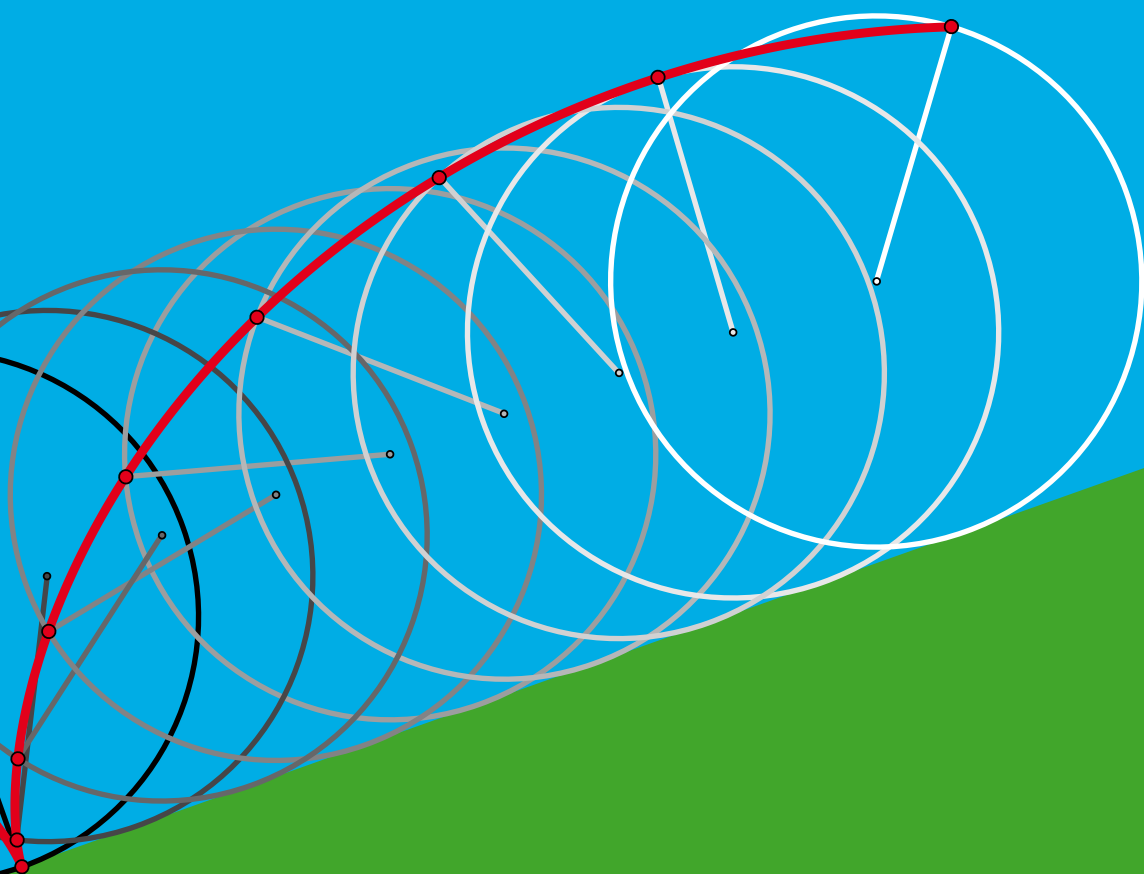


PYTHA GORAS

WISKUNDETIJDSCHRIFT VOOR JONGEREN



53ste JAARGANG - NUMMER 1 - SEPTEMBER 2013



3TU.AMI

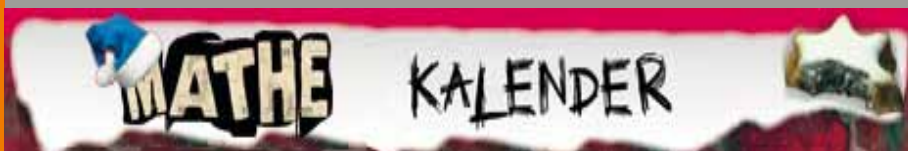


 **TU**Delft

TU/e

**UNIVERSITEIT
TWENTE.**

Het Applied Mathematics Institute 3TU.AMI, een samenwerkingsverband van de drie technische universiteiten Delft, Eindhoven en Twente, organiseert elk jaar samen met het Duitse wiskunde-instituut MATHEON een wiskundewedstrijd voor middelbare scholieren. Deze wedstrijd wordt via het internet gespeeld in de vorm van een digitale adventskalender, de zogenaamde Mathekalender.



Van 1 tot en met 24 december wordt dagelijks op de Mathekalender een vakje 'geopend' waarachter een wiskundeopgave verschijnt met tien mogelijke antwoorden. Deze opgaven zijn uitdagend, en soms van het niveau van de finale van de Nederlandse Wiskunde Olympiade. Omdat het meerkeuzevraagstukken zijn, worden er geen toelichtingen of bewijzen gevraagd. De opgaven zijn ontleend aan leuke praktische problemen.

Internationale Wiskundewedstrijd MATHEON/AMI

Registratie en spelregels

Het is een individuele wedstrijd. Je kunt je daarom alleen als persoon voor deelname registreren, maar het is natuurlijk leuk om met een groep of schoolklas te proberen het goede antwoord van een opgave te vinden. Op de website

<http://ami.3tu.nl/Mathekalender>

staat hoe je je voor de wedstrijd kunt opgeven. Bovendien bevat deze website de spelregels en een archief van opgaven die in vorige versies van de Mathekalender zijn verschenen. Daarmee krijg je een indruk van het niveau van de opgaven.

Prijzen

Het instituut 3TU.AMI stelt een laptop beschikbaar als prijs voor de Nederlandse scholier die de beste score haalt. Daarnaast stelt MATHEON elke dag prijzen beschikbaar en elke deelnemer kan daarnaar meedingen.

Meer informatie

Als je verder nog vragen hebt, dan kun je deze stellen via e-mail:
3tuami-ewi@tudelft.nl.

INHOUD

6

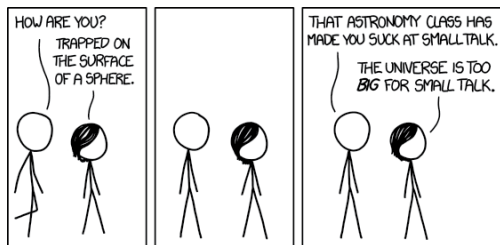


DRAAIENDE WIELEN

Als je fietst, beschrijft het ventiel een kromme baan. Dat is de zogenaamde cycloïde. We laten zien hoe je een cycloïde tekent met het computerprogramma GeoGebra.

XKCD

Diverse striptekenaars houden van wiskunde. Deze jaargang laten we een paar wiskundige strips zien. In dit nummer vind je een collage van strips van de Amerikaan Randall Munroe, die onder de titel xkcd drie keer per week een strip op zijn website zet.



20



HET ZUTPHENSE KWADRANT: EEN MIDDELEEUWS HORLOGE

Onlangs werd in Zutphen een 'oud kwadrant' gevonden, een middeleeuws instrument om de tijd te meten. Achter het instrument schuilt een cocktail van Indiase wiskunde en oud-Griekse meetkunde, en het vernuft van islamitische geleerden om deze mix om te zetten in een handzaam instrument.

EN VERDER

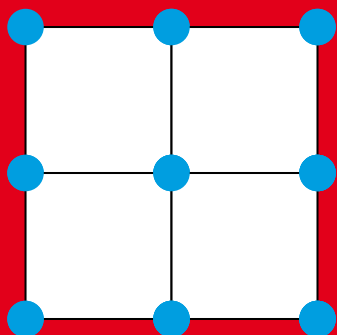
- 2 Kleine nootjes
- 4 Slim vermenigvuldigen
- 11 Journaal
- 12 Familie van het 3D-A4'tje
- 18 Van klein naar groot
- 24 Mooie akkoorden
- 26 Springende kikkers
- 29 Theatraëder
- 30 Pythagoras Olympiade
- 33 Oplossing Klaverkraker

Omslagillustratie: Derk Pik

■ **NIVEAUBALKJES** Sommige pagina's bevatten één of meer zwarte balkjes onder het paginanummer. Voor artikelen zonder balkje is geen specifieke voorkennis nodig. Artikelen met één balkje bevatten wiskunde uit de onderbouw. Artikelen met twee balkjes vereisen kennis uit de bovenbouw. Drie balkjes: net iets moeilijker.

KLEINE NOOTJES

■ door Jan Guichelaar

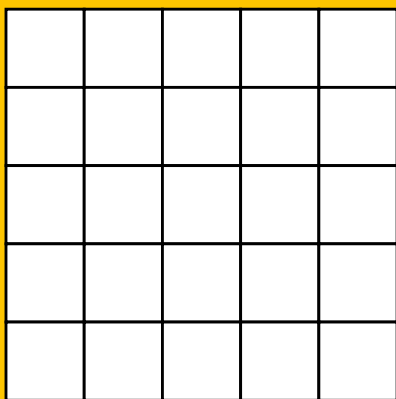
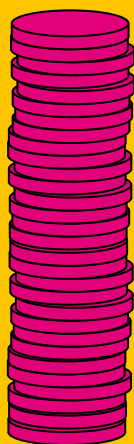


GEHELE AFSTANDEN

In het plaatje is de afstand tussen twee horizontaal of verticaal naast elkaar gelegen punten 1 centimeter. Als je willekeurig twee van de negen punten kiest, wat is dan de kans dat de afstand tussen de twee punten een geheel aantal centimeters is?

DE JUISTE VOLGORDE

Je hebt vier gewichtjes en mag steeds alleen op beide schalen van een balans een enkel gewichtje leggen. Er zitten geen twee gewichtjes bij met hetzelfde gewicht. Hoeveel keer moet je minimaal wegen om de gewichtjes op rij van licht naar zwaar te leggen? En hoe doe je dat dan?



FICHES LEGGEN

Je hebt dertig fiches. Plaats die zó in de 25 hokjes, dat in elke kolom, in elke rij en op de beide diagonalen zes fiches liggen.

Bron: H.J. Stutvoet, *Van negenproef tot gulden snede* (1942).

Kleine nootjes zijn eenvoudige opgaven die weinig of geen wiskundige voorkennis vereisen om opgelost te kunnen worden. De antwoorden vind je in het volgende nummer van *Pythagoras*.



PAPIER KNIPPEN

Je hebt een lange rechthoekige strook papier van in totaal 1 vierkante meter. Je knipt de strook in 16 gelijke strookjes die gelijkvormig zijn met de oorspronkelijke strook. Wat zijn de afmetingen van een klein strookje? En hoe groot was de oorspronkelijke strook?

RAZENDSNEL BESLUIT

Een rollend trottoir op Schiphol is 90 meter lang. De band heeft een snelheid van 0,5 m/s. Kees loopt met een snelheid van 1 m/s (zowel op als buiten de band). Op de band heeft hij al 30 meter afgelegd. Dan laat hij zijn iPhone over de rand vallen. Wat moet hij doen om zo snel mogelijk aan het einde van de band te komen, mét zijn iPhone? (Over de rand springen, iPhone oppakken en terugspringen lukt niet met zijn goed vastzittende rugzak).



3

OPLOSSINGEN KLEINE NOOTJES NR. 6

Aandeeltje. Er geldt: $1,25 \times 0,50 \times P = 1$. Dus $P = 1,6$. De koers is dus in het derde jaar 60% gestegen.

Kwartcirkelstertaart. De vier kwartcirkels samen vormen een hele cirkel met oppervlakte $\pi \cdot 1^2 = \pi \approx 3,1415$. Eén kwartcirkel heeft oppervlakte $\pi/4 \approx 0,785$. De ster heeft als oppervlakte $4 - \pi \approx 0,858$. De ster is dus groter.

Goochelen met lucifers. Verander de 2 in een 3. Oplossing zonder de 2 aan te tasten: haal de verticale lucifer van + weg en leg die bij de 6 zodat daar

een 8 ontstaat. Loop vervolgens om de tafel en de gelijkheid luidt: $6 = 8 - 2$.

Achtbaan. In totaal zijn er 40 mogelijkheden: achttien bestaande uit twee vierkantjes van 1×1 , zestien met 1×1 en 2×2 , vier met 1×1 en 3×3 , en twee met twee vierkantjes van 2×2 .

Getal splitsen. Een oplossing is $S = 15$, gesplitst als $2 + 4 + 5 + 3 + 1$. Immers: $(2 \times 2) + (4 : 2) + (5 + 2) + (3 - 2) + 1^2 = 4 + 2 + 7 + 1 + 1 = 15$. Er zijn nog andere oplossingen.

Verbaas je leraar en gebruik nooit meer een rekenmachine met de reken- en schattings-trucs die we in *Pythagoras* geven. Door goed te kunnen hoofdrekenen en schatten krijg je een beter idee of een uitkomst van een som klopt, iets waar je je leven lang iets aan hebt. In de eerste aflevering hebben we het over een van de simpelste rekentechnieken: vermenigvuldigen.

■ door Marc Seijlhouwer

SLIM VERMENIGVULDIGEN

Met wat oefening is het niet moeilijk om snel twee getallen van twee cijfers te vermenigvuldigen. Kladpapier is niet nodig, je doet het gewoon uit je hoofd. Stel je moet 23×52 berekenen. Dat kan door middel van de volgende vier simpele vermenigvuldigingen:

$$20 \times 50 = 1000$$

$$3 \times 50 = 150$$

$$20 \times 2 = 40$$

$$3 \times 2 = 6$$

De som hiervan levert de uitkomst op: 1196. Hiervoor moet je wel veel losse getallen onthouden. Iets korter maak je de berekening door op te delen in honderdtallen, tientallen en eenheden. In dat geval tel je een aantal berekeningen meteen bij elkaar op, meestal is dat eenvoudiger:

$$2 \times 5 = 10 \text{ (honderdtallen, dus twee nullen erachter)}$$

$$2 \times 2 + 3 \times 5 = 19 \text{ (tientallen, dus één nul erachter)}$$

$$3 \times 2 = 6 \text{ (eenheden, niets erachter)}$$

Het totaal is weer 1196. Met een beetje méér oefening kan dit ook met getallen van drie cijfers. Het voordeel van deze manier is dat hij altijd werkt. Maar voor speciale gevallen kun je veel sneller rekenen.

XY KEER $X[10 - Y]$ Als je twee tweecijferige getallen moet vermenigvuldigen, waarvoor geldt dat de eerste cijfers gelijk zijn en de som van de laatste

cijfers gelijk is aan 10, dan is de uitkomst heel simpel vast te stellen. Neem bijvoorbeeld 32×38 . De eerste twee cijfers zijn gelijk (3) en de som van de laatste cijfers (2 en 8) is 10. Bereken nu 3×4 (het eerste cijfer vermenigvuldigd met het eerste cijfer plus 1) en zet daarachter het product van de laatste twee cijfers: 2×8 . De uitkomst is 1216.

Nog een voorbeeld: $61 \times 69 = 4209$, want $6 \times 7 = 42$ en $1 \times 9 = 9$.

KEER 5 Hoewel vermenigvuldigen met 5 vaak goed te doen is, kan het voor grotere getallen toch lastig worden. Daarom deze truc: deel het getal dat je met 5 wilt vermenigvuldigen door 2. Is de uitkomst geheel, zet er dan een 0 achter. Is de uitkomst niet geheel, dan eindigt de uitkomst met '5'. Laat nu de komma gewoon weg en je hebt het resultaat.

Neem bijvoorbeeld 532109×5 . Er geldt $532109/2 = 266054,5$. Dus $532109 \times 5 = 2660545$. Het enige probleem met deze methode: een getal delen door 2 is weliswaar makkelijker dan vermenigvuldigen met 5, maar kan nog steeds lastig zijn.

KEER 11 Voor het vermenigvuldigen van welk getal ook met 11 kun je de volgende truc gebruiken. Neem het meest rechtse cijfer van het getal, schrijf dat op. Links daarvan komt het tweede cijfer van rechts plus het eerste cijfer van rechts. Daarnaast komt het derde cijfer van rechts plus het tweede cijfer van rechts, enzovoort totdat je het einde van het getal bereikt. Vervolgens zet je het eerste cijfer van het oorspronkelijke getal er nog voor.

Een eenvoudig voorbeeld: 35×11 . Meest rechts komt een 5, links daarvan een 8 ($= 3 + 5$) en dáár-

Makkelijk uit het hoofd: $1234 \times 11 = 13574$

voor een 3. Dus $35 \times 11 = 385$.

Een wat lastiger voorbeeld: 3258×11 . Begin met een 8 als eenheid, vervolgens neem je $5 + 8$ als tiental, $2 + 5$ als honderdtal, $3 + 2$ als duizendtal en 3 als tienduizendtal. Maar pas op: $5 + 8$ is groter is dan 9, daarom moet je, net als bij optellen, het tiental overhevelen naar het volgende niveau. Zo krijg je: $3[3 + 2][2 + 5 + 1][5 + 8 - 10]8 = 35838$.

IN DE BUURT VAN 100 Stel dat je twee getallen met elkaar moet vermenigvuldigen die allebei in de buurt van 100 liggen, zeg 88×94 . Bekijk eerst hoe ver de getallen van 100 af liggen:

getal	afstand tot 100
88	-12
94	-6

Vervolgens tel je kruiselings op: $88 - 6 = 82$ en $94 - 12 = 82$. Verder is $12 \times 6 = 72$. Conclusie: $88 \times 94 = 8272$ is. Dit klopt inderdaad, en het lijkt wel magie dat deze manier werkt.

NEGENPROEF Stel nu eens dat je een som hebt gemaakt en je antwoord wilt checken. Een snelle manier om vermenigvuldigingen te checken is met behulp van *modulorekenen*. Dat is een manier van rekenen waarbij je een getal deelt door de 'modulus' en de rest als uitkomst noteert. Zo is de uitkomst van 34 modulo 5 gelijk aan 4 , omdat 34 gedeeld door 5 gelijk is aan 6 , met rest 4 .

Door te rekenen modulo 9 kun je uitkomsten van vermenigvuldigen controleren, door de cijfers in de getallen op te tellen. Neem bijvoorbeeld

$23 \times 91 = 2093$. Klopt dat? Vervang in deze berekening elk getal door de som van zijn cijfers: $5 \times 10 = 14$. Neem vervolgens alles modulo 9 : $5 \times 1 = 5$. Dát klopt, en dat geeft goede hoop dat de oorspronkelijke vermenigvuldiging ook klopt. Honderd procent garantie geeft deze 'negenproef' niet: de som van de cijfers van bijvoorbeeld 3092 (in plaats van de correcte uitkomst 2093) is óók 14 .

De verificatiemethode wordt echt nuttig wanneer het níét goed gaat. Want als de vermenigvuldiging na het uitvoeren van de negenproef onjuist is, is de oorspronkelijke vermenigvuldiging beslist ook fout. Verifieer zelf de volgende vermenigvuldigingen: $301 \times 125 = 37625$ en $3414 \times 194 = 662116$.

Overigens: bij grote getallen kunnen de sommen van cijfers nog steeds een ingewikkelde vermenigvuldiging opleveren. Je kunt dan nóg een keer dezelfde truc uitvoeren, net zo lang tot het een eenvoudige som oplevert.

EIGEN TRUC? Dit zijn slechts een paar trucs voor vermenigvuldigen. Er zijn er vast nog veel meer. Misschien heb je er wel een van je leraar geleerd, of heb je zelf iets bedacht waardoor hoofdrekenen makkelijker wordt. Ken jij een goede vermenigvuldigingstruc? Stuur hem dan naar ons op: info@pythagoras.nu. Als hij leuk is, publiceren we hem. De leukste inzending wordt beloond met een QAMA-rekenmachine. Met dit speciale machientje moet je eerst een goede schatting maken van de uitkomst, voordat je het precieze antwoord te zien krijgt. In volgende afleveringen gaan we het ook hebben over schatten van rekensommen. ■

In de vorige jaargang zijn we gestart met een serie over het computerprogramma GeoGebra. In deze nieuwe jaargang zetten we de serie voort. In aflevering 3 zien we mooie figuren ontstaan als we meerdere bewegingen bij elkaar optellen. In aflevering 2 zagen we zo'n kromme al ontstaan als het spoor van de maan. Nu construeren we onder andere een cycloïde.

■ door Leon van den Broek

DRAAIENDE WIELEN



Figuur 1 Als je fietst, beschrijft het ventiel een zogeheten cycloïde.

Als je fietst, beschrijft het ventiel een kromme baan. Dat is de zogenaamde cycloïde (zie figuur 1). *Cycloïde* betekent zoiets als *cirkelachtige*. Om tijdens het fietsen het ventiel goed te volgen, is dit essentieel: *steeds is de afgelegde weg over het wegdek (rood in figuur 2) gelijk aan de afgelegde boog op de wielomtrek (groen in figuur 2)*. Dat komt omdat het wiel niet slipt, en daar gaan we van uit.

DE CYCLOÏDE MET GEOGEBRA We starten met het ventiel onderaan het wiel, dus op de weg. Als het wiel een hele ronde heeft gemaakt – dus 360° is gedraaid – is het ventiel weer terug op de

weg. Dan heeft de fiets 2π keer de straal van het wiel afgelegd. Laten we voor de straal 6 nemen; dan is die afgelegde afstand dus $12\pi \approx 37,7$.

De kromme die het ventiel beschrijft, laat zich goed in GeoGebra tekenen. Zorg ervoor dat de meetkundebalk op het scherm staat (*Scherminstellingen, algebra en tekenvenster*; geen *Assen*, geen *Rooster*, die zijn eventueel uit te vinken in *Beeld*).

Teken een horizontale lijn (*derde knop, Rechte door twee punten*). Dat is de weg waarover het wiel rijdt. De twee punten hebben de namen A en B gekregen. Fixeer ze (rechts klikken, *Eigenschappen, Fixeer object*). Verander de naam A in S (van Start)

(rechts klikken, *Naam wijzigen*) en maak B onzichtbaar (rechts klikken, *Eigenschappen, Object tonen* uitvinken).

Maak een schuifknop (*elfde knop, Schuifknop*). Geef deze de naam a (van afstand). Stel bij *Eigenschappen* (rechts klikken) *min* op 0 en *max* op 37.7.

Teken rechts van S een lijnstuk met lengte a (*derde knop, Lijnstuk met beginpunt en gegeven lengte*; klik eerst op S; vul voor *Lengte* a in). Geef het eindpunt de naam W (van Weg) (rechts klikken, *Naam wijzigen*). Maak het lijnstuk rood en teken het wat vetter (rechts klikken, *Eigenschappen, Kleur* en *Stijl*).

Teken de lijn door W, loodrecht op de weg (*vierde knop, Loodlijn*; klik eerst op W, dan op de weg). Teken vervolgens de cirkel met middelpunt W en straal 6 (*zesde knop, Cirkel met middelpunt en straal*; klik eerst op W en vul voor *Straal* 6 in). Kies het snijpunt van de cirkel met de verticale lijn door W dat boven W ligt (*tweede knop, Snijpunt van twee objecten*). Geef dat snijpunt de naam M (van middelpunt). Dat is de as van het wiel.

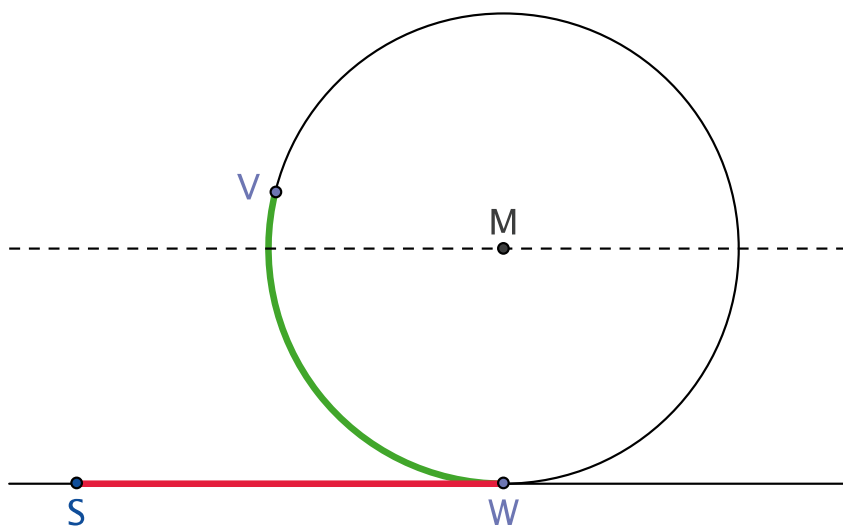
Teken de cirkel met middelpunt M die gaat door

W (*zesde knop, Cirkel met middelpunt door punt*). Dat is het wiel. Teken nu de lijn door M, evenwijdig aan de weg (*vierde knop, Evenwijdige lijn*; klik eerst op M, dan op de weg). Maak er een stippellijn van (rechts klikken, *Eigenschappen, Stijl, Lijn stijl*). Maak tot slot de verticale lijn door W en de cirkel met middelpunt W onzichtbaar (rechts klikken, *Eigenschappen, Object tonen* uitvinken).

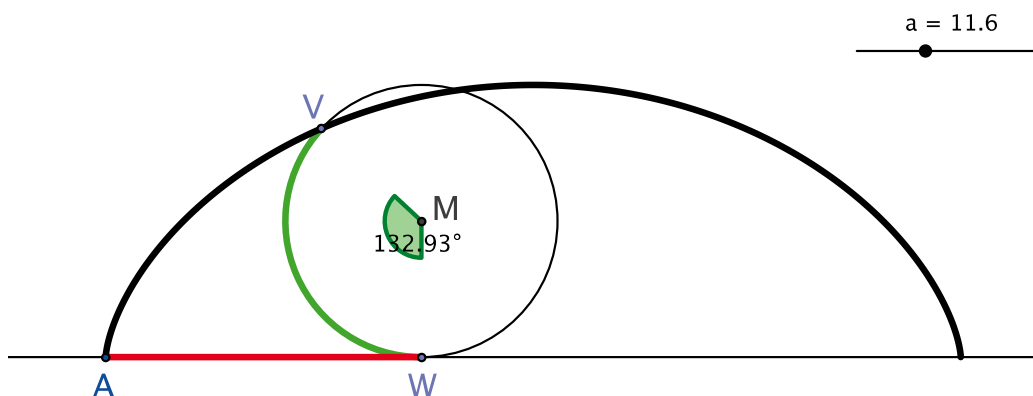
We zijn aangekomen bij de situatie van figuur 2. Door nu met de linker muisknop de stip op de schuifbalk vast te pakken (*eerste knop, Verplaatsen*), kun je W over de weg laten bewegen. De afgelegde afstand van het wiel is het rode lijnstuk. Als W uit het scherm loopt, moet je het plaatje verkleinen (*twaalfde knop, Uitzoomen*). Je kunt ook het beeld over het scherm verschuiven: *twaalfde knop, Tekenvenster verplaatsen*.

Nu moeten we ervoor zorgen dat het wiel met ventiel gaat draaien. We starten met het ventiel in S, onderaan het wiel. Sleep met behulp van de a-schuifknop het wiel een stukje naar rechts.

Maak hoek WMV gelijk aan $a/6$ (*achtste knop, Hoek met gegeven grootte*; klik op W, dan op M, dan



Figuur 2 De afgelegde weg (rood) is gelijk aan de afgelegde boog op de wielomtrek (groen).



Figuur 3 Een cycloïdeboog.

komt er een venster waarin je a tikt; vink *wijzerzin* aan). Zorg ervoor dat het gradienteken niet meer in het venster staat. Het punt op het wiel wordt automatisch W' genoemd, maar die naam veranderen we in V (van Ventiel). Tekenen vervolgens de boog tussen V en W (*zesde knop; Cirkelboog met middelpunt en twee punten*); klik eerst op M, dan op V, dan op W). Maak die boog vet groen (*Eigenschappen, Kleur en Stijl*).

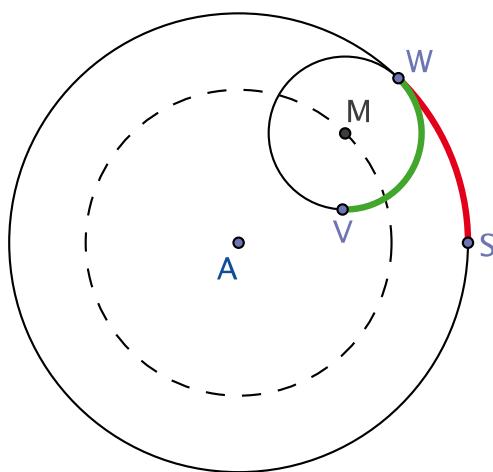
Varieer a op de schuifknop en je ziet het wiel rijden over de weg. Steeds is de groene boog waarover het ventiel is gedraaid gelijk aan de rode afstand over de weg. De boog die het ventiel beschrijft is de cycloïde. Het ventiel beschrijft een hele cycloïdeboog, omdat we de schuifknop hadden ingesteld op maximum 37.7 (dat is 2π keer de straal van het wiel).

Om de cycloïdeboog te kunnen zien, klik je rechts op V en vink *Spoor aan* aan. Wil je niet alleen losse punten maar de doorlopende kromme, kies dan *vierde knop, Meetkundige plaats*, klik dan op V, dan op de a-schuifknop (zie figuur 3).

Merk op dat de cycloïde verticaal in het startpunt vertrekt. Dat kun je overtuigend in GeoGebra zien, door in te zoomen op het startpunt.

HELENA VAN DE MEETKUNDE De cycloïde wordt ook wel de *Helena van de Meetkunde* genoemd. Op de eerste plaats natuurlijk omdat het

zo'n fraaie figuur is, maar er is nog een andere reden. Helena was in de Griekse mythologie de dochter van Zeus, en gold als de mooiste vrouw van Griekenland. Dat was een bron van jaloezie en zelfs de oorzaak van de Trojaanse Oorlog. En net zo was de cycloïde onderwerp van ruzie, nu onder de wiskundigen van de zeventiende eeuw. Ze betwistten



Figuur 4 Het wiel draait over een cirkelvormige weg.

Gilles de Roberval heeft bewezen dat de oppervlakte onder een cycloïdeboog precies gelijk is aan drie keer de oppervlakte van het wiel. Huygens heeft bewezen dat de lengte van een cycloïdeboog precies vier keer de diameter van het wiel is. Pierre de Fermat en Evangelista Torricelli ontdekten hoe je de raaklijn in een punt van de cycloïde kunt construeren.

MET EEN CIRKEL ALS WEG Je kunt een wiel ook over een cirkel laten draaien. Die cirkel is dan dus de weg. Als het wiel aan de binnenkant van de weg draait, spreekt men van een *hypocycloïde*, als het aan de buitenkant draait, heet de kromme een *epicycloïde* (Grieks: *hypo* = onder, *epi* = op). Voor de kromme die het ventiel beschrijft, is de verhou-

ding van de stralen van het wiel en de cirkelvormige weg van belang: een andere verhouding levert een andere kromme op. Het is wat lastiger deze krommen met GeoGebra te maken, maar vanwege de grote variatie zeker de moeite waard.

In figuur 4 is de straal van het wiel drie keer zo klein als de straal van de weg. Het principe is hetzelfde als bij de cycloïde: *steeds is de afgelegde afstand over de weg van het punt W (de rode cirkelboog) gelijk aan de afgelegde afstand van het ventiel V op het draaiwiel (de groene cirkelboog).*

Om de hypocycloïde te tekenen, beginnen we met een cirkel met straal 6 (*zesde knop, Cirkel met middelpunt en straal*). Dat is de weg waarbinnen het wiel rijdt. Fixeer die. Noem het middelpunt A en kies een startpunt S op de weg (*tweede knop, Nieuw punt*). Maak dan een schuifknop (*elfde knop, Schuifknop*) en geef deze de naam r (van radius = straal). Stel bij *Eigenschappen* (rechts klikken) *min* in op 0 en *max* op 6.

Teken de cirkel met middelpunt A en straal $6 - r$. Maak een schuifknop en geef deze de naam a (van afstand). Stel bij *Eigenschappen min* in op 0 en *max* op 360.

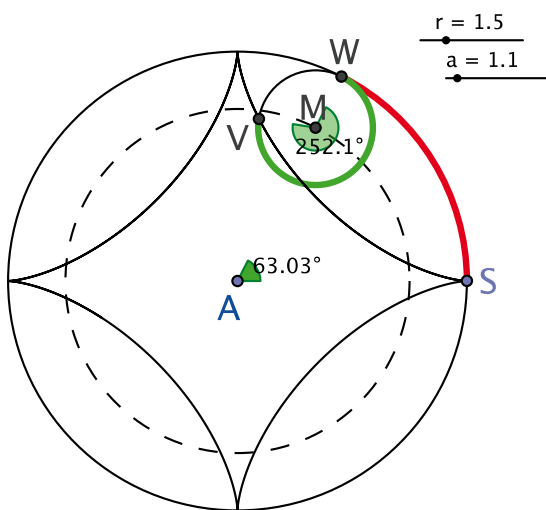
Teken een hoek SAW (*achtste knop, Hoek met gegeven grootte*). Klik eerst op S, dan op A en vul voor *Hoek a* in; klik *tegenwijzerin* aan. Zorg ervoor dat het gradentekentje blijft staan. Verander de naam van het punt S' in W (van Weg).

Teken de boog SW (zesde knop, Cirkelboog met middelpunt door twee punten). Klik eerst op A, dan op S, dan op W. Maak de boog rood en vet (rechts klikken, *Eigenschappen Kleur en Stijl*).

Teken de halfrechte met beginpunt A die door W gaat (*derde knop, Halfrechte door twee punten*). Teken het snijpunt met de gestippelde cirkel met straal $6 - r$ en noem dat M (*tweede knop, Snijpunt van twee objecten*).

Teken de cirkel met middelpunt M die door W gaat (*zesde knop, Cirkel met middelpunt door punt*). Dat is het wiel. Merk op dat de straal van het wiel r is.

Teken een hoek $WMV = (6/r) \cdot a$ (*achtste knop, Hoek met gegeven grootte*). Klik eerst op W, dan op M en vul voor *Hoek* $(6/r) \cdot a$ in; vink *wijzerzin* aan. Verander de naam W' in V (van Ventiël). De hoek is nu zo gemaakt dat de booglengte WV gelijk is aan de



Figuur 5 Een astroïde.

booglengte van SW.

Teken de boog WV (zesde knop, Cirkelboog met middelpunt door twee punten). Klik eerst op M, dan op V, dan op W. Maak de boog groen en vet (rechts klikken, *Eigenschappen Kleur en Stijl*). Maak de halfrechte AM onzichtbaar.

De situatie is nu zoals in figuur 4. Door nu met de linker muisknop de stip de a-schuifknop vast te pakken (eerste knop, *Verplaatsen*), kun je het wiel over de weg laten lopen. De afgelegde afstand van het wiel over de weg is de rode boog, de afgelegde afstand van het ventiel over de rand van het wiel is de groene boog. Je ziet dat die twee bogen steeds even lang zijn. Zodra echter een boog de cirkel volgemaakt heeft, begint hij weer van voren af aan.

Klik rechts op V en vink *Spoor aan* aan. Wil je niet alleen losse punten maar de doorlopende kromme, kies dan vierde knop, *Meetkundige plaats*, klik dan op V en vervolgens op de a-schuifknop. *Et voilà*, je hebt een hypocycloïde.

De waarde van r kun je variëren. Als je bijvoorbeeld $r = 1,5$ kiest, is de straal van het wiel vier keer zo klein als de straal van de weg. De kromme die je dan krijgt is de zogenaamde astroïde (zie figuur 5).

Als de verhouding tussen de straal van de grote en kleine cirkel een breuk is, sluit de hypocycloïde. Soms moet de kleine cirkel daarvoor wel heel veel rondjes maken. Om dan toch de hele kromme in beeld te krijgen, moet je de maximale waarde van de a-schuifknop vergroten. ■

DE SPIROGRAAF

Je kunt 'met de hand' hypocycloïdes tekenen met een *spirograaf*, speelgoed dat door de Engelse ingenieur Denys Fisher in 1965 op de markt is gebracht. En met een enorm succes; nu nóg zijn de kinderen van toen enthousiast over de spirograaf en ook de huidige kinderen beleven er weer plezier aan. Bij de spirograaf zorgen de tandjes op het wiel en de cirkelvormige weg ervoor dat het wiel zonder slippen rolt.

Als je meer wilt weten over de spirograaf, dan kun je terecht bij het zebraboekje *SpiroSporren* van Stephan Berendonk en Leon Van den Broek, dat binnenkort verschijnt bij Epsilon Uitgaven.

Net als de vorige keren verzoeken we lezers om hun creaties (met GeoGebra of handgemaakt met een spirograaf) in te zenden.

Figuur 6 Dit spirograafsetje was de prijs voor elke deelnemer aan de Kangoeroewedstrijd 2005.



JOURNAAL

■ door Marc Seijlhouwer

Zwakke Goldbachvermoeden bewezen

Een van de beroemdste open problemen over priemgetallen is het uit 1742 daterende *vermoeden van Goldbach*: elk even getal groter dan 2 is te schrijven als de som van twee priemgetallen. Geïnteressant hiermee is de uitspraak dat elk geheel getal groter dan 5 geschreven kan worden als de som van drie priemgetallen.

Het probleem is nog altijd onopgelost, maar het zogenaamde 'zwakke' vermoeden van Goldbach is wél bewezen. Althans, dat beweert Harald Helfgott, een Peruaanse wiskundige uit Parijs. Tot nog

toe zijn er geen hiaten in zijn bewijs ontdekt. De zwakke versie zegt dat elk oneven getal groter dan 5 geschreven kan worden als de som van drie priemgetallen. Zo is 31 te schrijven als $7 + 11 + 13$. De stelling is simpel, maar het bewijs niet: dat omvat niet minder dan 133 pagina's.

Als het originele Goldbachvermoeden waar is, is het zwakke dat ook: elk oneven getal kun je verkrijgen door 3 (priem!) op te tellen bij een even getal. Omgekeerd geldt dit natuurlijk niet en daarom staat het beroemde vermoeden van Goldbach nog altijd open.

Wiskunde uit de stad

Wist je dat je, om een stad te begrijpen, genoeg hebt aan een paar wiskundige formules? Luis Bettencourt, onderzoeker aan het Santa Fe Instituut in New Mexico, bekeek een heleboel gegevens over steden en stelde daarmee formules op die samen met het inwonersaantal allerlei dingen over de stad berekenen. De formules testte hij bij grote steden zoals New York, Berlijn en Peking. Daar bleken de formules goed te kloppen.

Wat kan je dan berekenen, als je het aantal inwoners kent? Een heleboel. De oppervlakte van de stad bijvoorbeeld, of de gemiddelde grondprijs. Ook kan je berekenen hoe 'verbonden' elke inwoner is: hoe-

veel vrienden hij of zij heeft bijvoorbeeld, of hoe vaak per dag een inwoner van een stad met andere mensen omgaat.

Voor een enkel individu hoeft de berekening natuurlijk niet op te gaan, maar de gemiddeldes zijn opvallend nauwkeurig. In een stad van 100.000 inwoners heeft een inwoner bijvoorbeeld gemiddeld 20 interacties per dag.

De formules kunnen stedenplanners helpen om wijken efficiënt in te delen. Daardoor kunnen de massa's mensen die elke dag reizen beter geregeld worden en neemt bijvoorbeeld het aantal files in de stad af.

Wiskundige legpuzzel beschermt software

Een groep informatici heeft voor het eerst een programma geschreven dat op efficiënte wijze een computerprogramma – zoals een videospelletje – kan versleutelen. Daardoor wordt het heel moeilijk om het spel na te maken of te kraken. Zo kan de verspreiding van illegale games en software geremd worden.

De onderzoekers vergelijken hun versleuteling met een legpuzzel. Elk stukje programma wordt met behulp van een unieke formule veranderd. Zo heb je veel verschillende puzzelstukjes, allemaal op een andere manier versleuteld. Uiteindelijk passen

de stukjes allemaal maar op één unieke manier in elkaar, terwijl het op heel veel manieren te proberen is. Daardoor moet een hacker een enorme hoeveelheid mogelijkheden proberen om de goede sleutel te vinden. Een computer zou er een eeuwigheid mee bezig zijn om deze code met behulp van *trial and error* te kraken.

De methode zit nog in de experimentele fase, waarin eenvoudige programmaatjes worden versleuteld. Wie weet lukt het de informatici om in de toekomst gekraakte versies van grote jongens als *Microsoft Office* of *Photoshop* aan banden te leggen.

Heel beroemd is het gulden-snedegetal. Veel minder bekend is het door de priester en architect Hans van der Laan bedachte *plastische getal*. Net als het gulden-snedegetal is het plastische getal een verhoudingsgetal. Van der Laan en diens leerling Jan de Jong gebruikten het plastische getal vaak in hun ontwerpen.

■ door Jaap Klouwen



12

Het woonhuis van Jan de Jong (1917-2001) in Schaijk. Hij ontwierp dit gebouw in de jaren zestig als zijn meesterproeve van wat hij met het verhoudingensstelsel van dom Hans Van der Laan (1904-1991), gebaseerd op het plastische getal, vermocht. De maatverhoudingen zijn 'kenbaar' gemaakt dankzij de toepassing van uitsluitend sobere, rechthoekig vormen. Op alle niveaus (hoofdropzet, nadere indeling, detaillering) is bovendien eenzelfde akkoord van maten toegepast waardoor een krachtige ruimtelijke eenheid is bereikt. Afbeelding: Archiphot © Architext, Haarlem.

FAMILIE VAN HET 3D-A4'TJE

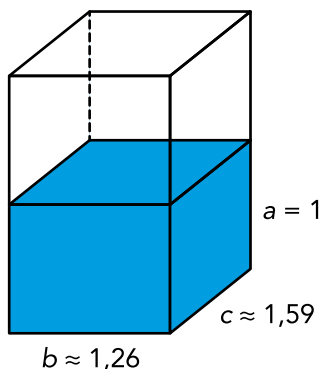
'Het 3D-A4'tje en andere reptiles' (zie *Pythagoras* 51-2 (nov. 2011)) ging over het bijzondere blok met verhoudingsmaten $1 : \sqrt[3]{2} : \sqrt[3]{4}$, afgerond $1 : 1,26 : 1,59$. Het doormidden zagen van dit blok, loodrecht op de langste ribben, levert twee 'babyblokjes' op, die dezelfde verhoudingen hebben als hun moeder (zie figuur 1). Wat een gelijkvormige familie!

Met het schrijven van dat stukje dacht ik alle bijzonderheden daarover wel te hebben bekeken. Onlangs las ik een recensie van het boek *Gebouwen van Jan de Jong, pionier van het plastische getal* (door Hilde de Haan en Ids Haagsma, uitgeverij Architect, Haarlem). Jan de Jong (1917-2001) maakte gebruik van verhoudingsgetallen in zijn ontwerpen die in plaats van op de bekende 'gulden snede' $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} \approx 1,618$, gebaseerd waren op veelvouden van het 'plastische getal' 1,3247...

Dit getal, een vinding van De Jongs leermeester Hans van der Laan (1904-1991), is een driedimensionale variant op de gulden snede. Het bestuderen van deze materie breidde de familie van het 3D-A4'tje op een prachtige manier uit.

GULDEN SNEDE Een van de manieren om de gulden snede te introduceren is via de rechthoek in figuur 2. Daarin is de kleine rechthoek, met zijden a en b , gelijkvormig met de grote, met zijden b en $a + b$. De verhouding van de zijden lang/kort is voor beide rechthoeken gelijk. Er geldt dus:

$$\frac{b}{a} = \frac{a+b}{b}.$$



Figuur 1 Het 3D-A4'tje of $\sqrt[3]{2}$ -blok.

Stellen we a op 1, dan volgt vrij eenvoudig:

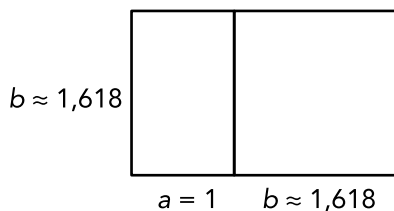
$$b^2 = b + 1,$$

een kwadratische vergelijking met positieve oplossing $b = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} \approx 1,618$. Dit getal heet het gulden-snede-getal.

Deze verhouding geldt ook voor een eendimensionaal model dat vaak wordt gebruikt: de verhouding van twee lijnstukken met lengten b en a is dezelfde als die tussen het totaal $a + b$ en b . Het gulden-snede-getal komt op allerlei onverwachte plaatsen tevoorschijn, bijvoorbeeld als limiet van de verhouding tussen opeenvolgende getallen van de rij van Fibonacci 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ..., de rij waarin een getal steeds de som van zijn twee voorgangers is: $13/8 = 1,625$; $21/13 \approx 1,615$; $34/21 \approx 1,619$.

HET PLASTISCHE GETAL Hans van der Laan was een benedictijner monnik, architect en grondlegger van de Bossche School in de Nederlandse architectuur (begin jaren '50 van de vorige eeuw). Hij vond de maatvoering die gebruikelijk was in de architectuur, namelijk het 'gewone' numerieke systeem met maten in eindeloze variaties in centimeters, 'eentonig en maatloos'. Hij wilde een maatsysteem dat gebaseerd was op driedimensionaliteit. Dat was de gulden snede niet, want die had betrekking op lijnen en vlakken. Bovendien vond Van der Laan de maatsprongen (veelvouden) van de gulden snede te groot.

In de jaren '50 en '60 van de vorige eeuw heeft Jan de Jong, die een eigen architectenbureau had, vele gebouwen ontworpen waarin hij gebruik maakte van de maatvoeringen van het plastische



Figuur 2 De gulden snede: $b : a = (a + b) : b$.

getal. Bijvoorbeeld zijn eigen woonhuis in Schaijk; zie de foto op pagina 12.

Het plastische getal is vergelijkbaar met het gulden-snede-getal, maar in plaats van een (twee-dimensionale) rechthoek gaan we nu uit van een (driedimensionale) balk (zie figuur 3). In twee dimensies is de verhouding lang/kort gelijk voor de kleine en de grote rechthoek. Anders gezegd: (a, b) en $(b, a + b)$ zijn gelijkvormig. In drie dimensies wordt dit: (a, b, c) en $(b, c, a + b)$ zijn gelijkvormig. Hieruit volgen de vergelijkingen:

$$\frac{b}{a} = \frac{c}{b} = \frac{a+b}{c}.$$

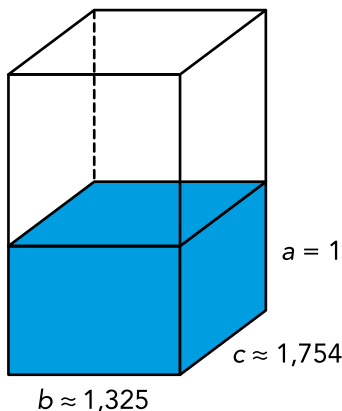
Stellen we a weer op 1, dan krijgen we het stelsel:

$$\begin{aligned} b^2 &= c, \\ c^2 &= b(1 + b). \end{aligned}$$

De variabele c eliminerend vinden we:

$$b^3 = b + 1,$$

14 een vergelijking van de derde graad, die overeenkomsten vertoont met die van de gulden snede.



Figuur 3 Het ψ -blok.

De algemene oplossing van een derdegraadsvergelijking is voor het eerst opgelost door Tartaglia, maar gepubliceerd door Cardano in 1545. We vervangen b door x en schrijven:

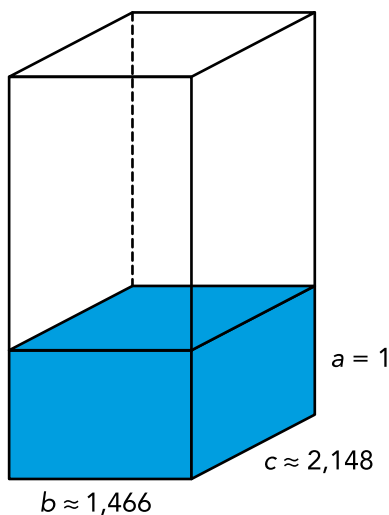
$$x^3 - x - 1 = 0.$$

Deze vergelijking heeft één reële oplossing, die je kunt vinden met de formule die je op de achterkant van dit tijdschrift vindt (met $p = q = -1$):

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{23}{108}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{23}{108}}} \approx 1,325.$$

Dit getal wordt het plastische getal genoemd.

VERHOUDINGSGETALLEN Hans van der Laan construeerde uit het plastische getal – door hem genoteerd met de Griekse letter ψ (psi) – een harmonische leer zoals in de muziek, waarbij de veelvouden in een soort octaaf geplaatst werden (zie ook het artikel ‘Mooie akkoorden’ op pagina 24). Hierbij rondsde hij de veelvouden af op dichtbij liggende breuken, getoond in bovenstaande tabel. In de tweede breukserie is de hoogste waarde op 1 ge-



Figuur 4 Het ω -blok.

waarde	getal	breuk 1	breuk 2 *)
1	1	1	1/7
ψ	1,324...	4/3	1/5
ψ^2	1,754...	7/4	1/4
$\psi^3 = \psi + 1$	2,324...	7/3	1/3
ψ^4	3,097...	3/1	3/7
ψ^5	4,097...	4/1	4/7
ψ^6	5,404...	16/3	4/5
ψ^7	7,159...	7/1	1

*) Uiteraard geldt bij deze breuk de eigenschap $\psi^3 = \psi + 1$ niet.

steld in plaats van de laagste waarde van het 'octaaf'.

Deze acht 'maten' noemde hij respectievelijk klein element, groot element, klein stuk, groot stuk, klein deel, groot deel, klein geheel en groot geheel. Van der Laan: 'Zoals ieder muziekstuk op verschillende toonhoogten kan worden uitgevoerd, zo heeft ook het matengamma niets te maken met de concrete grootte van de maten. Het gamma wordt alleen bepaald door de onderlinge verhoudingen van de maten, zoals het bij de muziek om de intervallen tussen de tonen gaat.'

EEN DERDE BLOK De auteurs van *Gebouwen van Jan de Jong, pionier van het plastische getal* schrijven: 'Van een blokje waarvan lengte, breedte en hoogte zich verhouden volgens opeenvolgende maten van het plastische getal, is zonder snijverlies een blokje af te snijden met precies dezelfde maatverhoudingen.' Daarbij zijn lengte, breedte en hoogte van het grote blok precies ψ keer zo groot als die van het kleine blok.

Figuur 3 toont het 'plastische blok'. Het kleine blokje is gelijkvormig met het 'moederblok' en een factor ψ^3 kleiner qua inhoud.

Maar er is nog een maatgetal met die eigenschap! We zagen al dat $\sqrt[3]{2}$, de voortbrenger van het 3D-A4'tje, deze eigenschap ook heeft. Een derde familielid is te zien in figuur 4 en het is direct duidelijk dat de familie daarmee compleet is: (a , b , c) en

(b , c , $a + c$) zijn gelijkvormig. Let erop dat de langste zijde in het grote blok nu $a + c$ is in plaats van $a + b$ bij het plastische blok. Dit is de enige combinatie die nog mogelijk is (gegeven $a < b < c$).

Er volgt nu:

$$\frac{b}{a} = \frac{c}{b} = \frac{a+c}{c}.$$

We vinden nu:

$$b^3 = b^2 + 1. \quad (*)$$

Dit is opnieuw een derdegraadsvergelijking, maar nu met een kwadratische term in plaats van een lineaire. Door de transformatie $b = x + \frac{1}{3}$ wordt deze vergelijking omgezet in

$$x^3 - \frac{1}{3}x - \frac{29}{27} = 0.$$

Met de formule op de achterkant (met $p = -\frac{1}{3}$ en $q = -\frac{29}{27}$) kunnen we de (enige) reële oplossing hiervan vinden:

$$x = \sqrt[3]{\frac{29}{54} + \sqrt{\frac{31}{108}}} + \sqrt[3]{\frac{29}{54} - \sqrt{\frac{31}{108}}}.$$

Dat betekent dat de (enige) reële oplossing van (*) is:

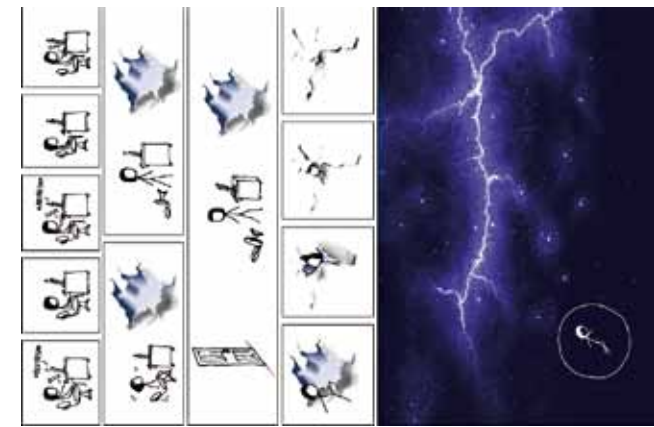
$$b = \frac{1}{3} + \sqrt[3]{\frac{29}{54} + \sqrt{\frac{31}{108}}} + \sqrt[3]{\frac{29}{54} - \sqrt{\frac{31}{108}}} \approx 1,466.$$

Laten we dit getal met de Griekse letter ω ('omega') aangeven. (ψ is de op een na laatste en ω de laatste letter van het oud-Griekse alfabet. We zouden dan $\sqrt[3]{2}$ in deze stijl kunnen aanduiden met de Griekse letter χ ('chi'), de op twee na laatste letter van dat alfabet.)

We kunnen het ook zo zeggen: start met een blok met zijden 1, a en a^2 . Verleng de zijde 1 met achtereenvolgens 1, a en a^2 en eis dat de nieuwe zijde a^3 is (alle zijden een factor a groter). Dat geeft de volgende vergelijkingen:

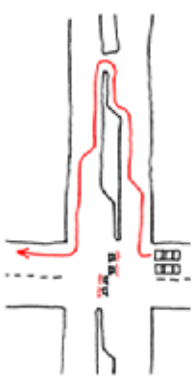
- $a^3 = 1 + 1$: het 3D-A4'tje;
- $a^3 = 1 + a$: het plastische blok;
- $a^3 = 1 + a^2$: het ω -blok.

De familie van gelijkvormige blokken is compleet! ■

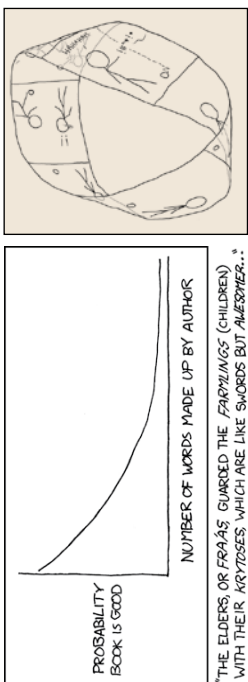
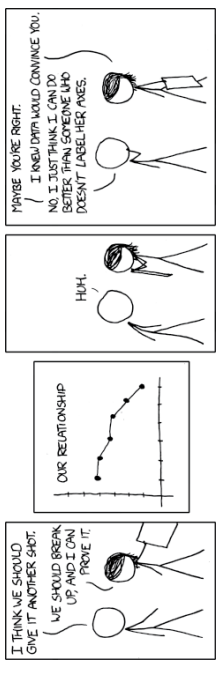


WHAT DOES XKCD MEAN?

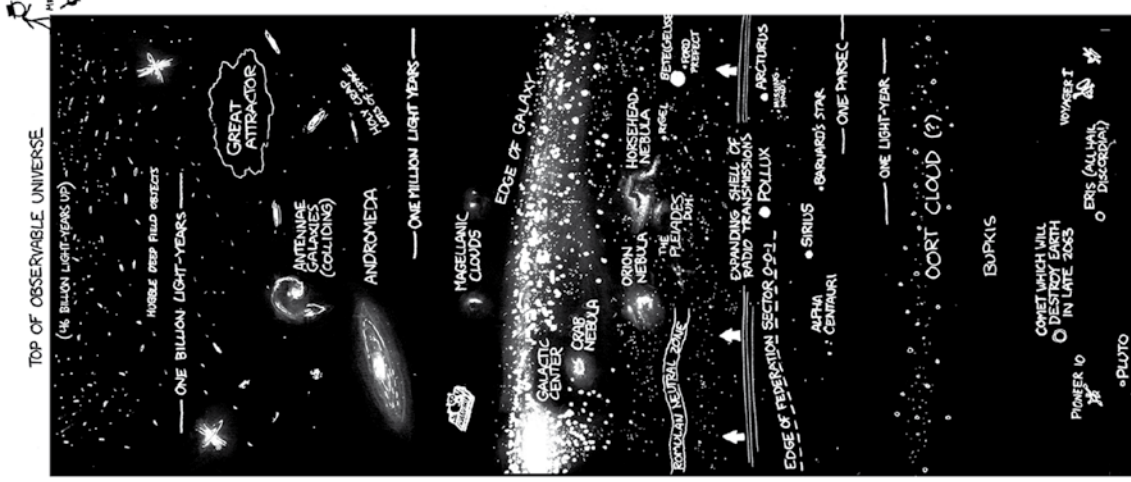
IT MEANS SAVING A FEW SECONDS AT A LONG RED LIGHT VIA ELABORATE AND QUESTIONABLY LEGAL MANEUVERS.

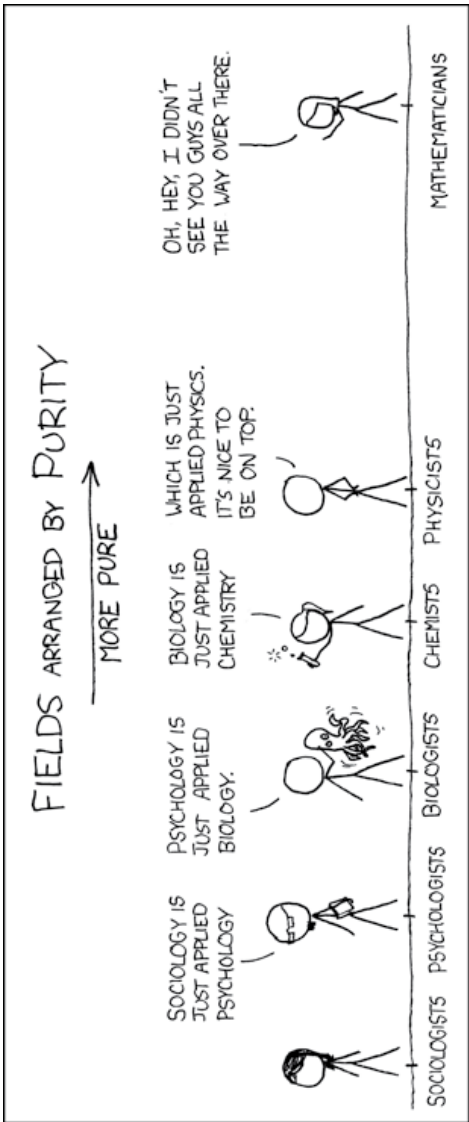
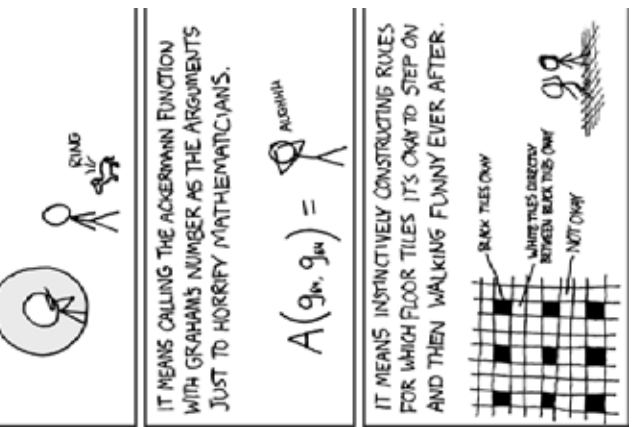
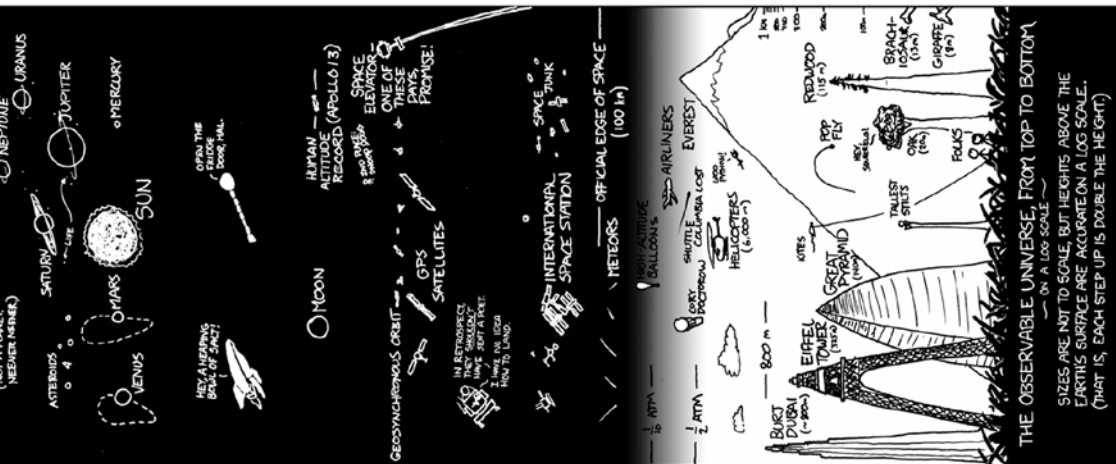


IT MEANS HAVING SOMEONE CALL YOUR CELL PHONE TO FIGURE OUT WHERE IT IS.



XKCD is een Engelstalige webstrip van de Amerikaan Randall Munroe, die drie keer per week een nieuwe aflevering tekent en op internet zet. Volgens de maker gaan zijn strips over 'romantiek, sarcasme, wiskunde en taal'. Munroe, voormalig robotbouwer bij NASA, begon in 2005 met XKCD. Deze vier letters hebben overigens geen enkele betekenis: 'Het is gewoon een woord zonder fonetische uitspraak', schrijft Munroe op zijn site. In strip nr. 207 geeft Munroe vier komische betekenissen van XKCD. Een daarvan luidt: 'Het betekent het aanroepen van de Ackermann-functie met het getal van Graham als argument. Gewoon om wiskundigen te doen huiveren.' Ter info: de Ackermann-functie is een bekend voorbeeld van een functie die meer dan exponentieel stijgt. Het getal van Graham is een onvoorstelbaar groot natuurlijk getal. Het is te groot om op een blad papier in de wetenschappelijke notatie uit te drukken, zelfs met meervoudig opeenvolgende exponenten. Hier zie je een selectie van Munroe's strips, waaronder de genoemde nr. 207. Bron: www.xkcd.com





In januari van dit jaar is *Pythagoras* gestart met een serie over de legendarische wiskundige Paul Erdős. Op 26 maart 2013 was het honderd jaar geleden dat deze Hongaar werd geboren. Deze vijfde aflevering gaat over een stelling die thuishoort in de tak van de wiskunde die *Ramseytheorie* wordt genoemd, naar de Britse wiskundige Frank P. Ramsey. Erdős was een van de pioniers in dit gebied.

■ door Paul Levrie (Faculteit Toegepaste Ingenieurswetenschappen, Universiteit Antwerpen)



VAN KLEIN NAAR GROOT

Heel wat jaren geleden stootte ik op het volgende probleem:

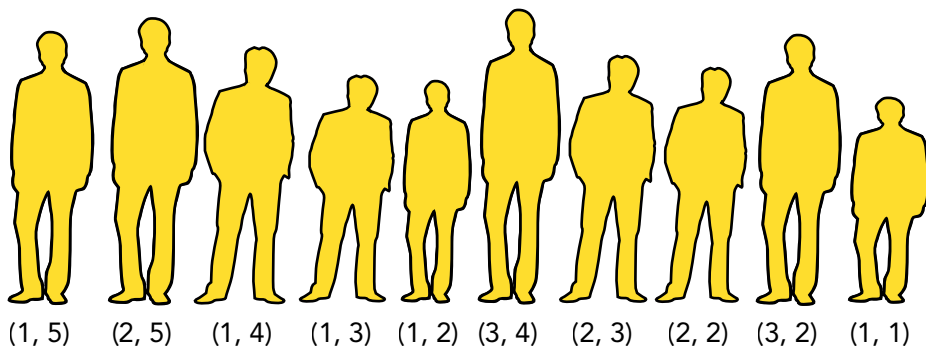
Bij het samenstellen van een (voetbal)ploeg met elf spelers kan je kiezen uit een rij met 101 kandidaten, allemaal met een verschillende lengte. Er is een bizarre regel die je moet respecteren bij het maken van die keuze: je moet aan een van de twee uiteinden van de rij starten, dan loop je naar de andere kant toe, en je kiest één voor één de 11 spelers. De eerste speler mag je willekeurig kiezen, maar vanaf dan moet elke volgende speler groter zijn dan de vorige. En je mag niet op je stappen terugkeren. De vraag is: is het altijd mogelijk om op deze manier een ploeg samen te stellen?

Misschien kan je hier al even over nadenken voor je verder leest. Ikzelf was toen erg geïntrigeerd door deze opgave omdat ik niet gauw een strategie zag om er aan te beginnen.

Het antwoord is ja, en dit volgt uit een stelling die Paul Erdős en George Szekeres bewezen in 1935, in hetzelfde artikel als dat waarin ze ook het Happy-End-probleem bestudeerden (zie *Pythagoras* 52-4 (februari 2013), p. 20-24). Die stelling luidt:

Stelling van Erdős en Szekeres. Gegeven is een rij met $n^2 + 1$ verschillende getallen. Hieruit kan je zeker ofwel een monotoon dalende ofwel een monotoon stijgende deelrij met $n + 1$ elementen kiezen.

In ons probleem zijn er 101 spelers, en $101 = 10^2 + 1$, dus $n = 10$, en de stelling zegt in dit geval dat je er een stijgende rij van $n + 1 = 11$ uit kan kiezen, of een dalende rij van 11. Dus als je zelf mag beslissen aan welk uiteinde je begint, dan kan je steeds een ploeg van 11 spelers van klein naar groot kiezen.



Figuur 1 Een rij met 10 kandidaten.

EEN EENVOUDIGER GEVAL We kunnen de stelling van Erdős en Szekeres ook bewijzen. Maar voor we dat doen, bekijken we een eenvoudig voorbeeld met een rij van 10 kandidaten. In figuur 1 zie je zo'n rij. Omdat $10 = 3^2 + 1$, is $n = 3$. De stelling garandeert nu dat je $n + 1 = 4$ spelers kan kiezen in stijgende grootte, links of rechts beginnend. Kijk je even naar de figuur, dan zie je dat het niet lukt als we van links naar rechts gaan, maar andersom wel. Je kan er zelfs 5 kiezen als je rechts start.

Het lukt steeds bij 10, en niet altijd bij 9. Dat laatste kan je zien in figuur 2. Als ze in deze volgorde staan, kan je er nooit 4 uitkiezen die voldoen!

HET BEWIJS We bewijzen de stelling in het algemene geval. We pakken het anders aan dan Erdős en Szekeres; het bewijs dat wij geven, is afkomstig van A. Seidenberg en werd gepubliceerd in 1959. Het maakt gebruik van het zogeheten 'duivenhok-principe' (of ladenprincipe van Dirichlet), dat het volgende zegt.

Duivenhokprincipe. Als $n + 1$ duiven neerstrijken in n hokken, dan is er altijd minstens 1 hok waarin minstens 2 duiven zitten.

Het bewijs gaat als volgt. We geven elke speler een label bestaande uit twee getallen. De m -de speler in de rij (we nummeren van links naar rechts) krijgt het label (x_m, y_m) . Hierbij is x_m als volgt bepaald: x_m is de lengte van de langste rij spelers die we kunnen kiezen beginnend van links, rekening houdend met de bizarre spelregel, en die eindigt met de m -de speler. De m -de speler zit dus in de keuze.

Op dezelfde manier is y_m de lengte van de langste rij spelers die we kunnen kiezen indien we rechts starten en moeten eindigen bij de m -de spe-

ler. In figuur 1 hebben we onder elke speler zijn label geplaatst. Je kan zelf eens proberen dit te doen in figuur 2.

De stelling volgt dan uit de volgende drie vaststellingen:

1. Elke kandidaat-speler heeft een uniek label.

Neem bijvoorbeeld de speler op de k -de en die op de l -de plaats, met $k < l$. Zij hebben als label (x_k, y_k) en (x_l, y_l) . Nu zijn er twee mogelijkheden. Ofwel is speler l groter dan speler k , dan is $x_l > x_k$ want we kunnen dan de langste stijgende rij die links begint en eindigt bij de k -de speler uitbreiden met speler l . Ofwel is speler k groter dan speler l . Dan kunnen we hetzelfde doen maar startend rechts, en dus is $y_k > y_l$. Dus alle labels zijn verschillend.

2. Er zijn maar n^2 verschillende labels mogelijk waarbij zowel de x als de y behoort tot de verzameling $\{1, 2, 3, \dots, n\}$.

3. Er zijn $n^2 + 1$ kandidaat-spelers.

We passen nu het duivenhokprincipe toe: er moet dus zeker een speler zijn met een label waarin ofwel de x , ofwel de y groter is dan n . Een x , respectievelijk een y , groter dan n betekent dat er een stijgende deelrij is met meer dan n spelers als je begint van links, respectievelijk van rechts. En dat is precies wat we wilden aantonen.

We hebben nu bewezen dat je in principe altijd 11 spelers kan kiezen uit 101 kandidaten. Maar hóé je dat dan praktisch moet uitvoeren, wordt er niet bij verteld. Het bewijs is een typisch *existentiebewijs*, je weet nu dat er zeker een oplossing is voor het probleem.

De stelling van Erdős en Szekeres hoort thuis in de tak van de wiskunde die Ramseytheorie genoemd wordt, naar de Britse wiskundige Frank Ramsey (1903-1930). Erdős was erg actief in dit gebied; zonder hem zou de Ramseytheorie wellicht nooit zo gebloeid hebben. ■



Figuur 2 Een rij met 9 kandidaten waar je er geen 4 uit kan kiezen.

Onlangs werd in Zutphen een 'oud kwadrant' gevonden, een middeleeuws instrument om de tijd te meten. Achter het instrument schuilt een cocktail van Indiase wiskunde en oud-Griekse meetkunde, en het vernuft van islamitische geleerden om deze mix om te zetten in een handzaam instrument.

■ door Eric Kirchner

HET ZUTPHENSE KWADRANT: EEN MIDDELEEUWS HORLOGE

Op de Houtmarkt in Zutphen deden archeologen begin april een bijzondere vondst. In een bodemlaag van rond het jaar 1300 vonden ze een 'oud kwadrant' (*quadrans vetus*), zie figuur 1. In de middeleeuwen werd dit type kwadrant gebruikt om de tijd te meten, ongeveer zoals een horloge nu. Het instrument werd in Bagdad uitgevonden in de negende eeuw. De Pers al-Khwarizmi, die ook als eerste een leerboek schreef over algebra en zijn naam gaf aan ons woord 'algoritme', schreef er de eerste verhandeling over. In de moslimwereld werd het instrument veel gebruikt, en via islamitisch Spanje bereikte het christelijk Europa in de twaalfde eeuw.

Tot in de zeventiende eeuw gebruikte men het oude kwadrant om de tijd te berekenen. Dat ging verrassend precies: de maximale meetfout was ongeveer $\Delta t_{\max} = 20$ minuten.

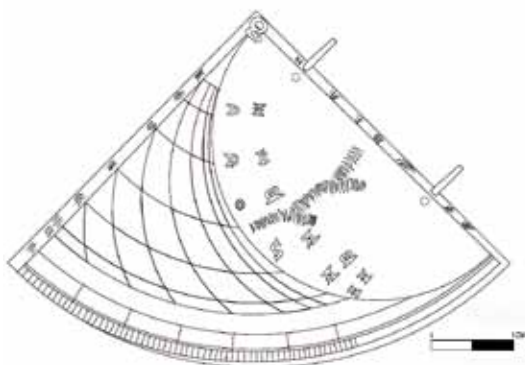
20 HOE WERKT HET? De foto van het Zutphense kwadrant in figuur 1 laat een intrigerende reeks lijnen en cirkelbogen zien, die in figuur 2 zijn nagetekend. Aan het oogje bovenin het kwadrant was destijds een koord bevestigd met daaraan een schietlood en een kraal die je langs het koord kon schuiven. Om de tijd te meten, moest de gebruiker de volgende handelingen uitvoeren.

Stap 1. De gebruiker moet vooraf met het kwadrant midden op de dag een paar keer de hoogte (hoek) van de zon boven de horizon hebben gemeten, zoals in figuur 3a. Via de twee oogjes aan de rand van het kwadrant, die je rechts in figuur 1 kunt zien, keek hij richting de zon en noteerde bij welke hoek het koord met het schietlood de gradenboog snijdt. Zo vond hij de maximale zonnehoogte H . Deze meting vooraf is nodig omdat de waarde van H afhangt van de geografische positie (de breedtegraad ϕ) en de datum D . Het was in Bagdad in de negende eeuw wel bekend hoe je uit de parameters ϕ en D theoretisch de waarde van H kon berekenen, maar voor doorsnee gebruikers was die berekening veel te ingewikkeld. Zodra H was bepaald, werd het koord over de gradenboog aan de rand van het kwadrant gelegd, bij de waarde H . Daarna werd de kraal naar de plaats geschoven waar het koord de cirkelboog snijdt van $T = 6$ uur, dat is het middaguur. Ook dit zie je in figuur 3a.

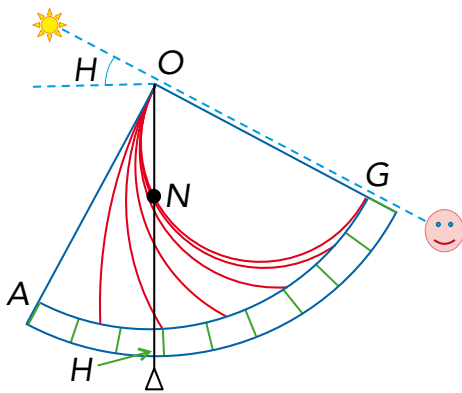
Stap 2. Wanneer de gebruiker op enig later moment (maar op dezelfde locatie) de tijd wilde meten, richtte hij het kwadrant weer op de zon, zie figuur 3b. Het koord met het schietlood gaf op dat moment op de gradenboog een zonnehoogte h aan. De gebruiker keek vervolgens bij welke uurcirkel de kraal zich bevond. Daarmee was de tijd al ongeveer af te lezen!



Figuur 1 Foto van het 'oude kwadrant' dat in april in Zutphen werd gevonden. © Gemeente Zutphen



Figuur 2 Lijnen en cirkelbogen op het Zutphense kwadrant. © Gemeente Zutphen



Figuur 3a Meting rond het middaguur. Het koord met het schietlood wijst hoek H aan, de maximale hoogte boven de horizon die de zon overdag bereikt. Zet dan de kraal vast op het koord bij punt N .

Om de tijd nauwkeuriger te meten, konden de waarden voor H en h gebruikt worden, die beide langs de fijnste markeringen op de gradenboog tot op een 6-minutenschaal konden worden bepaald.

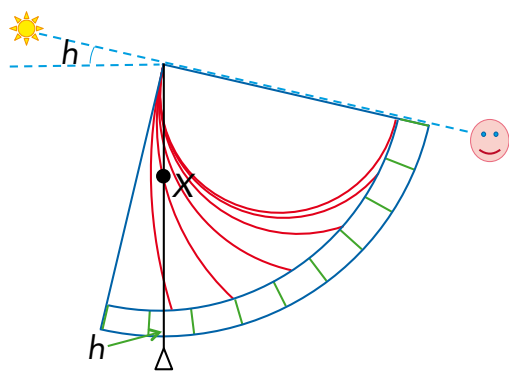
In figuur 1 en 2 is te zien dat het Zutphense kwadrant behalve de eerder genoemde 'verticale' uur-cirkelbogen ook 'horizontale' cirkelbogen heeft met daarbij letters voor de maanden. Zo is er een boog voor december en januari (aangegeven met de letters D en I), een andere boog voor november en februari (N en F), enzovoort. De maanbogen konden worden gebruikt in plaats van de kraal. Daardoor kon stap 1 in de bovengenoemde handelingen overgeslagen worden, mits de gebruiker uiteraard in Zutphen bleef.

WIS- EN STERRENKUNDE We weten nu hoe een uurkwadrant zoals het Zutphense exemplaar gebruikt moet worden. Maar het is op het eerste gezicht een raadsel hoe deze meetprocedure kan leiden tot een meting van de tijd. Achter het lijnenstelsel van het kwadrant (zie figuur 2) schuilt dan ook een flinke dosis sterrenkunde en wiskunde. We zullen laten zien dat het kwadrant gebruikmaakt van de volgende benadering voor het tijdstip t overdag:

$$\frac{t}{12} 180^\circ = \sin^{-1} \left(\frac{\sin h}{\sin H} \right). \quad (1)$$

Hierin is t het aantal zogenaamde *ongelijke uren* vanaf zonsopkomst (of: tot zonsondergang). Ongelijke uren werden in de middeleeuwen veel gebruikt. De tijd tussen zonsopkomst en zonsondergang werd daarbij in twaalf stukken verdeeld. Omdat dit 's zomers langere uren oplevert dan 's winters, worden dit tegenwoordig ongelijke uren genoemd.

De benaderde-tijdvergelijking (1) werd al in de



Figuur 3b Tijdmetering op een willekeurig later tijdstip. Je meet de hoogte van de zon (het schietlood wijst nu naar hoek h). De kraal wijst nu naar de tijd-cirkel voor $T = 2$ uur. Het is dus ongeveer 2 ongelijke uren voor zonsondergang (of na zonsopkomst). Met de gradenboog kun je dit nauwkeuriger meten: $T = 12h/180^\circ$ ongelijke uren na zonsopkomst (of voor zonsondergang). Of, anders gezegd, $T = 12(H - h)/180^\circ$ ongelijke uren voor of na het middaguur.

zesde eeuw afgeleid in India (zie het kader op pagina 22). De Indiase geleerden leidden destijds ook de exacte-tijdvergelijking af, die nog veel ingewikkelder is dan (1). Dat is opmerkelijk, want de trigonometrische functies sinus en cosinus waren op dat moment nog maar net geïntroduceerd, overigens ook in India. Drie eeuwen later waren het islamitische geleerden in Bagdad die deze formules overnamen, en tijdvergelijking (1) wisten te gebruiken om een handig nieuw instrument te ontwikkelen.

Hoe slaagt het kwadrant erin om tijdvergelijking (1) op te lossen? In figuur 3a noteren we de drie hoekpunten van het kwadrant met A , O en G . Wanneer de zon de maximale zonnehoogte H bereikt, definiëren we het punt N als het snijpunt van het koord met de cirkelboog voor $T = 6$ uur. Voor de straal van het kwadrant nemen we aan dat $R = 1$.

Er is dan sprake van de twee driehoeken die je ziet in figuur 4a. Driehoek ONG is een ingeschreven driehoek binnen een halve cirkelboog. Uit de stelling van Thales (zie het artikel 'Thales van Milete' in de vorige *Pythagoras*) volgt dan dat hoek N in deze driehoek recht is. Figuur 4a laat zien dat er dan volgt dat $\angle G = H$. En uit figuur 4a blijkt tevens dat

$$\sin H = ON. \quad (2)$$

Bekijk nu nog eens figuur 3b. De plaats waar de kraal een uurboog T raakt, noemen we punt X . Als we nu deze uurboog doortrekken tot aan het verlengde van

lijnstuk OG , vinden we figuur 4b. In de halve cirkel $OXCJ$ bevinden zich twee ingeschreven driehoeken. Volgens de stelling van Thales moeten beide driehoeken een rechte hoek bevatten. Voor driehoek OXJ geldt dat $\angle X = 90^\circ$ en dat $\angle J = h$. Daaruit volgt dat

$$\sin h = \frac{OX}{OJ} = \frac{ON}{OJ}. \quad (3)$$

In de laatste stap gebruiken we dat de eerdergenoemde tijdmeetprocedure ervoor zorgt dat de kraal zich op positie X bevindt, waardoor geldt $OX = ON$.

De andere ingeschreven driehoek is OCJ , en daarbij is $\angle C = 90^\circ$. We definiëren nu even $\tau = \angle J$. Dan volgt voor deze driehoek dat

$$\sin \tau = \frac{OC}{OJ} = \frac{R}{OJ} = \frac{1}{OJ}.$$

Combineren we dat met vergelijking (3), dan vinden we

$$\sin \tau = \frac{\sin h}{ON}$$

en als we dan ook nog vergelijking (2) gebruiken, dan kunnen we afleiden dat

$$\sin \tau = \frac{\sin h}{\sin H},$$

ofwel

$$\tau = \sin^{-1} \left(\frac{\sin h}{\sin H} \right). \quad (4)$$

Je ziet: dit levert inderdaad een tijdmeting op die overeenkomt met (1), de vergelijking die we wilden afleiden. Daarbij is dan in driehoek OCJ hoek J gelijk aan een hoek τ , die weer overeenkomt met de tijd t in vergelijking (1) door t (geteld in uren) te delen door 12 en te vermenigvuldigen met 180° . De zon draait immers in de loop van 12 uur een halve cirkel aan de hemel.

Het is ook aardig om in driehoek OCJ hoek O te berekenen. Voor deze driehoek hebben we zonet al de hoeken C en J bepaald, en daarom vinden we direct dat hoek O gelijk is aan $90^\circ - \frac{t}{12} 180^\circ$. Als t de hele uren 0, 1, 2, ..., 6 uur doorloopt, dan zijn de over-

AFLEIDING VAN TIJDVERGELIJKING (1)

De Indiase astronomen die vergelijking (1) voor het eerst afleiden, gingen waarschijnlijk ongeveer als volgt te werk. We nemen aan dat de zon in de loop van de dag precies een halve cirkel beschrijft aan de hemel. Door deze aanname klopt de resulterende tijdvergelijking (1) niet exact. Immers, de zon beschrijft in de winter tussen zonsopkomst en zonsondergang minder dan een halve cirkelboog. Voor waarnemers vlakbij de Noordpool komt de zon dan zelfs helemaal niet boven de horizon uit.

Maar als we uitgaan van deze aanname, tekenen we in nevenstaande figuur het aardoppervlak, de horizon en de halve cirkelboog van de zon. Het hoogste punt dat de zon overdag bereikt noemen we C ; de zon bevindt zich op dat moment op een hoek H boven de horizon. Als we op een willekeurig tijdstip t de tijd willen meten, dan staat de zon in een punt D op de cirkelboog, op een hoogte h boven de horizon wanneer dat wordt gemeten door de waarnemer, die zich in punt W bevindt.

De driehoeken CEW en DFG zijn dan gelijkvormig. Daarom geldt dat $CE/CW = DF/DG$. De driehoeken CEW en DFW bevatten allebei een rechte hoek. Daarom geldt $\sin H = CE/CW$ en $\sin h = DF/DW$. Omdat we aannemen dat de zon een cirkelboog rond de waarnemer beschrijft, geldt bovendien dat $CW = DW$. Combineren we deze vergelijkingen, dan vinden we:

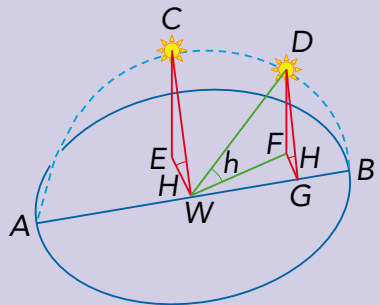
$$\sin H = \frac{CE}{CW} = \frac{CE}{DW} = (\sin h) \frac{CE}{DF} = (\sin h) \frac{CW}{DG}. \quad (*)$$

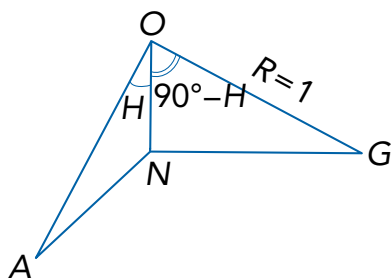
Aangezien de zon de cirkelboog gelijkmatig doorloopt, geldt verder dat $\angle CWD = 90^\circ - \frac{t}{12} 180^\circ$. Uit de figuur blijkt dat ook geldt dat $\angle CWD = \angle WDG$. Daarom kunnen we schrijven:

$$\sin \left(\frac{t}{12} 180^\circ \right) = \cos \left(90^\circ - \frac{t}{12} 180^\circ \right) = \cos(\angle CWD) = \cos(\angle WDG) = \frac{DG}{DW} = \frac{DG}{CW}. \quad (**)$$

Combineer je nu vergelijkingen (*) en (**) met elkaar, dan leid je af dat

$$\sin \left(\frac{t}{12} 180^\circ \right) = \frac{\sin h}{\sin H}.$$





Figuur 4a Twee driehoeken om $\sin H$ en $\sin h$ te bepalen.

eenkomstige waarden van hoek O dus precies 90° , 75° , 60° , ..., 0° . Omdat punt C het snijpunt is van de rand van het kwadrant met de uurboog, snijden de uursirkelbogen de gradenverdeling dus precies bij de veelvouden van 15° . Dit is inderdaad het geval bij bijna alle oude kwadranten die zijn teruggevonden.

Ten slotte is nu ook duidelijk waarom de tijdlijnen cirkelbogen zijn. Als dat niet het geval was, zou de stelling van Thales niet opgaan, zouden we vergelijking (4) niet hebben kunnen afleiden en zou het instrument dus niet tijdvergelijking (1) hebben opgelost.

Kijk nu nog eens wat nauwkeuriger naar figuur 1 en 2. Het valt op dat de uursirkels de gradenverdeling aan de rand van het kwadrant *niet* allemaal snijden bij veelvouden van 15° . Ook de stralen van de cirkels kloppen niet precies met wat we daarvoor zullen berekenen in de opgave in het kader hiernaast.

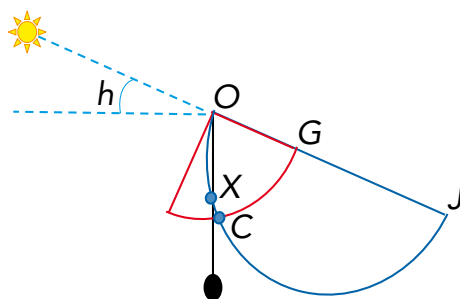
Waarom wijkt het Zutphense kwadrant af van onze berekeningen? Dat komt doordat dit kwadrant eigenlijk een overgangsmoedel is naar een nieuw type kwadrant, waarin niet met ongelijke uren werd gewerkt, maar met de gelijke uren die we ook vandaag nog gebruiken. De maker van het Zutphense kwadrant heeft er blijkbaar voor gekozen nog wel de uursirkels van het oude ontwerp te gebruiken, maar de middelpunten en stralen van deze uursirkels te veranderen. Wellicht niet op basis van berekeningen, maar door een paar testmetingen te doen. ■

LITERATUUR D.A. King, 'A vetustissimus arabic treatise on the quadrans vetus', *Journal for the History of Astronomy* 33 (2002), p. 237-255.

R. Darren Stanley, *Quadrant constructions and applications in Western Europe during the Early Renaissance*, Simon Fraser University (1994).

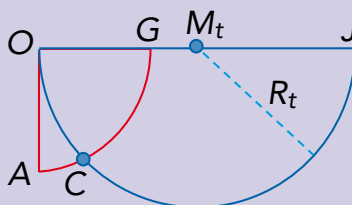
G. van Bemmelen, *The mathematics of the heavens and the earth. The early history of trigonometry*, Princeton University Press (2009).

E. Kirchner, 'Hoe werkt een astrolabium', *Nederlands Tijdschrift voor Natuurkunde* 79 (2013), nummer 5 en 7.



Figuur 4b Een verdere uitwerking die tot de Indiase tijdvergelijking (1) leidt.

Opgave. Bereken de stralen R_t en de posities van de middelpunten van de uursirkels voor de tijdstippen $t = 0, 1, 2, \dots, 6$ uur. Valt je wat bijzonders op voor $t = 6$ uur, 2 uur en 0 uur?



Uitwerking. Zie de figuur. We zagen al dat in driehoek OJ geldt dat $\angle J = \frac{t}{12} 180^\circ$, en dat hoek C een rechte hoek is. Omdat het kwadrant straal 1 heeft, geldt $OC = 1$. Dan volgt

$$\sin \angle J = \frac{OC}{OJ} = \frac{1}{2R_t}$$

en dus

$$R_t = \frac{1}{2 \sin \angle J} = \frac{1}{2 \sin \left(\frac{t}{12} 180^\circ \right)}.$$

De middelpunten van de uursirkels liggen natuurlijk op de x -as, met $x = R_t$.

Voor $t = 6$ uur vind je $R_t = 0,5$, zodat deze uurboog precies een halve cirkel vormt op het kwadrant, met het middelpunt precies halverwege de rand. Deze halve uurboog is goed zichtbaar op het Zutphense kwadrant, als de meest rechtse boog in figuur 1 en 2. Voor $t = 2$ uur vind je $R_t = 1$, waardoor het middelpunt van deze uursirkel op een hoekpunt van het kwadrant ligt. Voor $t = 0$ uur wordt R_t oneindig. Deze oneindig grote uursirkel heeft zijn middelpunt oneindig ver buiten het kwadrant, en de cirkel zelf is alleen zichtbaar als een rechte lijn langs het kwadrant.

In het artikel 'Familie van het 3D-A4'tje' op pagina 12 gaat het over lengteverhoudingen die prettig overkomen in gebouwen. In dit stukje gaat het eveneens over 'aangename verhoudingen', maar dan in de muziek.

■ door Jan Guichelaar

MOOIE

Een toon is een trilling van de lucht die via het oor een sensatie in de hersenen geeft. De lucht trilt daarbij een aantal keren per seconde; dit heet de *frequentie*. Als je twee tonen tegelijk hoort, kan dat in sommige gevallen heel aangenaam klinken.

OCTAAF De toonladder do-re-mi-fa-sol-la-si-do wordt in de muziek meestal weergegeven als c-d-e-f-g-a-b-c. De a midden op het toetsenbord van een piano heeft een frequentie van 440 trillingen per seconde. Als dat de linker-a is in het plaatje, dan heeft de volgende a een frequentie van 880 trillingen per seconde.

Als je deze twee tonen tegelijk aanslaat, klinkt dit aangenaam. De frequentieverhouding is dan $f_2 : f_1 = 2 : 1$. We noemen twee tonen met een frequentieverhouding 2 : 1 een *octaaf* (octaaf hangt samen met het Latijnse *octo*, dat *acht* betekent; een octaaf bevat op het toetsenbord van een piano een rij van acht witte toetsen).

KWINTEN EN KWARTEN Er zijn nog meer tweeklanken die aangenaam klinken: de *kwint* (c-g, vijf witte toetsen) en de *kwart* (g-c', vier witte toetsen). De tweede c geven we aan met een accent. Deze klinken het mooist als de verhoudingen van de frequenties precies 3 : 2 en 4 : 3 zijn, eenvoudige breuken dus. Een kwint en een kwart samen vormen dus een octaaf (c-g-c'). De frequentie f_g van de g is $\frac{3}{2}$ maal de frequentie f_c van de eerste c: $f_g = \frac{3}{2} f_c$. Bij de kwart geldt dus $f_{c'} = \frac{4}{3} f_g$. We krijgen dus met een kwint en een kwart na elkaar een octaaf: $f_{c'} = \frac{4}{3} f_g = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2} f_c = 2 f_c$.

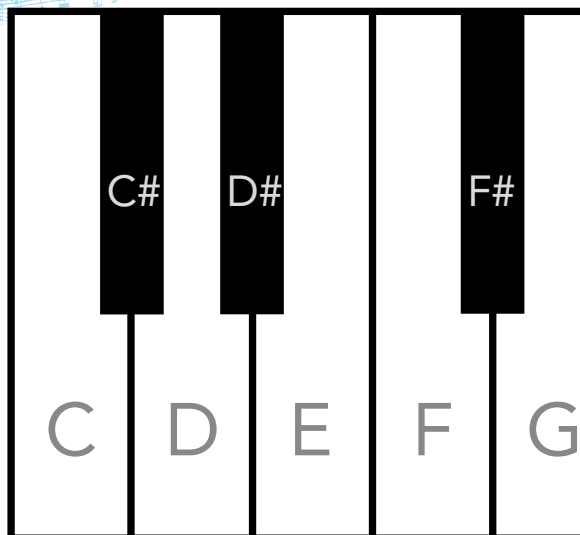
HALVE TONEN IN EEN OCTAAF De zwarte toetsen geven halve tonen precies tussen de twee omliggende witte tonen in. In onze gewone octaven zijn de afstanden e-f en b-c al halve tonen. Let op: *toon* wordt gebruikt voor een enkele frequentie, maar ook voor de afstand tussen twee tonen,

een halve toon(safstand) of een hele toon(safstand). We geven de toon tussen de d en de e (zwarte toets) bijvoorbeeld aan met dis of met es (halve toon hoger dan de d, respectievelijk halve toon lager dan de e). Een volledig octaaf bestaat dus uit de volgende twaalf intervallen: c-cis-d-dis-e-f-fis-g-gis-a-ais-b-c of c-des-d-es-e-f-ges-g-as-a-bes-b-c.

STEMMINGSPROBLEEM Laten we nu eens, beginnend met een c, een aantal kwarten (5 halve tonen) achter elkaar zetten, totdat we weer bij een c uitkomen. Even nadenken levert dat 12 kwarten gelijk moet zijn aan 5 octaven: $12 \times 5 = 5 \times 12 = 60$ halve tonen. Kijk nu naar de frequenties. Vijf octaven geeft de frequentieverhouding

$$f^* : f = 2^5 : 1 = 32 : 1.$$

Twaalf kwarten geven echter



AKKOORDEN

$$f^{*} : f = \left(\frac{4}{3}\right)^{12} : 1 \approx 31,57 : 1.$$

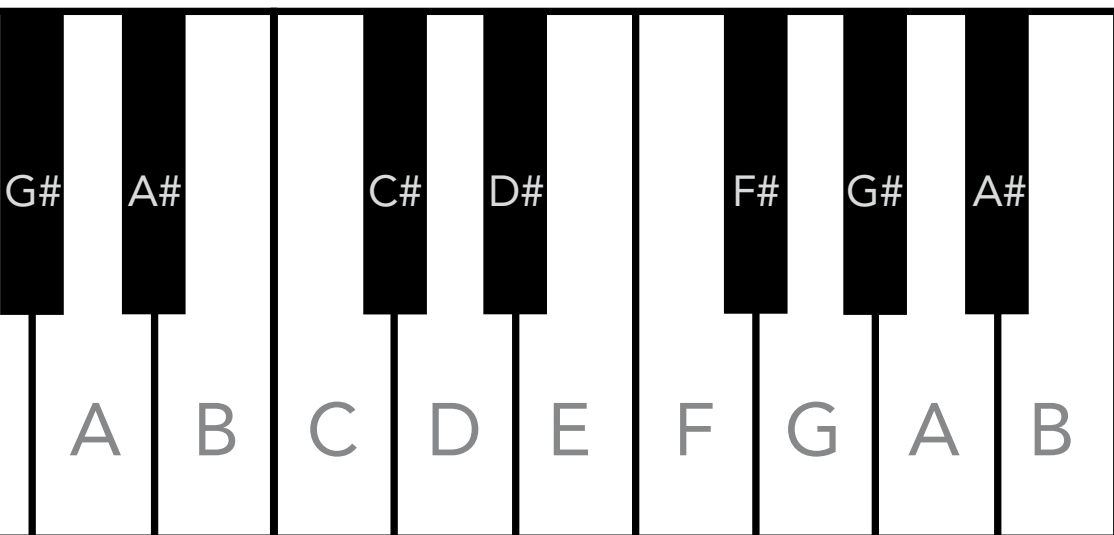
Dus als je op die manier een piano zou stemmen (elke kwart erbij precies een frequentieverhouding van 4 : 3), dan klinken de octaven dus helemaal niet meer mooi. En dat zijn nu juist de mooiste twee-klanken. Er is dus een probleem bij het stemmen van een piano.

GELIJKZWEVENDE STEMMING Dat probleem is definitief 'opgelost' door alle twaalf intervallen van halve tonen in een octaaf precies gelijk te maken. Dus $f_{\text{cis}} : f_c = f_d : f_{\text{cis}} = f_{\text{dis}} : f_d = f_e : f_{\text{dis}} = f_f : f_e$ enzovoort. Laten we deze frequentieverhouding a noemen. Dan hebben we voor een octaaf dus: $f_c = a^{12} f_c$. Dus $a^{12} = 2$ en $a = \sqrt[12]{2} \approx 1,06$. Dan komen we natuurlijk met 12 kwarten of 5 octaven (60 halve tonen) precies uit op een factor $a^{60} = (a^{12})^5 = 2^5 = 32$. Maar nu is er iets mis met de kwarten en de kwinten! Bij een kwart, bestaande

uit 5 halve tonen, krijgen we als frequentieverhouding: $a^5 \approx 1,3348$, terwijl een zuivere of reine kwart een verhouding heeft van $\frac{4}{3}$, net iets minder dus. Bij een kwint, bestaande uit 7 halve tonen, hebben we als frequentieverhouding $a^7 \approx 1,4983$, dus iets minder dan de vereiste 1,5 voor een zuivere of reine kwint.

Deze niet-reine intervallen geven aanleiding tot *zwevingen* (trillingen naast diegene die we echt willen horen). Omdat met deze stemming alle narijheid keurig is verdeeld (gelijkzwevend) over alle intervallen, zijn we hieraan gewend. Als je met meer dan een violist of zanger met een piano samen speelt, kan je nog behoorlijk veel last hebben van deze zwevingen.

Als je wilt weten hoe het precies komt dat we sommige intervallen als zuiver en andere als onzuiver ervaren, lees dan 'Stemmingen' in *Pythagoras* 47-2 (november 2007), te vinden in het archief op www.pythagoras.nu. ■



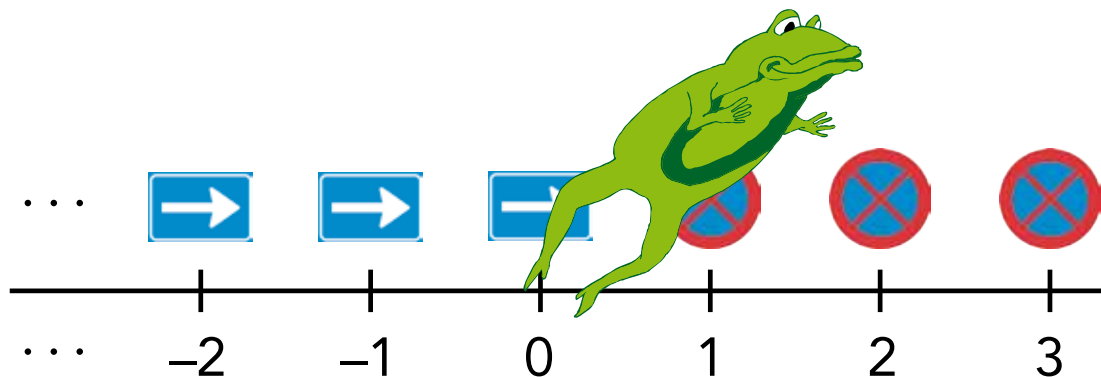
In april vond in Dordrecht de vijfde editie van de Benelux Wiskunde Olympiade plaats. Van de drie gouden medailles die dat weekend vielen, ging er een naar Ragnar Groot Koerkamp (Cambium College Zaltbommel) uit het Nederlandse team. In dit artikel beschrijft hij zijn oplossing van opgave 1.

■ door Ragnar Groot Koerkamp

SPRINGENDE KIKKERS



Opgave 1 (Benelux Wiskunde Olympiade 2013). Zij $n \geq 3$ een geheel getal. Een kikker beweegt al springend over de getallenlijn. Hij start in het punt 0 en maakt n sprongen: één van lengte 1, één van lengte 2, ..., één van lengte n . Hij mag deze n sprongen in willekeurige volgorde uitvoeren. Als de kikker op een gegeven moment op een getal $a \leq 0$ zit, dan moet zijn volgende sprong naar rechts gaan (richting de positieve getallen). Als de kikker op een gegeven moment op een getal $a > 0$ zit, dan moet zijn volgende sprong naar links gaan (richting de negatieve getallen). Bepaal het grootste positieve gehele getal k zodanig dat de kikker zijn sprongen in zo'n volgorde kan uitvoeren dat hij nooit landt op één van de getallen 1, 2, ..., k .



De Benelux Wiskunde Olympiade (BxMO) is het kleine broertje van de Internationale Wiskunde Olympiade (IMO). Sinds 2009 wordt deze wedstrijd jaarlijks georganiseerd voor middelbare scholieren uit België, Luxemburg en Nederland, met als doel de deelnemers alvast op te warmen voor de internationale olympiade. De winnaar van dit jaar was de zestienjarige Peter Gerlagh van het Theresia Lyceum in Tilburg. Als enige van de dertig topleerlingen uit de Benelux wist hij maar liefst drie van de vier opgaven foutloos op te lossen.

Op de pagina links kun je de eerste opgave van de Benelux Wiskunde Olympiade 2013 lezen. Deze opgave werd bedacht door Merlijn Staps, een Nederlandse oud-deelnemer aan de olympiade die bij zowel de BxMO als de IMO meerdere keren een medaille won.

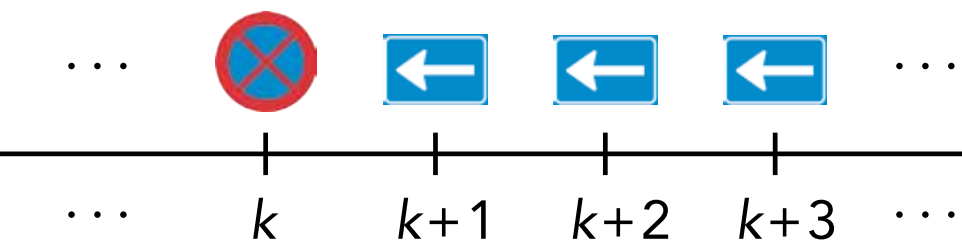
Om de opgave op te lossen, is het verstandig om eerst een paar kleine gevallen te bekijken. Zo krijg je een beetje gevoel voor de opgave. Omdat $n \geq 3$, beginnen we met $n = 3$. We moeten dan dus in totaal drie sprongen van lengte 1, 2 en 3 maken, waarbij we niet op de getallen 1 tot en met k willen landen. Omdat de eerste sprong wel op 1, 2 of 3 moet landen, is k maximaal 2. Als $k = 2$, dan moet de eerste sprong dus van lengte 3 zijn. Maar je moet dan weer terugspringen met een sprong van lengte 1 of 2, waarbij je noodgedwongen toch landt op 2 of 1. Dus $k = 2$ kan blijkbaar niet. Daarom is k ten hoogste 1. En $k = 1$ kan ook echt, namelijk door

eerst naar 3 te springen, dan 1 terug te gaan naar 2 en te eindigen op 0.

Om een idee te krijgen of k bij grotere n groter dan 1 kan zijn, is het handig om nog een paar gevalletjes te proberen. Bij $n = 4$ kom je er na wat puzzelen op uit dat k ook maximaal 1 is en bij $n = 5$ en $n = 6$ is k maximaal 2.

HET ALGEMENE GEVAL Na deze probeersels valt het je misschien op dat het probleem vooral is dat je sprongen van minstens lengte $k + 1$ nodig hebt om over het gat heen te komen, omdat alle sprongen tot en met lengte k er sowieso niet overheen kunnen. We weten ook dat je links van het gat, dus bij de getallen kleiner dan of gelijk aan 0, altijd naar rechts moet springen en dat je rechts van het gat, dus bij de getallen vanaf $k + 1$, altijd naar links moet springen. Dat betekent dat alle sprongen die niet over het gat heen gaan, wel altijd richting het gat gaan. We moeten er dus voor zorgen dat er na de lange sprongen over het gat genoeg ruimte over blijft om ook alle kleine sprongen (van lengte $\leq k$) terug te kunnen maken. Nu gaan we bekijken hoeveel ruimte er hooguit overblijft van de lange sprongen (als die allemaal over het gat heen zouden springen) en hoeveel ruimte we minimaal nodig hebben voor de kleine sprongen (die zeker niet over het gat heen springen).

Als alle sprongen met lengte $k + 1$ of meer over het gat heen gaan, is de ruimte die overblijft na de





sprongen over het gat heen maximaal, terwijl tegelijkertijd de benodigde ruimte voor sprongen niet over het gat heen minimaal is (omdat nu alleen de kleine sprongen niet over het gat heen gaan). We hebben dan hoogstens $n - (k + 1) + 1 = n - k$ sprongen over het gat. Die sprongen hebben lengtes $k + 1, k + 2, k + 3, \dots, n - 1, n$. Als je bijvoorbeeld vanaf de linkerkant een sprong van lengte $k + 3$ bekijkt, dan land je maximaal op $k + 3$ en vandaar kun je hooguit 2 terugspringen met een kleine sprong (namelijk naar $k + 2$ of $k + 1$).

Na elke grote sprong i naar rechts vanaf de linkerkant kom je hooguit in i en kan je maximaal terug naar $k + 1$. Dus kan je hooguit weer $i - (k + 1)$ terug springen. Hetzelfde geldt voor elke grote sprong i naar links vanaf de rechterkant. Omdat de sprongen allemaal eerst over het gat heen gaan en daarna pas voor extra ruimte zorgen waarin we kunnen terug springen, is de lengte van de extra ruimte hoogstens $0, 1, 2, \dots, n - (k + 1)$. In totaal is dat dus maximaal

$$0 + 1 + 2 + \dots + (n - k - 1) = (n - k - 1)(n - k)/2.$$

Nu gaan we kijken naar de totale lengte van alle sprongen die zeker niet over het gat heen gaan. Omdat alle sprongen tot en met lengte k niet over het gat heen kunnen, is die totale lengte minimaal $k(k + 1)/2$.

De lengte die maximaal overblijft na het gat moet groot genoeg zijn voor de minimale lengte van de sprongen die niet over het gat heen gaan, want anders zouden we meer terug moeten springen richting het gat dan dat er ruimte is om dat te doen. Er moet dus gelden dat

$$(n - k - 1)(n - k)/2 \geq k(k + 1)/2.$$

Nu willen we graag weten wat de grootste k is waarvoor dit geldt. Daarvoor gaan we deze ongelijkheid eerst wat herschrijven. We vermenigvuldigen eerst met 2 en werken de haakjes uit:

$$n^2 + k^2 - 2kn - n + k \geq k^2 + k.$$

Nu halen we alles met een k naar rechts:

$$n(n - 1) = n^2 - n \geq 2kn.$$

Omdat n altijd positief is, mogen we nu delen door $2n$, waardoor we vinden dat

$$k \leq (n - 1)/2.$$

Omdat k geheel moet zijn, is k nu maximaal $\lfloor (n - 1)/2 \rfloor$, waarbij $\lfloor x \rfloor$ het grootste gehele getal kleiner dan of gelijk aan x is.

Nu gaan we laten zien dat we ook echt een reeks sprongen kunnen maken zodanig dat de kikker niet op de getallen 1 tot en met k landt als $k = \lfloor (n - 1)/2 \rfloor$. We willen steeds over het gat heen springen en daarna alle ruimte die we terug kunnen springen tot $k + 1$ benutten. We beginnen met een sprong met lengte $k + 1$. We staan dan al op $k + 1$ en kunnen dus niet nog terug springen. Daarom gaan we weer over het gat heen springen met een sprong met lengte $k + 2$. We eindigen dan op $(k + 1) - (k + 2) = -1$. Nu kunnen we wel terugspringen met een sprong met lengte 1, zodat we op 0 eindigen. Nu nemen we steeds twee sprongen van lengte $k + 1 + i$ en i achter elkaar, zodat we na die twee sprongen altijd op 0 of $k + 1$ eindigen. De eerste grote sprong gaat namelijk altijd over het gat heen, dus van 0 naar $k + 1 + i$ of van $k + 1$ naar $-i$ en de tweede kleine sprong springt dan weer richting het gat, zodat de kikker op $k + 1$ of 0 eindigt. Als we dit doen voor alle i van 1 tot en met k , krijgen we precies de kleine sprongen van 1 tot en met k en de lange sprongen van $k + 1$ tot en met $k + 1 + k = 2k + 1$.

Als n oneven is, geldt dat $2k + 1 = n$. Dan hebben we dus precies alle sprongen van lengte 1 tot en met n gemaakt en zijn we klaar. Als n even is, geldt dat $n = 2k + 2$ en hebben we alleen de sprong met lengte n nog niet gemaakt. Omdat we na een tweetal sprongen altijd op 0 of $k + 1$ eindigen, kunnen we er gewoon nog een sprong van lengte $n = 2k + 2$ achteraan doen zonder dat we in het gat landen.

We hebben nu dus laten zien dat het inderdaad mogelijk is om niet op de getallen 1 tot en met k te landen als $k = \lfloor (n - 1)/2 \rfloor$ en dat dat niet kan als k groter is. De maximale k waarvoor de kikker niet in het gat hoeft te landen, is dus $k = \lfloor (n - 1)/2 \rfloor$. ■

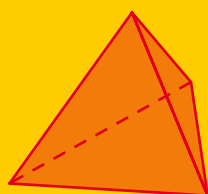


THEETRAËDER

■ door Dave Odegard

Je hebt ze misschien wel eens gezien: theezakjes in de vorm van een tetraëder, oftewel een regelmatig viervlak. Bij mij borrelen er tijdens een ontbijt interessante vragen op bij het zien van deze theezakjes.

Als je zo'n viervlakkig theezakje goed bekijkt, zie je drie randen die gelijkijd zijn. Twee van deze randen zijn ribben die tegenover elkaar staan en de derde verbindt het middelpunt van een van deze ribben met een eindpunt van de andere ribbe.

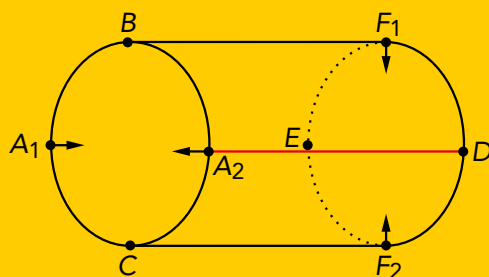


Figuur 1 De vier zijvlakken van een tetraëder zijn gelijkzijdige driehoeken.

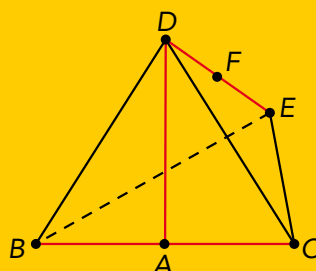
PRODUCTIE Een interessante vraag is hoe zo'n theezakje gemaakt wordt. Ik had het volgende idee. Van een rechthoek wordt een cilindervormige koker gemaakt door twee tegenoverliggende zijden aan elkaar te plakken. In figuur 2 is deze koker getekend; de rode lijn is de plaklijn. Dit is een goede eerste stap als we de juiste keuze maken voor de straal en de lengte van de koker. Vervolgens worden de uiteinden vastgelijmd in de twee loodrechte richtingen BC en DE . De punten A_1 en A_2 komen samen in het punt A , en F_1 en F_2 komen samen in F (zie figuur 3). Dit proces leidt naar een theezakje dat op een regelmatig tetraëder lijkt.

Nu komt de vraag aan jou. Stel dat je op deze manier theezakjes wilt maken met een inhoud van 20 cm^3 . We nemen natuurlijk voor het gemak aan dat onze theezakjes perfecte regelmatige tetraëders zijn. Wat moeten dan de straal en de lengte van de koker zijn?

De oplossing verschijnt in het volgende nummer van *Pythagoras*. ■



Figuur 2 Een cilindervormige koker; de rode lijn is de plaklijn.



Figuur 3 De uiteinden van de koker worden vastgeplakt in de twee loodrechte richtingen BC en DE .

PYTHAGORAS OLYMPIADE

■ door Matthijs Coster, Eddie Nijholt en Harry Smit

Doe mee met de Pythagoras Olympiade! Elke aflevering bevat vier opgaven. De eerste twee zijn wat eenvoudiger; onder de goede inzendingen van leerlingen uit de klassen 1, 2 en 3 wordt een cadeaubon van Bol.com ter waarde van 20 euro verloot. De laatste twee zijn echte breinbrekers; onder de goede inzendingen van leerlingen (tot en met klas 6) wordt een bon van 20 euro verloot. Per aflevering wordt maximaal één bon per persoon vergeven.

Daarnaast krijgen leerlingen (tot en met klas 6) punten voor een *laddercompetitie*, waarmee eveneens een cadeaubon van Bol.com van 20 euro te verdienen valt. De opgaven van de onderbouw zijn 1 punt waard, de opgaven van de bovenbouw 2 punten. De leerling met de hoogste score in de laddercompetitie krijgt een bon. Zijn puntentotaal wordt weer op 0 gezet. Wie zes achtereenvolgende keren niets inzendt, verliest zijn punten in de laddercompetitie.

Met de bovenbouw-opgaven kun je ook een plaats in de finale van de Nederlandse Wiskunde Olympiade verdienen, mocht



DE GOEDE INZENDERS VAN APRIL 2013

258: Jelmer Hinssen (klas 2), Stedelijk Gymnasium, Nijmegen; Nathan van 't Hof (klas 4), Hofstad Lyceum, Den Haag; Bram Jonkheer (klas 4), Emelwerda College Emmeloord; Arie van der Kraan, Nuth; Jan Otto Kranenburg, Zwolle; Peter van der Laan, Utrecht; Tom Smeding (klas 4), Dalton, Den Haag; Michelle Sweering (klas 5), Erasmiaans Gymnasium Rotterdam; Rob van der Waall, Huizen; Art Waeterschoot (klas 4), H. Pius X-instituut, Antwerpen; Bob Zwetsloot (klas 4), Teylingen College, locatie Leeuwenhorst, Noordwijkerhout.

259: Tara van Belkom (klas 3), Gymnasium Felisenum, Velsen-Zuid; Lisa Clappers (klas 4), Mummellius Gymnasium, Alkmaar; Jelmer Hinssen (klas 2), Stedelijk Gymnasium, Nijmegen; Nathan van 't Hof (klas 4), Hofstad Lyceum, Den Haag; Bram Honig (klas 2), Mummellius Gymnasium, Alkmaar; Bram Jonkheer (klas 4), Emelwerda College Emmeloord; Alex Keizer (klas 2), Mummellius Gymnasium, Alkmaar; Arie van der Kraan, Nuth; Jan Otto Kranenburg, Zwolle; Peter van der Laan, Utrecht; Lennart Muijres (klas 2), Stedelijk Gymnasium Nijmegen; Frenk Out (klas 4), Mummellius Gymnasium, Alkmaar; Pim Spelier (klas 2), Christelijk Gymnasium Sorghvliet, Den Haag; Michelle Sweering (klas 5), Erasmiaans Gymnasium Rotterdam; Tim Vermeulen (klas 5), Isendoorn College, Warnsveld; Rob van der Waall, Huizen; Art Waeterschoot (klas 4), H. Pius X-instituut, Antwerpen; Bob Zwetsloot (klas 4), Teylingen College, locatie Leeuwenhorst, Noordwijkerhout.

260: Jelmer Hinssen (klas 2), Stedelijk Gymnasium, Nijmegen; Nathan van 't Hof (klas 4), Hofstad Lyceum, Den Haag; Bram Jonkheer (klas 4), Emelwerda College Emmeloord; Peter van der Laan, Utrecht; Lennart Muijres (klas 2),

het via de voorronden niet lukken: aan het eind van elke jaargang worden enkele goed scorende leerlingen uitgenodigd voor de NWO-finale. Niet-leerlingen kunnen met de Pythagoras Olympiade meedoen voor de eer.

HOE IN TE ZENDEN? Inzendingen ontvangen we bij voorkeur per e-mail (getypt of een scan van een handgeschreven oplossing):

pytholym@gmail.com

Je ontvangt een automatisch antwoord zodra we je bericht hebben ontvangen.

Eventueel kun je je oplossing sturen naar Pythagoras Olympiade, PWN

p.a. Centrum Wiskunde & Informatica

Postbus 94079

1090 GB Amsterdam

Voorzie het antwoord van een duidelijke toelichting (dat wil zeggen: een berekening of een bewijs). Vermeld je naam en adres; leerlingen moeten ook hun klas en de naam van hun school vermelden.

Je inzending moet bij ons binnen zijn vóór 31 oktober 2013.

Stedelijk Gymnasium Nijmegen; Pim Spelier (klas 2), Christelijk Gymnasium Sorghvliet, Den Haag; Michelle Sweering (klas 5), Erasmiaans Gymnasium Rotterdam; Tim Vermeulen (klas 5), Isendoorn College, Warnsveld; Bob Zwetsloot (klas 4), Teylingen College, locatie Leeuwenhorst, Noordwijkerhout.

261: Kees Boersma, Vlissingen; Jelmer Hinssen (klas 2), Stedelijk Gymnasium, Nijmegen; Nathan van 't Hof (klas 4), Hofstad Lyceum, Den Haag; Peter van der Laan, Utrecht; Michelle Sweering (klas 5), Erasmiaans Gymnasium Rotterdam; Tim Vermeulen (klas 5), Isendoorn College, Warnsveld; Rob van der Waall, Huizen; Art Waeterschoot (klas 4), H. Pius X-instituut, Antwerpen; Bob Zwetsloot (klas 4), Teylingen College, locatie Leeuwenhorst, Noordwijkerhout.

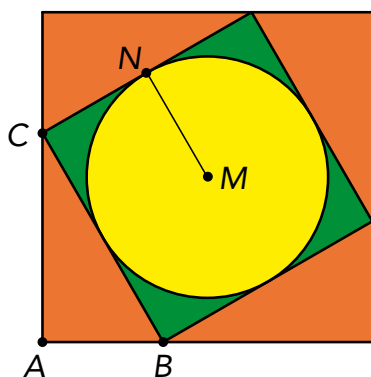
Cadeaubonnen: Tara van Belkom en Nathan van 't Hof. **Stand laddercompetitie:** Bob Zwetsloot (18 p; cadeaubon), Art Waeterschoot (16 p), Jelmer Hinssen (13 p), Bram Jonkheer (12 p), Jori Koolstra (10 p), Tim Vermeulen (8 p), Lennart Muijres (7 p), Michelle Sweering (6 p), Tara van Belkom (6 p), Nathan van 't Hof (6 p), Frenk Out (5 p), Eline Vounckx (5 p), Ronen Brilleslijper (4 p), Marijke Bot (3 p), Elien Cambie (3 p), Jonas Cambie (3 p), Ritchie Keijsser (3 p), Jia-Jia ter Kuile (3 p), Marleen Meliefste (3 p), Pim Spelier (3 p), Matthijs Buringa (2 p), Alex Keizer (2 p), Timen Schenk (2 p), Tom Smeding (2 p), Jelle den Uil (2 p), Luka Zwaan (2 p), Lisa Clappers (1 p), Jildert Denneman (1 p), Thijs van Etten (1 p), Bram Honig (1 p), Bastiaan vd Kooij (1 p), Rein Lukkes (1 p), Alexander Vermeersch (1 p).

OPGAVE 266

Je hebt 15 kaasprikkertjes. Leg met een willekeurig aantal hiervan een driehoek, door de einden aan elkaar te leggen. Prikkertjes mogen in elkaars verlengde liggen om een driehoekszijde te vormen. Hoeveel driehoeken kun je maken?

OPGAVE 267

Gegeven is een vierkant waarbinnen een kleiner vierkant is getekend met de hoekpunten op de zijden. Binnen het kleine vierkant ligt een cirkel met middelpunt M die alle zijden raakt, onder andere in N . Er geldt $NM = AB$. Bereken $\angle ABC$.



OPGAVE 268

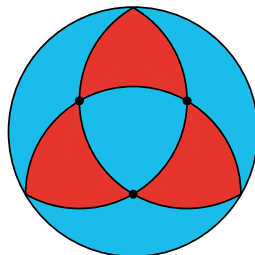
In het restaurant 'De schijf van wortel vijf' staan er vijf items op de menukaart. De prijs van elk item is een geheel, positief getal. Het bijzondere is dat de ober altijd precies weet wat er besteld is, enkel en alleen door te kijken naar de totale prijs van wat er besteld is. Dit is ongeacht hoeveel er besteld is, maar wel wanneer hij er zeker van is dat geen enkel item meer dan één keer voorkomt. Wat is de kleinste mogelijke prijs voor alle vijf items tezamen?

OPGAVE 269

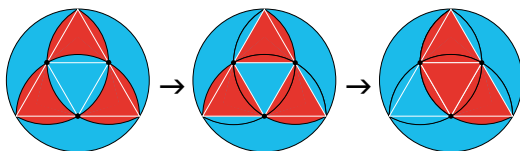
In een kubus van $4 \times 4 \times 4$ worden negen ballen geplaatst: acht ballen met straal 1, en de negende bal wordt precies in het midden geplaatst. Wat is de straal van deze negende bal, als deze bal de resterende acht ballen raakt?

OPLOSSING 258

Hieronder zie je het logo van een frisdrankfabrikant, dat geheel is opgebouwd uit cirkelbogen. De drie zwarte punten en de drie hoekpunten van elk rood vlak vormen gelijkzijdige driehoeken. Bepaal de verhouding tussen het blauwe en het rode deel van het oppervlak.



Oplossing. Door de verschillende snijpunten en middelpunten te verbinden, krijgen we vier even grote gelijkzijdige driehoeken, zie onderstaande figuur. We zetten de zijden van deze driehoeken voor het gemak op 1. Door op een slimme manier gebieden met gelijke oppervlakte van kleur te verwisselen, zien we in dat de oppervlakte van het rode deel precies de helft is van de oppervlakte van een cirkel met straal 1, ofwel $\frac{1}{2}\pi$. De grote cirkel heeft een straal die gelijk is aan $\frac{4}{3}$ maal de hoogte van de driehoeken. Deze is dus gelijk aan $\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$. De totale oppervlakte is dus $\frac{4}{3}\pi$, en dus heeft het blauwe deel een oppervlakte van $\frac{4}{3}\pi - \frac{1}{2}\pi = \frac{5}{6}\pi$. De verhouding rood : blauw komt hierdoor uit op 3 : 5.



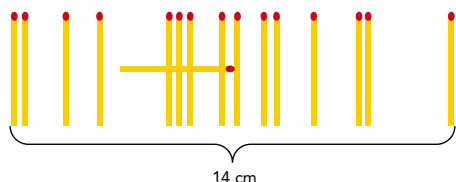
OPLOSSING 259

Erik doet er 2 uur over om alle uitnodigingen te schrijven voor het klassenfeest. Karin doet dat in 1 uur. Ze besluiten uiteindelijk dit karwei gezamenlijk op te pakken. Hoe lang zijn ze nu bezig?

Oplossing. Noteer met n het totale aantal uitnodigingen. Erik heeft een snelheid van $\frac{1}{2}n$ uitnodigingen per uur en Karin heeft een snelheid van n uitnodigingen per uur. Samen geeft dit een snelheid van $\frac{3}{2}n$ uitnodigingen per uur, wat voor n uitnodigingen dus $n/(\frac{3}{2}n) = \frac{2}{3}$ uur duurt: 40 minuten dus.

OPLOSSING 260

Peter heeft zestien lucifers van 3,6 cm lang. Vijftien daarvan heeft hij parallel naast elkaar gelegd, op zo'n manier dat de afstand tussen de twee buitenste lucifers 14 cm bedraagt. Laat zien dat hij de zestien-de lucifer overdwars op minstens vier van de parallelle tegelijk kan leggen, ongeacht de verdeling van de dertien binnenste lucifers. Je mag aannemen dat de lucifers dikte 0 hebben.



Oplossing. Laat S de som zijn van de afstanden tussen lucifer n en lucifer $n + 3$, waarbij n van 1 tot en met 12 loopt. Als het gevraagde *niet* waar is, dan moeten alle termen in S groter zijn dan 3,6 cm. We krijgen dus $S \geq 12 \cdot 3,6 = 43,2$. Verder beweren we dat $S \leq 3 \cdot 14 = 42$; dit omdat we de som kunnen splitsen in drie sommen. De eerste over de afstanden van lucifer 1 tot 4, 4 tot 7, 7 tot 10 en 10 tot 13. De tweede over 2 tot 5, 5 tot 8 enzovoorts. En de derde 3 tot 6, 6 tot 9 en zo verder. De waarden van de sommen is dus de afstand van 1 tot 13, van 2 tot 14 en van 3 tot 15, in alle gevallen dus kleiner dan of gelijk aan 14 cm. We krijgen dus $42 \geq S \geq 43,2$, en dus $42 \geq 43,2$. Dit is natuurlijk een tegenspraak, waaruit we concluderen dat de aanname dat het gevraagde *niet* waar is, onjuist is. Je kunt dus altijd vier lucifers naast elkaar vinden die binnen de 3,6 centimeter van elkaar liggen.

OPLOSSING 261

Het getal 420 heeft 24 delers, namelijk 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 12, 14, 15, 20, 21, 28, 30, 35, 42, 60, 70, 84, 105, 140, 210 en 240. Onder deze delers bevinden zich 7 opeenvolgende getallen (1, 2, 3, 4, 5, 6 en 7). Bepaal alle positieve, gehele getallen x waarvoor geldt:

- x heeft precies 100 delers;
- onder die delers bevinden zich minimaal 10 opeenvolgende getallen.

Oplossing. Tussen 10 opeenvolgende getallen zit altijd minstens één getal dat deelbaar is door 5, evenzo door 7, $8 (= 2^3)$ en $9 (= 3^2)$. Het getal dat we zoeken moet dus het priemgetal 2 minstens drie-maal bevatten, het priemgetal 3 tweemaal bevatten en verder de priemgetallen 5 en 7 bevatten. Als een getal in priemfactoren ontbonden gelijk is aan $p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdots p_k^{n_k}$, dan is het aantal delers gelijk aan $(n_1 + 1)(n_2 + 1) \cdots (n_k + 1)$. Immers, het eerste priemgetal komt in een deler of nul keer of één keer of ... tot en met n_1 maal voor, enzovoorts. Nu hebben we als machten van priemgetallen dus al de waarden 1, 1, 2 en 3 te pakken. De enige manier waarop we 2, 2, 3 en 4 kunnen verhogen totdat ze 100 als product hebben, is door ze te verhogen tot 2, 2, 5 en 5. Dit geeft een priemfactorontbinding van $2^4 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$. Het enige getal dat voldoet is dus 45360. Dit getal heeft per constructie de getallen 1 tot en met 10 als deler.

OPLOSSING KLAVERKRAKER

Hiernaast zie je de oplossing van de puzzel op pagina 25 van het vorige nummer.

Pythagoras, ook op facebook.



www.facebook.com/Pythgrs

8	6	1							
1	2	7	5						
	5	6	7	1					
		4	7	5	3				
			6	2	1	6			
				1	3	2	6		
					6	4	4	1	
						1			



53ste jaargang nummer 1
september 2013
ISSN 0033 4766

Pythagoras stelt zich ten doel jongeren kennis te laten maken met de leuke en uitdagende kanten van wiskunde. *Pythagoras* richt zich tot leerlingen van vwo en havo en alle anderen die jong van geest zijn.

Internet www.pythagoras.nu

Hoofdredacteur Derk Pik

Eindredacteur Alex van den Brandhof

Redactie Matthijs Coster,
Jeanine Daems, Jan Guichelaar,
Klaas Pieter Hart, Paul Levrie,
Marc Seijlhouwer

Vormgeving Grafisch Team
Digipage BV, Leidschendam

Druk Drukkerij Ten Brink, Meppel

Uitgever Koninklijk Wiskundig
Genootschap (KWG)

Management Pythagoras Jan Turk,
Mark Veraar (KWG), Derk Pik

Lezersreacties en kopij

Bij voorkeur per e-mail; lezersreacties naar Jan Guichelaar, jan@pythagoras.nu en kopij naar Derk Pik, derk@pythagoras.nu. Eventueel per post naar Jan Guichelaar, Pedro de Medinalaan 162, 1086 XR Amsterdam.

Abonnementen, bestellingen en mutaties

Abonneeservice Pythagoras
Postbus 2238
5600 CE Eindhoven
Telefoon 088 226 5258
E-mail: abbonementen@pythagoras.nu

Abonnementsprijs

(zes nummers per jaargang)
€ 26,00 (Nederland en België),
€ 29,00 (overige landen),
€ 17,00 (groepsabbonement NL/B),
€ 26,00 (geschenkabbonement NL/B),
€ 29,00 (geschenkabbonement overige landen).

Een geschenkabbonement stopt automatisch na één jaar. Overige abonnementen gelden tot wederopzegging. Zie www.pythagoras.nu voor verdere toelichtingen.

Aan dit nummer werkten mee

Alex van den Brandhof
(alex@pythagoras.nu),
Leon van den Broek
(l.vandenbroek@math.ru.nl),
Matthijs Coster
(matthijs@pythagoras.nu),
Jeanine Daems
(jeanine@pythagoras.nu),
Ragnar Groot Koerkamp
(ragnar.grootkoerkamp@gmail.com),
Jan Guichelaar
(jan@pythagoras.nu),
Klaas Pieter Hart
(kp@pythagoras.nu),
Eric Kirchner
(herihor@yahoo.com),
Jaap Klouwen
(j.klouwen@hva.nl),
Paul Levrie
(paul@pythagoras.nu),
Eddie Nijholt
(eddie@pythagoras.nu),
Dave Odegard
(dave@odegard.demon.nl),
Derk Pik (derk@pythagoras.nu),
Marc Seijlhouwer
(marc@pythagoras.nu),
Harry Smit
(h.j.smit@students.uu.nl).

Pythagoras wordt mede mogelijk gemaakt door de bijdragen van de onderstaande instituten en instellingen.



TU Delft

TU/e

UNIVERSITEIT
TWENTE.

CWI



TARTAGLIA

$$x = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

De formule hierboven geeft je een oplossing van een derdegraadsvergelijking van de vorm $x^3 + px + q = 0$. De formule werd in de zestiende eeuw gevonden door de Italiaan Niccolò Tartaglia. Girolamo Cardano was echter de eerste die de formule publiceerde, tot ergernis van Tartaglia, die Cardano zijn magische formule onder een eed van geheimhouding had gegeven. Op veel scholen wordt deze formule bij het vak Wiskunde D afgeleid. De formule wordt gebruikt in het artikel op pagina 12.

