1000 pixels, zodat de schuifknop flink lang wordt en je hem met veel precisie kan bedienen. Klik op 'Animatie', voer de animatiesnelheid 0.01 in en zet de herhaling op 'Toenemen'. Klik op 'Toepassen'. Zet de schuifknop op de gewenste plaats.

Nu voeren we een groot aantal gegevens in bij 'Invoer' in het commandovenster onderaan. We beginnen met de afstand van de planeten tot de zon (zie figuur 11). De naam 'rMercurius' staat voor de straal van de cirkel waar Mercurius langs zal lopen. We voeren ook 'TMercurius' in. De 'T' staat voor omlooptijd. Alle constantes staan nu met een goede naam in het algebravenster (zie figuur 12).

We plaatsen de zon in het midden van het scherm. Om te laten zien hoe je het planetarium maakt, bespreken we alle bewerkingen voor de planeet Mars. De andere planeten kan je dan net zo doen.

Kies in het menu de knop 'Cirkel met middelpunt en straal' (zie figuur 13) en teken een cirkel met als middelpunt de zon en straal 'rMars'. Teken ook een horizontale lijn. Hierbij verschijnt het hulppunt Y. Deze lijn is alleen maar een hulplijn ten opzichte waarvan we de beginhoeken van de planeten zullen meten. Het resultaat zie je in figuur 14.

Nu maken we een schuifknop met de beginpositie van Mars. In april 2013 is die ongeveer 65° tegen de klok ten opzichte van Mercurius. Mercurius zetten we straks op 0°.

We geven de schuifknop de naam 'BPMars', de

Figuur 14

Figuur 15

Figuur 16

beginpositie van Mars. We zetten de schuifknop op 'Hoek' en nemen stapgrootte 1°. We kunnen de lengte van de schuifknop bijvoorbeeld 360 pixels nemen (zie figuur 15).

Vervolgens tekenen we deze hoek van 65° door 'Hoek met gegeven grootte' aan te klikken en in het tekenvenster eerst het punt Y aan te klikken, dan de zon en ten slotte, in het venster dat verschijnt, als hoek 'BPMars' in te voeren. Er verschijnt een nieuw punt, Y'. We verbinden Y' met de zon. Het resultaat zie je in figuur 16.

Vanaf het lijnstuk dat Y' met de zon verbindt, meten we de hoek af die Mars maakt, nadat de hoeveelheid tijd is verstreken aangegeven door de onderste tijdbalk. Klik weer op 'Hoek met gegeven grootte'. We voeren in: '360° * tijd / TMars' (zie figuur 17). Denk goed om het gradenteken, dat je krijgt door op de α rechts in het venster te klikken.

Er verschijnt een punt Y''. We verbinden dit door middel van een lijnstuk met de zon. Op het snijpunt van dit lijnstuk en de cirkelbaan plaatsen we de planeet Mars (zie figuur 18).

Tot slot openen we het eigenschappenvenster, maken we alle constructielijnen onzichtbaar, maken we de zon groot en oranje, en maken we Mars iets minder groot en rood (zie figuur 19). We selecteren (met de pijlknop) de schuifknop 'tijd' en zetten de animatie aan. Als het goed is draait Mars nu om de zon.

Figuur 17

Figuur 18

Maak de constructie af voor de andere planeten. Het is leuk om te kijken wanneer alle planeten aan een kant van de zon staan of wanneer ze ongeveer op een lijn staan. Als je de planeten Saturnus, Uranus en Neptunus nog zou willen toevoegen, kan je eigenlijk niet meer op schaal werken. In dat geval is een planetarium, waar de cirkels steeds even ver van elkaar afliggen, een goede mogelijkheid. Het planetarium fungeert dan nog steeds als een klok. Ook is het leuk, maar wel erg ambitieus, om bij verschillende planeten er ook nog de manen omheen te zetten: in het bijzonder de maan van de aarde en de vier grote manen van Jupiter. Als je ze de goede plekken geeft, door in een astronomisch jaarboek te kijken, kan je zelfs voorspellen welke posities de manen van Jupiter ten opzichte van de aarde zullen innemen. Met een sterrenkijker kan je controleren of je het goed hebt gedaan.

Wij zijn erg benieuwd naar je constructies: stuur ze op! ■

Figuur 19

TEGELS VAN LEZERS

■ door Derk Pik

Sinds het verschijnen van de eerste aflevering van onze Geogebraserie, in januari, zijn er heel wat lezers met Geogebra bezig geweest. We kregen allerlei inzendingen. Twee sprongen er echt uit.

Figuur 1

Figuur 2

Art Waeterschoot (H. Pius X-instituut, Antwerpen-Berchem) maakte zestien unieke zeshoekige tegels (zie figuur 1), waarmee eindeloos veel regelmatige, maar ook interessante onregelmatige betegelingen te maken zijn. Wij hebben met zijn macro's al veel geëxperimenteerd. In figuur 2 zie je een van de mogelijke betegelingen. Wat bijzonder is aan deze betegeling en wat je niet zomaar voor elkaar hebt, is dat de kleuren steeds mooi aansluiten. Dit geeft ook aanleiding tot de volgende vraag: hoeveel mogelijkheden zijn er als je deze spelregel hanteert voor drie tegels? Of voor zeven?

Kyra Brakkee (Vrije School, Den Haag) maakte onder andere een verrassend gecompliceerde betegeling met twee eenvoudige tegels die elkaars spiegelbeeld zijn (zie figuur 3). Het overlappen van de verschillende kleuren geeft een plezierig patroon. Op soortgelijke wijze heeft ze de betegeling gemaakt die je in figuur 4 ziet. ■

Figuur 3

Figuur 4

JOURNAAL

■ door Alex van den Brandhof

Nieuw priemrecord: $2^{57.885.161} - 1$

Een paar jaar was het stil rond GIMPS, het online-vrijwilligerscollectief waarbij iedereen kan meezoeken naar reuzenpriemgetallen. Maar in februari was er weer nieuws: een computer van Curtis Cooper van de University of Central Missouri in Warrensburg in de VS vond een nieuw recordgetal. Dat getal, $2^{57.885.161} - 1$, heeft volledig uitgeschreven 17.425.170 cijfers.

Op deze hoogte in de getallenladder zijn maar weinig priemgetallen bekend. De tien grootste priemgetallen die we op dit moment kennen, zijn allemaal van de vorm $2^n - 1$, de zogeheten *Mersennepriemgetallen*, genoemd naar de Franse monnik Marin Mersenne uit de eerste helft van de zeventiende eeuw, die deze getallen bestudeerde.

Dat er geen andersoortige priemgetallen van een dergelijke omvang bekend zijn, betekent niet dat die er niet zijn. Ze zijn gewoonweg niet simpel op te sporen. Ook de snelste computer zou veel te lang moeten rekenen om te checken of een willekeurig getal van miljoenen cijfers priem is. De Mersennegetallen vormen een uitzondering: de 'Lucas-Lehmer-test' is een zoekmethode waarmee relatief eenvoudig kan worden vastgesteld of een Mersennegetal al dan niet priem is.

GIMPS staat voor *Great Internet Mersenne Prime Search*, een project van informaticus George Woltman. Nuttig zijn de recordpriemgetallen vooralsnog niet. Priemgetallen worden weliswaar gebruikt bij de beveiliging van online betaalverkeer, maar deze priemgetallen hebben 'slechts' enkele honderden cijfers. Maar een halve eeuw geleden had niemand deze toepassing van priemgetallen voorzien, en wie weet krijgen de recordpriemgetallen van dit moment ook ooit een toepassing. Woltman gaat het echter louter om de sport. 'Het is als de eerste beklimming van Mount Everest. Je komt ergens waar nog nooit iemand geweest is,' zei hij tegen de wetenschapswebsite LiveScience.

Cooper draaide de GIMPS-software op een duizendtal computers van de universiteit. Het duurde 39 dagen om te checken of $2^{57.885.161} - 1$ inderdaad een priemgetal was. Cooper krijgt voor zijn vondst een prijs van drieduizend dollar. Er ligt een beloning van 150.000 dollar te wachten voor het eerste priemgetal van honderd miljoen cijfers.

Bronnen:
www.mersenne.org / *NRC Handelsblad* 7 februari 2013

Wiskundige oplossing voor het opvouwen van een werptent

Kampeerliefhebbers opgelet: Belgische onderzoekers hebben onderzocht hoe je een werptent op de efficiëntste manier kunt opvouwen.

Het gemak van een werptent – je gooit 'm in de lucht en hij staat – kent een keerzijde: het opvouwen vraagt nogal wat denkwerk. Een werptent bevat een flexibele ring in 'overkromming', wat betekent dat de ring niet plat op de grond kan blijven, maar opkrult in een bepaalde vorm – een tent bijvoorbeeld. Materiaalwetenschappers van de Université Catholique de Louvain hebben het concept 'overkromming' onderzocht. Nadat ze een boel 'overgekromde' ringen van diverse materialen hadden bestudeerd, slaagden ze erin een hele familie van ringen wiskundig te modelleren. Met dit model konden ze een theorie ontwikkelen die de efficiëntste manier beschrijft om een werptent op te vouwen, en die verschilt van die in de handleiding. De illustratie geeft een beeld van de methode, maar voor wie dit plaatje te abstract is geeft Alain Jonas, leider van het onderzoek, instructies in een filmpje dat je op YouTube kunt bekijken: http://goo.gl/FRXDX.

Bron: *EOS/Scientific American* (maart 2013)

Leergedrag van zangvogels

Net zoals kinderen leren praten, leren jonge zangvogels zingen door de kunst af te kijken bij de volwassenen. Grote fouten herstellen de zangvogels al vroeg, en hoe ouder ze worden, hoe beter ze in staat zijn om kleine foutjes te herstellen. Dit gedrag hebben onderzoekers uit Californië in een wiskundig model weten te plaatsen. Deel van het onderzoek bestond eruit de vogel in een microfoon te laten zingen, en de opname terug te laten horen nadat er met geluidssoftware foutjes in waren aangebracht. De onderzoekers hopen dat hun model kan worden toegepast op menselijke gedragstherapieën. En meer in het algemeen zou het onderzoek kunnen leiden tot een beter begrip van het functioneren van ons brein.

Bron: Emory University, Research News

Eindeloos variëren met Juliaverzamelingen

Veel plaatjes kunnen worden omgezet in zogeheten *Juliaverzamelingen*. Dit is bewezen door Kathryn Lindsey, een promovendus aan Cornell University.

Kies een functie, bijvoorbeeld $f(z) = z^2$, stop daar een getal in, stop het resultaat opnieuw in de functie, en nog eens, en nog eens. Begin je met het getal $z = 2$, dan krijg je de rij 2, 4, 16, 256, ...: de getallen worden willekeurig groot. Hetzelfde geldt voor elk ander getal dat groter is dan 1. Begin je met $z = 1/3$, dan naderen de getallen naar nul: 1/9, 1/81, 1/6561, ..., net als bij elk ander (positief) getal kleiner dan 1. Het getal 1 ligt juist op de grens. Het zijn die grensgetallen die de vorm van een Juliaverzameling bepalen.

Behalve reële getallen kun je ook *complexe getallen* in de functie f stoppen: getallen van de vorm $z = x + iy$, waarbij i per definitie de oplossing is van de vergelijking $x^2 = -1$. In dat geval zijn er oneindig veel 'grensgetallen', die je kunt tekenen in het complexe vlak. De figuur die zo ontstaat, heet de *Juliaverzameling* (genoemd naar de Fransman Gaston Julia) van de functie f. Een Juliaverzameling kan diverse vormen aannemen: bijvoorbeeld iets eenvoudigs als een cirkel, of een serie losse punten, of een ingewikkelde *fractal* (een figuur met een zichzelf herhalende structuur).

Figuur 1

Figuur 2

De functie f moet een *polynoom* zijn, dat wil zeggen, van de vorm $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$; het getal n (de grootste exponent) heet de *graad* van het polynoom. Beroemd is de Juliaverzameling van de functie $f(z) = z^2 + 1 - \varphi$ waarbij φ het *gulden-snede-getal* is: $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2$ (zie figuur 1).

Kathryn Lindsey deed een verrassende ontdekking: elke tweedimensionale figuur waarvan de omtrek bestaat uit een gesloten kromme die zichzelf niet doorsnijdt, kan met willekeurige precisie worden benaderd door een Juliaverzameling. Zelf heeft ze een foto van haar kat omgetoverd tot Juliaverzameling (zie figuur 2). Ze had daarvoor een polynoom van graad 301 nodig.

Bron: K. Lindsey & W. Thurston, 'Shapes of Polynomial Julia Sets'

Abelprijs 2013 voor Belg Pierre Deligne

Dit jaar heeft Pierre Deligne de prestigieuze Abelprijs, toegekend door de Noorse Academie van Wetenschappen, in de wacht gesleept.

De Belgische wiskundige, die werkzaam is aan het Institute for Advanced Study te Princeton (VS), krijgt de prijs vanwege zijn 'baanbrekende bijdragen aan de algebraïsche meetkunde en de impact daarvan op de getaltheorie, de representatietheorie en aanverwante gebieden'.

Een van Deligne's bekendste resultaten is zijn spectaculaire oplossing van het laatste – en diepste – van de vier *Weilvermoedens*: het analogon van de Riemannhypothese voor zogeheten 'algebraïsche variëteiten over een eindig lichaam'. Weil had voorzien dat het bewijs van zijn vermoedens methoden uit de algebraïsche topologie zou vereisen. Alexandre Grothendieck ontwikkelde de – abstracte – theorie van ℓ-adische cohomologie. Deze theorie bleek een essentieel ingrediënt voor Deligne's bewijs, dat stamt uit 1973. **Bron:** www.abelprisen.no

VROLIJKE WISKUNDE

■ door Marc Seijlhouwer

Wetenschappen in beeld van Margreet de Heer is een vrolijk, uitgebreid en leerzaam stripboek. In 190 pagina's leidt De Heer je door alle takken van de wetenschap. Alle grote onderwerpen die je op school krijgt komen langs: wiskunde, natuurkunde, biologie en scheikunde. Maar daarnaast worden ook andere onderwerpen behandeld: sterrenkunde en geologie, en ook wetenschapsfilosofie. De Heer legt met fraaie illustraties uit wat wetenschap eigenlijk is en waar wetenschap naartoe gaat.

Het boek probeert elke wetenschap te behandelen door langs de geschiedenis te lopen. Vanaf de Oude Grieken via de Middeleeuwen (waar best nog wat gebeurde op wetenschappelijk gebied) naar de renaissance en wetenschappelijke revolutie, om uiteindelijk uit te komen in de twintigste eeuw en het nu. Daarnaast neemt het boek om de zoveel tijd een uitstapje om een specifiek gebied van de wetenschap uit te leggen. Deze stukjes geven een tijdlijn van alle ontdekkingen van het vak en leggen de basisdingen uit.

Alles is mooi getekend; de stijl lijkt op veel plekken erg op die van de geschiedenis-stripboekenreeks *Van Nul tot Nu*. Ook de grapjes waar het boek vol mee zit, doen soms erg denken aan deze boeken. Dat is overigens niet slecht; de Nul-tot-Nu-boeken zijn een mooie combinatie van Nederlandse geschiedenis en geestige tekeningetjes.

Maar daarin zit wel een probleem. Gaat *Van Nul tot Nu* over één redelijk specifiek onderwerp, *Wetenschappen in beeld* probeert élke wetenschap van 3000 jaar van over de hele wereld te bespreken. Sommige onderwerpen komen er dan wel érg bekaaid vanaf. Zo wordt van alle moderne takken van de biologie eigenlijk alleen de genetica uitgelicht.

Gelukkig krijgt wiskunde veel ruimte. Naast de geschiedenis van wiskunde wordt er stilgestaan bij vier wiskundige fenomenen (pi, oneindig, de gulden snede en nul) en wordt uitgelegd hoe Aristoteles dacht over wiskunde en logica. Genoeg reden om het boek aan te raden aan de wiskundefanaat.

Margreet de Heer (tekst en tekeningen) en Yiri T. Kohl (kleur): *Wetenschappen in beeld*. 192 pagina's, Uitgeverij Meinema (september 2012), € 19,50.

De Vlaming Gerardus Mercator (1512-1594) was een beroemd cartograaf, en niet alleen vanwege de vele uitstekende kaarten die hij graveerde en de globes die hij vervaardigde. Zijn vermaardheid is tevens te danken aan het feit dat hij voor zijn kaarten het Italiaanse kanselarijschrift gebruikte, dat door alle latere cartografen werd overgenomen. Zijn grootste bekendheid verwierf hij echter door de uitvinding van een nieuwe kaartprojectie, die zijn naam draagt: de *mercatorprojectie*.

■ door Hans de Rijk

HET RAADSEL VAN DE MERCATORPROJECTIE

Figuur 1 Twee projecties die met de mercatorprojectie niets te maken hebben.

De mercatorprojectie is – ook nu nog – de meest gebruikte kaartprojectie. Het ontstaan van deze projectiemethode is echter met nogal wat geheimzinnigheid omgeven. In verschillende publicaties zijn onjuiste beschrijvingen van de mercatorprojectie te vinden. Figuur 1 geeft daarvan twee voorbeelden. In de linkerfiguur worden de punten op de bol vanuit het middelpunt op een cilinder geprojecteerd die aan de evenaar raakt. Rechts zijn lijnen getrokken vanuit de as loodrecht op het omringende cilindervlak. Zulke projecties hebben niets te maken met de mercatorprojectie. De enige overeenkomst is dat de kaart die zo ontstaat evenwijdige meridianen heeft en loodrecht daarop een stel evenwijdige breedtecirkels.

ORTHODROMEN EN LOXODROMEN De kortste afstand tussen twee punten *A* en *B* op een bol is een deel van een *orthodroom* (grootcirkel, ofwel een cirkel op een boloppervlak waarvan de straal gelijk is aan de straal van de bol). In de eerste helft van de zestiende eeuw, de tijd van de grote ontdekkingsreizen, was het voor stuurlui op zee niet mogelijk om met de bestaande navigatiemiddelen deze kortste route te volgen. Zij waren aangewezen op hun kompas en als ze van *A* naar *B* wilden zeilen, moesten ze een vaste koers (bijvoorbeeld NO) aanhouden. Als je zo'n koers op een globe uitzet, blijkt deze geen orthodroom te zijn, maar een lijn die de meridianen steeds onder dezelfde hoek snijdt: een deel van een zogeheten *loxodroom* (letterlijk: scheeflopend). Een loxodroom die op

Figuur 2 Een *loxodroom* is een kromme op een bol die een constante hoek maakt met de meridianen.

Figuur 3 Mercators wereldglobe uit 1541 (Mercatorcollectie Stedelijke Musea, Sint-Niklaas).

een bol is getekend, draait in steeds nauwere windingen in een spiraalvorm naar de pool zonder ooit in de pool terecht te komen (zie figuur 2).

Hoewel een loxodroom van *A* naar *B* altijd langer is dan een orthodroom, is het verschil voor niet al te grote afstanden niet zo groot. Stuurlui hadden daarom behoefte aan kaarten waarop loxodromen als rechte lijnen getekend konden worden. Maar deze bestonden niet, tot 1569, toen Mercator voor het eerst die vondst deed.

MERCATORS GLOBE UIT 1541 Aan boord gebruikte men als navigatiemiddel niet alleen kaarten die al of niet op grond van bepaalde projecties getekend waren, maar ook globes. Een van Mercators specialiteiten was het vervaardigen van globes. Het maken van zo'n globe vroeg nogal wat kunde, ervaring en tijd. Op de bollen, die hij maakte van een soort papierbrei met daaroverheen een laagje gips, plakte hij papiersegmenten waarop het kaartbeeld met bijbehorende meridianen en breedtecirkels was afgedrukt.

In 1541 voltooide Mercator een globe voor de kanselier van Karel V. Je ziet hem in figuur 3; in het echt kun je deze wereldbol bewonderen in de Mercatorcollectie van Stedelijke Musea te Sint-Niklaas (België). Het bijzondere van deze globe was dat Mercator er op verschillende punten een rozet van loxodromen had ingetekend. Daaruit blijkt dat hij toen al duidelijk inzag, dat stuurlui op zee daar voordeel van zouden kunnen hebben én dat hij in staat was deze krommen op een boloppervlak te tekenen. We komen hier nog op terug.

WERELDKAART UIT 1569 Bijna dertig jaar later bracht Mercator zijn grote wereldkaart (130 × 210 cm) uit, gedrukt van 24 gegraveerde koperplaten. Enkele exemplaren daarvan zijn bewaard gebleven. De titel die Mercator de kaart (zie pagina 16-17) meegaf is veelzeggend: Nova et Aucta Orbis Terrae Descriptio ad Usum Navigantium Emendate Accomodata. Hij was dus speciaal vervaardigd voor zeevaarders. Hiermee had hij een lang gekoesterd ideaal verwezenlijkt: een kaart waarop de stuurman door het trekken van rechte lijnen een vaste koers kon uitzetten. De loxodromen, die op zijn globe uit 1541 nog gekromd waren, zijn op deze kaart getransformeerd tot rechte lijnen! En dit is de grote verdienste van de mercatorprojectie... een mijlpaal in de geschiedenis van de cartografie.

Figuur 4 *AB* is een graad op de evenaar, *DC* op een breedtecirkel. Op de kaart lopen de meridianen evenwijdig, daarom wordt *DC* uitgerekt tot de lengte *EF* = *AB*.

Figuur 5 Loxodroom van 60° vanuit punt *A*.

DE GEBOORTE VAN EEN RAADSEL Mercator heeft nooit uitgelegd op welke manier hij de juiste plaats voor de breedtecirkels van zijn wereldkaart vond. Vele latere onderzoekers hebben geprobeerd zijn werkwijze te reconstrueren uit de legende die op de kaart is afgedrukt. Vooral de volgende passage daaruit was bepalend voor de richting van hun onderzoek: ...wij hebben de breedtegraden naar de polen toe geleidelijk vergroot in dezelfde verhouding als de breedtecirkels tot de evenaar toenemen. Als men deze zin opvat als een manier van construeren, komt dit op het volgende neer.

In figuur 4 is *AB* een graad op de evenaar en *DC* een graad op een breedtecirkel. Omdat op de kaart de meridianen evenwijdig lopen, wordt daar *DC* uitgerekt tot de lengte $EF = AB$. De uitrekking in de breedte van *ABCD* moet nu gecompenseerd worden met een uitrekking in de lengte. Dus *DC* (deel van een breedtecirkel) moet hoger komen te liggen.

Omdat een exacte wiskundige constructie pas veel later is gevonden (zie het kader op pagina 18), heeft men verschillende benaderingsconstructies bedacht die Mercator toegepast zou kunnen hebben. Deze constructies zijn echter niet zo eenvoudig en voor de hand liggend. In feite stijgen zij ver uit boven de kennis van de gemiddelde wiskundige uit Mercators tijd. Hoewel Mercator een uitzonderlijk gevoel voor wiskunde had, is het maar de vraag of we hem deze kennis kunnen toeschrijven.

Tegen een benaderingsconstructie die Mercator toegepast zou hebben pleit ook het feit dat Mercator dan ook aangetoond zou moeten hebben dat loxodromen op zijn wereldkaart rechte lijnen zouden zijn en dat is niet zo eenvoudig.

HET VERBAND TUSSEN GLOBE EN WERELDKAART Zoals we reeds opmerkten, had Mercator op zijn globe van 1541 al een aantal rozetten met loxodromen getekend. Hoe hij de juiste vorm daarvoor vond heeft hij nooit beschreven, maar de volgende werkwijze ligt voor de hand. Op een geprepareerde bol, die nog geheel blanco was, werden meridianen en breedtecirkels getekend. Dit kan eenvoudig met passer en een flexibele liniaal. In figuur 5 zijn de evenaar en drie meridianen getekend. We kunnen nu de loxodroom van bijvoorbeeld 60° vanuit *A* trekken. Dit kan bijvoorbeeld met behulp van een stukje paper dat één hoek van 60° heeft. Het snijpunt met de volgende meridiaan is *B′*. Nu is *AB′* bij benadering een stukje van de loxodroom van 60°. Dit herhalen we vanuit *B′*, waardoor het volgende stukje *B′C′* ontstaat. Hoe dichter de meridianen op elkaar staan, des te beter benaderen we de loxodroomkromme van 60°.

Als we op de globe van 1541 de afstand tussen de meridianen 3° nemen, blijkt *AB* in figuur 5 iets groter dan 1 cm te zijn, zodat bovenstaande methode (niet al te ver van de evenaar) geen technisch hoogstandje is. Mercator ging zeker veel verfijnder te werk. Hier kwam dus weinig wiskunde bij te pas, maar wel veel vakmanschap, waarover hij als een van de beste graveurs van zijn tijd zeker beschikte. Als eenmaal één loxodroom (bijvoorbeeld die van 60°) nauwkeurig was ingetekend, waren ook de snijpunten van deze loxodroom met de breedtecirkels vastgelegd, zoals in figuur 6 is weergegeven.

De stap van globe naar kaart is nu gemakkelijk te zetten. Het probleem was immers om de afstan-

Lees verder op pagina 19.

Figuur 6 Zodra één loxodroom is ingetekend, liggen ook de snijpunten van deze loxodroom met de breedtecirkels vast.

NOVA ET AVCTA ORBIS TERRA

DESCRIPTIO AD VSVM NA
accommodata.

AFLEIDING VAN DE MERCATORPROJECTIE

Figuur 8 Op de bol met straal *r* hebben we *bolcoördinaten* getekend. De lengtegraad is bepaald door θ en de breedtegraad door φ. Voor de afleiding nemen we een kleine strip met breedte $r\Delta\theta$. Hoe groot is de afstand *PQ*?

Bij het afleiden van de mercatorprojectie gaan we uit van de aarde als bol (zie figuur 8). De middelste horizontale cirkel, de evenaar, geven we de straal *r*, dus de omtrek is $2\pi r$. De straal van de bovenste cirkel is $r \cos \varphi$, dus de omtrek van deze cirkel is $2\pi r \cos \varphi$.

We bepalen de afstand *PQ* uit de verhouding

$$\frac{PQ}{2\pi r\cos\varphi} = \frac{r\Delta\theta}{2\pi r}.$$

Hieruit volgt dat $PQ = r \cos \varphi\Delta\theta$.

Bekijk nu figuur 9. Bij de mercatorprojectie eisen we dat de hoeken ten opzichte van de meridianen constant zijn, dus we willen graag dat α in de linkerfiguur gelijk is aan β in de rechterfiguur. De meridianen worden op de verticale lijnen afgebeeld. Hoe ver moet de *y*-coördinaat worden opgerekt? Bekijk daartoe figuur 10. Als we Δθ en Δφ zeer klein nemen, is $\angle PQR = 90°$.

Figuur 10 We nemen Δθ en Δφ zeer klein. Het gekromde oppervlak *PQRS* wordt bij benadering een rechthoekje.

De hoeken α en β zijn gelijk, dus

$$\frac{r\cos\varphi\Delta\theta}{r\Delta\varphi} = \tan\alpha = \tan\beta = \frac{\Delta x}{\Delta y}$$

en daarmee is

$$\frac{\Delta y}{\Delta\varphi} = \frac{1}{\cos\varphi}\cdot\frac{\Delta x}{\Delta\theta}.$$

We schalen $\frac{\Delta x}{\Delta\theta} = 1$, waarmee

$$\frac{\Delta y}{\Delta\varphi} = \frac{1}{\cos\varphi}.$$

Als Δφ naar 0 gaat, vinden we

$$y'(\varphi) = \frac{1}{\cos\varphi}.$$

Integreren geeft ons de formule voor *y*:

$$y = \int \frac{1}{\cos\varphi}\,d\varphi = \ln\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right).$$

De integratieconstante is 0, want we beelden de evenaar af op 0. De volledige transformatie is:

$$\begin{cases} x = \theta \\ y = \ln\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right) \end{cases}$$

Figuur 9 We bekijken een kleine rechthoek *PQRS* op het boloppervlak. De diagonaal *PR* maakt hoek α met de meridiaan door *S* en *P*. Dit gekromde rechthoekje wordt afgebeeld op de rechthoek in het platte vlak rechts.

den van de breedtecirkels tot de evenaar te vinden. Achteraf blijkt het allemaal nogal vanzelfsprekend, maar zelfs de wiskundig best onderlegde cartografen uit Mercators tijd vonden deze oplossing niet. Het waren Mercators praktische instelling en zijn gevoel voor wiskunde die de oplossing brachten.

MERCATORS METHODE We besluiten met een beschrijving van de manier die Mercator vermoedelijk gebruikte om met behulp van de globe de kaart te tekenen. In figuur 7 is links een deel van de globe getekend met de evenaar en een breedtecirkel, enkele meridianen door A, B en C en de loxodroom van 60°. We kunnen deze figuur beschouwen als de afbeelding van een stukje van de globe van Mercator uit 1541. Daarnaast is de kaart getekend: op de evenaar zijn de stukken $A'B' = AB$, $B'C' = BC$ enzovoorts.

Vanuit A' trekken we een rechte lijn l die een hoek van 60° maakt met $A'N'$. Dit is de afbeelding van de 60°-loxodroom op de kaart. Op de bol snijdt deze loxodroom de breedtecirkel van 30° in P. Lees de oosterlengte van P af door de meridiaan PQ te gebruiken. Breng AQ van de bol over naar $A'Q'$ op de kaart. Trek op de kaart de meridiaan door Q' – deze snijdt l in P' – en trek door P' een lijn evenwijdig aan de evenaar: dit is de afbeelding van de breedtecirkel van 30° op de kaart. Op deze manier zijn alle breedtecirkels op de kaart te tekenen en bovendien hoeft niet achteraf nog bewezen te worden dat loxodromen op de bol als rechte lijnen op de kaart verschijnen.

Een extra aanwijzing dat Mercator voor het tekenen van zijn wereldkaart zijn globe uit 1541 gebruikt heeft, is het feit dat de relevante afmetingen op de bol en de kaart zich verhouden als 2 : 3. Daardoor is het rekenwerk bij het transformeren van de bol in de kaart erg eenvoudig. ■

LITERATUUR

- R. Blondeau, *Mercator van Rupelmonde* (1993).
- G. Scheffers en K. Strubecker, *Wie findet und zeichnet man Gradnetze von Land- und Sternkarten?* (1956).
- G. Roden (red.), *Gerhard Mercator, 1512-1594, zum 450. Geburtstag. Duisburger Forschungen: Schriftenreihe Fur Geschichte und Heimatkunde Duisburgs, 6. Band* (1962).
- W. Krücken, *Gerhard Mercator zum 400. Todesjahr. Ist das Rätsel der Mercator-Karte* AD USUM NAVIGANTIUM*... gelöst?* Uit: *Praxis der Mathematik* 4/36 (1994).

Figuur 7 Van globe naar kaart.

door Frank Roos

Als je in een regelmatige zevenhoek alle diagonalen tekent, dan zijn alle hoeken die daarin voorkomen 1, 2, 3, 4 of 5 maal 180°/7. Dat geldt ook als je alle diagonalen tot buiten de zevenhoek verlengt. Deze eigenschap is aangetoond in het artikel 'Gekwantiseerde hoeken' dat in *Pythagoras* 49-6 (juni 2010) verscheen.

Opdracht 1. Zet bij elke hoek in figuur 1 een van de getallen 1 tot en met 5; het getal 1 bij de hoeken die 1 maal 180°/7 zijn, 2 bij de hoeken die 2 maal 180°/7 zijn enzovoort. De hoek 6 maal 180°/7 komt niet voor. Kun je dat begrijpen?

In een regelmatige zevenhoek zijn zeven paren van twee evenwijdige diagonalen te ontwaren. Er komen dus twee verschillende lengtes voor. In figuur 2 zijn de korte diagonalen met rood aangegeven en de lange met blauw. Ga na, dat ook de regelmatige zeshoek twee verschillende lengtes van diagonalen heeft. Hoe dat in een regelmatige vier-, vijf-, acht-, negen-, ..., *n*-hoek zit, kun je lezen in het kader hiernaast.

In een regelmatige zevenhoek kun je meerdere regelmatige zevenhoeken ontdekken. Natuurlijk de oorspronkelijke zevenhoek, maar bijvoorbeeld ook de kleine zevenhoek die binnenin wordt ingesloten door de diagonalen (zie figuur 3).

Opdracht 2. Kun je nog meer regelmatige zevenhoeken vinden?

Hoeveel diagonalen heeft een regelmatige zevenhoek? Dit aantal kun je op drie manieren tellen:

- Streep de diagonalen die je hebt gehad weg. Dit is de minst elegante methode.
- Uit een hoekpunt vertrekken 7 – 3 = 4 diagonalen. Omdat dit voor elk hoekpunt geldt, denk je misschien dat er dus 4 × 7 = 28 diagonalen zijn. Maar pas op: je hebt ze nu allemaal dubbel geteld; er zijn er dus 14. Deze methode is geschikt voor élke regelmatige *n*-hoek.

- Je hebt – als het goed is – al zeven paren van evenwijdige diagonalen gezien, een korte en een lange; er zijn dus $2 \times 7 = 14$ diagonalen.

Opdracht 3. Probeer eens uit te zoeken hoeveel regelmatige n-hoeken er in een regelmatige n-hoek terug te vinden zijn, als alle $n(n-3)/2$ diagonalen getrokken zijn. De redactie heeft nog geen algemene formule gevonden! Ideeën zien we met belangstelling tegemoet (mail naar post@pythagoras.nu).

Opdracht 4. Onderzoek hoeveel snijpunten van de diagonalen zich binnen de regelmatige zevenhoek bevinden. Bekijk daarvoor de regelmatige zevenhoeken die de zevenhoek bevat (zie opdracht 2). Merk op, dat alle snijpunten van de diagonalen deel uit maken van een regelmatige zevenhoek.

De antwoorden van de opdrachten 1, 2 en 4 staan op pagina 33. ■

Figuur 1 Een regelmatige zevenhoek met al zijn diagonalen.

Figuur 2 Een regelmatige zevenhoek heeft zeven paren van twee evenwijdige diagonalen, een korte (rood) en een lange (blauw).

Figuur 3 Welke regelmatige zevenhoeken kun je nog meer ontdekken?

HET AANTAL DIAGONALEN VAN VERSCHILLENDE LENGTE IN EEN REGELMATIGE *N*-HOEK

Vanuit elk hoekpunt van een regelmatige n-hoek kun je $n - 3$ diagonalen tekenen. Als n oneven is (bijvoorbeeld 7, zie de zevenhoek hierboven) zijn er, vanwege de spiegelsymmetrie ten opzichte van de verticale as (niet getekend), $(n - 3)/2$ diagonalen van verschillende lengte. In de zevenhoek is dit aantal dus 2.

Als n even is (bijvoorbeeld 8, zie de achthoek hierboven), ligt de langste diagonaal op de symmetrieas. Vergeet even deze langste diagonaal. Dan zijn er nog $n - 4$ diagonalen uit één punt. Vanwege de spiegelsymmetrie zijn er dan $(n - 4)/2$ verschillende lengtes. Nog die 'vergeten diagonaal' erbij geeft in totaal $(n - 4)/2 + 1 = n/2 - 1$ verschillende lengtes. In de achthoek is dit aantal dus 3.

GECOMBINEERD Kunnen de twee gevonden uitdrukkingen in één formule gecombineerd worden? Ja, dat lukt met de zogeheten *entierfunctie*. 'Entier' betekent 'geheel'. De entier van een getal x wordt genoteerd als $\lfloor x \rfloor$. Dit is, per definitie, het grootste gehele getal dat kleiner dan of gelijk aan x is. Zo is bijvoorbeeld $\lfloor 9{,}65 \rfloor$ gelijk aan 9, het hele deel van 9,65. En $\lfloor \pi \rfloor$, de entier van het getal π, is gelijk aan 3.

Het gezochte aantal diagonalen van verschillende lengte in een regelmatige n-hoek kan met de entier-functie worden geschreven als

$\lfloor n/2 \rfloor - 1$, voor elke gehele n groter dan 2, even én oneven.

Het lukt zelfs om dit aantal in één uitdrukking weer te geven zónder gebruikmaking van de entierfunctie: $((-1)^n - 1)/4 + n/2 - 1$.

Op 26 maart 2013 was het honderd jaar geleden dat de legendarische wiskundige Paul Erdős werd geboren. Voor *Pythagoras* reden om dit jaar stil te staan bij de – vaak eenvoudig te beschrijven – problemen waaraan deze Hongaar gewerkt heeft. In deze derde aflevering bespreken we een vermoeden over stambreuken: breuken waarvan de tellers gelijk zijn aan 1.

■ door Matthijs Coster

EGYPTISCHE BREUKEN

De Egyptenaren van circa 2000 jaar voor Christus kenden onze notatie van een breuk nog niet, maar gebruikten tekens om breuken van het type $\frac{1}{n}$ aan te geven. Zulke breuken, waarvan de teller dus gelijk is aan 1, heten *stambreuken*.

Elke breuk kan eenvoudig worden geschreven als som van stambreuken. Zo is $\frac{3}{4}$ gelijk aan $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$. Maar als we eisen dat alle noemers *verschillend* zijn, zoals de oude Egyptenaren deden, is er dan óók altijd een oplossing? Het duurde tot 1202 voordat Leonardo van Pisa (Fibonacci) bewees dat het antwoord op deze vraag ja is. Zo kun je $\frac{3}{4}$ schrijven als $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$. En de breuk $\frac{2}{15}$ is gelijk aan $\frac{1}{8}+\frac{1}{120}$.

Opdracht 1. Er zijn nog drie andere manieren om $\frac{2}{15}$ als som van twee verschillende stambreuken te schrijven. Welke drie?

Opdracht 2. De breuk $\frac{1}{6}$ is al een stambreuk, maar kan ook worden geschreven als som van twee kleinere stambreuken. Hoe? En op hoeveel manieren?

Opdracht 3. De breuk $\frac{3}{7}$ kun je niet schrijven als som van twee verschillende stambreuken, maar wel als som van drie verschillende stambreuken. Probeer het eens!

HET GRETIGE ALGORITME De Egyptenaren waren in staat om willekeurige breuken (kleiner dan 1) als som van een aantal verschillende stambreuken te schrijven. Hieronder laten we zien hoe dat in z'n werk gaat. Het gebeurt *iteratief*: trek een zo groot mogelijke stambreuk af, tot de rest op den duur 0 is. Uiteraard is het niet vanzelfsprekend dat het proces eindig is!

We beginnen met een voorbeeld: de breuk $\frac{4}{17}$. Merk op dat $\frac{1}{5}<\frac{4}{17}<\frac{1}{4}$, dus we trekken de breuk $\frac{1}{5}$ af van $\frac{4}{17}$:

$$\frac{4}{17}-\frac{1}{5}=\frac{3}{85}.$$

We gaan verder met de breuk $\frac{3}{85}$. Er geldt $\frac{1}{29}<\frac{3}{85}<\frac{1}{28}$. We trekken dus $\frac{1}{29}$ van $\frac{3}{85}$ af:

$$\frac{3}{85}-\frac{1}{29}=\frac{2}{2465}.$$

Ten slotte geldt $\frac{2}{2465}=\frac{1}{1233}+\frac{1}{3039345}$. Uiteindelijk hebben we dus:

$$\frac{4}{17}=\frac{1}{5}+\frac{1}{29}+\frac{1}{1233}+\frac{1}{3039345}.$$

In het algemeen geldt voor een breuk $\frac{1}{a}<\frac{t}{n}<\frac{1}{a-1}$ met $a=\lceil\frac{n}{t}\rceil$. Met de notatie $\lceil x\rceil$ geven we het kleinste gehele getal groter dan of gelijk aan x aan. Nu geldt

$$\frac{t}{n}-\frac{1}{a}=\frac{at-n}{an}.$$

Merk op dat $at-n<t$; dat $a-1<\frac{n}{t}$ volgt immers uit $\frac{t}{n}<\frac{1}{a-1}$. Het aardige is dat door steeds de grootst mogelijke stambreuk te kiezen, de teller wordt verlaagd. Uitgaande van teller t, kost het maximaal t stappen voordat het proces stopt, ofwel een breuk $\frac{t}{n}$ is te schrijven als som van maximaal t stambreuken. Deze manier van schrijven als een som van stambreuken staat bekend als het *gretige algoritme*.

Opdracht 4. De breuk $\frac{4}{17}$ is ook te schrijven als som van *drie* verschillende stambreuken. Hoe? Er zijn vier manieren.

Opdracht 5. Elke stambreuk is te schrijven als som van twee verschillende stambreuken. Kun je dit laten zien?

VERMOEDEN VAN ERDÖS-STRAUS Paul Erdős reisde de hele wereld rond. Overal had hij contacten, bij wie hij – dikwijls ongevraagd – voor de deur stond en zichzelf uitnodigde om een paar dagen te blijven, om samen aan een wiskundig probleem te werken. In 1948 verbleef hij in Princeton bij Ernst Straus. Straus werkte op dat ogenblik als assistent bij Albert Einstein. Erdős en Straus werkten aan diverse problemen, waaronder het probleem van het schrijven van breuken als som van zo weinig mogelijk stambreuken. Zij formuleerden het volgende vermoeden:

Voor elk geheel getal $n \geq 4$ geldt dat $\frac{4}{n}$ te schrijven is als som van drie stambreuken. In formulevorm: voor elk geheel getal $n \geq 4$ bestaan er positieve gehele getallen a, b, c zodanig dat $\frac{4}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

Het Vermoeden van Erdős-Straus zullen we kortweg noteren als ES.

In opdracht 4 heb je gezien dat ES juist is voor $n = 17$. Nog een paar voorbeelden zijn: $\frac{4}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$, $\frac{4}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10}$, $\frac{4}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{24} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12}$ en $\frac{4}{7} = \frac{1}{2} + \frac{1}{21} + \frac{1}{42} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{14}$.

Opdracht 6. Lees het kader hieronder. Op het omslag van deze *Pythagoras* zie je tien keer drie stambreuken, in het hiëroglyfenschrift van de oude Egyptenaren, die opgeteld steeds een getal van de vorm $\frac{4}{n}$ opleveren. Om welke sommen van stambreuken gaat het?

REDUCTIE We kunnen ES voor heel wat waarden van n bewijzen. Merk eerst op dat ES waar is voor elke waarde van n waarvoor $\frac{4}{n}$ te schrijven is als som van twee stambreuken. Door toepassing van opdracht 5 kun je een van de stambreuken immers schrijven als som van twee stambreuken. ES is waar als n even is, want dan reduceert de breuk tot $\frac{2}{k}$ (indien $n = 2k$) of zelfs $\frac{1}{k}$ (indien $n = 4k$). We gaan er dus van uit dat n oneven is.

We kunnen nog verder reduceren: voor $n = 3k$

HIËROGLYFEN IN HET OUDE EGYPTE

De Egyptenaren uit het tweede millennium voor Christus baseerden hun systeem van breuken op hiëroglyfen die stambreuken weergaven. Dit weten we dankzij de *Rhind-papyrus*, een van de zeldzame bronnen van onze kennis over de vroege Egyptische wiskunde en het oudst bekende document over wiskunde. De Rhind-papyrus laat zien hoe de Egyptenaren rekenden: ze gebruikten een tientallig getallenstelsel waarin de eenheden, de tientallen, de honderdtallen enzovoort door een apart symbool werden aangeduid. Enkele symbolen zie je hiernaast. Het getal 23 werd genoteerd met twee tekentjes die de tientallen voorstellen en drie tekentjes die de eenheden voorstellen. Breuken met teller 1, zogenaamde

Hiëroglyfen die achtereenvolgens voorstellen: 1, 10, 100, 1000, 10.000.

stambreuken, werden aangegeven door het getal van de noemer, met daarboven een tekentje dat iets weg heeft van een 'open mond'. Alle breuken werden teruggebracht tot sommen van stambreuken. Op het omslag van deze *Pythagoras* zie je tien sommen van stambreuken in het hiëroglyfenschrift van de Egyptenaren.

Figuur 1 Het aantal oplossingen van ES uitgezet tegen n (voor $n \leq 1000$).

Figuur 2 Het aantal oplossingen van ES uitgezet tegen p, met p priem. Let op: de schaalverdeling van de verticale as is anders dan bij figuur 1!

Bron: Christian Elsholtz en Terence Tao, 'Counting the number of solutions to the Erdös-Straus equation on unit fractions'.

geldt $\frac{4}{n} = \frac{4}{3k} = \frac{1}{k} + \frac{1}{3k}$. Dus ook voor drievouden geldt ES.

Stel dat ES geldt voor een zekere waarde van n, ofwel $\frac{4}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$, dan geldt ES tevens voor elk k-voud van n, immers $\frac{4}{kn} = \frac{1}{ka} + \frac{1}{kb} + \frac{1}{kc}$. We hoeven ES dus alleen maar aan te tonen voor de priemgetallen. Helaas wordt hiermee het aantal gevallen dat moet worden gecontroleerd niet eindig.

Als p een priemgetal is dat te schrijven is als een viervoud minus 1, dan geldt ES ook voor p. Om dat in te zien, schrijven we $p = 4k - 1$. Nu geldt

$$\frac{4}{p} = \frac{4}{4k-1} = \frac{1}{k} + \frac{1}{k(4k-1)}.$$

Als p een oneven priemgetal is van de vorm een drievoud minus 1, dan geldt ES ook voor p. We schrijven $p = 3m + 2$. Nu geldt

$$\frac{4}{p} = \frac{4}{3m+2} = \frac{1}{3m+2} + \frac{1}{m+1} + \frac{1}{(m+1)(3m+2)}.$$

ES is dus waar voor heel wat waarden van n. Maar een bewijs dat het vermoeden geldt voor élke $n \geq 4$ ontbreekt. In de loop van de jaren hebben heel wat wiskundigen pogingen ondernomen om ES te bewijzen of te weerleggen. Het vermoeden heb je al weerlegd als je ook maar één priemgetal p vindt waarvoor ES niet opgaat. Het meeste werk ging daarom zitten in het zoeken naar zo'n voorbeeld. We zagen zojuist dat p dan in elk geval een viervoud plus 1 en een drievoud plus 1 moet zijn. Door dit te combineren, kom je uit op een twaalfvoud plus 1, dus dien je de priemen 13, 37, 61, 73, 97, ... te controleren. Dat is nog heel wat werk. Maar je kunt nog verdere reductie van de werkzaamheden realiseren. Op vergelijkbare wijze voldoet p aan ES als p een vijfvoud is plus 2 of plus 3, of als p een zevenvoud is plus 3, plus 5 of plus 6, of als p een achtvoud is plus 5. De bewijzen van deze beweringen zijn lastiger. Als we deze resultaten combineren, dan kom je uit op priemgetallen die een 840-voud plus 1, plus 121, plus 169, plus 289, plus 361 of plus 529 moeten zijn. Het kleinste priemgetal dat hieraan voldoet is 1009; dit getal is 840 + 169.

ES TOT 10^{14} Het wegredeneren van mogelijkheden is een voorbeeld van wat een 'zeef' wordt genoemd: je zeeft als het ware een groot aantal priemgetallen uit de te controleren voorraad weg. In de loop der jaren zijn meer van dit soort zeven ontwikkeld, om verdere reductie mogelijk te maken.

De zeef die we hieronder beschrijven, is afkomstig van Allan Swett. Hij gebruikte het om vervolgens voor de resterende priemen te controleren dat er voor elke priem tot 10^{14} een oplossing bestaat voor ES.

Swetts zeef gaat als volgt. Veronderstel dat er positieve gehele getallen K, P, R, S, U, V, W bestaan zodanig dat

(1) $n = Rm + S$
(2) $R = 4K - 1$
(3) $K = UVW$
(4) $SU + V = PR$
(5) $a = UVWn$
(6) $b = VW(Um + P)$
(7) $c = UWn(Um + P)$

In dat geval voldoet die specifieke n aan ES. Laten we als voorbeeld $R = 3$ kiezen. Dan volgt met ver-

gelijking (2) dat $K = 1$. Uit vergelijking (3) volgt nu dat $U = V = W = 1$. Kies vervolgens $S = 2$ en $P = 1$. Dan krijgen we het volgende: voor $n = 3m + 2$ geldt

$$\frac{4}{3m+2} = \frac{1}{3m+2} + \frac{1}{m+1} + \frac{1}{(m+1)(3m+2)}.$$

Dit resultaat hadden we al eerder gezien. Een nieuw resultaat vinden we als we $R = 7$ kiezen. Dan volgt namelijk dat de getallen die voldoen aan $n = 7m + S$, met S gelijk aan 3, 5 of 6, voldoen aan ES.

Swett liet K oplopen tot 1000 om deze zeef goed te kunnen toepassen. Daardoor was het eerste priemgetal dat hij hoefde te testen pas 99.824.355.999.481.

Opdracht 7. Controleer dat de vergelijkingen (1) t/m (7) voldoen aan $\frac{4}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

Opdracht 8. Voor $R = 23$ kun je voor S zelfs negen verschillende waarden vinden. Welke waarden zijn dat?

HET TELLEN VAN HET AANTAL OPLOSSINGEN Recent is Terence Tao, een van de meest getalenteerde wiskundigen van de jonge generatie, bezig geweest om het *aantal* oplossingen te tellen van de vergelijking $\frac{4}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ voor $n \le N$, waarbij N een vast gekozen getal is. Hij vond dat het aantal oplossingen bij benadering $N(\ln N)^3$ is. Dit resultaat zegt natuurlijk niets over het aantal oplossingen bij een individuele n. Maar het geeft wel aan dat het gemiddelde aantal oplossingen voor n toeneemt naarmate n groter wordt.

In figuur 1 is het aantal oplossingen van ES uitgezet tegen n. In figuur 2 staat dezelfde grafiek nogmaals, maar daar zijn alle waarden van n die *niet* priem zijn, weggelaten. In deze grafiek zie je duidelijk dat het kleinste aantal oplossingen ook groter wordt als p groeit.

COMPUTEREXPERIMENTEN Het Vermoeden van Erdős-Straus kunnen we generaliseren: hoe zit het als $\frac{4}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ wordt vervangen door $\frac{t}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$?

Voor waarden van $t \le 7$ en $n \le 200.000$ hebben we de computer laten rekenen en er was altijd een oplossing. Pas bij $t = 8$ ging het mis: de breuken $\frac{8}{11}$ en $\frac{8}{17}$ zijn niet te schrijven als som van drie stambreuken.

Opdracht 9. Schrijf $\frac{8}{19}$ als som van drie stambreuken.

Opdracht 10. Voer zelf het volgende computerexperiment uit. Neem een vast getal t, bijvoorbeeld $t = 9$. Maak een tabel van sommen van drie stambreuken van $\frac{t}{n}$, waarbij n loopt van 1 tot 100. ■

OPLOSSINGEN

1. $\frac{2}{15} = \frac{1}{9} + \frac{1}{45} = \frac{1}{10} + \frac{1}{30} = \frac{1}{12} + \frac{1}{20}$

2. $\frac{1}{6} = \frac{1}{7} + \frac{1}{42} = \frac{1}{8} + \frac{1}{24} = \frac{1}{9} + \frac{1}{18} = \frac{1}{10} + \frac{1}{15}$

3. $\frac{3}{7} = \frac{1}{3} + \frac{1}{11} + \frac{1}{231} = \frac{1}{3} + \frac{1}{12} + \frac{1}{84} = \frac{1}{3} + \frac{1}{14} + \frac{1}{42} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{84} = \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{28}$

4. $\frac{4}{17} = \frac{1}{5} + \frac{1}{30} + \frac{1}{510} = \frac{1}{5} + \frac{1}{34} + \frac{1}{170} = \frac{1}{6} + \frac{1}{15} + \frac{1}{510} = \frac{1}{6} + \frac{1}{17} + \frac{1}{102}$

5. $\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}$

6. Met de klok mee, beginnend meest links:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{20} > \frac{1}{8} + \frac{1}{78} + \frac{1}{90648} > \frac{1}{4} + \frac{1}{18} + \frac{1}{4468} > \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12} > \frac{1}{3} + \frac{1}{34} + \frac{1}{11122} > \frac{1}{5} + \frac{1}{30} + \frac{1}{510} > \frac{1}{6} + \frac{1}{139} + \frac{1}{19182} > \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} > \frac{1}{5} + \frac{1}{96} + \frac{1}{91200} > \frac{1}{2} + \frac{1}{15} + \frac{1}{210}$$

7. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{UVWn} + \frac{1}{VW(Um+P)} + \frac{1}{UWn(Um+P)} = \frac{Um+P+Un+V}{UVWn(Um+P)} = \frac{Um+P+U((4K-1)m+S)+V}{UVWn(Um+P)} = \frac{P+U(4Km)+PR}{UVWn(Um+P)} = \frac{U(4Km)+4KP}{UVWn(Um+P)} = \frac{4}{n}$

8. $S \in \{7, 10, 11, 15, 17, 19, 20, 21, 22\}$

9. $\frac{8}{19} = \frac{1}{3} + \frac{1}{12} + \frac{1}{228}$

In maart vond de tweede ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade plaats. De winnaars uit elke categorie, zo'n 130 in totaal, krijgen een uitnodiging voor de finale in september. De komende twee maanden trainen zij op verschillende universiteiten in het land om zich op deze finale voor te bereiden. In vier bijeenkomsten wordt een aantal nuttige bewijstechnieken behandeld. Een daarvan is het *extremenprincipe*.

■ door Julian Lyczak

EEN EXTREEM HANDIG PRINCIPE

Figuur 1

Probleem 1. Bij een toernooi spelen alle deelnemers precies één keer tegen elkaar, zodat er bij iedere wedstrijd altijd een winnaar is. Aan het eind maakt elke deelnemer een lijst met de namen van alle deelnemers die hij heeft verslagen en alle deelnemers die zijn verslagen door iemand die hij verslagen heeft. Bewijs dat er een deelnemer is op wiens lijst alle andere namen voorkomen.

Dit probleem oogt erg lastig: we weten niet eens om wélke speler het gaat. Als we dat wel wisten, dan konden we daarna misschien wel bewijzen dat hij ook daadwerkelijk een volledige lijst heeft. Maar in de vraagstelling heeft iedere speler precies dezelfde rol. Dit geeft dus nog geen idee om welke speler het gaat. We moeten die speler dus op een andere manier vinden.

Bedenk dat de deelnemer met een complete lijst de langste lijst van alle spelers heeft. Ook al weten we nog niet zeker of er wel een speler met een complete lijst is (dit is immers wat we moeten bewijzen), er is natuurlijk zeker een speler met een zo lang mogelijke lijst. Kies daarom zo'n speler; laten we hem Arnold noemen. (Als er meerdere spelers zijn met de langste lijst, kiezen we er gewoon willekeurig eentje uit.) Nu willen we laten zien dat er ook echt geen namen ontbreken op Arnolds lijst.

Als Arnolds lijst volledig is, dan zijn we natuurlijk klaar. Als dat niet zo is, dan ontbreekt er dus in ieder geval één naam, laten we zeggen: Bianca. Dat Bianca niet op de lijst van Arnold staat, betekent twee dingen: Arnold heeft niet van Bianca gewonnen, en de spelers van wie Arnold heeft gewonnen, hebben óók niet van haar gewonnen.

Dus Bianca heeft van Arnold gewonnen en bovendien ook van alle spelers van wie Arnold heeft gewonnen (zie figuur 1). De deelnemers van wie Arnold gewonnen heeft, staan dus in ieder geval ook op haar lijst. Verder staan op Arnolds lijst mensen als, zeg, Dafne, die verloren hebben van iemand van wie Arnold gewonnen heeft, zeg Carel. Maar Bianca heeft ook van Carel gewonnen. Dus is Carel eveneens de verbindende schakel die zorgt dat Dafne op de lijst van Bianca staat, want Bianca

heeft gewonnen van Carel en Carel weer van Dafne. Hiermee concluderen we dat alle namen die op de lijst van Arnold staan, ook op de lijst van Bianca staan. Maar op de lijst van Bianca staat ook de naam van Arnold. Dus Bianca's lijst is langer dan die van Arnold. En dat terwijl we Arnold hadden gekozen als een speler met de langste lijst. De aanname dat Arnolds lijst niet volledig was, leidt dus tot een tegenspraak. We concluderen dat Arnolds lijst blijkbaar volledig is!

EXTREMENPRINCIPE Het bewijs van probleem 1 berust op die stap in het begin, waar we gingen kijken naar een persoon met een zo lang mogelijke lijst. Dit idee kunnen we vaker gebruiken en heeft daarom een naam: *extremenprincipe*. Dit principe zegt dat het nuttig kan zijn om uit een verzameling objecten het object met de meest extreme eigenschap te gebruiken.

Hierboven kozen we een speler met een zo lang mogelijke lijst: geen gekke keuze, gezien de opgave. Maar het is lang niet altijd duidelijk op welke eigenschap je de objecten wil sorteren. Je had bijvoorbeeld ook best kunnen kijken naar de speler die de meeste wedstrijden heeft gewonnen. Het is van tevoren zeker niet duidelijk dat deze speler een complete lijst zou moeten hebben, maar dat blijkt wel het geval. Uitdaging: probeer dat zelf te laten zien!

We zullen nu kijken naar andere problemen, waarbij het ook niet direct duidelijk is welke eigenschap we zo klein of zo groot mogelijk willen hebben. Bij het volgende probleem is het in eerste instantie niet eens duidelijk dat het extremenprincipe ons überhaupt zou kunnen helpen!

Probleem 2. Gegeven zijn $2n$ punten in het vlak, geen drie hiervan op één lijn. De helft van deze punten zijn boerderijen, de andere helft waterputten. Bewijs dat je iedere boerderij precies aan één waterput kan koppelen, zo dat er geen twee boerderijen aan dezelfde waterput zijn gekoppeld en zodanig dat elke boerderij met de corresponderende put verbonden kan worden door middel van een kaarsrechte weg zonder dat deze wegen elkaar snijden.

Ook al zie je in eerste instantie misschien niet de overeenkomsten met probleem 1, zó anders is dit probleem niet. In probleem 1 zochten we uit een verzameling personen er eentje met de juiste eigenschap. In probleem 2 zoeken we uit alle mogelijke koppelingen de juiste. Nu moeten we alleen nog een eigenschap vinden waarop we willen en kunnen selecteren. Zo'n eigenschap is bijvoorbeeld de totale lengte van alle wegen. We willen boerderijen waarschijnlijk liever niet aan waterputten koppelen die ver weg zijn, want dan zullen er vast wegen gaan kruisen. Dus we bekijken de koppeling met de kleinste totale weglengte.

Stel dat deze koppeling toch niet voldoet. Dat betekent dus dat er boerderijen B_1 en B_2 zijn en waterputten W_1 en W_2, waarbij B_1 aan W_1 is gekoppeld en B_2 aan W_2 zo dat de lijnstukken B_1W_1 en B_2W_2 elkaar snijden in een punt S (zie figuur 2). We gaan nu bewijzen dat de totale weglengte korter wordt als we de koppeling van deze twee boerderijen en waterputten omdraaien, dus dat

$$|B_1W_1| + |B_2W_2| > |B_1W_2| + |B_2W_1|.$$

De linkerkant kunnen we schrijven als

$$(|B_1S| + |SW_1|) + (|B_2S| + |SW_2|).$$

Na wat geschuif met de termen, krijgen we

$$(|B_1S| + |SW_2|) + (|B_2S| + |SW_1|).$$

Figuur 2

De som van de eerste twee lengtes is de lengte van een niet rechtstreeks pad van B_1 naar W_2 en dat zal dus langer zijn dan $|B_1W_2|$. Zo geldt ook dat

$$|B_2S| + |SW_1| > |B_2W_1|.$$

Dus blijkbaar wordt de totale weg korter als we deze koppeling omdraaien. Maar dat is in tegenspraak met onze aanname dat deze koppeling de kleinste totale weglengte had. Blijkbaar voldoet de koppeling toch. Er bestaat dus inderdaad zo'n koppeling.

CIRKELVORMIG PARCOURS Een ander probleem met een verrassende toepassing van het extremenprincipe is het volgende:

Probleem 3. Er staan n identieke auto's op een cirkelvormig parcours. Samen hebben ze precies genoeg benzine om één auto een ronde te laten rijden. Bewijs dat er een auto is die een volledige ronde kan rijden, als deze onderweg mag bijtanken van de andere auto's.

Laten we eerst eens gaan kijken wat er precies gebeurt als we een van de auto's zouden laten gaan rijden. Uiteraard kan het zijn dat op een gegeven moment de tank leeg is en dat de auto stilvalt. Om dit te voorkomen, doen we gewoon even alsof de auto ook een negatieve hoeveelheid brandstof kan hebben en eigenlijk altijd kan doorrijden (daar doen wij wiskundigen niet moeilijk over). Het brandstofniveau in de tank ziet er dan als volgt uit (zie figuur 3): het zal dalen totdat de auto een volgende auto tegenkomt en dan zal het omhoogschieten. En als de auto weer bij zijn beginpositie is, zal hij nog precies '0 benzine' hebben, want er was in totaal precies genoeg benzine voor één ronde. Als de hoeveelheid nergens negatief wordt, dan hadden we toevallig de juiste auto gekozen en voldoet deze aan de voorwaarde in de opgave. Zo niet, dan zal er een punt zijn waarop deze auto een minimum aan brandstof heeft. Dit gebeurt dus vlak voordat er weer benzine bijkomt en dus op het moment dat de auto langs een andere auto kwam. Het is nu niet meer moeilijk om na te gaan dat deze andere auto de hele ronde kan rijden zonder stil te komen staan.

Meer onderwerpen die aan bod komen bij de finaletraining kun je vinden op de website van de Nederlandse Wiskunde Olympiade: www.wiskundeolympiade.nl/ft. ■

Figuur 3

PRIEMPROPPER

■ door Matthijs Coster

Zoals je weet, zijn priemgetallen alleen deelbaar door zichzelf en door 1. Hieronder zie je een lijst van 24 viercijferige priemgetallen. De cijfers van deze priemgetallen vormen weer kleinere priemgetallen. Zo kunnen we van 8923 de priemgetallen 89 en 23 maken, maar ook 89, 2 en 3. Deze kleinere priemgetallen moet je in het 6 × 6-rooster plaatsen. Elke rij (van links naar rechts) en elke kolom (van boven naar beneden) bevat twee van de priemgetallen uit de lijst. Bovendien mag in elk vakje slechts één priemgetal komen te staan van één of twee cijfers. Het getal 2273 kan dus over vier aansluitende vakjes verdeeld worden, want 2, 2, 7 en 3 zijn allemaal priem, maar ook in drie vakjes: 2, 2, 73, want 2 en 73 zijn beide priem. Het getal 9743 kan maar op één manier gesplitst worden: in 97 en 43. Dit getal zal dus in twee horizontaal of verticaal aansluitende vakjes terechtkomen.

Eén priemgetal hebben we er al ingezet. De oplossing verschijnt in het volgende nummer van *Pythagoras*. ■

			29	5	3

1327
1933
1973
2137
2273
2753
2953 ✔
3373
3547
3733
4337
4723
5297
6737
7193
7219
7417
7541
7573
7589
7753
8923
9743
9767

PYTHAGORAS OLYMPIADE

■ door Matthijs Coster, Eddie Nijholt en Harry Smit

Doe mee met de Pythagoras Olympiade! Elke aflevering bevat vier opgaven. De eerste twee zijn wat eenvoudiger; onder de goede inzendingen van leerlingen uit de klassen 1, 2 en 3 wordt een cadeaubon van Bol.com ter waarde van 20 euro verloot. De laatste twee zijn echte breinbrekers; onder de goede inzendingen van leerlingen (tot en met klas 6) wordt een bon van 20 euro verloot. Per aflevering wordt maximaal één bon per persoon vergeven.
Daarnaast krijgen leerlingen (tot en met klas 6) punten voor een *laddercompetitie,* waarmee eveneens een cadeaubon van Bol.com van 20 euro te verdienen valt. De opgaven van de onderbouw zijn 1 punt waard, de opgaven van de bovenbouw 2 punten. De leerling met de hoogste score in de laddercompetitie krijgt een bon. Zijn puntentotaal wordt weer op 0 gezet.
Bovendien kun je je via de bovenbouwopgaven plaatsen voor de finale van de Nederlandse Wiskunde Olympiade, mocht het via de voorronden niet lukken: aan het eind van elke jaargang worden enkele goed scorende leerlingen uitgenodigd voor de NWO-finale. Niet-leerlingen kunnen met de Pythagoras Olympiade meedoen voor de eer.

HOE IN TE ZENDEN? Inzendingen ontvangen we bij voorkeur per e-mail (getypt of een scan van een handgeschreven oplossing):
pytholym@gmail.com
Je ontvangt een automatisch antwoord zodra we je bericht hebben ontvangen.

Eventueel kun je je oplossing sturen naar
Pythagoras Olympiade, PWN
p.a. Centrum Wiskunde & Informatica
Postbus 94079
1090 GB Amsterdam

Voorzie het antwoord van een duidelijke toelichting (dat wil zeggen: een berekening of een bewijs). Vermeld je naam en adres; leerlingen moeten ook hun klas en de naam van hun school vermelden.
Je inzending moet bij ons binnen zijn vóór 30 juni 2013.

DE GOEDE INZENDERS VAN JANUARI 2013

250: Tara van Belkom (klas 3), Gymnasium Felisenum, Velsen-Zuid; Ben De Bondt (klas 6), Koninklijk Atheneum, Grimbergen; Marijke Bot (klas 4), Murmellius Gymnasium, Alkmaar; Thijs van Etten (klas 4), Murmellius Gymnasium, Alkmaar; Jelmer Hinssen (klas 2), Stedelijk Gymnasium, Nijmegen; Bram Jonkheer (klas 4), Emelwerda College, Emmeloord; Ritchie Keijsper (klas 4), Murmellius Gymnasium, Alkmaar; Jori Koolstra (klas 5), Willem Lodewijk Gymnasium, Groningen; Arie van der Kraan, Nuth; Jan Otto Kranenborg, Zwolle; Michelle Sweering (klas 5), Erasmiaans Gymnasium Rotterdam; Jelle den Uil (klas 4), Murmellius Gymnasium, Alkmaar; Paul van de Veen, Enschede; Rob van der Waall, Huizen; Bob Zwetsloot (klas 4), Teylingen College, locatie Leeuwenhorst, Noordwijkerhout.
251: Tara van Belkom (klas 3), Gymnasium Felisenum, Velsen-Zuid; Ben De Bondt (klas 6), Koninklijk Atheneum, Grimbergen; Matthijs Buringa (klas 4), Murmellius Gymnasium, Alkmaar; Jelmer Hinssen (klas 2), Stedelijk Gymnasium, Nijmegen; Bram Jonkheer (klas 4), Emelwerda College, Emmeloord; Alex Keizer (klas 2), Murmellius Gymnasium, Alkmaar; Bastiaan van der Kooij (klas 4), Murmellius Gymnasium, Alkmaar; Jori Koolstra (klas 5), Willem Lodewijk Gymnasium, Groningen; Jan Otto Kranenborg, Zwolle; Lennart Muijres (klas 2), Stedelijk Gymnasium, Nijmegen; Michelle Sweering (klas 5), Erasmiaans Gymnasium Rotterdam; Jelle den Uil (klas 4), Murmellius Gymnasium, Alkmaar; Paul van de Veen, Enschede; Eline Vounckx (klas 5), Sint-Pieterscollege, Leuven; Rob van der Waall, Huizen; Art Waeterschoot (klas 4), H. Pius X-instituut, Antwerpen; Bob Zwetsloot (klas 4), Teylingen College, locatie Leeuwenhorst, Noordwijkerhout.
252: Kees Boersma, Vlissingen; Ben De Bondt (klas 6), Koninklijk Atheneum, Grimbergen; Ronen Brilleslijper (klas 5), JSG Maimonides, Amsterdam; Bram Jonkheer (klas 4), Emelwerda College, Emmeloord; Arie van der Kraan, Nuth; Jan Otto Kranenborg, Zwolle; Michelle Sweering (klas 5), Erasmiaans Gymnasium Rotterdam; Paul van de Veen, Enschede; Eline Vounckx (klas 5), Sint-Pieterscollege, Leuven; Rob van der Waall, Huizen; Bob Zwetsloot (klas 4), Teylingen College, locatie Leeuwenhorst, Noordwijkerhout.
253: Kees Boersma, Vlissingen; Ben De Bondt (klas 6), Koninklijk Atheneum, Grimbergen; Ronen Brilleslijper (klas 5), JSG Maimonides, Amsterdam; Jori Koolstra (klas 5), Willem Lodewijk Gymnasium, Groningen; Arie van der Kraan, Nuth; Jan Otto Kranenborg, Zwolle; Michelle Sweering (klas 5), Erasmiaans Gymnasium Rotterdam; Paul van de Veen, Enschede; Eline Vounckx (klas 5), Sint-Pieterscollege, Leuven; Rob van der Waall, Huizen; Art Waeterschoot (klas 4), H. Pius X-instituut, Antwerpen; Bob Zwetsloot (klas 4), Teylingen College, locatie Leeuwenhorst, Noordwijkerhout.
Cadeaubonnen: Jelmer Hinssen en Ronen Brilleslijper.
Stand laddercompetitie: Ben De Bondt (24 p; cadeaubon), Michelle Sweering (22 p), Bob Zwetsloot (8 p), Bram Jonkheer (7 p), Tara van Belkom (5 p), Eline Vounckx (5 p), Ronen Brille-slijper (4 p), Jori Koolstra (4 p), Elien Cambie (3 p), Jonas Cambie (3 p), Jia-Jia ter Kuile (3p), Marleen Meliefste (3 p), Frenk Out (3 p), Art Waeterschoot (6 p), Matthijs Buringa (2 p), Jelmer Hinssen (2 p), Lennart Muijres (2 p), Jelle den Uil (2 p), Luka Zwaan (2 p), Marijke Bot (1 p), Thijs van Etten (1 p), Ritchie Keijsper (1 p), Alex Keizer (1 p), Bastiaan van der Kooij (1 p), Rein Lukkes (1 p), Alexander Vermeersch (1 p).
Noot van de redactie: in het vorige nummer zijn Arie van der Kraan (opgave 246 en 249), Jia-Jia ter Kuile (klas 4 Barlaeusgymnasium Amsterdam; 246 en 248), Rein Lukkes (klas 5 Sint-Maartenscollege Voorburg; 246) en Rob van der Waall (246, 247, 249) per abuis niet vermeld. Onze excuses.

OPGAVE 258

Hieronder zie je het logo van een frisdrankfabrikant, dat geheel is opgebouwd uit cirkelbogen. De drie zwarte punten en de drie hoekpunten van de elk rood vlak vormen gelijkzijdige driehoeken. Bepaal de verhouding tussen het blauwe en het rode deel van het oppervlak..

OPGAVE 259

Erik doet er 2 uur over om alle uitnodigingen te schrijven voor het klassenfeest. Karin doet dat in 1 uur. Ze besluiten uiteindelijk dit karwei gezamenlijk op te pakken. Hoe lang zijn ze nu bezig?

OPGAVE 260

Peter heeft zestien lucifers van 3,6 cm lang. Vijftien daarvan heeft hij parallel naast elkaar gelegd, op zo'n manier dat de afstand tussen de twee buitenste lucifers 14 cm bedraagt. Laat zien dat hij de zestiende lucifer overdwars op minstens vier van de parallelle tegelijk kan leggen, ongeacht de verdeling van de dertien binnenste lucifers. Je mag aannemen dat de lucifers dikte 0 hebben.

OPGAVE 261

Het getal 420 heeft 24 delers, namelijk 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 12, 14, 15, 20, 21, 28, 30, 35, 42, 60, 70, 84, 105, 140, 210 en 420. Onder deze delers bevinden zich 7 opeenvolgende getallen (1, 2, 3, 4, 5, 6 en 7). Bepaal alle positieve, gehele getallen x waarvoor geldt:

- x heeft precies 100 delers;
- onder die delers bevinden zich minimaal 10 opeenvolgende getallen.

OPLOSSING 250

Achter het Wiskundemuseum bevindt zich een vierkant plein van 40 bij 40 meter. Het plein heeft rode tegels, met een pad in gele tegels. Zie onderstaande figuur. Hoeveel vierkante meter gele tegels heeft het plein?

Oplossing. De oppervlakken van de vier rode driehoeken zijn gelijk. We berekenen de oppervlakte van $\triangle DES$. Merk op dat $\triangle DES$ gelijkvormig is met $\triangle CED$. Voor $\triangle CED$ geldt $CD = 40$, $DE = 30$ en met de stelling van Pythagoras vinden we $CE = 50$. Voor $\triangle DES$ geldt $DE : DS : ES = CE : CD : DE$, ofwel $50 : 40 : 30 = 30 : 24 : 18$. Voor de oppervlakte van $\triangle DES$ vinden we $\frac{1}{2} \cdot 18 \cdot 24 = 216$. De vier rode driehoeken hebben samen dus oppervlakte $4 \cdot 216 = 864$. De totale oppervlakte van de gele paden is dus $1600 - 864 = 736$ m^2.

OPLOSSING 251

Je beschikt over een grote zak met dukaten. In een lange gang staat een rij kisten opgesteld, genummerd 1, 2, 3, ... De dukaten ga je verdelen over de kisten volgens de volgende regels. In de eerste ronde gooi je een dukaat in kist 1. In de tweede ronde gooi je een dukaat in de kisten 2, 3, 4, 5. In de derde ronde gooi je een dukaat in de kisten 3, 4, 5, ..., 11. In het algemeen: in de n-de ronde gooi je een dukaat in de kisten n tot en met $n^2 + n - 1$.
Na verloop van tijd zal kist 2013 niet verder worden gevuld. Hoeveel dukaten bevinden zich dan in kist 2013?

Oplossing. In zet n wordt er een dukaat in de kisten n tot en met $n^2 + n - 1$ gegooid. Wat we dus moeten vinden, is het aantal gehele getallen n waarvoor geldt $n \le 2013 \le n^2 + n - 1$. De eis $2013 \le n^2 + n - 1$ komt neer op

$$n \ge \frac{-1+\sqrt{8057}}{2} \approx 44{,}4,$$

waarbij we ook gebruikmaken van het feit dat n positief moet zijn. We zoeken dus het aantal gehele getallen n waarvoor geldt $44{,}4 \le n \le 2013$ en dus $45 \le n \le 2013$. Dit zijn $2013 - 45 + 1 = 1969$ getallen, en dit is dus het aantal dukaten in kist 2013.

OPLOSSING 252

Gegeven is een gelijkzijdige driehoek ABC. De lengte van de zijden is 1. Van een punt S op zijde AB wordt een laserstraal naar binnen geschoten onder een hoek van 45°, zie onderstaande figuur. Na één keer tegen de beide andere zijden te kaatsen, komt de straal weer precies terug in het punt S. Wat is de afstand AS?

Oplossing. We breiden de figuur uit door de driehoek eerst in zijde BC en vervolgens in zijde $A'C$ te spiegelen, zie onderstaande figuur. Door te spiegelen in BC gaat de laserstraal in het spiegelbeeld rechtdoor vanuit T naar U'. Dit geldt ook voor de spiegeling in $A'C$: de laserstraal gaat rechtdoor vanuit U' naar S'. We hebben nu een lijnstuk SS' getekend en er geldt: $AS = A'S'$, $\angle S'SP = 45°$ en $\Delta SS'P$ is een rechthoekige, gelijkbenige driehoek. De lengte van AS noemen we x. Dan geldt dat de lengte van $S'P$ gelijk is aan $\frac{1}{2}\sqrt{3}x + \frac{1}{2}\sqrt{3}$ en de lengte van SP is $\frac{3}{2} - \frac{3}{2}x$. Stellen we dit aan elkaar gelijk, dan vinden we $x = 2 - \sqrt{3}$.

OPLOSSING 253

Toon aan dat voor elk positief geheel getal n geldt:

$$n! \le \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

Oplossing. Het *rekenkundig gemiddelde* van de getallen 1, 2, 3, ..., n is gelijk aan

$$\frac{1+\cdots+n}{n} = \frac{n(n+1)}{2n} = \frac{n+1}{2}.$$

Het *meetkundig gemiddelde* is gelijk aan

$$\sqrt[n]{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n} = (n!)^{\frac{1}{n}}.$$

Uit de *ongelijkheid van het rekenkundig-meetkundig gemiddelde* (zie het artikel 'Je ongelijk bewijzen' in het januarinummer, het nummer waarin ook deze Pythagoras-Olympiade-opgave stond) volgt nu dat

$$(n!)^{\frac{1}{n}} \le \frac{n+1}{2},$$

waaruit het gestelde volgt.

OPLOSSINGEN REGELMATIGE ZEVENHOEKEN

Opdracht 1. Bedenk dat de hoeken met een 2 en een 5 bij elkaar 180° zijn. Hetzelfde geldt voor de hoeken met een 3 en een 4. De niet ingevulde hoeken zijn door rotatie- en spiegelsymmetrie te vinden.

Opdracht 2. Er is nog één regelmatige zevenhoek te vinden waarvan de zijden van de zevenhoek delen van diagonalen zijn (rood). Als je toestaat dat de zijden van de zevenhoek geen delen van diagonalen zijn, dan zijn er nog drie zevenhoeken te vinden (blauw en groen).

Opdracht 4. Bekijk de figuur hierboven bij opdracht 2. Op de buitenste rode zevenhoek *binnen* de oorspronkelijke zevenhoek liggen 3×7 snijpunten. Op de twee binnenste zevenhoeken liggen er $2 \times 1 \times 7$. In totaal vinden we dus $5 \times 7 = 35$ snijpunten.

PYTHAGORAS

52ste jaargang nummer 5
april 2013
ISSN 0033 4766

***Pythagoras* stelt zich ten doel jongeren kennis te laten maken met de leuke en uitdagende kanten van wiskunde. *Pythagoras* richt zich tot leerlingen van vwo en havo en alle anderen die jong van geest zijn.**

Internet www.pythagoras.nu

Hoofdredacteur Derk Pik

Eindredacteur Alex van den Brandhof

Redactie Matthijs Coster, Jeanine Daems, Jan Guichelaar, Klaas Pieter Hart, Paul Levrie, Marc Seijlhouwer

Vormgeving Grafisch Team Digipage BV, Leidschendam

Druk Drukkerij Ten Brink, Meppel

Uitgever Koninklijk Wiskundig Genootschap

Verantwoordelijk uitgever Chris Zaal

Lezersreacties en kopij
Bij voorkeur per e-mail; lezersreacties naar Jan Guichelaar, jan@pythagoras.nu en kopij naar Derk Pik, derk@pythagoras.nu. Eventueel per post naar Jan Guichelaar, Pedro de Medinalaan 162, 1086 XR Amsterdam.

Abonnementen, bestellingen en mutaties
Drukkerij Ten Brink
Abonnementenadministratie
Postbus 41
7940 AA Meppel
Telefoon: 088 226 52 58
E-mail:
abonnementen@pythagoras.nu

Abonnementsprijs
(6 nummers per jaargang)
€ 26,00 (Nederland),
€ 29,00 (buitenland),
€ 17,00 (groepsabonnement NL),
€ 18,00 (groepsabonnement buitenland),
€ 26,00 (geschenkabonnement NL),
€ 29,00 (geschenkabonnement buitenland).
Een geschenkabonnement stopt automatisch na één jaar. Overige abonnemten gelden tot wederopzegging. Zie www.pythagoras.nu voor verdere toelichtingen.

Aan dit nummer werkten mee
Alex van den Brandhof (alex@pythagoras.nu),
Matthijs Coster (matthijs@pythagoras.nu),
Jeanine Daems (jeanine@pythagoras.nu),
Jan Guichelaar (jan@pythagoras.nu),
Klaas Pieter Hart (kp@pythagoras.nu),
Paul Levrie (paul@pythagoras.nu),
Julian Lyczak (julian@wiskundeolympiade.nl),
Eddie Nijholt (eddie@pythagoras.nu),
Derk Pik (derk@pythagoras.nu),
Hans de Rijk (bruno_ernst@planet.nl),
Frank Roos (fd_r@yahoo.com),
Marc Seijlhouwer (marc@pythagoras.nu),
Harry Smit (h.j.smit@students.uu.nl).

Pythagoras wordt mede mogelijk gemaakt door de bijdragen van de onderstaande instituten en instellingen.

DELEN

Wat hem nog van vroeger heugde
was een handbeschilderd bord
met de wijze tekst dat vreugde
die men deelt verdubbeld wordt.

Dus hij deelde koek en snoepjes
braaf met Jan en alleman,
eerlijk, evenveel, in groepjes…
’t werd er altijd minder van.

Speelgoed deelde hij een poosje
met zijn zusje. Tot zijn spijt
nam ze zelfs zijn nieuwste doosje
met tien pijpjes wascokrijt.

En zijn bloed begon te koken
toen ze dat terugbracht want
ieder krijtje was gebroken,
twintig brokken in zijn hand.

Na zijn angstaanjagend zwijgen
wees zijn zus hem op de spreuk.
Als je delend meer wilt krijgen,
moet je delen door een breuk.

Marjolein Kool

Uit: Drs. P & Marjolein Kool, *Wis- en natuurlyriek*, p. 119
(Nijgh & Van Ditmar, 2000)