PYTHAGORAS

WISKUNDETIJDSCHRIFT VOOR JONGEREN

52ste JAARGANG - NUMMER 6 - JUNI 2013

Schilderij

Kom naar de Last Minute Wiskunde

Wiskunde kun je doen om de schoonheid en abstractie van de wiskunde zelf. Maar ook de praktische problemen en toepassingen vormen vaak een grote uitdaging. Een combinatie van beide leidt vaak tot spectaculaire resultaten. Zit je in 6 VWO en wil je meer weten over wiskunde studeren aan de universiteit Leiden? Kom dan op **vrijdag 21 juni** naar de Last Minute Wiskunde van de faculteit Wiskunde en Natuurwetenschappen.
Kijk voor meer informatie op *unileidenbachelors.nl/wiskunde*

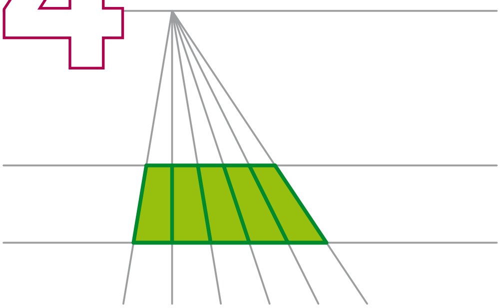
Universiteit Leiden
Wiskunde en Natuurwetenschappen

Bij ons leer je de wereld kennen

naar de website

INHOUD

4



20

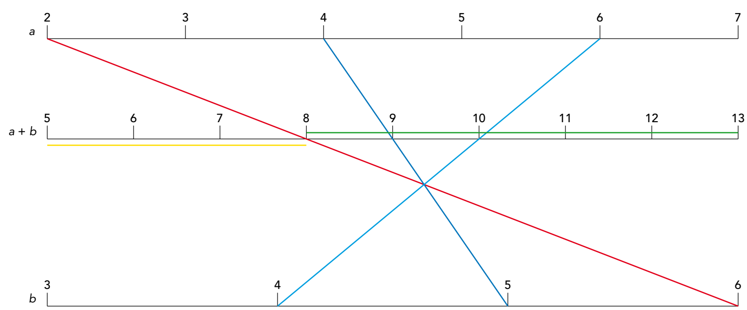
VIERHOEKEN IN PERSPECTIEF

De derde aflevering in onze serie over perspectieftekenen gaat over vormen. Kun je aan een vierhoek in perspectief zien of het in het echt een rechthoek, vierkant, ruit, parallellogram of een gewone, niet-bijzondere vierhoek is?

HOMERUN

In 1974 sloeg honkbalspeler Hank Aaron zijn 715de homerun en versloeg daarmee het record van 714, dat sinds 1935 op naam van Babe Ruth stond. Sindsdien is de wiskunde een begrip rijker: Ruth-Aaron-paren.

14



NOMOGRAMMEN MAKEN

Een nomogram is een grafisch hulpmiddel om berekeningen handig uit te voeren. Door het trekken van een rechte lijn bepaal je bijvoorbeeld je eigen gewicht op de maan. Leer hoe je zelf een nomogram kunt maken!

EN VERDER

Omslagillustratie: Alex van den Brandhof

NIVEAUBALKJES Pagina's met één of meer zwarte balkjes (onder de paginanummering) geven de moeilijkheidsgraad aan. Eén balkje: lastig. Twee balkjes: vereist wiskundekennis uit de vijfde of zesde klas. Drie balkjes: net iets moeilijker.

KLEINE NOOTJES

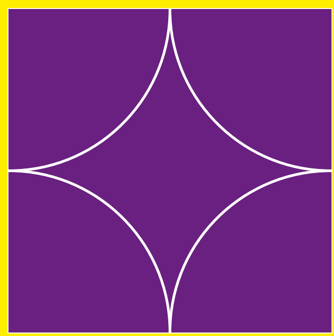
■ door Jan Guichelaar

AANDEELTJE

Piet koopt een aandeeltje Pythagoras voor € 20. Het eerste jaar maakt hij 25% winst. Het tweede jaar duikelt de koers met 50%. Na het derde jaar verkoopt hij zijn aandeeltje weer voor € 20. Hoeveel procent is de koers in dat jaar gestegen?

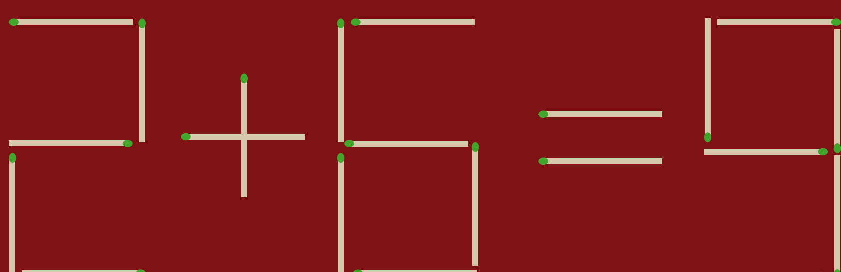
KWARTCIRKELSTERTAART

Van een vierkante taart worden bij de hoeken kwartcirkelvormige taartstukken afgesneden, zoals in het plaatje is te zien. Welk taartstuk is het grootst: een hoekstuk of het stervormige stuk in het midden?

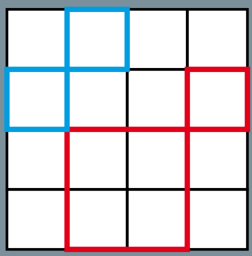


GOOCHELEN MET LUCIFERS

Maak de vergelijking kloppend door één lucifer te verplaatsen. Lukt dit ook zonder de 2 aan te tasten?



Kleine nootjes zijn eenvoudige opgaven die weinig of geen wiskundige voorkennis vereisen om opgelost te kunnen worden. De antwoorden vind je in het volgende nummer van *Pythagoras*.



ACHTBAAN

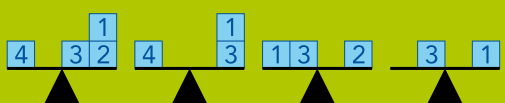
Op een rooster kun je een 'achtje' lopen bestaande uit twee vierkanten die precies één hoekpunt gemeenschappelijk hebben. Hiernaast zijn twee mogelijke achtjes getekend. Hoeveel verschillende achtjes kun je tekenen op een rooster van 5×5 punten?

GETAL SPLITSEN

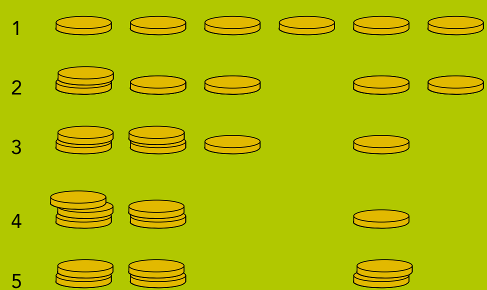
Splits een getal *S* in vijf (niet per se even grote) delen. Vermenigvuldig het eerste deel met 2, deel het tweede deel door 2, tel bij het derde deel 2 op, trek van het vierde deel 2 af, kwadrateer het vijfde deel. Tel de antwoorden op en kom weer op *S* uit. Welk getal is *S*?

OPLOSSINGEN KLEINE NOOTJES NR. 5

Evenwichten. Enkele oplossingen zie je hieronder.



Centen springen.



Getallen keren.
$153 = 3 \times 51$, $126 = 6 \times 21$, $688 = 8 \times 86$.

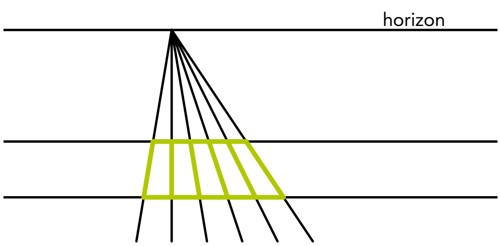
1 tot en met 9 is 10.
$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 : 6 + 7 - 8 - 9 = 10$.

Vierkant splitsen.
Een vierkant van $5 \times 5 = 25$ vierkantjes kun je splitsen in twee rechthoeken met omtrek 20: 1×9 en 2×8.
Een vierkant van $9 \times 9 = 81$ vierkantjes kun je splitsen in drie rechthoeken met omtrek 36: 1×17, 2×16 en 2×16.
Een vierkant van $29 \times 29 = 841$ vierkantjes kun je splitsen in drie *verschillende* rechthoeken met omtrek 116: 1×57, 2×56 en 16×42.

Het perspectieftekenen is deze jaargang een thema in *Pythagoras*. In de vorige afleveringen (november en februari) heb je kunnen lezen over evenwijdige lijnen en over afstanden in perspectief. Nu gaat het over vormen. Kun je aan een vierhoek in perspectief zien of het in het echt een rechthoek, vierkant, ruit, parallellogram of een gewone, niet-bijzondere vierhoek is?

■ door Jeanine Daems

VIERHOEKEN IN PERSPECTIEF



Figuur 1

In de vorige afleveringen hebben we gezien dat afstanden in perspectief meestal niet bewaard blijven. Ook hoeken veranderen natuurlijk: de meeste lijnen die in het echt evenwijdig lopen, lopen in een perspectieftekening naar elkaar toe (behalve als de lijnen ook nog evenwijdig lopen aan de denkbeeldige glasplaat, het tafereel).

Maar stel nu dat je een vierhoek ziet in perspectief, hoe kom je er dan achter of het een vierkant is of niet?

Kijk eens naar de perspectieftekening in figuur 1. De tekening stelt een begin van een tegelvloer voor die uit een heleboel dezelfde tegels bestaat. Alle lijnen lopen dus in het grondvlak.

Opdracht 1. Als de tegels vierkanten zijn, hoe hoog worden de tegels in de rij boven de getekende tegels dan? En als de tegels rechthoeken zijn?

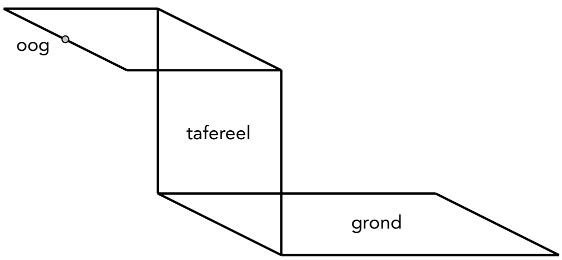
Je ziet: voor het verder tekenen maakt het niet uit of de tegels rechthoeken of vierkanten zijn. Aan de tekening zelf kun je eigenlijk niet meteen zien wat voor vierhoeken er op staan, het zouden zelfs nog parallellogrammen kunnen zijn. Het enige dat we kunnen zien, immers, is dat in deze vierhoeken de overstaande zijden evenwijdig lopen. Over de hoeken en lengtes van zijden weten we nog niets.

De belangrijkste vraag is dus: kun je op de een of andere manier aan een vierhoek in perspectief zien of het een vierkant is? Het – enigszins verrassende – antwoord is nee. Dat hangt namelijk af van het standpunt van de tekenaar, van de plaats van het oog. Het blijkt dat *elke* vierhoek in het grondvlak in een perspectieftekening in principe een vierkant zou kunnen voorstellen, vanuit een bepaald standpunt gezien.

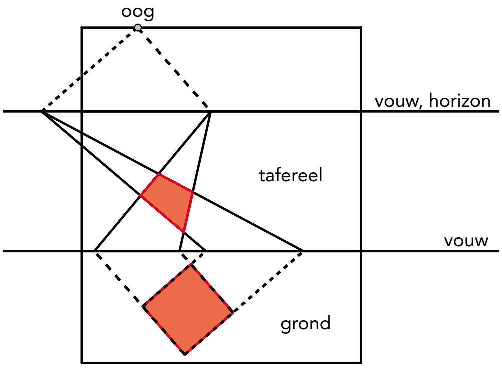
Als deze bewering je wat onwaarschijnlijk voorkomt, kun je het volgende eens proberen. Leg een vierkant (een vouwblaadje, bijvoorbeeld) plat op tafel. Maak nu van verschillende standpunten uit een foto. Probeer het vierkant als zoveel mogelijk verschillende vormen op de foto te krijgen.

EEN VIERHOEK IN HET DRIELUIK Om te begrijpen hoe elke vierhoek in perspectief in het echt een vierkant zou kunnen zijn, moeten we even terug naar het drieluik waarover het in aflevering 1 ging (zie figuur 2). Het middendeel van het drieluik is het tafereel, de perspectieftekening. Het onderste deel is het grondvlak, waar de figuur in het echt in ligt. Het bovenste deel is een vlak dat – als het drieluik niet uitgeklapt is – evenwijdig aan het grondvlak loopt. In dat vlak ligt het oog van de tekenaar.

Nu is de vraag hoe de figuur in het tafereel eruit kan zien als in het grondvlak een vierkant ligt. Fi-



Figuur 2



Figuur 3

guur 3 toont alvast een voorbeeld, waarbij het drieluik uitgeklapt is.

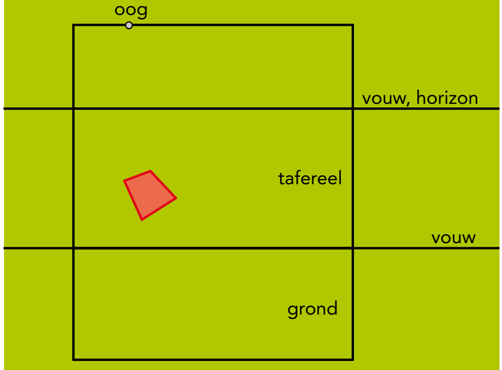
Wanneer is een vierhoek een vierkant? De definitie die meestal gebruikt wordt is: een vierkant is een vierhoek met vier gelijke zijden en vier rechte hoeken. Een probleem bij deze definitie voor ons is natuurlijk dat zowel lengtes als hoeken veranderen in een perspectieftekening. Maar wat betreft de hoeken komt het drieluik van pas: omdat de hoeken in het vierkant op de grond recht zijn, is de hoek tussen de twee lijnen die vanuit het oog vertrekken vanzelf ook 90° (die twee lijnen lopen immers evenwijdig aan de zijden van het vierkant).

Met rechte hoeken kunnen we dus wel iets in perspectief: in het drieluik kunnen we ze herkennen. Niet in het tafereel, maar wel bij het oog. Maar wat betreft de zijdelengtes komen we zo niet verder.

Opdracht 2. Teken een vierkant en een rechthoek en teken in allebei de figuren de beide diagonalen. Die diagonalen maken een hoek met elkaar. Wat kan de hoek tussen de diagonalen zijn bij een vierkant? En bij een rechthoek?

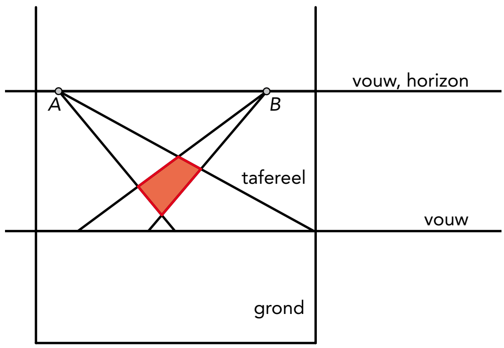
Gelukkig kunnen we een vierkant dus ook met behulp van alleen rechte hoeken definiëren! Een vierhoek is een vierkant als de vierhoek vier rechte hoeken heeft en de diagonalen loodrecht op elkaar staan. En dat zijn eisen die je wel allebei kunt controleren in het drieluik.

Opdracht 3. Bekijk figuur 4.
a. Teken de verdwijnpunten van de zijden van de vierhoek. Als je het netjes doet, hebben de overstaande zijden steeds hetzelfde verdwijnpunt op de horizon (zodat je al weet dat de overstaande zijden in werkelijkheid evenwijdig zijn).
b. Teken nu de lijnen van die twee verdwijnpunten naar het oog. Meet de hoek die die twee lijnen vormen. Is die hoek recht? Wat kun je

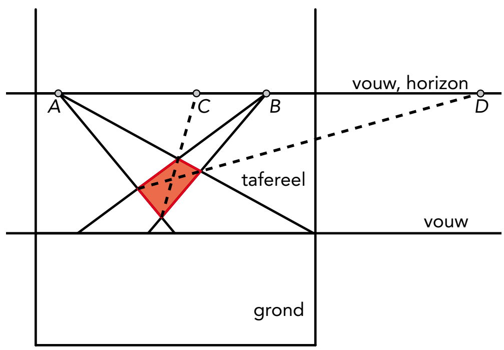


Figuur 4

daaruit concluderen over de vierhoek in werkelijkheid?
c. Teken in het tafereel de diagonalen van de vierhoek en hun verdwijnpunten op de horizon. Trek ook de lijnen van die twee verdwijnpunten naar het oog. Meet de hoek die die twee lijnen vormen. Is die hoek recht? Wat kun je daaruit concluderen over de vierhoek in werkelijkheid?
d. Reconstrueer de vierhoek in het grondvlak. Kijk goed in het voorbeeld (figuur 3) welke lijnen je moet tekenen om de zijden van de werkelijke vierhoek te kunnen vinden. Kloppen je antwoorden bij c en d?



Figuur 5



Figuur 6

WAAR LIGT HET OOG? Onze oorspronkelijke vraag ging echter niet over een uitgeklapt drieluik, maar over de situatie dat je alleen een vierhoek in perspectief ziet (oftewel: het middelste deel van het drieluik). In de oplossing van het probleem hebben we opeens ook de andere delen gebruikt, in het bijzonder iets heel essentieels: de plaats van het oog. Maar als je alleen een perspectieftekening voor je neus hebt liggen, weet je helemaal niet waar het oog was toen de tekening op het tafereel geprojecteerd werd. En zonder verdere informatie kun je daar ook niet achter komen.

Het wonderbaarlijke is nu, dat we kunnen laten zien dat *elke* vierhoek in perspectief in het echt een vierkant *kan zijn*. Met andere woorden: bij zo'n perspectieftekening kun je altijd je oog zó houden, dat de vierhoek een vierkant lijkt. Bij elke vierhoek kunnen we dus een drieluik tekenen en een plek voor het oog vinden zodat de vierhoek vanuit die plek gezien een vierkant is.

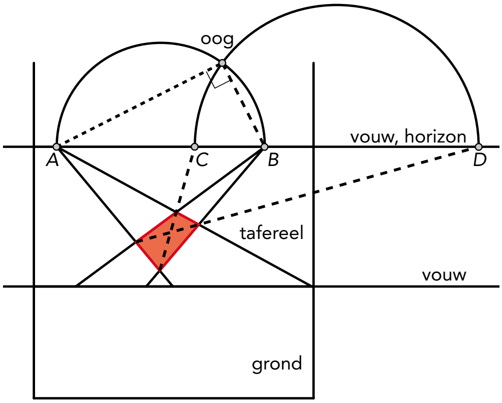
In het drieluik in figuur 5 staan een vierhoek en een horizon waaraan we kunnen zien dat aan één voorwaarde al voldaan is: de overstaande zijden van de vierhoek zijn in het echt evenwijdig (want ze hebben hetzelfde verdwijnpunt op de horizon).

De verdwijnpunten A en B zijn belangrijk. En ook de verdwijnpunten van de diagonalen van de vierhoek, C en D, hebben we dus nodig. Je ziet ze in figuur 6.

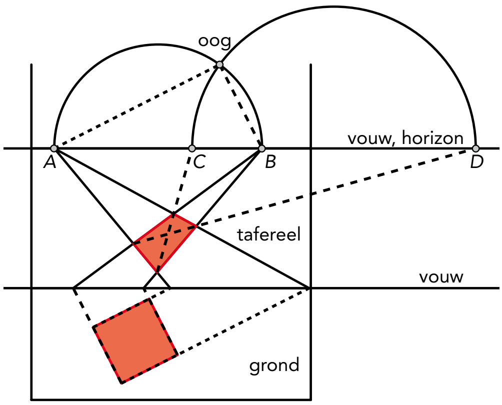
We gaan nu namelijk een plek zoeken voor het oog O, zodanig dat de lijnen AO en BO loodrecht op elkaar staan, en ook de lijnen CO en DO. Want als AO en BO loodrecht op elkaar staan, dan staan ook de zijden van onze vierhoek in werkelijkheid loodrecht op elkaar. En als dan ook nog lijnen CO en DO loodrecht op elkaar staan, staan ook de diagonalen van onze vierhoek loodrecht op elkaar. En dan is het dus een vierkant.

Bij het zoeken naar zo'n plek voor het oog gebruiken we de *stelling van Thales*: als AB een middellijn van een cirkel is en punt X een willekeurig punt op die cirkel, dan is hoek AXB een rechte hoek (zie ook pagina 26).

Het is dus handig om ons oog te zoeken op een



Figuur 7

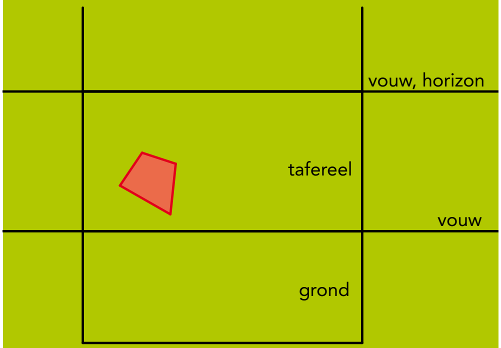


Figuur 8

halve cirkel die *AB* als middellijn heeft. Dan is de hoek *AOB* namelijk vanzelf recht volgens de stelling van Thales. En ons oog moet om dezelfde reden ook op de cirkel met *CD* als middellijn liggen! Nu ligt de plek voor het oog vast: het snijpunt van de beide halve cirkels boven de horizon (zie figuur 7). Vanuit die plek gezien, is de vierhoek in het tafereel een vierkant.

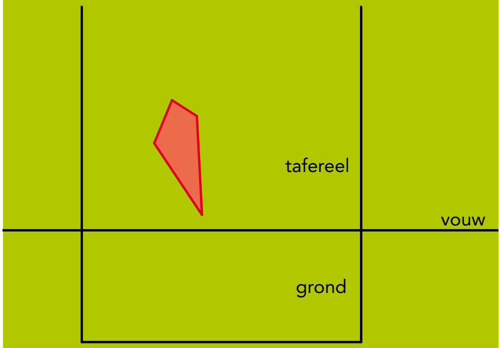
We controleren de plaats van het oog door de vierhoek in het grondvlak te reconstrueren (zie figuur 8). Denk eraan dat de lijnen in het grondvlak dus evenwijdig moeten lopen aan *OA* en *OB*, want die richtingen corresponderen met de zijden van het vierkant.

Opdracht 4. Construeer bij de vierhoek in figuur 9 het oog, zodanig dat de vierhoek op het grondvlak een vierkant is. Controleer je antwoord door de vierhoek in het grondvlak te reconstrueren.



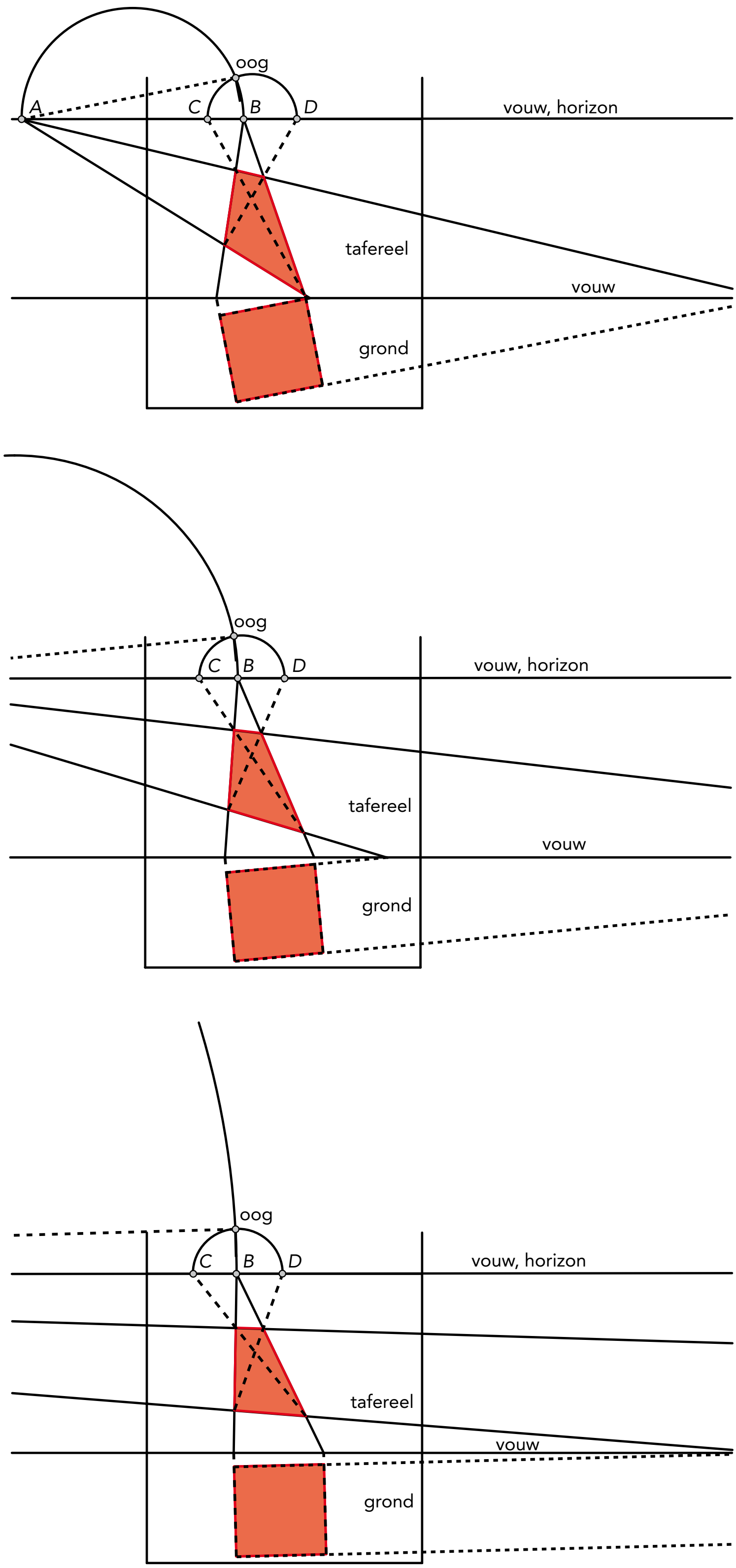
Figuur 9

Opdracht 5. Construeer bij de vierhoek in figuur 10 het oog, zodanig dat de vierhoek op het grondvlak een vierkant is. Bedenk eerst hoe je er achter kunt komen waar de horizon moet liggen!



Figuur 10

TEGELVLOER Maar hoe moeten we nu te werk gaan bij de tegelvloer waarmee dit artikel begon? Stel dat de tegelvloer in figuur 1 uit vierkante te-


oog
A
C
B
D
vouw, horizon
tafereel
vouw
grond
oog
C
B
D
vouw, horizon
tafereel
vouw
grond
oog
C
B
D
vouw, horizon
tafereel
vouw
grond

Figuur 11

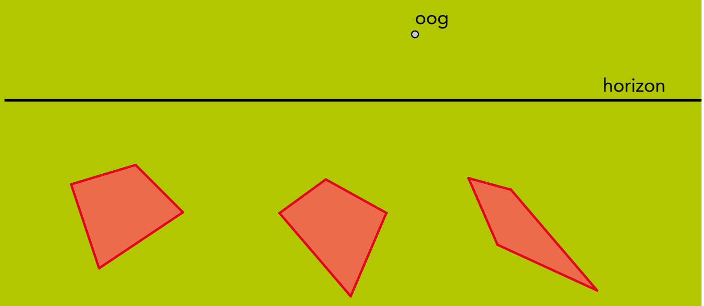
gels bestaat, waar zou dan het oog moeten liggen? Het antwoord ligt niet direct voor de hand: onze methode van zojuist loopt al snel mis. Omdat de bovenste en onderste lijn van elke vierhoek in het tafereel evenwijdig lopen, lukt het niet om een verdwijnpunt te vinden. En dat hadden we nou juist nodig om die cirkelboog van *A* naar *B* te kunnen tekenen. Nu is er echter geen punt *A*.

Laten we daarom eens kijken wat er gebeurt als de zijden van de vierhoek steeds evenwijdiger lopen (zie figuur 11). Je ziet dat naarmate de zijden meer dezelfde richting krijgen, het verdwijnpunt *A* verder naar links op de horizon terechtkomt (al snel ver buiten het plaatje). Op lijnstuk *AB* moeten we de halve cirkelboog tekenen. Je ziet dat die cirkelboog steeds groter wordt. De middellijn *AB* wordt tenslotte ook steeds groter.

Dat betekent dat die cirkelboog op *AB* in punt *B* eigenlijk steeds meer op een rechte lijn omhoog gaat lijken. Op het moment dat de zijden van de vierhoek in het tafereel echt horizontaal lopen, zoals in de tekening van de tegelvloer, ligt het oog dus recht boven punt *B*. En ook gewoon nog op die tweede cirkelboog op middellijn *CD*, natuurlijk. ■

Opdracht 6. Teken in figuur 1 de plaats van het oog als de tegelvloer uit vierkanten bestaat. Wat weet je van de plaats van het oog als de tegelvloer uit rechthoeken zou bestaan? (Antwoord op pagina 33.)

Opdracht 7. Figuur 12 toont een perspectieftekening van drie vierhoeken. De plek van het oog is al gegeven. Onderzoek welke vierhoeken je ziet. Kies uit: vierkant, rechthoek, ruit, parallellogram, trapezium of een niet-bijzondere vierhoek. Vul eerst onderstaand schema van eigenschappen in. (Antwoord op pagina 33.)



Figuur 12

vierhoek	*overstaande zijden evenwijdig?*	*zijden loodrecht op elkaar?*	*diagonalen loodrecht op elkaar?*
trapezium	1 paar wel, 1 paar niet	nee	nee
parallellogram			
ruit			
rechthoek			
vierkant			
niet-bijzondere vierhoek	nee	nee	nee

ZUIDPOOLPRIJSVRAAG

■ door Matthijs Coster

Het is drie inzenders gelukt een strategie te formuleren als antwoord op onze prijsvraag ‘Expeditie Zuidpool’. Dat zijn er niet veel, maar deze drie zijn een heel eind gekomen en verdienen daarom een compliment voor de kwaliteit van hun bijdrage. In dit artikel bespreken we de oplossingen; de opdrachten zijn terug te vinden in het novembernummer (en op onze website).

In het januarinummer merkten we al op dat 1 drager die op een voedseldepot stond met vier maaltijden 2 dagen later twee maaltijden kon hebben verplaatst naar het volgende voedseldepot, terwijl hij de andere twee maaltijden had opgegeten. Je kunt het ook op een andere manier bekijken. Telkens als je maaltijden naar een volgend voedseldepot brengt, halveert het aantal maaltijden dat je overhoudt. Om één maaltijd te brengen naar voedseldepot 45 (de Zuidpool), moet je op het basiskamp 2^{45} = 35.184.372.088.832 (ruim 35 biljoen) maaltijden gereed hebben liggen. Dit is een ruwe schatting.

ÉÉN DRAGER Alle drie de inzenders komen tot de conclusie dat de leider het beste zo lang mogelijk op het basiskamp moet vertoeven, terwijl de dragers overal maaltijden plaatsen. Als het zover is, gaat de leider op weg en eet hij bij alle voedseldepots één maaltijd op de heenweg en één op de terugweg. In alle voedseldepots moeten twee maaltijden liggen, alleen op de Zuidpool zelf hoeft slechts één maaltijd te liggen.

Martijn Bak, die zijn oplossing al in december stuurde, constateert dat als er op de opeenvolgende depots steeds twee maaltijden liggen, een drager met drie maaltijden deze maaltijden kan nuttigen op zijn heen- en terugweg. De drager kan vervolgens lopen naar een volgend depot, daar één maaltijd eten en de twee andere maaltijden achterlaten.

We noteren het aantal maaltijden op de verschillende voedseldepots als $(a, b, c, d, e, ...)$, waarbij a het aantal maaltijden op het eerste depot is, b het aantal maaltijden op het tweede depot enzovoort. Aanvankelijk zijn alle voedseldepots nog leeg, dus (0, 0, 0, 0, 0, ...). De drager loopt naar voedseldepot 1, legt daar twee maaltijden klaar en keert terug naar het basiskamp, dus (2, 0, 0, 0, 0, ...). Vervolgens kan hij twee maaltijden klaarleggen in voedseldepot 2, dus (0, 2, 0, 0, 0, ...). De volgende stappen zijn (2, 2, 0, 0, 0, ...), (0, 0, 2, 0, 0, ...), (2, 0, 2, 0, 0, ...), (0, 2, 2, 0, 0, ...), (2, 2, 2, 0, 0, ...), (0, 0, 0, 2, 0, ...) enzovoort.

Voor het weergeven van de strategie van een enkele drager gebruiken we een notatie die we uitleggen met een voorbeeld. De rij 1213121 moet als volgt worden gelezen: de eerste 1 geeft aan dat de drager vanuit het basiskamp naar depot 1 vertrekt, daar twee maaltijden klaarlegt en weer terugkeert naar het basiskamp. De 2 die dan volgt, betekent dat de drager twee maaltijden in depot 2 legt en weer terugkeert naar het basiskamp. Daarna worden er weer twee maaltijden gebracht naar depot 1 en wordt er teruggekeerd naar het kamp. Vervolgens brengt de drager twee maaltijden naar depot 3, enzovoort. Algemeen: een k in de reeks geeft een wandeling aan naar depot k waar twee maaltijden worden neergelegd, waarna weer wordt teruggekeerd naar het basiskamp (een tocht van $2k$ dagen). Een goede strategie voor een enkele drager is dan 121312141213121512131214121312161213121412 1312151213121412131 21. Merk op dat hier van de opeenvolgende even getallen steeds het aantal factoren 2 staat.

De wandelingen kunnen ook in een andere volgorde gemaakt worden, van klein naar groot. Dan brengt de drager dus eerst zoveel mogelijk maaltijden naar voedseldepot 1, brengt dan de maaltijden naar voedseldepot 2 enzovoort. Om op de eerste k voedseldepots twee maaltijden gereed te zetten, moet de drager 1 keer naar depot k, 2 keer naar depot $k - 1$, $2^2 = 4$ keer naar depot $k - 2$, $2^3 = 8$ keer naar depot $k - 3$, enzovoort, tot en met 2^{k-1} keer naar depot 1. De drager is dus

$$1 \times 2k + 2 \times 2(k-1) + 2^2 \times 2(k-2) + 2^3 \times 2(k-3) + \cdots + 2^{k-2} \times 4 + 2^{k-1} \times 2$$

dagen onderweg. Volgens de berekening in het kader komt hier $2^{k+2} - 2k - 4$ uit. Voor $k = 4$ is de uitkomst 52, voor $k = 5$ is de uitkomst groter dan 90. Dus met 1 drager kun je de eerste 4 voedseldepots voorzien van twee maaltijden. De leider kan vervolgens een wandeling maken naar depot 4. Vanaf daar kan hij nog een halve dag verder wandelen en terugkeren. Daarna keert hij terug naar het basiskamp.

Willen we alle voorbereidingen om de Zuidpool te bereiken treffen met 1 drager, dan moeten de eerste 44 depots voorzien worden van twee maaltijden, en het 45ste (en laatste) depot van één maaltijd. Nemen we voor het gemak even aan dat overal twee maaltijden moeten liggen, dan zou de drager daar $2^{47} - 94 = 140.737.488.355.234$ dagen mee bezig zijn. Dat is 385 miljard jaar!

MEERDERE DRAGERS EN VRAAG 3 Voor het geval van méér dragers ontvingen we geen concrete strategie. Martijn Bak schreef een programma in Ruby. Hij testte uit in hoeverre je de dragers vooraf instructies kunt geven in de trant van: als er op een voedseldepot twee maaltijden liggen, ga dan naar het volgende depot, deponeer anders je maaltijden en ga terug. Hij constateerde dat de dragers altijd komen te overlijden.

Als je het werk door n dragers laat doen (in plaats van 1), kun je in $\frac{1}{n}$-de deel van de tijd klaar zijn met de voorbereidingen: het aantal benodigde dagen aan voorbereiding is dan $(2^{k+2} - 2k - 4)/n$.

Voor 2 dragers en $k = 5$ komen we uit op 57 dagen. Voor 3 dragers en $k = 6$ komen we op 80 dagen. Willen we de voorbereidingen binnen de 90 dagen realiseren ($k = 45$), dan moeten we gebruik maken van een veel groter aantal dragers, namelijk $(2^{47} - 94)/90 = 1.563.749.870.614$. Dat is meer dan 200 keer de wereldbevolking!

PRIJZEN De eerste prijs gaat naar Michelle Sweering (Erasmiaans Gymnasium, Rotterdam). Zij heeft zich voornamelijk toegelegd op vraag 3, waarbij de leider in 90 dagen heen en weer loopt. De formule in het kader leidde ze helemaal af. De tweede prijs kennen we toe aan Liesbet Deconinck (Don Boscocollege, Zwijnaarde, België). Zij heeft een spreadsheet gemaakt waarin duidelijk wordt hoeveel dagen resp. 1, 2 en 3 dragers onderweg zijn om de leider een afstand te kunnen laten overbruggen van resp. 1 t/m 45 dagreizen. Martijn Bak krijgt de derde prijs. De in dit artikel besproken strategie van een enkele drager is van hem afkomstig. ■

BIJZONDERE SOMMEN

Belangrijk bij de oplossing is het sommeren van machten van 2. We moeten

$$S_k = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^k$$

uitrekenen. Om een dergelijke som uit te rekenen gebruiken we een trucje.
We schrijven eerst de dubbele som op:

$$2S_k = 2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots + 2^{k+1}.$$

Vervolgens bepalen we het verschil $2S_k - S_k = 2^{k+1} - 2$. Alle tussenliggende machten van 2 komen namelijk zowel in de som S_k als de som $2S_k$ voor, en vallen weg.
Ook moeten we

$$T_k = k \times 2^1 + (k-1) \times 2^2 + (k-2) \times 2^3 + \cdots + 1 \times 2^k$$

bepalen. We herschrijven deze som als

$$\begin{aligned} T_k &= (2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^k) + (2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{k-1}) + \\ &\quad (2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{k-2}) + \cdots + (2^1 + 2^2) + (2^1) \\ &= S_k + S_{k-1} + S_{k-2} + \cdots + S_2 + S_1 \\ &= (2^{k+1} - 2) + (2^k - 2) + (2^{k-1} - 2) + \cdots + (2^3 - 2) + (2^2 - 2) \\ &= 2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots + 2^{k+1} - 2k = 2S_k - 2k = 2^{k+2} - 2k - 4. \end{aligned}$$

JOURNAAL

■ door Marc Seijlhouwer

Moeilijkheid van games beter geregeld

Je speelt vast weleens een spelletje zoals Angry Birds op je telefoon, of Fifa op een spelcomputer. Leuk, maar soms is het misschien wel te moeilijk of juist te makkelijk. Bij sommige spellen kan je daar niks aan doen, bij andere kan je handmatig de moeilijkheid instellen. Maar wat nou als het spel zélf zou aanvoelen hoe goed je bent, en het spel daarop aanpast? Het is informatici van Georgia Tech, een Amerikaanse universiteit, gelukt om een algoritme te bedenken dat precies dat doet.

Het algoritme bekijkt hoe de vorige ronde van een spelletje ging en berekent vervolgens welke moeilijkheidsgraad de volgende ronde moet hebben. Iets dergelijks gebeurt al op winkelwebsites zoals Bol.com of Amazon: aan de hand van je koopgedrag in het verleden raadt de site je bepaalde producten aan. Bij games werkt het in feite net zo.

De informatici testten het algoritme door zelf een spelletje te ontwikkelen. Het vechtsysteem in dat spel doorzien sommige mensen vrij snel, terwijl anderen er langer over doen. De moeilijkheidsgraad van de volgende ronde werd verrassend goed aangepast aan het niveau van de speler. Zo goed, dat een speler het vermoedelijk niet eens door heeft dat het spel moeilijker is geworden: het spel groeit op een natuurlijke wijze met zijn eigen vaardigheid mee.

Het spel dat de onderzoekers ontwikkelden ziet er simpel uit, maar heeft een ingewikkeld vechtsysteem. Het spel is met opzet gemaakt om moeilijk onder de knie te krijgen, zodat iedereen een leercurve heeft tijdens het spelen. Het spel past constant de moeilijkheidsgraad aan aan de leercurve van de speler.

Politie vraagt hulp van wiskundigen

Wiskundigen van de Vrije Universiteit en het Centrum Wiskunde & Informatica in Amsterdam zorgen met behulp van wiskunde dat de politie zijn werk beter kan doen. Rob van der Mei en Sandjai Bhulai gebruiken 'Big Data' om de politieagenten in Amsterdam op een slimme manier in te zetten.

Big Data is een nieuw fenomeen in de statistiek. In principe is Big Data niets anders dan een grote hoeveelheid gegevens. Met die gegevens kan je patronen ontdekken en daarmee kan je dan weer actie ondernemen. Bij dit onderzoek gebruiken de wiskundigen historische gegevens van de politie: waar worden veel misdaden gepleegd, waar is de politie meestal en zijn er dagen waarop er meer politie nodig is? Dergelijke vragen worden beantwoord dankzij de data.

Je kan hierbij bijvoorbeeld denken aan het volgende scenario: een politieauto patrouilleert in een wijk. Hij wordt weggeroepen om bij een inbraak te gaan kijken. Dit ziet men in de meldkamer, en het systeem zegt vervolgens dat een auto in een rustige wijk kan invallen voor de net weggeroepen auto. Op deze manier is de hele stad telkens goed beveiligd.

Natuurlijk doet de politie op dit moment al net zoiets. Het is nu echter nog niet met computers geregeld; in plaats daarvan maken de mensen die de politieplanning maken gebruik van hun ervaring. Met een computerprogramma en wiskunde kan je de planning efficiënter maken. Uiteindelijk moet een planning via een computerprogramma *realtime* doorgeven waar een politieagent het best kan zijn.

Oneindig veel priemgetallen in paren

Al eeuwenlang bestaat het vermoeden dat er oneindig veel *priemtweelingen* bestaan. Een priemtweeling is een paar van twee priemgetallen die 2 van elkaar verschillen. Bijvoorbeeld 3 en 5, of 17 en 19. De grootste priemtweeling die tot nog toe bekend is, is het paar $3756801695685 \cdot 2^{666669} \pm 1$.

Het priemtweelingvermoeden staat nog steeds open, maar wiskundige Yitang Zhang presenteerde in mei een bewijs van een 'zwakke versie' van dit vermoeden. Hij toonde aan dat er oneindig veel priemparen bestaan met de eigenschap dat voor elk paar geldt dat de getallen hooguit 70 miljoen van elkaar verschillen. De door Zhang gebruikte wiskunde is – hoewel beslist niet eenvoudig – elementair. Hoewel 70 miljoen nog ver van 2 afligt, is Zhangs bewijs een absolute doorbraak in de getaltheorie: het laat zien dat er überhaupt een eindige grens is, met de eigenschap dat er oneindig veel priemparen zijn met een verschil dat hoogstens gelijk is aan die grens. Die grens was er voorheen niet. Het uiteindelijke doel is natuurlijk om te bewijzen dat die grens 2 is. Het getal 70 miljoen is reusachtig, naar de stap van 70 miljoen naar 2 is niets vergeleken met de stap van oneindig naar 70 miljoen.

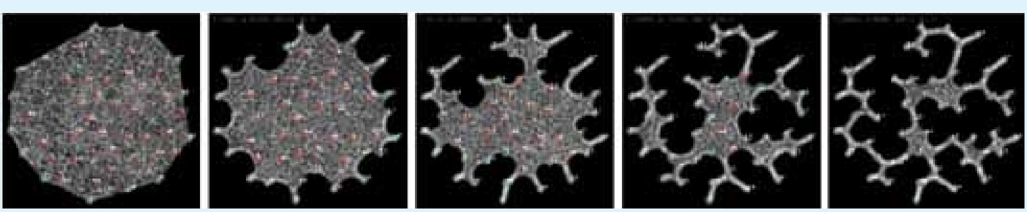
Blob lost handelsreizigersprobleem op

Het handelsreizigersprobleem, waarin een verkoper de kortste route langs een aantal steden moet vinden, is een moeilijk probleem voor computerdeskundigen. Het is de vraag of er een snel algoritme bestaat dat je de kortste route geeft (de meeste experts vermoeden van niet). Informatici van de University of West England hebben op een originele manier een benadering van de oplossing gevonden. Daarbij gebruikten ze een 'grijze klodder', of *blob*, die zich om de punten, die de steden voorstellen, heen smelt totdat een korte route ontstaat.

De gesimuleerde blob geeft niet de allerkortste route, maar komt wel dicht in de buurt: meestal is de route vier tot negen procent langer dan de perfecte weg. Voor een praktisch gebruik is dat een heel goede benadering.

De blob werkt anders dan de reeds bestaande algoritmen die een kortste route benaderen. In feite bestaat de blob uit duizenden kleine blobjes. Deze hebben allemaal, individueel, een simpele opdracht meegekregen: beweeg naar het punt toe dat het dichtst bij is én nog niet bezocht is door een ander blobje. Op deze manier, zo bleek, vormt de blob langzaam een mooi specifiek pad langs van tevoren aangegeven punten. Het is als de *wave* in een voetbalstadion: allemaal mensen doen elk één ding, maar het geheel van de tribunes lijkt als een golf te bewegen.

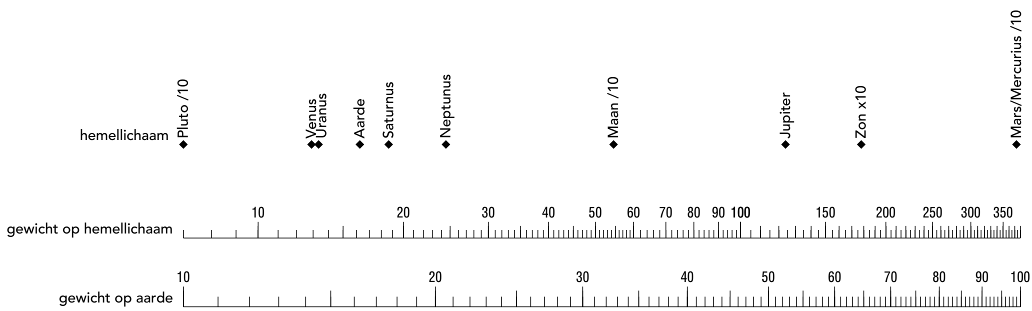
De blob is vernoemd naar een monster uit een oude science-fictionfilm. Het monster ziet eruit als bewegende slurrie en verteert alles waarmee het in aanraking komt. In dit onderzoek is de blob een in een computer nagemaakte grijze klodder.



Filmpjes van de blob zijn te zien op http://goo.gl/HzKpa. Duidelijk wordt hoe de blob van een grijze brei langzaam vervormt tot een specifiek pad langs een stel vooraf gegeven punten.

Een nomogram is een grafisch hulpmiddel om berekeningen handig uit te voeren. Door het trekken van een rechte lijn bepaal je bijvoorbeeld je eigen gewicht op de maan.
■ door Sjaak Adriaanse

NOMOGRAMMEN MAKEN



Figuur 1 Wat weeg jij op Mars?

In figuur 1 zie je een *nomogram* om je gewicht op enkele hemellichamen te bepalen. Het werkt als volgt. Trek een lijn door het ruitje bij een hemellichaam en je gewicht op aarde in de onderste schaal. Lees vervolgens je gewicht op het betreffende hemellichaam op de middelste schaal af. Als bij het hemellichaam staat '/10' moet je het gevonden gewicht nog door 10 delen. Staat er ' ×10' (alleen bij de zon), dan moet je het gevonden gewicht met 10 vermenigvuldigen.

Een voorbeeld: als je op aarde 62 kg weegt, weeg je op Jupiter 146 kg en op de maan iets meer dan 10 kg.

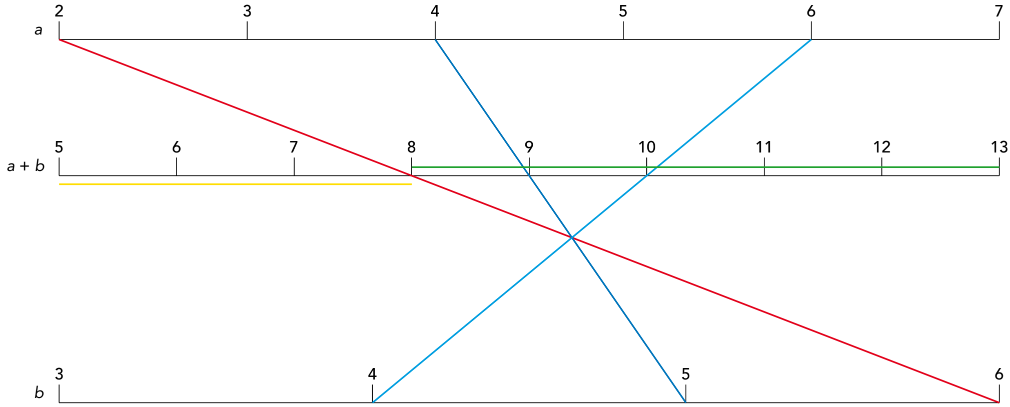
Eenvoudig, niet? Een nomogram heeft een aantal rechte of kromme lijnen met elk een schaalverdeling of een andere aanduiding (zoals de ruitjes in figuur 1), en een bijzondere eigenschap: als je een rechte lijn door de schalen heen trekt, voldoen de getallen die je bij die lijn op de schalen kan aflezen altijd aan een bepaalde vergelijking. Anders gezegd: je kunt met een nomogram eenvoudig door een rechte lijn te trekken een berekening maken of een vergelijking oplossen. Het mooie van nomogrammen is dat de complexiteit van de berekening helemaal verstopt is voor de gebruiker. Een rechte lijn trekken kan tenslotte iedereen.

Nomogrammen zijn in 1884 uitgevonden door de Franse ingenieur Philbert Maurice d'Ocagne (1862-1938). Ze zijn tientallen jaren door vooral ingenieurs, statistici en medici gebruikt om snel complexe berekeningen uit te kunnen voeren. Het waren de *apps* van die tijd. Op de pagina's 16 en 17 zie je een zeer complex nomogram dat de chemische en fysische eigenschappen van bloed uitdrukt.

ZELF MAKEN In dit artikel leer je hoe je zelf nomogrammen met drie evenwijdige rechte lijnen kan maken. Dit type is al voor heel veel toepassingen geschikt, namelijk voor alle vergelijkingen met de vorm $f(z) = g(x) \heartsuit h(y)$, waarbij ♥ kan staan voor optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen en zelfs machtsverheffen. Er geldt één belangrijke voorwaarde: de functies f, g en h moeten *monotoon stijgen* of *monotoon dalen* op de intervallen die je op de schalen zet. Monotoon stijgend betekent: als $x > y$, dan is $f(x) > f(y)$. En monotoon dalend betekent: als $x > y$, dan is $f(x) < f(y)$. Dus bijvoorbeeld $g(x) = x^2$ mag, maar niet met $x = 0$ ergens midden op de schaal. We nemen verder aan dat aan deze voorwaarde voldaan is.

Om een nomogram te maken moet je twee problemen oplossen:

- de geometrie: waar liggen de schalen ten opzichte van elkaar?
- de schaalconstructie: hoe moet je de streepjes en de getallen op de schalen zetten?



Figuur 2 Optellen met een nomogram.

GEOMETRIE In figuur 2 zie je het oernomogram om met gebruik van lineaire schalen een optelling uit te voeren. Een schaal is lineair als een eenheid overal op de schaal door dezelfde afstand wordt weergegeven. De bovenste schaal loopt van 2 tot 7 (5 eenheden), de onderste van 3 tot 6 (3 eenheden). Om de optelling van deze twee schalen weer te kunnen geven, moet de middelste schaal lopen van 5 (som van de minima 2 en 3) tot 13 (som van de maxima 7 en 6) en dus 8 eenheden omvatten. Ook deze schaal is lineair. De blauwe lijnen geven een paar sommetjes aan die je met dit nomogram kunt maken: 4 + 5 = 9 en 6 + 4 = 10.

De vraag is: waar ligt de middelste schaal precies? Dit kun je afleiden aan de hand van de rode lijn, die de som 2 + 6 = 8 afbeeldt. Linksonder van de rode lijn (geel) zie je op de middelste schaal in feite een verkleinde afbeelding – een projectie – van de onderste schaal met 3 eenheden, met telkens 2 erbij opgeteld. Het stuk van de middelste lijn rechtsboven van de rode lijn (groen) is een projectie van de bovenste schaal met 5 eenheden, met telkens 6 erbij opgeteld. Met wat driehoeksmeetkunde kun je eenvoudig afleiden dat de verhouding tussen de afstanden [bovenste lijn, middelste lijn] en [onderste lijn, middelste lijn] gelijk moet zijn aan de verhouding tussen de aantallen eenheden op de schalen (in ons voorbeeld dus 3 : 5).

Maar klopt het dan altijd? Geeft *elke* rechte lijn door het nomogram op de middelste schaal de som van de getallen op de andere schalen weer? Kijk eens naar figuur 3. Je ziet daar een optelnomogram met drie lineaire schalen: een x-schaal van 0 tot x_{max}, een y-schaal van 0 tot y_{max} en een z-schaal van 0 tot z_{max}. De lijn XZY is een willekeurige rechte lijn; X, Y en Z zijn de getallen die op de snijpunten op de schalen staan. De getallen x, y en z in het interval [0, 1] zijn de fracties van de schalen links van de doorsnede met XZY. Er geldt dus: $X = x \cdot x_{max}$, $Y = y \cdot y_{max}$ en $Z = z \cdot z_{max}$.

Ook geldt dat $z_{max} = x_{max} + y_{max}$ (per definitie, de optelling aan de uiterste rechterkant van het nomogram). Verder zijn de afstanden tussen de lijnen in de gegeven verhouding, net als in figuur 1.

In de rode driehoek kun je zien:

$$z - y = (x - y)\frac{c \cdot x_{max}}{c(y_{max} + x_{max})},$$

dus

$$z = (x - y)\frac{x_{max}}{y_{max} + x_{max}} + y.$$

Omdat $z_{max} = x_{max} + y_{max}$, geldt

$$z \cdot z_{max} = \left((x - y)\frac{x_{max}}{y_{max} + x_{max}} + y\right) \cdot (x_{max} + y_{max}),$$

waaruit volgt dat

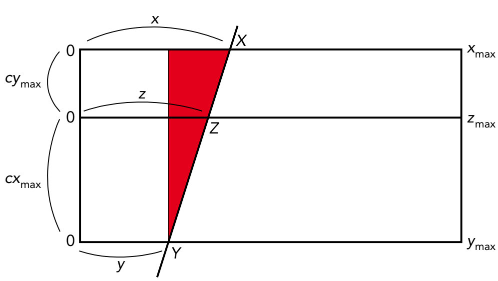
$$z \cdot z_{max} = (x - y) \cdot x_{max} + y \cdot (x_{max} + y_{max}),$$

dus

$$z \cdot z_{max} = x \cdot x_{max} + y \cdot y_{max}$$

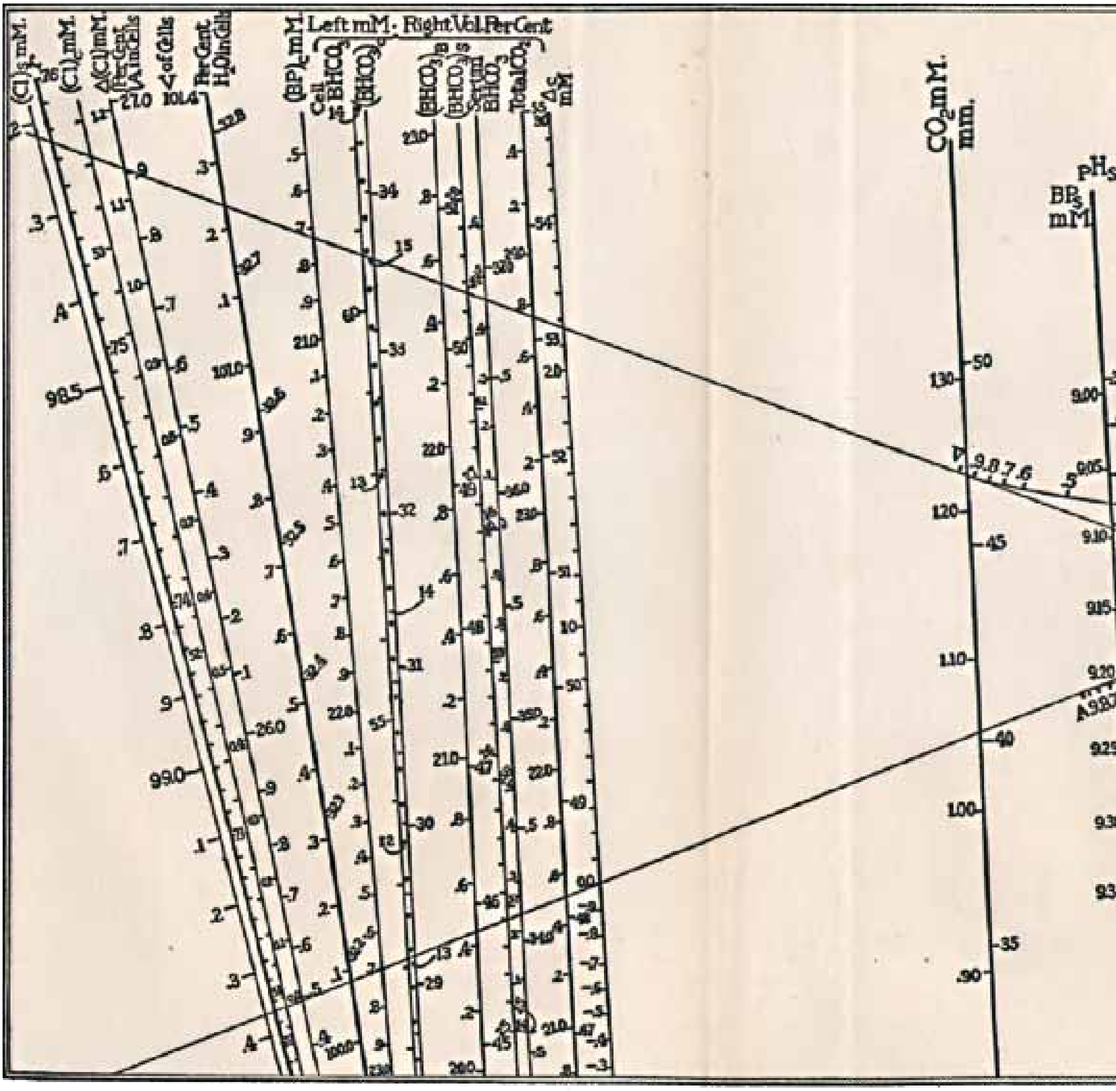
ofwel

$$Z = X + Y.$$



Figuur 3 Waarom werkt een optelnomogram?

15



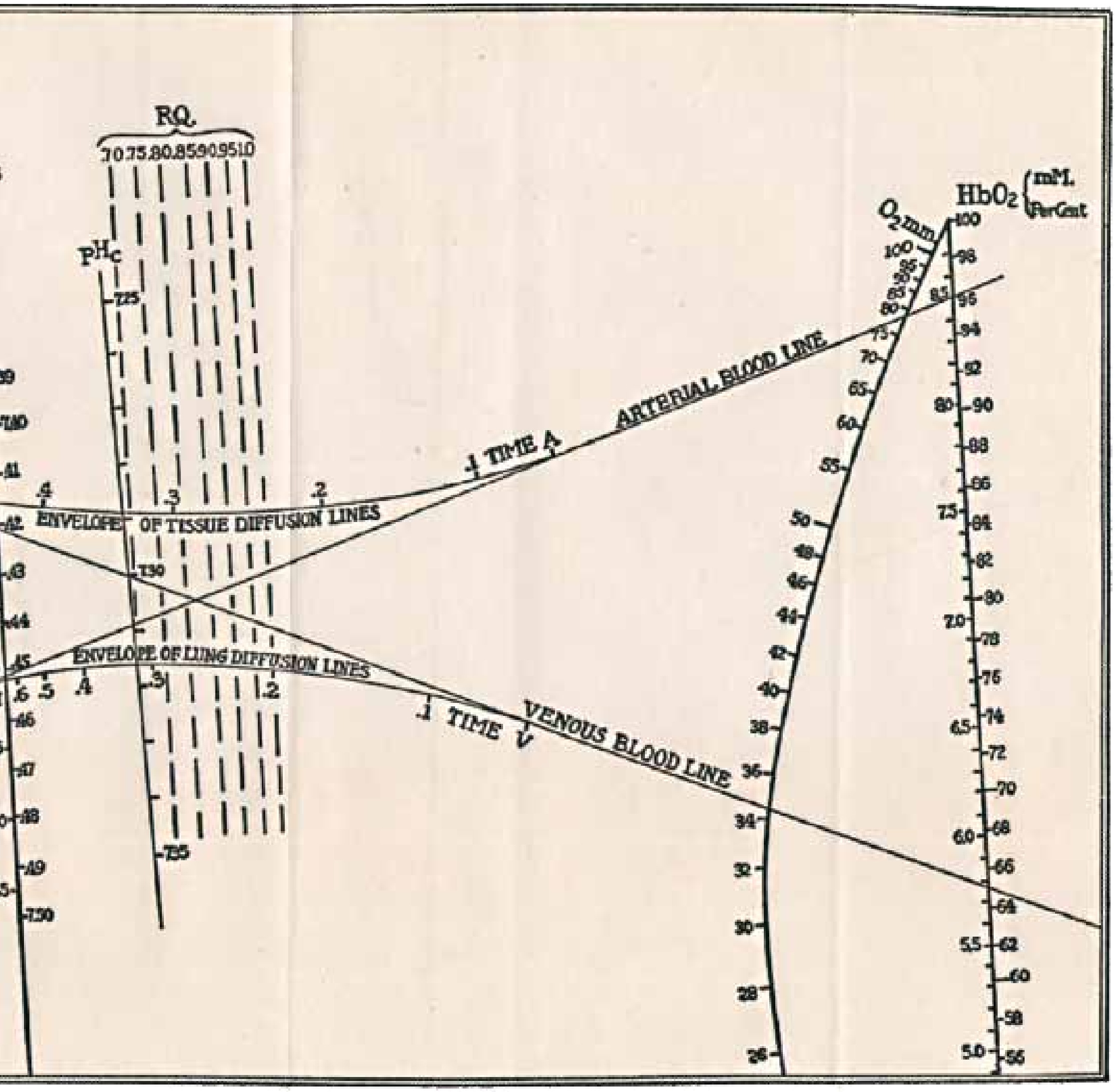
Nomogram uit 1928 door Lawrence Joseph Henderson. Dit nomogram drukt de chemische en fysische eigenschappe

Ga zelf na dat dit, met enige aanpassingen, blijft kloppen als de schalen niet bij 0 beginnen.

CONSTRUCTIE VAN EEN SCHAAL Hoe maak je nu een in nomogrammen bruikbare schaal voor $f(x) = x^2$ of $f(x) = \tan x$, van $x = 10$ tot $x = 20$? We willen dus een schaal voor x, met de streepjes zodanig gezet dat we, door een lijn door $x = a$ te trekken, de waarde van $f(a)$ nomografisch kunnen optellen bij een of andere waarde afkomstig van de y-schaal. (Ga er even van uit dat de geometrie geen probleem meer vormt.)

Je kan je het tekenen van die schaal voorstellen alsof je een grafiek van de functie $f(x)$ hebt getekend, daarna de figuur gekanteld hebt zodat de (lineaire) y-as horizontaal ligt, en vervolgens de x-waarden bij de bijbehorende y-waarden gezet hebt. Maar dan ben je er nog niet. Je wil immers streepjes hebben bij gemakkelijk afleesbare waarden van x. Eerst een fraaie lineaire schaal van $f(x)$ tekenen en bij die streepjes de bijbehorende waarden van x zetten werkt niet, want die waarden zijn zelden mooie getallen. We moeten dus bij een gegeven 'mooie' x bepalen waar het streepje moet komen te staan. Hoe moet dat?

We hebben een interval waarover je de functie wil afbeelden, dus een minimumwaarde en een maximumwaarde voor x, en een functie f, die op dat interval monotoon stijgt of monotoon daalt. We zoeken een bij f horende afbeelding van het interval



n van bloed uit (L.J. Henderson, *Blood: A Study in General Physiology*, Yale Univ. Press, 1928).

$[x_{\min}, x_{\max}]$ naar het interval [0, 1] en noemen deze afbeelding n_f. (Om de schaal daadwerkelijk te tekenen, moet je $n_f(x)$ nog met de gewenste lengte van de schaal vermenigvuldigen.)

We gaan nu even uit van een stijgende functie en zetten $x_{\min}$ aan de linkerkant. Dus $n_f(x_{\min}) = 0$ en $n_f(x_{\max}) = 1$. (Als f monotoon daalt, is het meestal het handigst om $x_{\min}$ aan de rechterkant van de schaal te zetten.)

Omdat de basisbewerking voor een nomogram een optelling is, moeten we weten wat de lineaire schalen zijn die in die optelling gebruikt gaan worden. Laten we dit de *basisschalen* noemen. Deze basisschalen, die altijd lineair zijn, zie je meestal niet in het nomogram terug. Een voorbeeld. Voor een nomogram voor de stelling van Pythagoras, $c^2 = a^2 + b^2$, maken we drie schalen met $f(x) = x^2$. Als a en b allebei lopen van 0 tot 5, lopen de onzichtbare basisschalen van a en b beide van 0 tot 25. De basisschaal van c loopt dan van 0 tot 50, de zichtbare schaal van c loopt van 0 tot $\sqrt{50}$.

Het streepje voor een bepaalde x, aangegeven door $n_f(x)$, moet dus staan op de plaats waar op de lineaire basisschaal een streepje voor $f(x)$ zou staan. Ofwel:

$$n_f(x) = \frac{f(x) - f(x_{\min})}{f(x_{\max}) - f(x_{\min})} = \frac{f(x)}{f(x_{\max}) - f(x_{\min})} - \frac{f(x_{\min})}{f(x_{\max}) - f(x_{\min})} = C_1 \cdot f(x) - C_2.$$

Voor een gegeven f en een gegeven interval $[x_{min}, x_{max}]$ kun je C_1 en C_2 uitrekenen. Vervolgens kun je, bijvoorbeeld met een spreadsheetprogramma, een tabel maken waarin de streepjes aangegeven zijn als een getal op [0, 1]. Dit getal met de schaallengte vermenigvuldigen geeft de plaats waar het streepje voor elke x moet komen te staan. Zie figuur 4 voor een voorbeeld.

Op deze manier kun je voor een willekeurige monotone functie een nomogramschaal maken.

Overigens is een enkele op deze manier gemaakte nomogramschaal met schaalverdelingen aan beide kanten van de lijn een heel geschikte weergave van een monotone functie, die veel minder ruimte inneemt dan een grafiek. Een extra voordeel is dat op stukken waar $f(x)$ snel stijgt, de waarden van x ver uit elkaar liggen, zodat de afleesfout automatisch kleiner wordt.

x	x^2	$n_f(x)$
5,0	25,00	0,00
5,1	26,01	0,04
5,2	27,04	0,09
...	...	...
6,8	46,24	0,89
6,9	47,61	0,94
7,0	49,00	1,00

Figuur 4 Tabel voor een schaal voor x^2 voor x in [5, 7]; er geldt: C_1 = 0,0417 en C_2 = 1,0417.

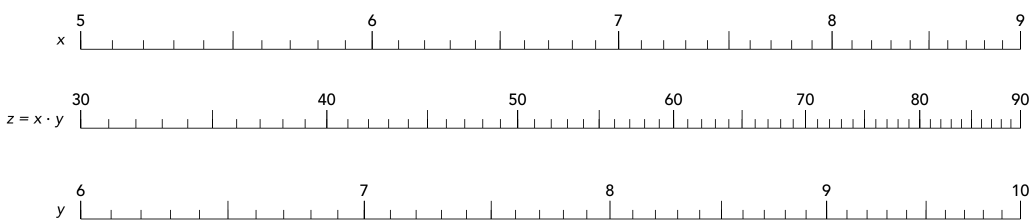
COMBINEREN VAN GEOMETRIE EN SCHAALCONSTRUCTIE Je hebt nu al twee dingen geleerd:

- de geometrie voor een optelnomogram bepalen aan de hand van de intervallen;
- een (bijna) willekeurige functie $f(x)$ op een nomogramschaal zetten.

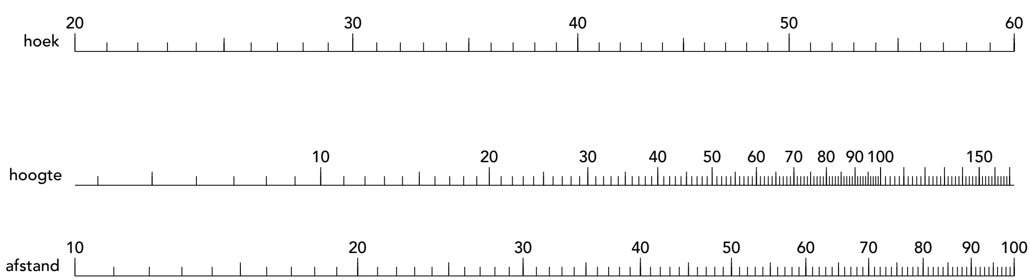
Nu gaan we deze twee dingen combineren. Om te beginnen kunnen we met een nomogram een vermenigvuldiging uitvoeren door $f(x) = \log x$ te gebruiken, want $\log ab = \log a + \log b$. Ofwel: we tellen met het nomogram eigenlijk op 0,3 + 0,7 = 1,0 (ongeveer), maar we lezen een vermenigvuldiging af: 2 · 5 = 10. Voor de vermenigvuldiging $z = x \cdot y$, met x in [5, 9] en y in [6, 10], loopt de basisschaal voor x van log 5 tot log 9, die van y van log 6 tot log 10, en die van z van log 30 tot log 90. Zie figuur 5.

De volgende stap is het stapelen van meerdere functies op één schaal: $f(x) = g(h(i(x)))$ enzovoorts. Als de buitenste functie (g) de logfunctie is, kunnen we de binnenste functies met elkaar vermenigvuldigen (of op elkaar delen, als je de getallen op andere schalen afleest). Een voorbeeld hiervan zie je in figuur 6. Dit is een nomogram voor de hoogte van een toren, gegeven de afstand tot de toren en de hoek tussen de top en het horizontale vlak. Op de bovenste schaal is $f(x) = \log(\tan x)$, met x in graden.

ANDERE EENHEDEN Soms wil je de berekening in een bepaalde eenheid uitvoeren, maar wil je de schaal om praktische redenen liever in een andere eenheid hebben. Je hebt bijvoorbeeld een formule



Figuur 5 Vermenigvuldigen met een nomogram.



Figuur 6 Bepaling van de hoogte van een toren.

NOMOGRAMRECEPT

Het maken van een nomogram voor formules van de vorm $f(z) = g(x)$ ♥ $h(y)$, waarbij ♥ kan staan voor optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen of machtsverheffen:

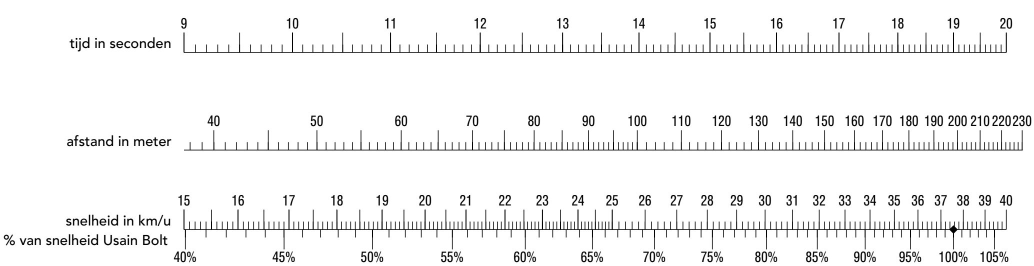
1. Bepaal de functies voor de drie schalen.
2. Bepaal de intervallen voor de drie variabelen en kies een schaallengte (hoe langer de schalen, hoe nauwkeuriger het nomogram).
3. Check: zijn de functies op die intervallen monotoon? Zo niet, stop dan of kies betere intervallen.
4. Bepaal de basisschalen voor het verborgen optelnomogram.
5. Bepaal hiermee de onderlinge afstanden tussen de schalen.
6. Bepaal voor elke schaal de afbeelding n_f, ofwel reken C_1 en C_2 uit.
7. Maak per schaal een tabel van n_f voor mooie waarden van de variabele, eventueel met behulp van een tussenvariabele.
8. Vermenigvuldig de waarden van n_f met de schaallengte.
9. Teken de streepjes en zet de getallen erbij.

met de temperatuur in Kelvin, maar je thermometer geeft graden Celsius aan. Of je wil de uitkomst in een andere eenheid uitdrukken, bijvoorbeeld als percentage van een richtlijn. In die gevallen is het niet handig om de berekeningen van de geometrie van je nomogram hiermee te vervuilen. Je kunt beter een andere schaalverdeling bij dezelfde lijn zetten (of natuurlijk een dubbele schaal gebruiken met streepjes aan beide kanten van de lijn). Ook hier kun je niet alleen maar andere getallen bij dezelfde streepjes zetten: je zult ook de streepjes opnieuw moeten tekenen. Het is het gemakkelijkst om aan je spreadsheet een extra kolom toe te voegen, waarin je de gewenste eenheid in mooie getallen zet. In de oorspronkelijke kolom voor x moet je die dan omrekenen naar de eenheid die in de berekening wordt gebruikt: de oorspronkelijke x wordt een tussenvariabele. Zie figuur 7 voor een aangepaste tabel voor x^2 waarin de variabele als percentage van 6 is uitgedrukt. Als extra voorbeeld zie je in figuur 8 nog een nomogram met een dubbele schaal, dat je bij hardloopwedstrijden kunt gebruiken.

In het kader hierboven lees je het totale recept voor het type nomogram dat we in dit artikel hebben besproken. Zoek zelf toepassingen: formules bij natuurkunde, economie of scheikunde of bij situaties in het dagelijks leven. Stuur je mooiste creatie naar ons op. Wie weet drukken we het af! ■

percentage van 6	x	x^2	$n_f(x)$
80	4,80	23,04	–0,08
85	5,10	26,01	0,04
90	5,40	29,16	0,17
95	5,70	32,49	0,31
100	6,00	36,00	0,46
105	6,30	39,69	0,61
110	6,60	43,56	0,77
115	6,90	47,61	0,94
120	7,20	51,84	1,12

Figuur 7 Tabel voor een schaal voor x^2, met x in het interval [80% van 6, 120% van 6].



Figuur 8 Nomogram voor een hardloopwedstrijd.

Op 26 maart 2013 was het honderd jaar geleden dat de legendarische wiskundige Paul Erdős werd geboren. Voor *Pythagoras* reden om dit jaar stil te staan bij de – vaak eenvoudig te beschrijven – problemen waaraan deze Hongaar gewerkt heeft. Deze vierde aflevering gaat over getallenparen die vernoemd zijn naar de Amerikaanse honkballegendes Babe Ruth en Hank Aaron.

■ door Alex van den Brandhof

HOMERUN

Heel bekend is de anekdote over de Engelse wiskundige Godfrey Harold Hardy (1877-1947), die het Indiase genie Srinivasa Ramanujan (1887-1920) eens met een taxi opzocht in het ziekenhuis. Hardy had opgemerkt dat het nummer van zijn taxi oninteressant was geweest: 1729. 'Nee, dat is juist een heel interessant getal,' moet Ramanujan toen hebben geantwoord. 'Het is het kleinste getal dat op twee manieren kan worden geschreven als een som van twee derdemachten. Het is de som van $1 \times 1 \times 1$ en $12 \times 12 \times 12$, en ook van $9 \times 9 \times 9$ en $10 \times 10 \times 10$.' Dit was geen plotseling inzicht van Ramanujan: zijn biograaf Robert Kanigel schrijft dat hij jaren daarvoor allerlei curieuze eigenschappen van getallen had opgeschreven. Het was Ramanujans handelsmerk om al die nutteloze feiten te onthouden.

Minder bekend is het verhaal over een stel Amerikaanse wiskundigen die een fraaie eigenschap ontdekten van de getallen 714 en 715, nadat deze twee getallen op 8 april 1974 *hot news* waren: de honkbalspeler Hank Aaron had op die dag zijn 715de homerun geslagen en had daarmee het record van 714, dat sinds 1935 op naam van Babe Ruth stond, verslagen. Carl Pomerance, toen dertig jaar oud en werkzaam aan de Univerity of Georgia, ontbond de twee getallen in hun priemfactoren (zoiets is een schijnbaar onbedwingbare neiging voor veel wiskundigen). Hij stelde vast dat het product van 714 en 715 precies gelijk is aan het product van de eerste zeven priemgetallen:

$$714 = 2 \times 3 \times 7 \times 17$$

en

$$715 = 5 \times 11 \times 13,$$

dus

$$714 \times 715 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17.$$

Hij vroeg zich af of er meerdere paren van natuurlijke getallen met verschil 1 bestaan, waarvoor geldt dat het product ervan gelijk is aan het product van de eerste k priemgetallen, voor een zekere waarde van k. Verder dan het volgende lijstje kwam hij niet:

eerste getal	tweede getal	product
1	2	2
2	3	2×3
5	$6 = 2 \times 3$	$2 \times 3 \times 5$
$14 = 2 \times 7$	$15 = 3 \times 5$	$2 \times 3 \times 5 \times 7$

Met hulp van de computer onderzocht hij grotere paren, tot producten van de de eerste 3049 priemgetallen. Vergeefs. Het leek erop dat 714 en 715 het grootste tweetal is met deze speciale eigenschap, een vermoeden dat tot op de dag van vandaag onbewezen is.

SOMMEN VAN PRIEMFACTOREN Een dag nadat Aarons prestatie al het Amerikaanse nieuws domineerde (honkbal is een van de populairste sporten in Amerika) daagde Pomerance zijn collega David Penney uit om bijzonderheden van 714 en 715 te ontdekken. Penney zette ook zijn studenten aan het denken, tijdens het college dat hij die morgen gaf. Met succes: de som van de priemfactoren van 714 is gelijk aan

$$2 + 3 + 7 + 17 = 29$$

en dat geldt ook voor 715:

$$5 + 11 + 13 = 29,$$

merkte een student op.

Pomerance, Penney en een derde collega, Carol Nelson, zetten hun normale werkzaamheden even in de ijskast en zochten uit of er meer paren van twee opeenvolgende natuurlijke getallen bestaan waarvoor geldt dat de priemfactoren twee keer optellen tot hetzelfde getal. Opnieuw een lijstje, zie onderaan de pagina.

Het drietal wiskundigen liet de computer 20.000 gevallen doorrekenen. Ze vonden 26 paren; het grootste was (18.490, 18.491). Dergelijke paren doopten ze *Ruth-Aaron-paren*, om de twee honkballegendes te eren. Hoewel de lijst Ruth-Aaron-paren langer is dan het eerste lijstje dat Pomerance had gemaakt, bleken ook deze paren een zeldzaam verschijnsel: de gaten tussen twee opvolgende Ruth-Aaron-paren worden steeds groter. Toch hadden Pomerance en zijn collega's het idee dat de lijst nooit zou ophouden. In het tijdschrift *Journal of Recreational Mathematics* schreven ze een artikel met de eenvoudige titel '714 and 715', waarin zij het volgende vermoeden formuleerden:

> **Vermoeden.** Er bestaan oneindig veel Ruth-Aaron-paren. Hun dichtheid in de verzameling natuurlijke getallen is 0 (zie het kader op pagina 22 voor het begrip 'dichtheid').

Binnen een week nadat het tijdschrift was verschenen, ontving Pomerance een brief van Paul Erdős . Het tweede deel van het vermoeden, dat de Ruth-Aaron-paren dichtheid 0 hebben, had hij bewezen, schreef hij. Nieuwsgierig geworden nodigde Pomerance Erdős uit om langs te komen. Dit was het begin van een lange vriendschap en samenwerking

eerste getal	tweede getal	som priemfactoren
5	$6 = 2 \times 3$	5
$8 = 2 \times 2 \times 2$	$9 = 3 \times 3$	6
$15 = 3 \times 5$	$16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$	8
$77 = 7 \times 11$	$78 = 2 \times 3 \times 13$	18
$125 = 5 \times 5 \times 5$	$126 = 2 \times 3 \times 3 \times 7$	15
$714 = 2 \times 3 \times 7 \times 17$	$715 = 5 \times 11 \times 13$	29
$948 = 2 \times 2 \times 3 \times 79$	$949 = 13 \times 73$	86
$1330 = 2 \times 5 \times 7 \times 19$	$1331 = 11 \times 11 \times 11$	33

tussen de twee. Het eerste van hun in totaal ruim twintig artikelen ging over Ruth-Aaron-paren. Dit artikel, getiteld 'On the largest prime factors of n and $n + 1$', dat overigens pas vier jaar nadat Aaron zijn 715de homerun sloeg verscheen, is te vinden op de website van Carl Pomerance: www.math.dartmouth.edu/~carlp.

RECENTE ONTDEKKING Dat de verzameling Ruth-Aaron-paren dichtheid 0 heeft, beantwoordt nog niet de vraag of het aantal Ruth-Aaron-paren eindig of oneindig is. Een eindige verzameling heeft

DE DICHTHEID VAN EEN VERZAMELING

Stel dat A een *deelverzameling* is van $\mathbf{N}$, de verzameling van natuurlijke getallen (1, 2, 3 enzovoorts). De *dichtheid* van A is een maat voor hoe vaak de getallen die van A deel uitmaken, opduiken in de verzameling $\mathbf{N}$. Een eenvoudig voorbeeld: de verzameling E van positieve, even getallen (dus 2, 4, 6, ...) heeft dichtheid $\frac{1}{2}$: ruwweg kun je zeggen dat 'de helft van alle natuurlijke getallen even is'. Natuurlijk is dit niet een erg bonafide uitspraak: de verzamelingen E en $\mathbf{N}$ zijn beide oneindig, dus kun je dan wel van 'de helft' spreken? Voor een preciezer begrip van de dichtheid van A, bekijken we het quotiënt

$$\frac{\#\{x \mid x \in A \text{ en } x \leq n\}}{n}$$

voor grote waarden van n. Als de limiet van dit quotiënt voor $n \to \infty$ gelijk is aan (bijvoorbeeld) 0, dan zeggen we dat de dichtheid van A gelijk is aan 0.

DE DICHTHEID VAN DE PRIEMGETALLEN

Wat is de dichtheid van de verzameling priemgetallen? Al sinds Euclides (ongeveer 300 v.Chr.) weten we dat er oneindig veel priemgetallen bestaan. Toch zijn er in verhouding tot de natuurlijke getallen maar weinig getallen priem: hun dichtheid is 0. De priemgetallenstelling zegt namelijk dat

$$\#\{x \mid x \text{ is priem en } x \leq n\}$$

voor grote waarden van n in de orde van grootte van $n/\ln(n)$ ligt. Dus de dichtheid van de verzameling priemgetallen is

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\#\{x \mid x \text{ is priem en } x \leq n\}}{n} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n/\ln(n)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln(n)} = 0.$$

DE CONTROVERSE TUSSEN ERDŐS EN SELBERG In 1896 werd de priemgetallenstelling voor het eerst, onafhankelijk van elkaar, bewezen door Hadamard en De la Vallée Poussin. Een halve eeuw later lukte het Erdős om, na een voorzet van de Noorse wiskundige Atle Selberg, een ander bewijs te geven; een zogenaamd elementair bewijs. Maar vergis je niet: dit betekent geenszins dat het bewijs makkelijk te volgen is. Sterker nog, het bewijs is erg ondoorzichtig en is geen voorbeeld van Erdős' elegante redeneerstijl die zijn handelsmerk was. Het woord 'elementair' wordt hier gebruikt om aan te geven dat er geen andere deelgebieden uit de wiskunde bijgehaald worden, om het resultaat te bewijzen.

Overigens was Selberg *not amused* wat Erdős hem geflikt had: hij vond dat Erdős er met zijn resultaten vandoor was gegaan. Erdős was zich echter van geen kwaad bewust: voor hem was het doen van wiskunde een bezigheid die je samen deed. Selberg was wat dat betreft Erdős' tegenpool: hij werkte het liefst alleen, in zijn eigen tempo.

DE DICHTHEID VAN RA Noteer met RA de verzameling Ruth-Aaron-getallen (het eerste getal van een Ruth-Aaron-paar heet een Ruth-Aaron-getal), dus $RA = \{5, 8, 15, 77, ...\}$. In hun artikel uit 1978 bewezen Pomerance en Erdős dat de dichtheid van RA gelijk is aan 0.

Ruth-Aaron-paren in vergelijking met de priemgetallen dun gezaaid zijn. Er geldt namelijk dat de som

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\cdots,$$

waarbij in de noemers de priemgetallen staan, *divergeert*, dat wil zeggen: willekeurig groot kan worden. Deze divergentie is overigens wel uiterst traag: neem je alle 'omgekeerden' van priemgetallen onder de miljoen, dan komt de reeks niet verder dan 2,886.

uiteraard dichtheid 0, maar een oneindige verzameling kan zowel dichtheid 0 hebben (zoals bijvoorbeeld het geval is bij de verzameling priemgetallen) als een positieve dichtheid (bijvoorbeeld de verzameling van positieve, even getallen).

Er zijn echter goede redenen om te geloven dat het aantal Ruth-Aaron-paren oneindig is. Ten eerste zijn er de computerberekeningen, die suggereren dat er geen einde aan de lijst komt. Maar er is ook een meer theoretische reden. De Poolse wiskundige Andrzej Schinzel (1937) heeft een vermoeden opgesteld dat weliswaar nog altijd open staat, maar waarvan men gelooft dat het waar is. Uitgaande van de juistheid van deze hardnekkige Schinzel-hypothese, kan de oneindigheid van het aantal Ruth-Aaron-paren relatief eenvoudig bewezen worden.

Het laatste nieuws omtrent Ruth-Aaron-paren dateert uit 2002. Toen bewees Pomerance samen met Murray Hill dat de som

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\frac{1}{77}+\frac{1}{125}+\frac{1}{714}+\cdots, \qquad (\ast)$$

waarbij in de noemers de eerste getallen van *alle* Ruth-Aaron-paren staan, *convergeert,* dat wil zeggen: nadert naar een limietwaarde. Ook al weten we nog niet of er oneindig veel Ruth-Aaron-paren bestaan, het is wél al bewezen dat (⁎) een eindige waarde heeft! Het is niet bekend of deze waarde irrationaal of rationaal is. Wie kan bewijzen dat de uitkomst van (⁎) irrationaal is, heeft ook bewezen dat er oneindig veel Ruth-Aaron-paren bestaan. Een eindige som van breuken is immers wéér een breuk.

Het feit dat (⁎) convergeert, betekent dat de

EIGEN ONDERZOEK We besluiten met enkele opgaven, waarin we je uitdagen om zelf op onderzoek uit te gaan.

Opgave 1. Lees het kader op pagina 24. Kun je een andere methode vinden om Ruth-Aaron-paren te genereren?

Opgave 2. Bij Ruth-Aaron-paren worden telkens álle priemfactoren bij elkaar opgeteld. We kunnen ook kijken naar paren (n, n + 1) waarvoor geldt dat de som van de *verschillende* priemfactoren van n en die van n + 1 aan elkaar gelijk zijn. Het paar (714, 715) komt dan nog steeds in de lijst voor, maar bijvoorbeeld het paar (125, 126) komt te vervallen: $125 = 5 \times 5 \times 5$ en $126 = 2 \times 3 \times 3 \times 7$; de som van de verschillende priemfactoren is respectievelijk 5 en $2 + 3 + 7 = 12$. Daarentegen kan bijvoorbeeld (49, 50) juist worden toegevoegd: $49 = 7 \times 7$ en $50 = 2 \times 5 \times 5$. Het getal 49 heeft twee factoren 7, maar laten we slechts een keer meetellen. Hetzelfde geldt voor de factor 5 in het getal 50. De som van de verschillende priemfactoren is in beide gevallen hetzelfde, namelijk 7. Maak een lijst van dergelijke paren en vergelijk die met de lijst van Ruth-Aaron-paren.

Opgave 3. In plaats van Ruth-Aaron-paren kunnen we ook kijken naar *Ruth-Aaron-tripels*: drie opvolgende natuurlijke getallen waarvoor geldt dat de som van de priemfactoren voor elk van de drie getallen hetzelfde is. Een ambachtelijke zoektocht naar dergelijke tripels zal niets opleveren: het eerste tripel bestaat uit getallen van niet minder dan zes cijfers: (417.162, 417.163, 417.164). Er geldt namelijk:

$$417.162 = 2 \times 3 \times 251 \times 277,$$
$$417.163 = 17 \times 53 \times 463,$$
$$417.164 = 2 \times 2 \times 11 \times 19 \times 499,$$
$$2 + 3 + 251 + 277 = 17 + 53 + 463 =$$
$$2 + 2 + 11 + 19 + 499 = 533.$$

Tel je identieke priemfactoren slechts één keer mee, dan is het kleinste Ruth-Aaron-tripel nóg groter: (89.460.294, 89.460.295, 89.460.296). Met een computer kun je zelf makkelijk de priemfactorontbindingen vinden (gebruik bijvoorbeeld Wolfram Alpha); de gezochte som is 8.465.

Probeer een computerprogramma te schrijven waarmee je meer Ruth-Aaron-tripels kunt vinden, of bedenk een nieuwe variant op Ruth-Aaron-paren.

Opgave 4. Lees de krant, kijk naar het nieuws en probeer in de geest van Pomerance bijzonderheden te ontdekken van getallen die je leest of hoort. Wie weet lukt het je om een mooi vermoeden te formuleren! ■

EEN RUTH-AARON-RECEPT

Hoe vind je Ruth-Aaron-paren, anders dan door uit te proberen of door een computer domweg alle paren $(k, k + 1)$ te laten testen? Het volgende recept is een van de mogelijkheden.

Stel dat n een geheel getal is waarvoor geldt dat

$$s = 2n + 1,$$
$$p = 8n + 5,$$
$$q = 48n^2 + 24n - 1 \text{ en}$$
$$r = 48n^2 + 30n - 1$$

allemaal priem zijn. We gaan bewijzen dat $(pq, pq + 1)$ dan een Ruth-Aaron-paar is.

Omdat p en q priem zijn, is de som van de priemfactoren van pq gelijk aan

$$p + q = 8n + 5 + 48n^2 + 24n - 1 = 48n^2 + 32n + 4. \qquad (**)$$

Om de som van de priemfactoren van $pq + 1$ te bepalen, moeten we eerst wat rekenen. Met een kladblaadje vinden we

$$pq + 1 = (8n + 5)(48n^2 + 24n - 1) + 1 = 384n^3 + 432n^2 + 112n - 4.$$

Tevens geldt dat

$$4sr = 4(2n + 1)(48n^2 + 30n - 1) = 384n^3 + 432n^2 + 112n - 4.$$

Dus

$$pq + 1 = 4sr.$$

De som van de priemfactoren van $pq + 1$ is dus gelijk aan de som van de priemfactoren van $4sr$ en die is

$$2 + 2 + r + s = 4 + 48n^2 + 30n - 1 + 2n + 1 = 48n^2 + 32n + 4,$$

hetzelfde dus als (**), waarmee is aangetoond dat $(pq, pq + 1)$ een Ruth-Aaron-paar is.

Laten we voor $n = 1$, 2 en 3 eens kijken wat dit recept oplevert. Voor $n = 1$ is $s = 3$, $p = 13$, $q = 71$ en $r = 77$. Omdat 77 niet priem is ($77 = 7 \times 11$), vinden we geen Ruth-Aaron-paar. Ook voor $n = 2$ gaat het mis: $s = 5$, $p = 21$ (niet priem), $q = 239$ en $r = 251$. Voor $n = 3$ is $s = 7$, $p = 29$, $q = 503$ en $r = 521$. Raak: deze vier getallen zijn alle priem! Het levert het Ruth-Aaron-paar (14.587, 14.588).

Het is duidelijk dat dit recept lang niet alle Ruth-Aaron-paren vindt: het kleinste paar heeft al getallen van vijf cijfers! Het is bovendien onbekend of er oneindig veel n-en bestaan waarvoor geldt dat s, p, q en r alle priem zijn.

KLAVERKRAKER

■ door Matthijs Coster

Het diagram hieronder bestaat uit 28 hokjes. In elk hokje moet een van de cijfers 1 tot en met 8 worden ingevuld. In de tabel zie je hoe vaak elk cijfer voorkomt (het cijfer 1 zeven keer, het cijfer 2 drie keer, enzovoorts).

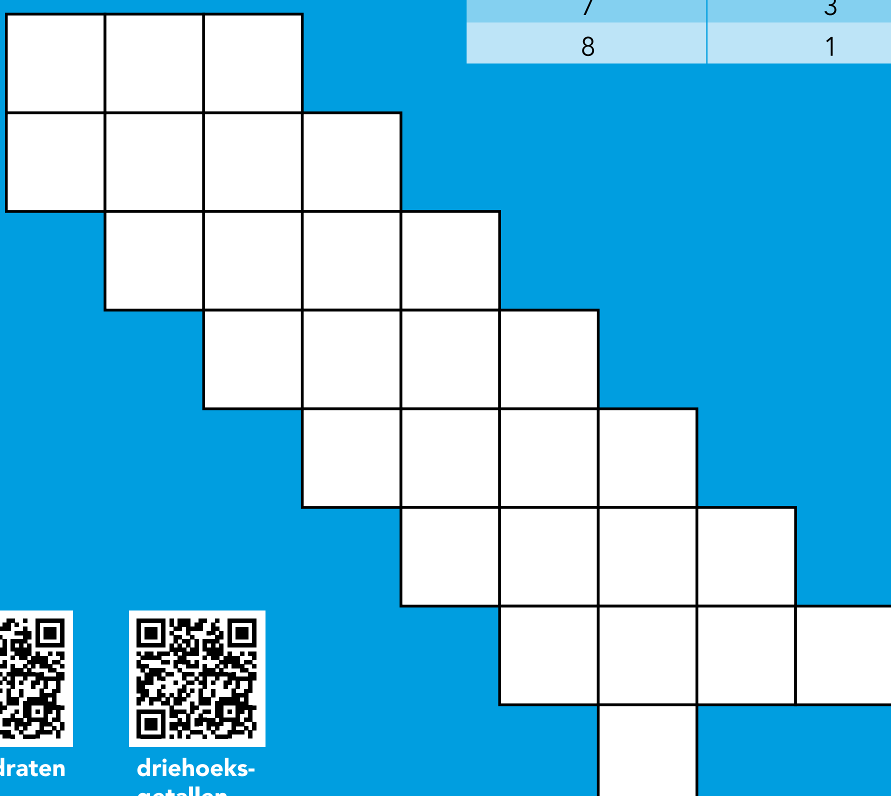
De negen getallen die je verticaal (cijfers van boven naar beneden) leest, zijn allemaal *kwadraten*. De acht getallen die je horizontaal (cijfers van links naar rechts) leest, zijn allemaal *driehoeksgetallen*. Driehoeksgetallen zijn getallen van de vorm $1 + 2 + 3 + \cdots + n$ (voor een natuurlijk getal n).

De kwadraten en de driehoeksgetallen kun je vinden op internet, zie bijvoorbeeld http://oeis.org/A000290/b000290.txt (kwadraten) en http://oeis.org/A000217/b000217.txt (driehoeksgetallen), of scan de QR-codes hieronder.

De cijfercombinaties 13, 21, 41, 75 en 76 komen precies tweemaal voor in het diagram. De cijfercombinaties 62 en 64 komen precies driemaal voor. Geen enkele andere combinatie van twee cijfers komt meer dan één keer voor in twee opeenvolgende hokjes (horizontaal noch verticaal).

De oplossing verschijnt in het volgende nummer van *Pythagoras*. ■

cijfer	aantal
1	7
2	3
3	2
4	3
5	3
6	6
7	3
8	1



kwadraten

driehoeksgetallen

THALES VAN MILETE

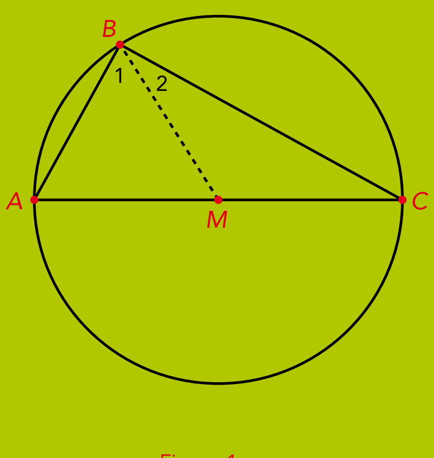
■ door Jan Guichelaar

In aflevering 3 van de serie over perspectieftekenen van Jeanine Daems (zie pagina 4) wordt gebruik gemaakt van een van de stellingen van de Griekse wijsgeer en wiskundige Thales (ong. 625 v.C.-ong. 545 v.C.). Thales werd geboren in Milete, een Griekse stad in het huidige West-Turkije. Met elf andere steden (o.a. Efese en Priëne) vormde Milete vanaf de tweede helft van de zesde eeuw voor Christus de zogeheten Ionische Bond. Milete was een belangrijke handelsplaats voor transport van goederen tussen het oosten en westen.

Thales was ingenieur, koopman en politicus. Hij was wellicht de eerste geleerde die vond dat je de natuur om ons heen moest verklaren door alleen naar de natuur zelf te kijken. In het bijzonder wilde hij hiervoor geen uitgebreid godenrijk veronderstellen. Daarmee legde hij de basis voor de moderne manier van het bedrijven van natuurkunde.

Thales schijnt de zonsverduistering in 585 v.C. voorspeld te hebben. Of hij de daarvoor benodigde waarnemingen zelf heeft gedaan, is echter niet zeker. Dat geldt ook voor de aan Thales toegeschreven stellingen: niemand weet of hij de stellingen als eerste geformuleerd en/of bewezen heeft.

Zijn koopmansgeest blijkt uit het verhaal dat hij ruim voor de olijvenoogst alle olijvenpersen in de regio huurde van de eigenaren. Bij de oogst was hij monopolist en verhuurde de persen tegen woekerprijzen door.



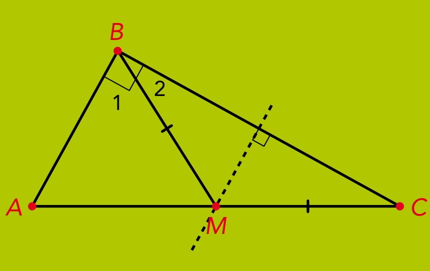
Figuur 1

THALES' BEROEMDE STELLING Er worden meer stellingen aan Thales toegeschreven, maar als we het hebben over dé stelling van Thales, gaat het altijd om de volgende:

> **Als de hoekpunten van driehoek ABC op een cirkel liggen en AC is een middellijn van deze cirkel, dan is $\angle B = 90°$.**
> **Omgekeerd, als zijde AC van driehoek ABC een middellijn is van een cirkel en $\angle B = 90°$, dan ligt punt B op de cirkel.**

Om het eerste deel van deze stelling te bewijzen, tekenen we een cirkel met middelpunt M, een middellijn AC en een punt B ergens anders op de cirkel. In driehoek ABC trekken we de lijn BM en we nummeren de hoeken bij B zoals in figuur 1.
Omdat $AM = BM$, geldt dat $\angle A = \angle B_1$. En uit $CM = BM$ volgt dat $\angle C = \angle B_2$. De som van de drie hoeken van een driehoek is 180°, dus $\angle B = \angle B_1 + \angle B_2 = \frac{1}{2}(2\angle B_1 + 2\angle B_2) = \frac{1}{2}(\angle A + \angle B_1 + \angle B_2 + \angle C) = \frac{1}{2} \cdot 180° = 90°$.

Om de omkering te bewijzen, gaan we uit van een driehoek ABC met $\angle B = 90°$, zie figuur 2. Op AC ligt een punt M met $BM = CM$. Dit punt kan je construeren met behulp van de middelloodlijn van BC. Geldt nu ook dat $AM = BM$? Er geldt dat $\angle B_2 = \angle C$, want $BM = CM$. De som van drie hoeken van een driehoek is 180°, dus $\angle A = 90° - \angle C = 90° - \angle B_2 = \angle B_1$. Hieruit volgt dat driehoek ABM gelijkbenig is, dus $AM = BM$, dus A, B en C liggen op een cirkel met middelpunt M. ■



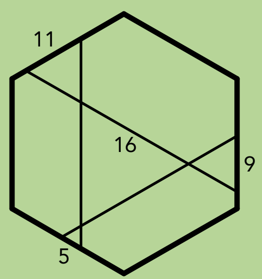
Figuur 2

Afgelopen maart vond de vierde editie van de regionale tweede ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade plaats. Bij de opgaven van deze wedstrijd zijn vaak meerdere oplossingen mogelijk: soms werkt stug doorzetten en goed rekenen, maar vaak kun je met een slim idee het werk flink beperken. In dit artikel willen we dat laten zien aan de hand van opgave B5, die slechts 8% van de deelnemers wist op te lossen.

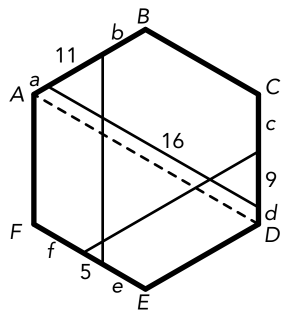
■ door Daniël Kroes en Julian Lyczak

DE VEELZIJDIGHEID VAN DE ZESHOEK

Opgave B5 (NWO tweede ronde 2013):
Een regelmatige zeshoek is door lijnen evenwijdig aan de zijden in zeven stukken verdeeld, zoals in figuur 1. Vier van de stukken zijn gelijkzijdige driehoeken, waarvan de lengtes van de zijden in de figuur aangegeven zijn. Wat is de lengte van de zijden van de regelmatige zeshoek?



Figuur 1



Figuur 2

In bovenstaande opgave wordt gevraagd naar de lengtes van de zijden van de zeshoek en we zien dat de gegeven lengtes 5, 9 en 11 al onderdeel zijn van zo'n zijde. Laten we daarom de overige twee stukjes van die drie zijden een naam geven, zoals in figuur 2.

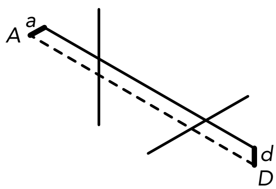
We hebben nu dus zes variabelen, maar als we goed kijken zien we dat er eigenlijk maar drie zijn. Kijk maar eens naar figuur 3 met daarin de lengtes a, d en de diagonaal AD. In deze figuur zijn twee zijden evenwijdig en twee hoeken zijn allebei 60°. Het is dus een zogeheten *gelijkbenig trapezium*: er geldt $a = d$. Net zo geldt dat $b = e$ en $c = f$, dus laten we drie nieuwe variabelen kiezen: $x = a = d$, $y = b = e$ en $z = c = f$. Nu kunnen we de lengte van de zijde van de zeshoek op drie manieren berekenen:

$$x + 11 + y = y + 5 + z = z + 9 + x.$$

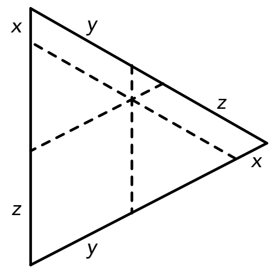
Door steeds twee van de uitdrukkingen met elkaar te vergelijken, vinden we dat

$$z = y + 2, z = x + 6 \text{ en } y = x + 4.$$

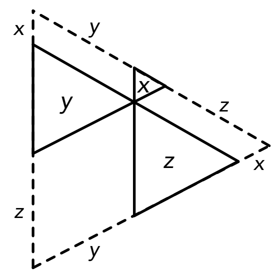
In principe kunnen we drie vergelijkingen met drie onbekenden vaak oplossen. Maar het blijkt hier niet te lukken, omdat de derde vergelijking gewoon volgt uit de eerste twee, dus daar hebben we eigenlijk niets aan. Dit is niet zo verwonderlijk, want we hebben nog niets gedaan met die middelste driehoek, die met zijden van lengte 16. Daar zullen we dus nog iets mee moeten om een extra verband tussen x, y en z te vinden.



Figuur 3



Figuur 4



Figuur 5

We hadden al AD getrokken en als we nogmaals naar figuur 3 kijken, zien we dat die lijnstukjes in het midden ook lengte x hebben. Deze lijnstukjes zijn wel weer een deel van die lengte 16. We willen natuurlijk ook iets met y en z en daarom trekken we de overige twee diagonalen ook. Nu zien we de lengtes x, y en z heel vaak voorkomen in de middelste driehoek, zie figuur 4. Deze gelijkzijdige driehoek is opgedeeld in drie vierhoeken en drie gelijkzijdige driehoeken. Door alle evenwijdige lijnen zijn de vierhoeken allemaal parallellogrammen, waardoor we ook de lengtes van de zijden van de gelijkzijdige driehoekjes kunnen bepalen zoals in figuur 5.

Als we goed kijken, volgt nu direct dat de lengte 16 van de zijde van deze gelijkzijdige driehoek precies $x + y + z$ is. Dit levert de extra vergelijking die we zochten:

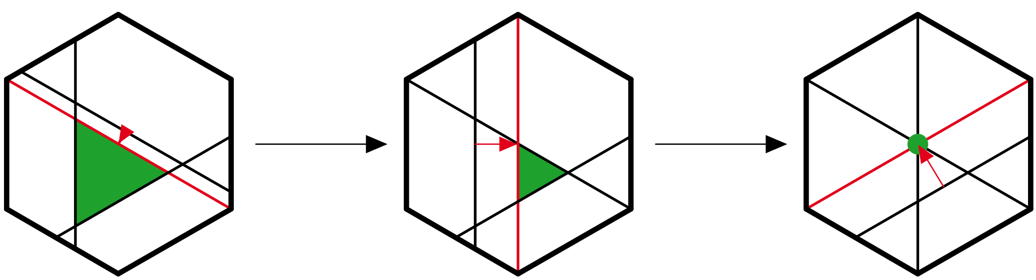
$$x + y + z = 16.$$

Nu is het niet meer moeilijk om x, y en z te berekenen. Vul bijvoorbeeld $y = x + 4$ en $z = x + 6$ in in $x + y + z = 16$. Dan vinden we

$$16 = x + (x + 4) + (x + 6) = 3x + 10.$$

Dus $x = 2$ en daarmee vinden we $y = 6$ en $z = 8$. Nu is de lengte van een zijde van de zeshoek precies gelijk aan $x + 11 + y = 2 + 11 + 6 = 19$. Voor de zekerheid kunnen we controleren of ook $y + 5 + z = 19$ en $z + 9 + x = 19$. Dit blijkt inderdaad zo te zijn en met volle overtuiging schrijven we 19 op als antwoord.

SCHUIVEN Het vinden van de vergelijking $x + y + z = 16$ kunnen we ook heel mooi dynamisch afleiden. Kijk maar eens naar figuur 6. In het eerste plaatje schuiven we een van de drie lijnen richting de diagonaal AD. De gelijkzijdige driehoek in het midden krijgt dan precies zijden met lengte $16 - x$. Daarna kunnen we de volgende lijn naar de diago-



Figuur 6

naal *BE* verplaatsen. Dan neemt de lengte van de zijde van de gelijkzijdige driehoek in het midden nog verder af met y. Als we dit trucje nog een keer herhalen, krijgen we in het midden dus een gelijkzijdige driehoek met als lengte van de zijde $16 - x - y - z$. Echter, deze gelijkzijdige driehoek is een punt geworden en heeft dus 'afmeting' 0. Dus $x + y + z = 16$, zoals we ook al eerder hadden gevonden.

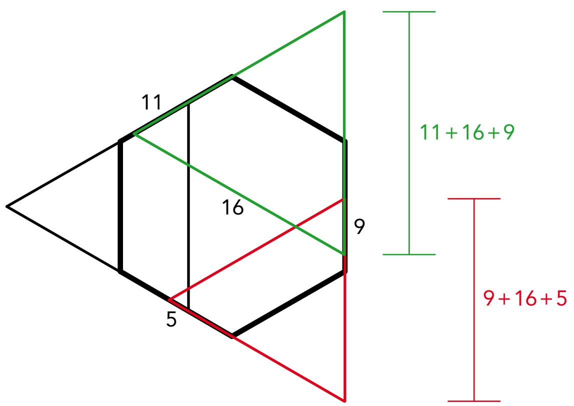
Nu hebben we trouwens de vergelijkingen $z = y + 2$, $z = x + 6$ en $y = x + 4$ niet meer nodig. We hadden namelijk ook het volgende kunnen doen. In plaats van de lengte van de zijde van de zeshoek te berekenen, kunnen we ook drie maal deze lengte berekenen. Dit is namelijk gelijk aan

$$\begin{aligned}&(x + 11 + y) + (y + 5 + z) + (z + 9 + x) = \\ &2(x + y + z) + 25 = \\ &2 \cdot 16 + 25 = 57.\end{aligned}$$

Delen door 3 levert nu onmiddellijk dat het antwoord 19 is.

UITBREIDEN We hebben het antwoord al op twee verschillende manieren gevonden, maar er is nóg een methode. Eén waar minder rekenwerk aan te pas komt. Hiervoor moet je weer een heel andere creatieve stap maken. De vraag is natuurlijk welke. Laten we daarvoor weer even terug gaan naar figuur 1. De zeshoek wordt nu opgedeeld in vier driehoeken en drie zeshoeken. Het valt op dat de drie zeshoeken er niet bepaald aantrekkelijk uitzien. We willen ons dus vooral concentreren op de gelijkzijdige driehoeken.

Zoals we eerst steeds lijnen binnen de figuur tekenden, kunnen we ook juist een mooie gelijkzijdige driehoek krijgen door de figuur *uit te breiden*, zoals in figuur 7. Nu hebben we een gelijkzijdige driehoek waarvan de zijden drie keer zo lang zijn als die van de zeshoek. Binnen deze driehoek vinden we nu nog meer gelijkzijdige driehoeken, in het bijzonder de twee die aangegeven zijn met de kleuren groen en rood. De groene driehoek heeft als lengte van de zijde $11 + 16 + 9 = 36$, want dat is precies de zijde linksonder. De rode heeft juist zijdelengte $9 + 16 + 5 = 30$, wat gemakkelijk te zien is door naar de zijde linksboven te kijken. Als we nu naar de rechterzijde van de grote driehoek kijken, bestaat deze precies uit deze twee zijden die een overlap hebben van lengte 9. Dus is de zijde van de grote driehoek $36 + 30 - 9 = 57$ lang. Deel door 3, en we komen wederom op 19 uit. ■



Figuur 7

PYTHAGORAS OLYMPIADE

■ door Matthijs Coster, Eddie Nijholt en Harry Smit

Doe mee met de Pythagoras Olympiade! Elke aflevering bevat vier opgaven. De eerste twee zijn wat eenvoudiger; onder de goede inzendingen van leerlingen uit de klassen 1, 2 en 3 wordt een cadeaubon van Bol.com ter waarde van 20 euro verloot. De laatste twee zijn echte breinbrekers; onder de goede inzendingen van leerlingen (tot en met klas 6) wordt een bon van 20 euro verloot. Per aflevering wordt maximaal één bon per persoon vergeven.
Daarnaast krijgen leerlingen (tot en met klas 6) punten voor een *laddercompetitie,* waarmee eveneens een cadeaubon van Bol.com van 20 euro te verdienen valt. De opgaven van de onderbouw zijn 1 punt waard, de opgaven van de bovenbouw 2 punten. De leerling met de hoogste score in de laddercompetitie krijgt een bon. Zijn puntentotaal wordt weer op 0 gezet. Wie zes achtereenvolgende keren niets inzendt, verliest zijn punten in de laddercompetitie.
Met de bovenbouwopgaven kun je ook een plaats in de finale van de Nederlandse Wiskunde Olympiade verdienen, mocht het via de voorronden niet lukken: aan het eind van elke jaargang worden enkele goed scorende leerlingen uitgenodigd voor de NWO-finale. Niet-leerlingen kunnen met de Pythagoras Olympiade meedoen voor de eer.

HOE IN TE ZENDEN? Inzendingen ontvangen we bij voorkeur per e-mail (getypt of een scan van een handgeschreven oplossing):
pytholym@gmail.com
Je ontvangt een automatisch antwoord zodra we je bericht hebben ontvangen.

Eventueel kun je je oplossing sturen naar
Pythagoras Olympiade, PWN
p.a. Centrum Wiskunde & Informatica
Postbus 94079
1090 GB Amsterdam

Voorzie het antwoord van een duidelijke toelichting (dat wil zeggen: een berekening of een bewijs). Vermeld je naam en adres; leerlingen moeten ook hun klas en de naam van hun school vermelden.
Je inzending moet bij ons binnen zijn vóór 15 september 2013.

DE GOEDE INZENDERS VAN FEBRUARI 2013

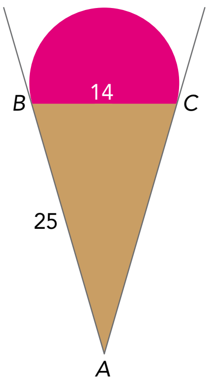
254: Marijke Bot (klas 4), Murmellius Gymnasium, Alkmaar; Jildert Denneman (klas 3), Erasmiaans Gymnasium, Rotterdam; Jelmer Hinssen (klas 2), Stedelijk Gymnasium, Nijmegen; Bram Jonkheer (klas 4), Emelwerda College, Emmeloord; Ritchie Keijsper (klas 4), Murmellius Gymnasium, Alkmaar; Jori Koolstra (klas 5), Willem Lodewijk Gymnasium, Groningen; Frenk Out (klas 4), Murmellius Gymnasium, Alkmaar; Timen Schenk (klas 4), Murmellius Gymnasium, Alkmaar; Tom Smeding (klas 4), Dalton, Den Haag; Michelle Sweering (klas 5), Erasmiaans Gymnasium, Rotterdam; Art Waeterschoot (klas 4), H. Pius X-instituut, Antwerpen; Bob Zwetsloot (klas 4), Teylingen College, locatie Leeuwenhorst, Noordwijkerhout.
255: Marijke Bot (klas 4), Murmellius Gymnasium, Alkmaar; Ritchie Keijsper (klas 4), Murmellius Gymnasium, Alkmaar; Jori Koolstra (klas 5), Willem Lodewijk Gymnasium, Groningen; Timen Schenk (klas 4), Murmellius Gymnasium, Alkmaar; Michelle Sweering (klas 5), Erasmiaans Gymnasium, Rotterdam; Tim Vermeulen (klas 5), Isendoorn College, Warnsveld; Art Waeterschoot (klas 4), H. Pius X-instituut, Antwerpen; Bob Zwetsloot (klas 4), Teylingen College, locatie Leeuwenhorst, Noordwijkerhout.
256: Kees Boersma, Vlissingen; Jelmer Hinssen (klas 2), Stedelijk Gymnasium, Nijmegen; Jori Koolstra (klas 5), Willem Lodewijk Gymnasium, Groningen; Lennart Muijres (klas 2), Stedelijk Gymnasium, Nijmegen; Michelle Sweering (klas 5), Erasmiaans Gymnasium, Rotterdam; Tim Vermeulen (klas 5), Isendoorn College, Warnsveld; Rob van der Waall, Huizen; Art Waeterschoot (klas 4), H. Pius X-instituut, Antwerpen; Bob Zwetsloot (klas 4), Teylingen College, locatie Leeuwenhorst, Noordwijkerhout.
257: Kees Boersma, Vlissingen; Jelmer Hinssen (klas 2), Stedelijk Gymnasium, Nijmegen; Jori Koolstra (klas 5), Willem Lodewijk Gymnasium, Groningen; Michelle Sweering (klas 5), Erasmiaans Gymnasium, Rotterdam; Art Waeterschoot (klas 4), H. Pius X-instituut, Antwerpen.
Cadeaubonnen: Jildert Denneman en Jori Koolstra.
Stand laddercompetitie: Michelle Sweering (26 p; cadeaubon), Art Waeterschoot (12 p), Bob Zwetsloot (12 p), Jori Koolstra (10 p), Bram Jonkheer (8 p), Jelmer Hinssen (7 p), Tara van Belkom (5 p), Eline Vounckx (5 p), Ronen Brilleslijper (4 p), Lennart Muijres (4 p), Frenk Out (4 p), Marijke Bot (3 p), Elien Cambie (3 p), Jonas Cambie (3 p), Ritchie Keijsper (3 p), Jia-Jia ter Kuile (3 p), Marleen Meliefste (3 p), Tim Vermeulen (3 p), Matthijs Buringa (2 p), Timen Schenk (2 p), Jelle den Uil (2 p), Luka Zwaan (2 p), Jildert Denneman (1 p), Thijs van Etten (1 p), Alex Keizer (1 p), Bastiaan vd Kooij (1 p), Rein Lukkes (1p), Tom Smeding (1 p), Alexander Vermeersch (1 p).

OPGAVE 262

Karel heeft drie getallen a, b en c opgeschreven. Hij berekent $a + b$, $a + c$, $b + c$, $a - b$, $a - c$ en $b - c$. De uitkomsten (gerangschikt van klein naar groot) zijn 981, 1008, 1989, 3045, 4053 en 5034. Bepaal a, b en c.

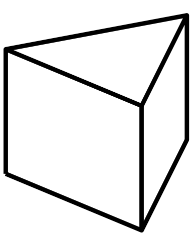
OPGAVE 263

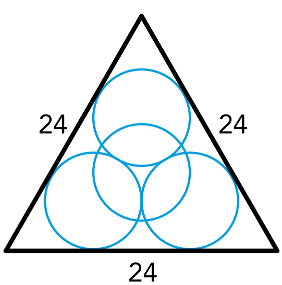
Tony koopt een Italiaans ijsje met één bolletje. Het bolletje past precies in het kegelvormige hoorntje: het raakt de lijn door A en B in het punt B, en de lijn door A en C in het punt C. De afmetingen van het hoorntje zijn aangegeven in de figuur. Wat is de straal van het ijsbolletje?



OPGAVE 264

Hieronder zie je de verpakking van een set van vier Jeu-de-Boules-ballen. De bodem is een gelijkzijdige driehoek met zijden van 24 cm. Drie ballen liggen op de bodem, waarbij ze de wanden en elkaar raken (zie voor een bovenaanzicht de rechterfiguur). De vierde bal is hier bovenop geplaatst, en deze bal raakt de bovenzijde van de verpakking. Wat is de hoogte van de verpakking?



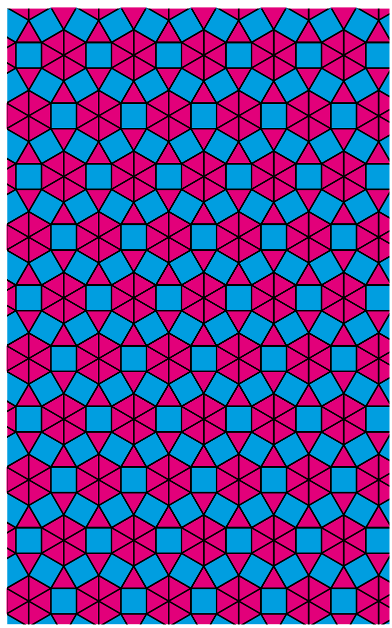


OPGAVE 265

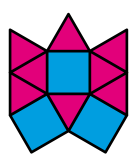
Barbara ziet een vermenigvuldigingsteken over het hoofd tussen twee getallen van drie cijfers. Ze schrijft nu een getal op van zes cijfers. Dit zescijferige getal blijkt precies 7 keer zo groot te zijn als het product van de twee driecijferige getallen. Kun je dit getal van zes cijfers reconstrueren?

OPLOSSING 254

Een grote muur is behangen volgens de vlakvulling die je hieronder ziet. In welke verhouding komen de blauwe vierkanten en rode driehoeken voor?



Oplossing. De vlakvulling kan gemaakt worden met tegels die er uitzien zoals de figuur hieronder. Het aantal blauwe vierkanten verhoudt zich tot het aantal rode driehoeken als 3 : 8. (De oppervlakte van het blauwe gebied verhoudt zich tot de oppervlakte van het rode gebied als $3 : 2\sqrt{3}$.)



OPLOSSING 255

Tim doet mee met een onlinequiz. Hij krijgt 5 meerkeuzevragen met steeds 4 opties en na afloop krijgt hij zijn totaalscore te zien (dus 0, 1, 2, 3, 4 of 5 punten), zonder de juiste antwoorden en zonder te weten welke vragen hij nou goed had. Tim wil natuurlijk wel weten wat de goede antwoorden waren. Laat zien dat hij dit kan bereiken door de quiz maximaal 11 keer te spelen.

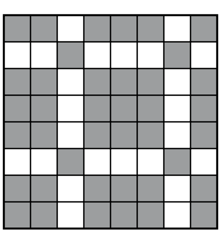
Oplossing. Noem de antwoorden A, B, C en D. Als Tim eerst AAAAA invult, en dan telkens een A door een B of C vervangt (dus BAAAA, CAAAA, ABAAA, ACAAA, ...), heeft hij de quiz 11 keer gespeeld. We gaan bewijzen dat hij dan ook de juiste antwoorden weet. Hij weet het aantal goede antwoorden van zijn eerste poging. Als het aantal goede antwoorden bij BAAAA daalt t.o.v. dat van AAAAA, was de eerste A goed, want dat was de enige wijziging. Als het bij BAAAA of CAAAA is gestegen, is B respectievelijk C het goede antwoord op de eerste vraag, want dat was de enige wijziging. En als het aantal antwoorden in deze gevallen gelijk blijft, is D het goede antwoord op de eerste vraag, want dat is de enige manier waarop er niks wijzigt aan het aantal goede antwoorden in de series die beginnen met A, B en C. Dit principe kunnen we herhalen voor de tweede tot en met de vijfde vraag, waarna hij alle antwoorden weet.

OPLOSSING 256

Gegeven is een 8 bij 8 rooster van tegeltjes. We kleuren elk tegeltje grijs of wit op de volgende manier:

- de bovenste rij heeft hetzelfde aantal grijze tegeltjes als de meest linkse kolom;
- elke rij is gelijk aan de bovenste rij óf diens negatief (grijs naar wit en andersom);
- elke kolom is gelijk aan de meest linkse kolom óf diens negatief.

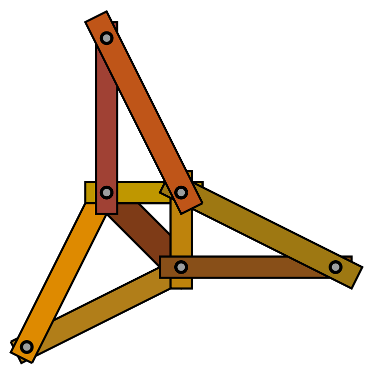
In de figuur zie je een voorbeeld van hoe de tegeltjes ingekleurd kunnen worden. Laat zien dat het positieve verschil tussen het totaal aantal grijze en witte tegeltjes altijd een kwadraat is.



Oplossing. Noem het aantal grijze vakjes in de bovenste rij g en het aantal witte vakjes w. Het aantal grijze vakjes in de bovenste rij is gelijk aan het aantal grijze vakjes in de meest linkse kolom. De rijen waarvan het meest linkse hokje grijs is, zijn dus identiek. Die rijen bevatten in totaal dus g^2 grijze vakjes. De overige rijen zijn eveneens identiek (negatief). Deze rijen bevatten w^2 grijze vakjes. Het aantal witte vakjes is dus $(g + w)^2 - g^2 - w^2 = 2gw$. Het positieve verschil tussen het totaal aantal grijze en witte tegeltjes is $g^2 + w^2 - 2gw = (g - w)^2$: een kwadraat.

OPLOSSING 257

Hans Zimmermann is timmerman. Hij heeft negen balkjes van gelijke dikte en zes spijkers. Daarmee wil hij het onderstaande kunstwerk maken. Is het mogelijk om de balkjes zo aan elkaar vast te spijkeren dat bij elke spijker de rakende balkjes vlak tegen elkaar aan zitten?



Oplossing. In het totaal zijn er 18 balkeinden waar Hans spijkers doorheen slaat. Bij elk hoekpunt komt een even aantal balkjes samen. Deze balkjes zitten voor de ene helft op een even en voor de andere helft op een oneven verdieping. De 18 balkeinden moeten worden verdeeld in 9 balkeinden op een even en 9 balkeinden op een oneven verdieping. Dan moet er minimaal één balk scheef geplaatst worden. Het is dus niet mogelijk om de balkjes zo aan elkaar vast te spijkeren dat bij elke spijker de rakende balkjes vlak tegen elkaar aan zitten.

97	43	7	5	7	3
67	3	7	29	5	3
2	7	53	7	41	7
2	13	7	19	3	3
7	2	19	7	5	89
3	7	3	3	47	23

OPLOSSING PRIEMPROPPER

De oplossing van de puzzel 'Priempropper' uit het vorige nummer zie je hiernaast.

ANTWOORDEN 'VIERHOEKEN IN PERSPECTIEF' (P. 9)

Opdracht 6. Als de tegelvloer uit rechthoeken bestaat, ligt het oog ergens recht boven *B*, maar niet meer per se op die cirkelboog op *CD*.
Opdracht 7. Trapezium, rechthoek en vierkant (als je heel nauwkeurig tekent!).

PYTHAGORAS

52ste jaargang nummer 6
juni 2013
ISSN 0033 4766

***Pythagoras* stelt zich ten doel jongeren kennis te laten maken met de leuke en uitdagende kanten van wiskunde. *Pythagoras* richt zich tot leerlingen van vwo en havo en alle anderen die jong van geest zijn.**

Internet www.pythagoras.nu

Hoofdredacteur Derk Pik

Eindredacteur Alex van den Brandhof

Redactie Matthijs Coster, Jeanine Daems, Jan Guichelaar, Klaas Pieter Hart, Paul Levrie, Marc Seijlhouwer

Vormgeving Grafisch Team Digipage BV, Leidschendam

Druk Drukkerij Ten Brink, Meppel

Uitgever Koninklijk Wiskundig Genootschap

Verantwoordelijk uitgever Chris Zaal

Lezersreacties en kopij
Bij voorkeur per e-mail; lezersreacties naar Jan Guichelaar, jan@pythagoras.nu en kopij naar Derk Pik, derk@pythagoras.nu. Eventueel per post naar Jan Guichelaar, Pedro de Medinalaan 162, 1086 XR Amsterdam.

Abonnementen, bestellingen en mutaties
Drukkerij Ten Brink
Abonnementenadministratie
Postbus 41
7940 AA Meppel
Telefoon: 0522 855 175
E-mail:
abonnementen@pythagoras.nu

Abonnementsprijs
(6 nummers per jaargang)
€ 26,00 (Nederland),
€ 29,00 (buitenland),
€ 17,00 (groepsabonnement NL),
€ 18,00 (groepsabonnement buitenland),
€ 26,00 (geschenkabonnement NL),
€ 29,00 (geschenkabonnement buitenland).
Een geschenkabonnement stopt automatisch na één jaar. Overige abonnemten gelden tot wederopzegging. Zie www.pythagoras.nu voor verdere toelichtingen.

Aan dit nummer werkten mee
Sjaak Adriaanse
(s.adriaanse@inter.nl.net),
Alex van den Brandhof
(alex@pythagoras.nu),
Matthijs Coster
(matthijs@pythagoras.nu),
Jeanine Daems
(jeanine@pythagoras.nu),
Jan Guichelaar
(jan@pythagoras.nu),
Klaas Pieter Hart
(kp@pythagoras.nu),
Daniël Kroes
(daniel@wiskundeolympiade.nl),
Paul Levrie
(paul@pythagoras.nu),
Julian Lyczak
(julian@wiskundeolympiade.nl),
Eddie Nijholt
(eddie@pythagoras.nu),
Derk Pik
(derk@pythagoras.nu),
Marc Seijlhouwer
(marc@pythagoras.nu),
Harry Smit
(h.j.smit@students.uu.nl).

Pythagoras wordt mede mogelijk gemaakt door de bijdragen van de onderstaande instituten en instellingen.

X-AS

Een x-as, ziek en hoogbejaard,
lag op zijn doodsbed neder
en sprak, berustend en bedaard:
'Wij zien elkander weder.

Men heeft mij immers steeds beloofd
dat ik, na het cremeren,
wanneer het vuur zal zijn gedoofd,
als as zal wederkeren.'

Marjolein Kool

Uit: Drs. P & Marjolein Kool, *Wis- en natuurlyriek*, p. 53
(Nijgh & Van Ditmar, 2000)