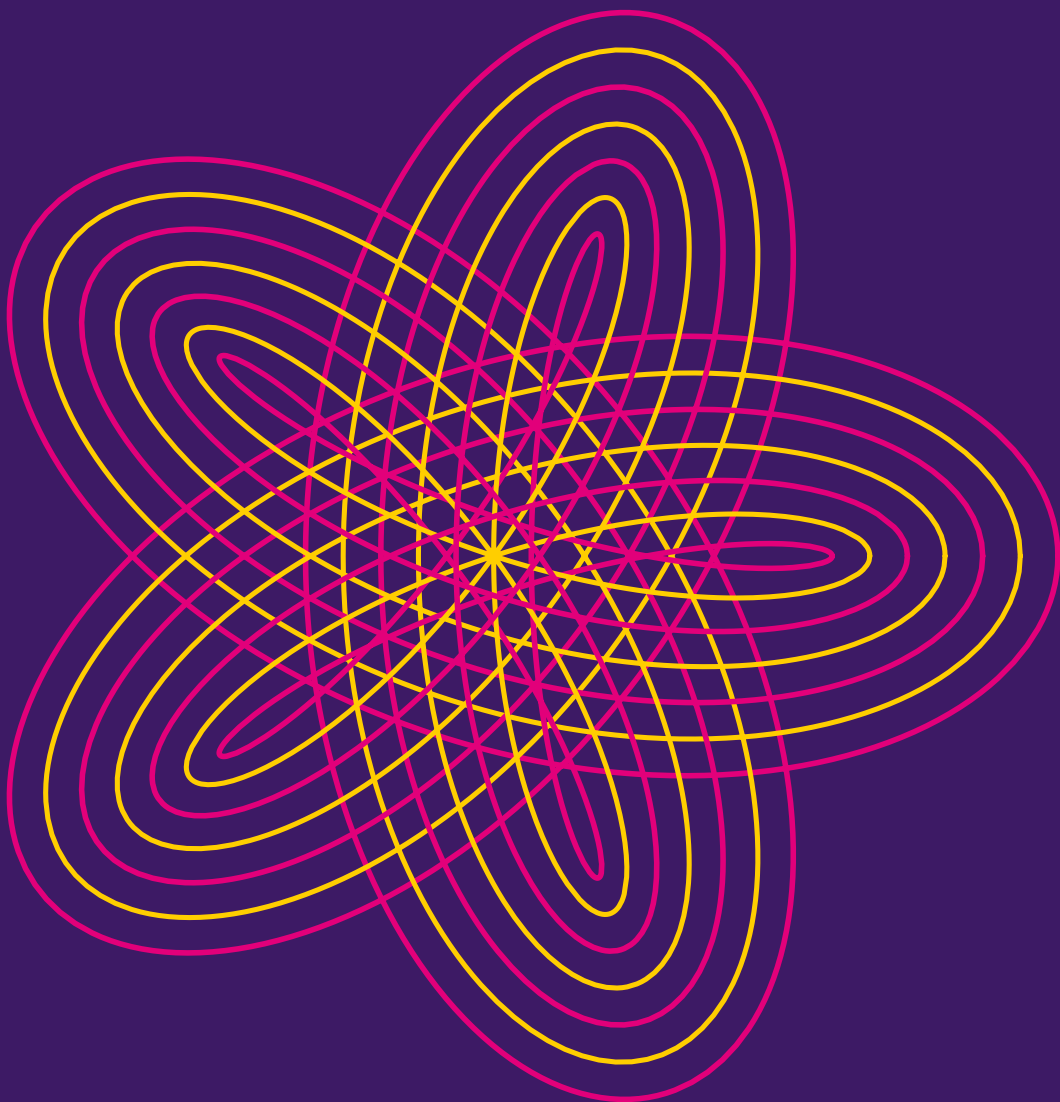


PYTHA GORAS

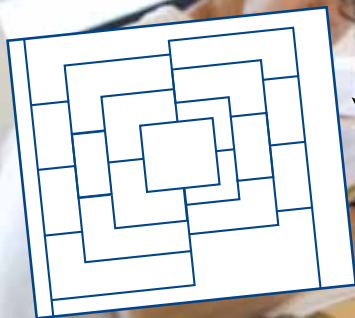
WISKUNDETIJDSCHRIFT VOOR JONGEREN



53ste JAARGANG - NUMMER 2 - NOVEMBER 2013

Kleurenpuzzel

Je vindt het antwoord op
www.math.leidenuniv.nl/puzzels



Wat is het **kleinste** aantal kleuren waarmee je de figuur in het vlak in kan kleuren zó dat geen tweetal aangrenzende vlakken dezelfde kleur hebben?
Volstaat dit aantal voor alle figuren?

Ervaren hoe het is om Wiskunde te studeren? Kom naar de Open Dag op locatie!

Wiskunde kun je doen om de schoonheid en abstractie van de wiskunde zelf. Maar ook de praktische problemen en toepassingen zijn een grote uitdaging. Een combinatie van beide leidt vaak tot spectaculaire resultaten. Zit je in 5 of 6 VWO en wil je meer weten over wiskunde studeren aan de Universiteit Leiden? Kom dan op **vrijdag 22 november** naar de **Open Dag op locatie** Wiskunde van de faculteit Wiskunde en Natuurwetenschappen.

Kijk voor meer informatie op studereninleiden.nl/wiskunde



**Universiteit
Leiden**

Wiskunde en Natuurwetenschappen

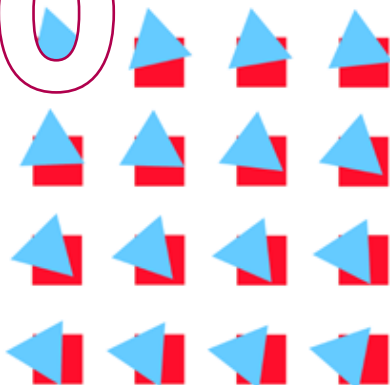
Bij ons leer je de wereld kennen



naar de website

INHOUD

10



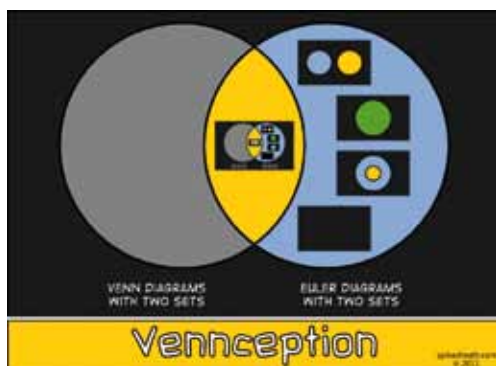
PRIJSVRAAG: BEWEGENDE WISKUNST

Maak een bewegend object waar op een of andere manier een wiskundig idee in is verwerkt. Je kunt iets met de computer maken, bijvoorbeeld met het programma *GeoGebra*, maar je mag natuurlijk ook iets van echte materialen maken.

SPIKED MATH

Spiked Math is een Engstalige webstrip van de Canadees Mike Cavers. Van zijn grote collectie strips met wiskundige humor laten we een kleine greep zien.

16

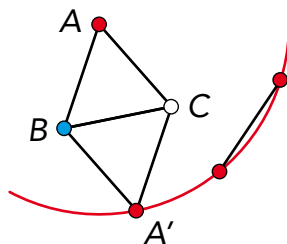


Omslagillustratie: een kromme met GeoGebra (zie het artikel op pagina 6)

18

HET CHROMATISCH GETAL VAN HET VLAK

Wiskundige Alexander Soifer laat je kennismaken met een probleem dat iedereen makkelijk kan begrijpen, maar dat ook al 63 jaar openstaat: wat is het zogeheten *chromatisch getal van het vlak*?



EN VERDER

- 2 Kleine nootjes
- 4 Handig schatten
- 6 Bewegen en kleuren
- 12 Een parabool als rekenmachine
- 14 Journaal
- 23 Hexpuzzel
- 24 Bewijs door rotatie?
- 26 Mondriaans kerstkaart
- 27 Kleuren scheiden in Colombia
- 30 Pythagoras Olympiade
- 33 Oplossing Theetraëder

■ **NIVEAUBALKJES** Sommige pagina's bevatten één of meer zwarte balkjes onder het paginanummer. Voor artikelen zonder balkje is geen specifieke voorkennis nodig. Artikelen met één balkje bevatten wiskunde uit de onderbouw. Artikelen met twee balkjes vereisen kennis uit de bovenbouw. Drie balkjes: net iets moeilijker.

KLEINE NOOTJES

■ door Jan Guichelaar



GELDINZAMELING

In de onderbouw van een middelbare school wordt een collecte voor een goed doel gehouden. Een kwart van de derdeklassers geeft 2 euro, een derde van de tweedeklassers geeft 1,50 euro en de helft van de eersteklassers geeft 1 euro. In totaal levert de collecte 200 euro op. Hoeveel leerlingen zitten er in de onderbouw?

VIJF OPEENVOLGENDE GETALLEN

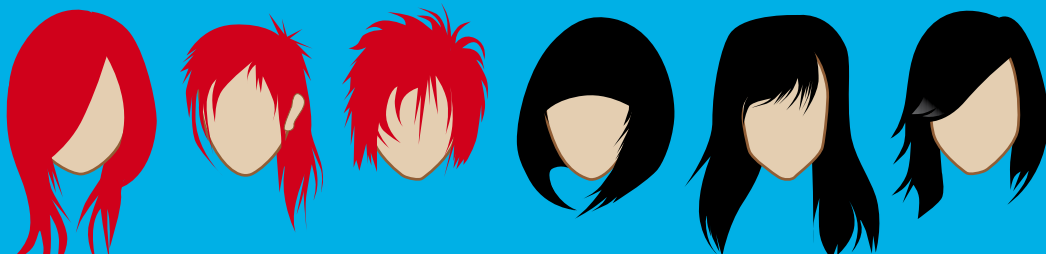
Neem een willekeurig positief geheel getal G en zijn vier opvolgers. Het product van deze vijf getallen is zeker deelbaar door 120, ongeacht welk getal je voor G hebt gekozen. Waarom?

120 | P



VIJFTIEN KEER SPRINGEN

Je staat op een hoekveld van een 4×4 -bord. Alleen de volgende sprongen zijn toegestaan: schuin, horizontaal of verticaal, steeds over één of twee velden heen. Hoe kun je alle velden aandoen, zonder twee keer op eenzelfde veld te komen?



ROOD- EN ZWARTHARIGEN

Aan één kant van een kanaal staan drie roodharigen en drie zwartharigen. Aan die kant ligt ook een klein roeibootje, dat maar plek heeft voor hoogstens twee personen. Alle zes willen ze naar de overkant. Er is een vreemde spelregel waaraan ze zich moeten houden: er mogen nooit meer roodharigen dan zwartharigen aan een kant staan (alleen roodharigen mag wel). Hoe komen ze allemaal aan de overkant?

Kleine nootjes zijn eenvoudige opgaven die weinig of geen wiskundige voorkennis vereisen om opgelost te kunnen worden. De antwoorden vind je in het volgende nummer van *Pythagoras*.

SLIM WEGEN

Je hebt een stevige balans met twee armen en een balk metaal van 13 kilogram. Zaag deze balk in drie stukken, zodat je evenwicht kunt maken met alle gewichten van 1 tot en met 13 kilogram (alle geheel).



OPLOSSINGEN KLEINE NOOTJES NR. 1

Gehele afstanden. Er zijn $\frac{9 \times 8}{2} = 36$ mogelijkheden om een tweetal te kiezen (de deling door 2 is nodig, omdat anders elk tweetal dubbel geteld wordt). Op elke rij of kolom zitten twee tweetallen met onderlinge afstand 1, en één tweetal met afstand 2. Verder komen alleen afstanden voor die niet geheel zijn. In totaal zijn er dus $6 \times 3 = 18$ mogelijkheden. De gezochte kans is dus $\frac{18}{36} = \frac{1}{2}$.

De juiste volgorde. Noem de gewichtjes a, b, c en d. Bij 2 gewichtjes ben je in 1 keer wegen klaar. Bij 3 gewichtjes moet je 2 of 3 keer wegen. Neem eerst a en b. Daarna neem je c en a, en zonodig nog c en b. Bij vier gewichtjes bepaal je in maximaal 3 wegingen de volgorde van a, b en c. Stel de volgorde is abc. Er zijn dan nog 2 wegingen nodig: weeg d met b, en daarna óf d met a óf d met c. In totaal zijn er dus 4 of 5 wegingen nodig.

Fiches leggen.

1	1	1	1	2
1	2	1	1	1
1	1	1	2	1
2	1	1	1	1
1	1	2	1	1

Papier knippen. Stel dat de oorspronkelijke strook afmetingen $a \times b$ heeft met $b > a$ (a en b in meters). Je kunt elke strook (onafhankelijk van de waarden van a en b) knippen in 16 gelijke strookjes die gelijkvormig zijn met de oorspronkelijke strook, door de lengte en de breedte twee keer te halveren. Je krijgt dan 16 stroken die allemaal $\frac{a}{4} \times \frac{b}{4}$ zijn. Maar als we eisen dat je alleen loodrecht op de lengte mag knippen, moet je 15 keer knippen in de breedterichting. De 16 parallelle strookjes die je zo krijgt, zijn allemaal $\frac{b}{16} \times a$. Omdat deze stroken gelijkvormig zijn met de oorspronkelijke strook, geldt $b^2 = 16a^2$. Samen met $a \times b = 1$ vind je de (unieke) oplossing: $a = \frac{1}{2}$ en $b = 2$. De kleine strookjes zijn elk 12,5 cm $\times$ 50 cm.

Razendsnel besluit. Naar de iPhone lopen kan op twee manieren: doorlopen en buiten de band terug (tijd t_1) of teruglopen en buiten de band heen (t_2). Er geldt: $t_1 = 60/\frac{3}{2} + 60/1 = 100$ seconden; $t_2 = 30/\frac{1}{2} + 30/1 = 90$ seconden. Het beste is dus teruglopen. Met de iPhone naar het eind van de band kan ook op twee manieren: buiten de band doorlopen (t_3) of terug lopen en over de band naar het einde lopen (t_4). Er geldt: $t_3 = 60/1 = 60$ seconden; $t_4 = 30/1 + 90/\frac{3}{2} = 90$ seconden. Het beste nu is buiten de band doorlopen. In totaal ben je dan in $90 + 60 = 150$ seconden aan het einde van de band.

In deze tweede aflevering over rekentrucs leren we je schatten, iets waar je je leven lang iets aan hebt. De QAMA is een rekenmachine die pas antwoord geeft nadat je zelf een goede mentale schatting geeft. Leerzaam, maar vooral ook erg leuk!

■ door Marc Seijlhouwer

HANDIG SCHATTEN



4

De QAMA-rekenmachine ziet eruit als een normaal rekenmachientje. Maar als je iets probeert uit te rekenen, stuit je op iets opmerkelijks. Je krijgt namelijk geen antwoord nadat je op de =-knop drukt. In plaats daarvan verspringt de cursor naar onder en wacht de rekenmachine. Waar wacht hij dan op?

Op jou. Hij wil dat je een schatting van de uitkomst geeft. En pas als die goed genoeg is, krijg je het echte antwoord te zien. Als je het eigenlijk al niet meer nodig hebt.

De QAMA (Quick Approximate Mental Arithmetic) wil je namelijk leren schatten. Gek genoeg leer je daar op school maar weinig over, terwijl schatten erg nuttig is: ongeveer berekenen hoeveel je kwijt gaat zijn in een restaurant, of een idee krijgen van hoeveel hout je nodig hebt om een tafel te bouwen.

Een rekenmachine die je pas een precies antwoord geeft nadat je zelf een beetje hebt gerekend is nuttig, maar ook leuk: je eigen schattingen geaccepteerd krijgen is bevredigend.

VERMENIGVULDIGEN EN DELEN Het is goed om eerst eens te kijken wat het apparaat van je ver-

wacht. Optellen is simpel, dus daar eist de QAMA behoorlijk wat van je. De uitkomst van $6 + 8$ moet je gewoon precies weten. Ook bij simpele vermenigvuldigingen of deelsommen heeft de QAMA een duidelijke boodschap: uit je hoofd is sneller en makkelijker.

Je hebt een rekenmachine natuurlijk niet voor simpele sommen. Dus laten we eens proberen om iets ingewikkelders te doen: 23×54 . Dat is nog steeds met de hand te doen, maar zonder kladpapier bij de hand kost het nog best wat tijd. Een schatting maken is gemakkelijker. Eerst probeer je $20 \times 50 = 1000$. Dat vindt de QAMA te grof. Wat is de volgende stap? Misschien dat $23 \times 50 = 1150$ – nog steeds gemakkelijk uit het hoofd te bedenken – wel goed genoeg is? Inderdaad, de QAMA geeft je vervolgens het precieze antwoord: 1242. De gemaakte schatting zit er minder dan tien procent vanaf, wat heel redelijk is voor de meeste toepassingen (hoewel waarschijnlijk niet voor proefwerken).

Delen gaat op dezelfde manier. De breuk $143/56$ ligt waarschijnlijk tussen de 2 en 3 in. Immers, $150/50 = 3$, en 56 is net groter dan 50 en 143 is klei-

ner dan 150. Probeer eens 2,5 en warempel, het echte antwoord blijkt er heel dicht bij te liggen: in acht decimalen nauwkeurig is het 2,55357143.

MACHTSVERHEFFEN EN WORTELTREKKEN

Neem bijvoorbeeld 12^3 . Dat is $12 \times 12 \times 12$, en we weten dat $12 \times 12 = 144$. Is $144 \times 10 = 1440$ als schatting al goed genoeg? Jawel; het goede antwoord is 1728. Alle kwadraten tot en met 15 uit je hoofd leren kan erg helpen bij het schatten van ingewikkelde machten.

Worteltrekken is iets lastiger, omdat er maar weinig getallen zijn waarvan de wortel mooi uitkomt. Wat is bijvoorbeeld $\sqrt{19}$? We weten dat $\sqrt{16} = 4$ en $\sqrt{25} = 5$. De waarde van $\sqrt{19}$ zal dus tussen de 4 en de 5 liggen. Gok eens 4,5. De QAMA keurt het goed en laat zien dat het echte antwoord in acht decimalen nauwkeurig 4,35889894 is.

LOGARITMEN De schattingsmanieren die we tot nu toe hebben besproken zijn allemaal relatief simpel, maar heel nuttig. Door de QAMA veel te gebruiken leer je steeds meer, want lang niet alle berekeningen zijn zo gemakkelijk te benaderen. We bespreken nog een categorie: de logaritme.

De log-knop van de QAMA is, net als bij elke

andere rekenmachine, de logaritme met grondtal 10. Dat wil zeggen: $\log x$ is de macht waartoe je 10 moet verheffen, om x te krijgen. Dus $\log 100$ is 2, want $10^2 = 100$.

Stel nu dat we $\log 12$ willen berekenen. Met een grafiek van de functie $y = \log x$ kunnen we de waarde proberen af te lezen, maar dat kost veel tijd.

We beginnen met enkele eenvoudige waarden die we uit het hoofd kennen: $\log 1 = 0$, $\log 10 = 1$, $\log 100 = 2$ enzovoort. Omdat $\log 12$ veel dichterbij 10 ligt dan bij 100, raden we eerst maar eens 1. Vindt de QAMA dit goed genoeg? Helaas niet; hij wil het nauwkeuriger weten. Ook 1,1 vindt hij te grof, maar met 1,09 gaat hij akkoord: de uitkomst in acht decimalen is 1,07918125.

WIN EEN QAMA! Is de QAMA handig of leuk om te hebben? In ieder geval laat hij je weer nadenken over je rekensommen, in plaats van ze hersenloos in je rekenmachine te typen. Na een uurtje gebruik kijk je al anders aan tegen het doen van berekeningen.

Als je ons een leuke reketruc, ezelsbrug of manier om te schatten opstuurt, kan jij ook een QAMA bemachtigen. Laat het ons weten via post@pythagoras.nu. ■



In de vorige GeoGebra-aflevering ('Draaiende wielen') hebben we de baan van het ventiel van een fietswiel getekend. We gaan dergelijke banen nu op een andere manier tekenen, waarna we veel ingewikkelder figuren kunnen construeren.

■ door Derk Pik

BEWEGEN EN KLEUREN

Een tandwiel is een getand onderdeel van een of andere machine in de vorm van een wiel. Een tandwiel is een van de oudste middelen om beweging over te brengen. Wanneer de tanden van twee tandwielen in elkaar grijpen, zal het draaien van één tandwiel het andere dwingen om ook te draaien.

De twee cirkels in figuur 1 stellen tandwielen voor. Het aantal tanden van de grote cirkel noemen we D , van de kleine cirkel d . Hoe vaak moet de kleine cirkel langs de rand van de grote draaien om weer in dezelfde positie, op de beginplaats uit te komen?

Het aantal tanden dat dan is afgelegd, is zowel een veelvoud van d als van D . Het kleinste gemene veelvoud (kgv) is dus het minimale aantal tanden dat moet worden afgelegd. De kleinste cirkel beweegt

$$N = \frac{\text{kgv}(D, d)}{D}$$

keer langs de grote cirkel en draait daarbij zelf

$$n = \frac{\text{kgv}(D, d)}{d}$$

keer in het rond.

We tekenen in GeoGebra een cirkel met middelpunt M door een punt A . Dit wordt onze grote cirkel: de straal is gelijk aan $R = MA$. Deze waarde krijg je door het lijnstuk MA te tekenen en dit R te noemen. We maken de schuifknoppen D van 0 tot 180, te verschuiven in gehele stappen, en d van 0 tot

90, ook in gehele stappen. We maken de knoppen groot genoeg (500 en 250 px) en vinken 'vast' uit, zodat we de knoppen een goede plaats kunnen geven aan het einde van de constructie. In het venster 'Invoer' typen we $N = \text{kgv}(D, d)/D$ en $n = \text{kgv}(D, d)/d$. De straal van de kleine cirkel r voldoet aan de verhouding $R : r = D : d$, dus

$$r = R \cdot \frac{d}{D}.$$

De constructie ziet er uit als in figuur 2.

DE KROMME De beweging van het middelpunt m van de kleine cirkel wordt voorgesteld door

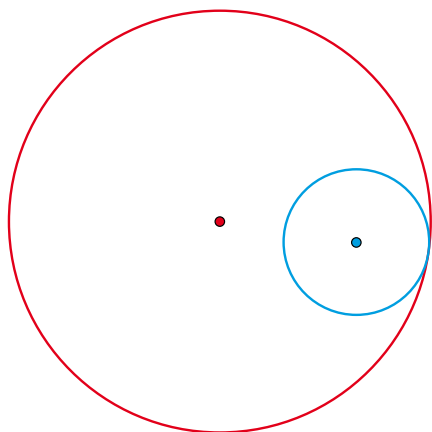
$$\begin{aligned} x &= x(M) + (R - r)\cos(360^\circ Nt), \\ y &= y(M) + (R - r)\sin(360^\circ Nt), \end{aligned}$$

voor $0 \leq t \leq 1$. Hierbij zijn $x(M)$ en $y(M)$ de x - en y -coördinaten van M .

In het venster 'Invoer' schrijven we $r = R \cdot d/D$. Als we de schuifknoppen op $D = 60$ en $d = 20$ zetten, dan zien we dat de kleine straal r drie keer zo klein is als R .

Maak de schuifknop voor de totale tijdsduur: T varieert van 0 tot 1, met stappen van 0,01. We voeren bovenstaande parametrisatie bij 'Invoer' in, door de volgende lange formule:

$$\text{Kromme}[x(M) + (R - r)\cos(360^\circ Nt), y(M) + (R - r)\sin(360^\circ Nt), t, 0, T].$$



Figuur 1 De grote cirkel heeft D tanden, de kleine cirkel heeft er d.

Om het symbool voor graden te krijgen, gebruik je het alpha-knopje helemaal rechts van het invoervenster (zie figuur 3). Zet steeds een spatie of een *-teken tussen de variabelen N en t, anders leest GeoGebra één variabele Nt.

Als alles goed is gegaan, kan je de schuifknop T nu bewegen. Je ziet dan een cirkelboog langer of juist minder lang worden (zie figuur 4).

Nu tellen we er de kleine beweging bij op. In het kleine spirograafschijfje zit op allerlei afstanden van het middelpunt een gaatje waar je je pen in kan doen. Deze afstand nemen we een fractie λ (lambda) van r. Maak een schuifknop λ variërend van 0 tot 1, met stappen van 0,01.

Het kleine schijfje draait in tegengestelde richting, dus de beweging die erbij komt is:

$$x = \lambda r \cos(-360^\circ nt) = \lambda r \cos(360^\circ nt),$$

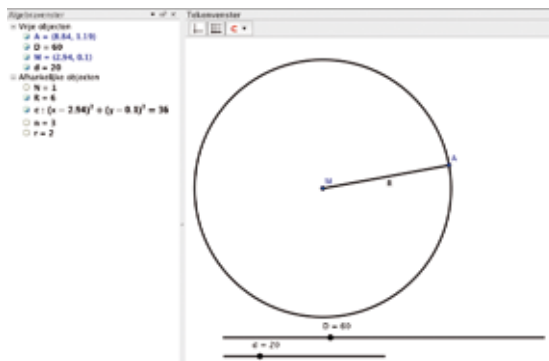
$$y = \lambda r \sin(-360^\circ nt) = -\lambda r \sin(360^\circ nt).$$

Dit tellen we bij de originele kromme op. Klik op de kromme, open het Eigenschappenvenster. Onder 'Basis' vinden we de formule. Vóór de eerste komma staat de x-coördinaat, daar voegen we

$$+ \lambda r \cos(360^\circ n t)$$

toe. De formule voor y komt voor de tweede komma. Het resultaat zie je in figuur 5.

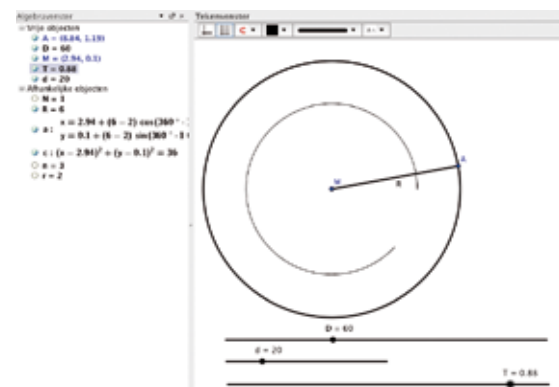
Natuurlijk maken we de grote cirkel en het lijnstuk onzichtbaar. Het middelpunt M en het punt A



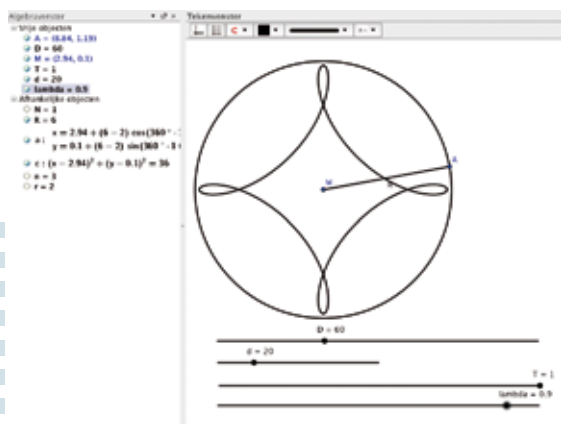
Figuur 2



Figuur 3



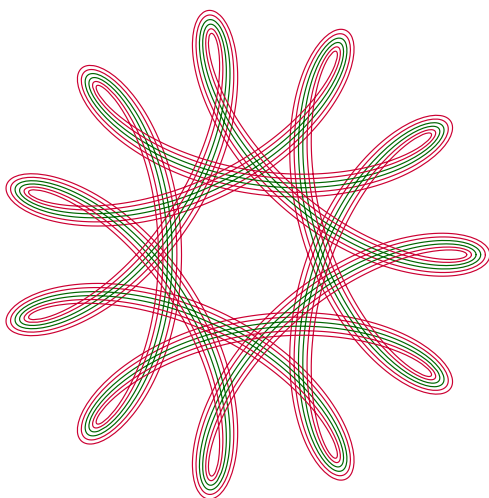
Figuur 4



Figuur 5



Figuur 6



Figuur 7

laten we nog even staan: dat is handig voor de macro.

Selecteer voor de macro eerst de kromme. Klik dan op Macro's: 'nieuwe macro maken'. Als eind-object heb je alleen de kromme. Als beginobjecten heb je de punten M en A en de getallen D, d, T en λ . Het is handig om deze variabelen ook bij naam en pictogram in te vullen; je vergeet dan niet wat de volgorde ook al weer was (zie figuur 6). Met de macro kan je prachtige plaatjes maken. Je ziet er twee in figuur 7 en één op het omslag.

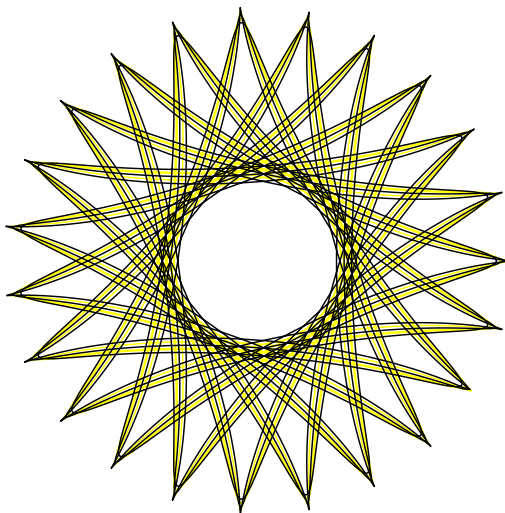
Het is leuk als je kromme precies bij het punt A begint. Door steeds een andere A te kiezen, kan je dan je figuur roteren. Dit is prima te doen, alleen wordt de formule voor de geparametriseerde kromme nog langer.

BEWEGEN EN VERANDERENDE KLEUREN

Bij de prijsvraag die in dit nummer is uitgeschreven (zie pagina 10) vragen we je om bewegende kunst te ontwerpen. De spirograafkrommen die we tot nu toe hebben laten zien, kan je goed laten bewegen. Je kan de animatie van elke schuifknop (of van meerdere) aan zetten en dan zie je hoe de kromme ontstaat. Daarbij kan je kiezen tussen toenemen, afnemen of oscilleren (heen en terug). Als je de grenzen slim kiest, kan je mooie effecten bereiken. Neem bijvoorbeeld aan het eind van de formule van de kromme:

$$\dots, t, T - 0.1, T]$$

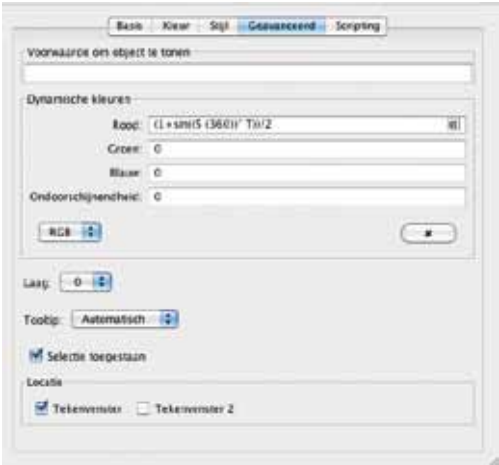
en zet de animatie van T op toenemen. Je ziet steeds een klein stuk van de kromme over de tekening kruipen.



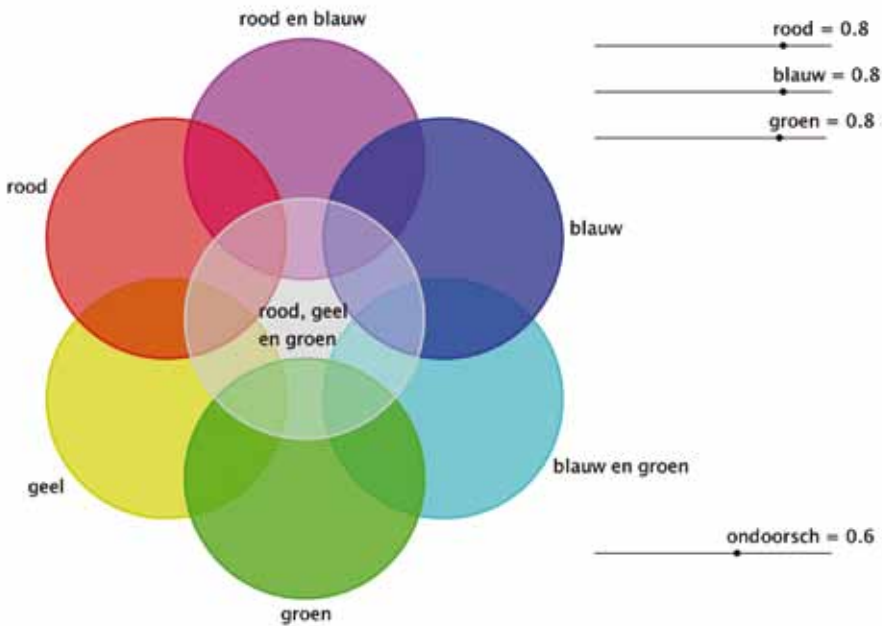
Nog leuker wordt het als je het stukje kromme ook nog van kleur laat veranderen. Dat kan je doen door middel van dynamische kleuren. In het veld 'Geavanceerd' van het Eigenschappenvenster kan je bij rood, blauw en groen een getal invullen tussen de 0 en de 1. Als je daar een functie van de tijd T invult, zoals in figuur 8, verandert de lijn gedurende de animatie voortdurend van kleur.

Hoe de kleuren veranderen, kan je uitvinden door even een nieuwe GeoGebra-file te maken. Construeer zeven cirkels, die we kleuren geven afhankelijk van schuifknoppen. We leggen niet helemaal meer uit hoe je dit moet maken: waarschijnlijk kan je het zelf wel verzinnen. Een mogelijk eindproduct is afgebeeld in figuur 9. Hier wordt de dynamische kleur van de rode cirkel alleen aangestuurd door de schuifknop 'rood': je vult in het vakje Rood de variabele 'rood' in. Net zo wordt de paarse cirkel (aangegeven met 'rood en blauw') aangestuurd door de schuifknoppen 'rood' en 'blauw', enzovoort.

Door met de schuifknoppen te experimenteren, krijg je een goede indruk van het effect van verschillende waarden van de schuifknoppen. Zet je de drie kleuren bijvoorbeeld allemaal op 0, dan worden alle cirkels zwart. En zet je ze allemaal op 1, dan worden de cirkels wit. ■



Figuur 8



Figuur 9



PRIJSVRAAG

BEWEGENDE WISKUNST

■ door Derk Pik

In de Geogebra-aflevering van dit nummer (zie pagina 6) kun je zien hoe je een kromme over het platte vlak kunt laten bewegen. De figuren die we daar maakten, doorsnijden zichzelf telkens, zoals de rode kromme hierboven.

Zou je ook krommen kunnen maken die zichzelf *meerdere* keren in één punt doorsnijden? Dat zou er erg mooi uit kunnen zien!

Om zo'n effect te bereiken, moet je een wiskundig probleem oplossen. Als het je lukt om zoiets als de blauwe kromme hieronder te maken, kun je vast ook heel andere figuren krijgen.

Iets heel anders. Stel, je wilt een blauwe driehoek gedeeltelijk een rood vierkant laten overdekken.

Je wilt dat het zichtbare oppervlak van beide vormen steeds dezelfde verhouding heeft. Experimenteren met bepaalde kleuren doet je besluiten tot de verhouding rood : blauw = 2 : 3. Hoe je de vormen over elkaar kunt leggen, hangt van allerlei factoren af: de grootte van het vierkant en de driehoek, de stand en de plaats van de driehoek ten opzichte van het vierkant.

Er zijn dus erg veel mogelijkheden. Er moeten keuzes worden gemaakt. We kiezen voor een gelijkzijdige driehoek en een van de symmetrieassen van deze driehoek gaat door het hoekpunt linksboven van het vierkant. De hoek die de as maakt ten opzichte van het vierkant bepaalt hoe ver de driehoek het vierkant binnenkomt.

Alles valt nu te berekenen en we krijgen het 'stripverhaal' dat je ziet op pagina 11. Van al deze plaatjes kun je met GeoGebra een filmpje maken.

Op dit idee kun je in allerlei richtingen verdergaan: met meer objecten, met andere vormen, met veranderende kleuren.

OPDRACHT De prijsvraag van deze 53ste jaargang van *Pythagoras* heeft als thema *bewegende wiskundige kunst*. We vragen je om een bewegend object te maken waar op een of andere manier een wiskundig idee in is verwerkt.

Je mag je kunstwerk van echte materialen maken, bijvoorbeeld van papier, en je mag het met de hand laten bewegen of door middel van elektriciteit of in de wind (of, wie weet, verzin jij nog een

andere manier), maar ook mag je je kunstwerk met de computer genereren. Voorbeelden van computer-aangestuurde kunstwerken zijn: een bewegend GeoGebra-kunstwerk, een mechanisch kunstwerk dat zijn bewegingsinstructies *real-time* uit een computer krijgt, of een filmpje van computerbeelden die door een computerprogramma zijn gegenereerd.

Bij kunstwerken die niet worden aangestuurd door een computer mag natuurlijk wel gebruik zijn gemaakt van de computer voor berekeningen en constructie-ontwerpen. Een vereiste is het uiteraard niet. Een op papier ontworpen mobile waar de delen bijvoorbeeld door zichzelf heen draaien zou een leuke inzending zijn.

INZENDEN Je doet mee met een door jou gemaakt filmpje, dat je op YouTube zet. We ontvangen van jou de koppeling naar een YouTube-filmpje met je (digitale of handgemaakte) kunstwerk. De beweging moet uiteraard duidelijk zichtbaar zijn!

Daarnaast stuur je ons een (korte) beschrijving van je kunstwerk. Je kunt daarbij denken aan de

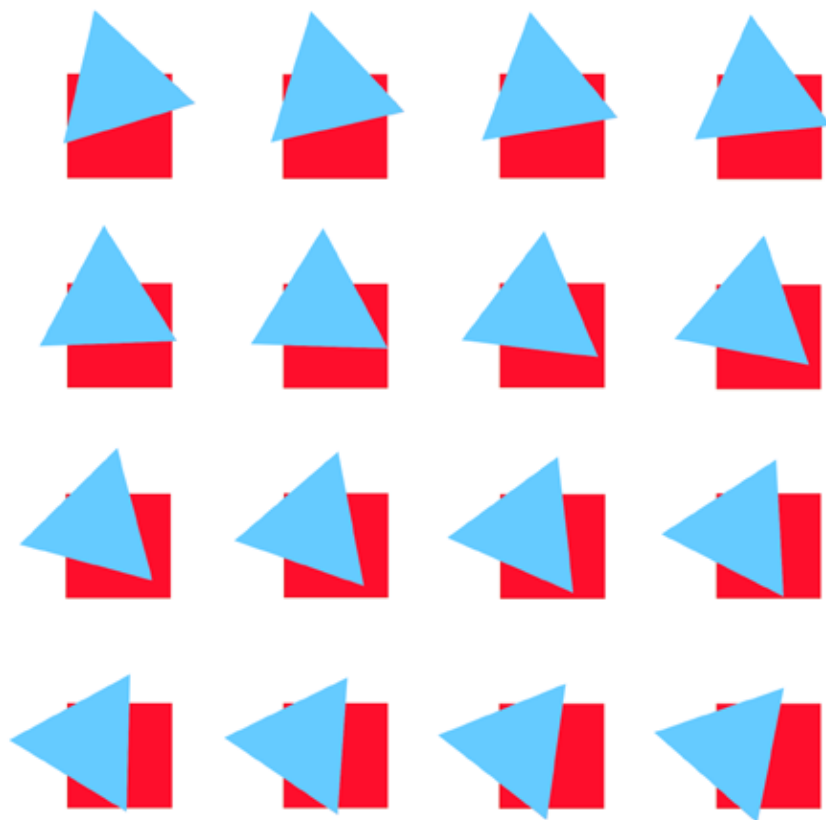
volgende vragen: hoe heb je het kunstwerk gemaakt, welke wiskundige gedachte zit erachter, wat voor wiskunde of berekeningen waren er nodig om je werk te maken?

Je mag individueel meedoen, maar ook als groep. Je mag meerdere keren inzenden, maar je werk zal wel als totaal worden beoordeeld.

Er zijn twee categorieën: kunstwerken die wel en niet worden aangestuurd door een computer. In elke categorie zijn twee prijzen: een cadeaubon van 50 euro en een van 25 euro.

Daarnaast is er een schoolprijs. De school waar de inzendingen van de beste kwaliteit vandaan komen, krijgt een jaar lang een gratis schoolabonnement van *Pythagoras* voor tien leerlingen, ter waarde van 170 euro.

Stuur je YouTube-koppeling en beschrijving naar **prijsvraag@pythagoras.nu**. Vermeld daarbij je naam, leeftijd, klas en school. Bij een klassenin-zending moet ook de naam van de wiskundedocent worden vermeld. Je inzending moet bij ons binnen zijn vóór 15 april 2014. Veel succes! ■



Getallen vermenigvuldigen is natuurlijk niet zo ingewikkeld, dat heb je op de basisschool al lang geleerd. Maar laatst was de Pythagorasredactie in het Mathematikum, een wiskundemuseum in Giessen (Duitsland), en daar zagen we een leuke grafische manier om het product van twee getallen af te lezen met behulp van een parabool! In dit stukje kun je lezen hoe dat werkt.

■ door Jeanine Daems

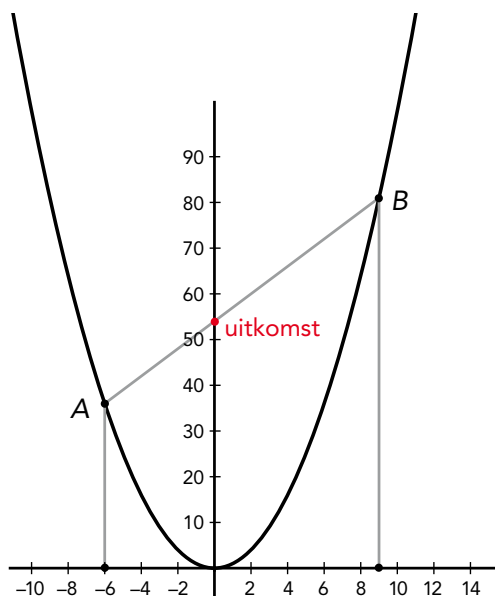
EEN PARABOOL ALS REKENMACHINE

Eerst kijken we hoe je met de paraboolmethode 6 en 9 met elkaar kunt vermenigvuldigen. Teken in een assenstelsel de parabool $y = x^2$ (zie figuur 1). We beginnen in de oorsprong, en zetten 6 stappen naar links, dan kom je in $(-6, 0)$. Trek nu vanaf dat punt een verticale lijn tot je de parabool snijdt, dan kom je uit in $(-6, 36)$, dat we punt A noemen. Doe hetzelfde bij $(9, 0)$, dan kom je uit bij $(9, 81)$, punt

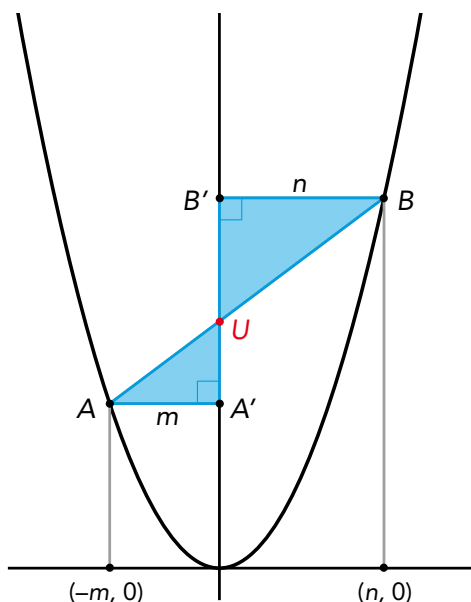
B. Trek nu een lijn van A naar B, en kijk waar de lijn de y -as snijdt. Jawel, in het punt $(0, 54)$. En het is geen toeval dat 54 juist het product is van 6 en 9!

KWADRATEN We kunnen ook bewijzen dat deze vermenigvuldigingstruc altijd werkt. Het makkelijkst is dat voor het product van twee *identieke* getallen. Als je links en rechts hetzelfde getal a kiest,

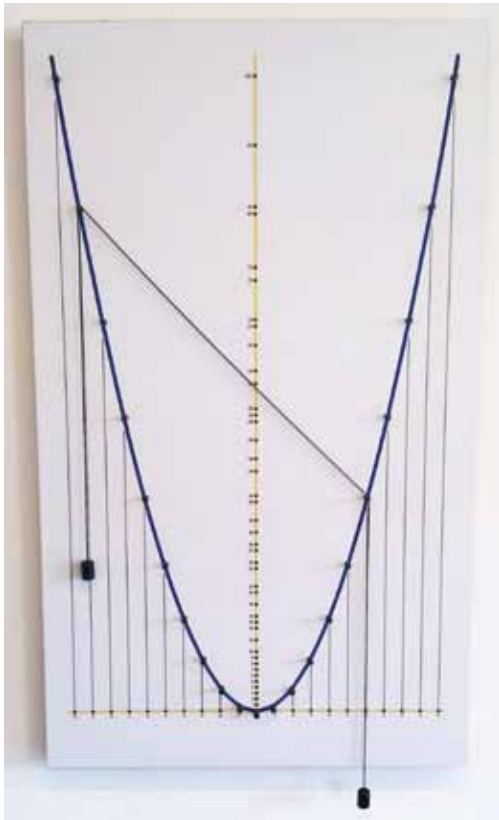
12



Figuur 1 Met de paraboolmethode zien we dat $6 \times 9 = 54$.



Figuur 2 Hoe bewijs je dat de paraboolmethode altijd werkt voor positieve getallen m en n ?



Figuur 3 In het Mathematikum is de parabool gemaakt met touwtjes en spijkers, zodat je een touwtje kan spannen over de punten A en B.

snijden de verticale lijnen de parabool op dezelfde hoogte, a^2 . En een rechte lijn van $(-a, a^2)$ naar (a, a^2) is gewoon de lijn $y = a^2$, en die snijdt de y -as natuurlijk in $(0, a^2)$. Dus daarvoor klopt het.

ALGEMEEN We gaan nu bewijzen dat de paraboolmethode voor alle positieve getallen werkt. Stel dat we de getallen m en n willen vermenigvuldigen. We volgen dezelfde procedure als bij 6 en 9 (zie figuur 2). We moeten dus bewijzen dat het snijpunt van de lijn AB en de y -as precies het punt $(0, mn)$ is. In figuur 2 heet dat punt U , en de y -coördinaat

van U noemen we voorlopig y_U . Onthoud dat het doel is om aan te tonen dat $y_U = mn$.

De punten A' en B' zijn de punten die je vindt als je vanuit A en B lijntjes loodrecht op de y -as tekent. Hun coördinaten zijn dus $(0, m^2)$ respectievelijk $(0, n^2)$. De twee blauwe driehoeken die je zo krijgt, lijken wel gelijkvormig te zijn. Dat is inderdaad het geval, ga maar na: ze hebben allebei een rechte hoek, en de twee hoeken bij het punt U zijn gelijk, want dat zijn overstaande hoeken. Als twee corresponderende hoeken gelijk zijn, is de derde het vanzelf ook, dus deze twee driehoeken zijn inderdaad gelijkvormig.

Hieruit volgt in het bijzonder dat

$$\frac{AA'}{BB'} = \frac{A'U}{B'U}.$$

Hoe lang zijn de lijnstukjes AA' , BB' , $A'U$ en $B'U$? Natuurlijk is $AA' = m$ en $BB' = n$. En $A'U$ is gelijk aan de y -coördinaat van U min de y -coördinaat van A' , oftewel $y_U - m^2$. Ten slotte is $B'U$ gelijk aan de y -coördinaat van B min de y -coördinaat van U , oftewel $n^2 - y_U$.

Kortom: we hebben nu aangetoond dat

$$\frac{m}{n} = \frac{y_U - m^2}{n^2 - y_U}.$$

Kruislings vermenigvuldigen laat zien dat

$$m(y_U - m^2) = m(n^2 - y_U).$$

Haakjes uitwerken levert

$$ny_U - m^2n = mn^2 - my_U,$$

en als we dan wat termen naar de andere kant halen, staat er

$$ny_U + my_U = mn^2 + m^2n.$$

Nu kunnen we aan allebei de kanten $n + m$ buiten haakjes halen:

$$(n + m)y_U = (n + m)mn.$$

Oftewel: $y_U = mn$. Dat is precies wat we wilden laten zien! ■

JOURNAAL

■ door Marc Seijlhouwer en Jeanine Daems

Première documentaire Pythagoras-oprichter



Hans de Rijk met Emily de Klerk en Sopa Bouman.
Foto: Carolina De Klerk Nordholm

Het duurde een paar maanden langer dan gepland, maar op 16 oktober was het zo ver: de première van de documentaire *Een leven lang nieuwsgierig*, over Hans de Rijk (1926). Hans de Rijk, alias Bruno Ernst en nog zes andere pseudoniemen, was daar zelf bij aanwezig. Hij heeft ontzettend veel boeken en artikelen gepubliceerd, onder andere over wiskunde en Escher. Ook is hij een van de oprichters van *Pythagoras*. “Ik weet niets, maar ben nieuwsgierig naar alles” is zijn lijfspreuk. Hij vindt het jammer dat de meeste mensen hun kinderlijke nieuwsgierigheid verliezen en probeert die nieuwsgierigheid weer aan te wakkeren.

In de documentaire legt hij uit waarom hij zoveel pseudoniemen heeft gebruikt. Nadat hij succes had met zijn *Atlas van het Heelal*, wilde hij iets schrijven over het schrift. “Toen dacht ik: ja, nou moet je uitkijken, want als je een succes boek en je gaat over een totaal ander onderwerp schrijven, dan denken de mensen: ‘nou, wat kan die daar nou ook van weten? (...) Hij denkt zeker dat ie alles weet! Dat hoeft ik niet te lezen hoor, ik moet het van een vakman hebben.’ Dat speelde door mijn hoofd.”

De 25 minuten durende documentaire, gemaakt door Sopa Bouman en Emily de Klerk, geeft een mooi beeld van deze bijzondere Utrechter. Je kunt de film bekijken op de website van RTV Utrecht: www.rtvutrecht.nl/gemist/uitzending/rtvutrecht/docu (kort: <http://goo.gl/l5SocG>). Binnenkort komt er ook een dvd beschikbaar. (JD)

Links: Hans de Rijk en zijn vrouw Leny in de filmzaal.

Oplossing voor wiebelig vliegtuigwiel

Soms verlopen landingen van een vliegtuig akelig schokkerig. Dat ligt aan een heleboel factoren, zoals wind, snelheid en de staat van de landingsbaan. Daaraan is weinig te veranderen, maar aan de afstelling van de wielen kan je wel sleutelen. Vier wiskundigen hebben een model gemaakt waarmee de optimale stand van de wielen kan worden berekend voor een aangename landing.

Het wiel is een zogeheten *dynamisch systeem*, waarin kleine veranderingen in de instelling voor grote verschillen tijdens de landing kunnen zorgen. Wiskundigen weten dat het wiel onderhevig is aan allerlei soorten trillingen. Die beïnvloeden de as, maar ook het wiel zelf. Soms gaat het door de trillingen zo hevig beven, dat het niet soepel op de landingsbaan terechtkomt. (MS)

Luchtkaartorde

Dirk Gerrits, een promovendus van de TU Eindhoven, heeft een programma geschreven dat luchtverkeersleiders, die zorgen dat alle vliegtuigen veilig landen, een handje helpt. Deze verkeersleiders hebben een enorm stressvolle baan, waarin ze de hele dag naar een radarscherm kijken met vliegtuigjes. De informatie over de vliegtuigen – labels – staat in het scherm, maar soms lopen deze labels door elkaar heen. Een luchtverkeersleider moet met de hand de labels verslepen zodat ze goed leesbaar blijven. Belachelijk, vond Gerrits, dus schreef hij een computerprogramma dat de labels automatisch plaatst. Dat klinkt simpel, maar is het niet. Omdat de labels bij

elk vliegtuig móeten staan, is het onmogelijk om een snel programma te maken dat er ook nog eens voor zorgt dat er geen enkel label overlapt. Het is Gerrits gelukt een programma te maken dat zo weinig mogelijk overlap geeft, en wél snel werkt.

Niet alleen luchtverkeersleiders kunnen baat hebben bij het programma; met wat kleine wijzigingen kunnen ook transport- of taxibedrijven het gebruiken. Die kunnen dan in één oogopslag zien waar alle auto's rijden, of ze bezet zijn en hoe lang ze nog nodig hebben om bij hun bestemming te komen, bijvoorbeeld. Dergelijke 'dynamische kaarten' bestaan op dit moment nog niet. (MS)

Nieuwe theorie over inbraken

Wanneer een inbreker toeslaat in een bepaalde wijk, is de kans op een volgende inbraak in dezelfde wijk groot. Dat weet de politie, en die huurt wiskundigen in om computervoorspellingen te maken over inbraken. Die voorspellingen houden echter geen rekening met openbaar vervoer, en dat een boef vlug in een andere wijk kan zijn.

Een nieuw model, gemaakt door een groep wiskundigen van de universiteit van Californië, houdt daar wél rekening mee. De meeste voorspellingen gaan ervan uit dat een boef zich willekeurig in een van de vier windrichtingen beweegt na een inbraak. Dat doet hij stapje voor stapje, en zo kan je voorspellen waar een boef na bijvoorbeeld 10.000 stap-

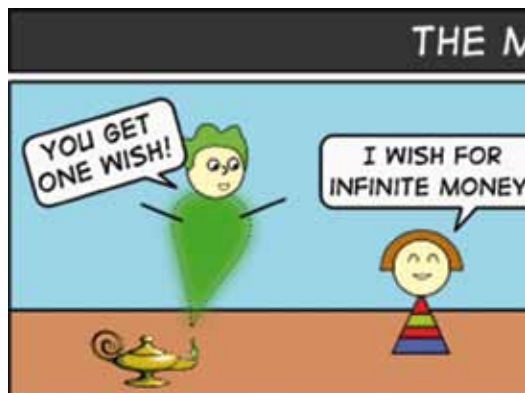
pen zal zijn. Door een zogenoemde Lévy-vlucht (vernoemd naar de Franse wiskundige Paul Lévy die gespecialiseerd was in de kansrekening) in het model te stoppen, kan de boef af en toe een grote sprong in plaats van een klein stapje nemen. Daardoor kan hij een groter deel van de stad bereiken. De voorspellingen van het model zijn vergeleken met de werkelijkheid, en lijken goed te werken. Mogelijk gaat de politie de nieuwe modellen in de toekomst gebruiken. Dat zou vooral nuttig zijn in grote steden, waar de enorme hoeveelheid openbaar vervoer het heel makkelijk maakt om een wijk te ontvluchten en op een andere plek nogmaals toe te slaan. (MS)

15

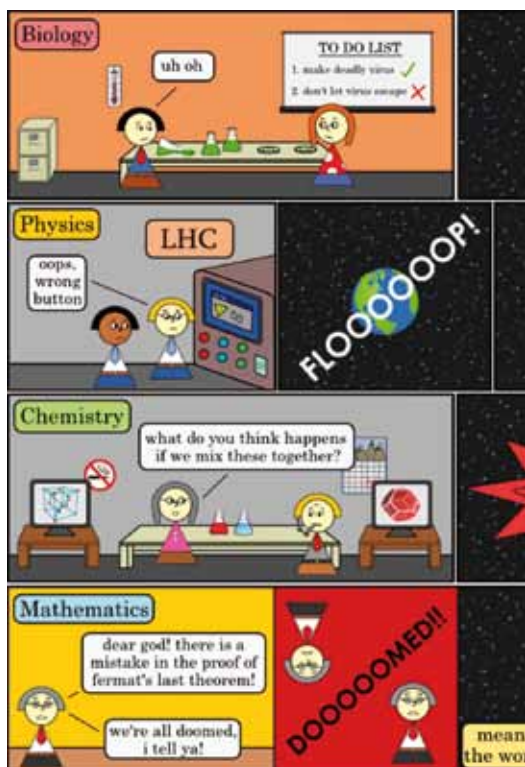
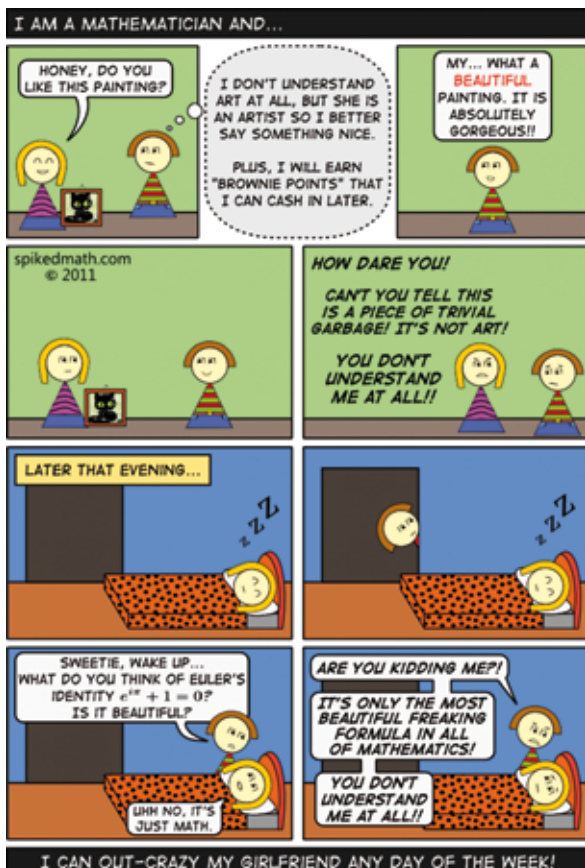
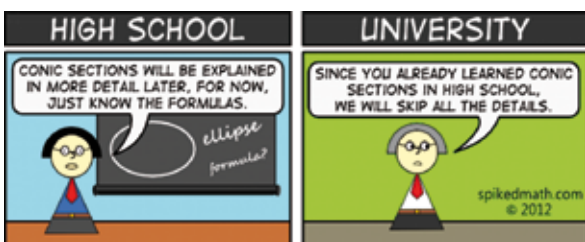
Geschiedenis voorspellen met wiskunde

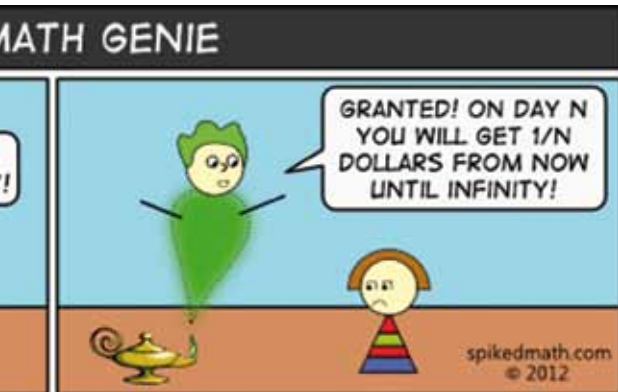
De bioloog Peter Turchin heeft een model bedacht dat het verloop van historische periodes kan verklaren. Hij heeft het ontstaan en verdwijnen van bevolkingsconcentraties in de oudheid, van 1500 voor tot 1500 na Christus succesvol voorspeld met een model dat hij bedacht. In dit model deelde hij de wereld op in vakjes van 100 bij 100 kilometer, die hij vervolgens – net als bij een spelletje als Risk – oorlog met elkaar liet voeren. Daarbij had hij een paar voorwaarden voor het winnen van een oorlog, waarbij militaire innovatie er één was. In de Oudheid betekende dat, dat het volk dat het meest van paarden afwist, vaker succesvol was. Nieuwe uitvindingen uit die tijd, zoals strijdagens en stijgbeugels, zorgden er vaak voor dat een volk goed was in oorlogvoeren.

Met die regels bleken allerlei wereldrijken te ontstaan, die ook echt in het verleden bestonden. Het Egyptisch rijk bijvoorbeeld, maar ook bepaalde dynastieën in China en, uiteindelijk, West-Europa als dominerende macht. Het model is niet perfect, maar wel bijzonder. Historici gebruiken meestal geen wiskunde om naar verklaringen van het verleden te speuren. Zij kijken vooral naar documenten uit het verleden, in de hoop daarin verklaringen te vinden. Maar die documenten zijn lang niet altijd objectief, en hoe verder je teruggaat in het verleden, hoe minder informatie er is. Turchin denkt dat 'zijn' methode de geschiedenis veel kan brengen; door een wiskundig model te laten rekenen, breng je cijfers in een vak dat doorgaans weinig met getallen opheeft. (MS)



Spiked Math is een Engelstalige webstrip van Mike Cals van de University of Calgary (Canada). Cavers begon er in 2009 en inmiddels staan er ruim 250 strips op zijn website (spikedmath.com). Spiked Math bevat wiskundige grappen en raaisels. Sommige strips refereren aan bekende stellingen of bewijzen. Soms moet je goed nadenken om een strip te snappen. Hier is er één uit: de strip over de drie logici die een bar betreden en 'wil iedereen bier?' voorgelegd krijgen. Het punt is dat de eerste logicus alleen van zichzelf weet of hij bier wil. De uitspraak 'iedereen wil bier' is alleen juist indien alle drie personen bier willen. Als de eerste logicus bier zou willen, had hij 'nee' geantwoord. Zijn antwoord impliceert dus dat hijzelf bier wil. Hetzelfde geldt voor de tweede logicus. De derde logicus kan, na het horen van de antwoorden van de eerste twee logici, concluderen dat die bier willen. Omdat de eerste logicus wil, kan hij met zekerheid 'ja' antwoorden.





vers, een postdoc
ermee in de zomer
site (www.spiked-
n woordspelingen.
eroemde wiskundi-
appen. We leggen
eden en de vraag
et elke logicus al-
reen wil bier' is al-
eerste logicus geen
'ik weet het niet'
de tweede logi-
orden van de eer-
t hijzelf ook bier

End of Proof Stickers

Save time with these preshaded humor stickers.

- Apply one sticker at the end of every completed proof.
- Easily combine four small stickers to create a large square for the end of particularly complicated proofs!
- May also be applied to your friends' faces after winning an argument or debate using *mathematics*.

Read More... [add to wish list](#)

\$1,000,000 (save 99.99%)

\$9.99 ✓ in stock

Quantity:

BUY NOW

ARTS MAJOR

MODERN ART: I CAN DO THAT!

X-2=5
Solve for X.

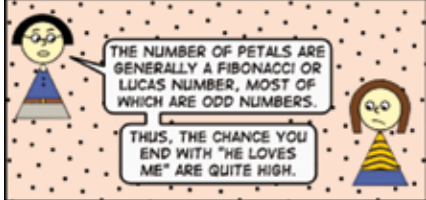
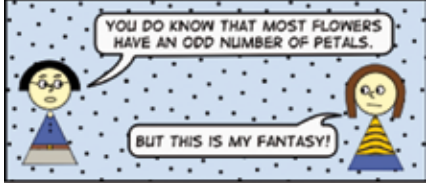
MATHEMATICS: I CAN'T DO IT!

MATH MAJOR

MODERN ART: IT CONFUSES ME!

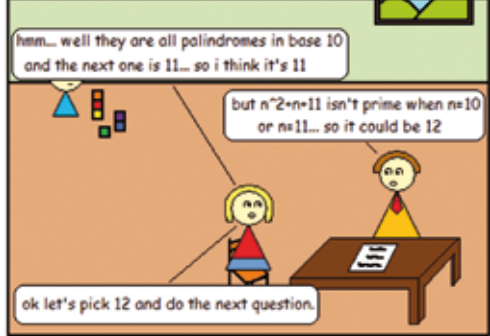
$e^{\pi i} + 1 = 0$

MATHEMATICS: MAKES SENSE!



IQ TEST

1. What number comes next in the sequence:
0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, _ ?
(a) 10 (b) 11 (c) 12 (d) 13



i,GÖDEL
COMING TO A THEATER NEAR YOU!



while... the rest of
world goes on as usual

Op 26 maart 2013 was het honderd jaar geleden dat de legendarische wiskundige Paul Erdős werd geboren. Reden voor *Pythagoras* om een serie artikelen te besteden aan Erdős' favoriete problemen. Dit artikel gaat over een probleem dat voor het eerst werd geformuleerd door Edward Nelson, in het jaar 1950. Erdős sprak tijdens zijn lezingen graag over dit probleem.

■ door Alexander Soifer



HET CHROMATISCH GETAL VAN HET VLAK

Het platte vlak, daar weten we zo langzamerhand alles wel van. Althans, zo lijkt het. In dit artikel presenteren we een probleem dat iedereen gemakkelijk kan begrijpen, maar dat ook al 63 jaar openstaat:

Wat is het kleinste aantal kleuren, voldoende om elk punt in het vlak een kleur te geven, zó dat er geen twee gelijkgekleurde punten op afstand 1 van elkaar liggen?

18 Dit kleinste aantal kleuren geven we een naam: het chromatisch getal van het vlak. We noteren het met de Griekse letter χ (chi). Met het kleuren van het vlak bedoelen we wel iets speciaals: aan elk individueel punt wordt een kleur toegekend. Dit mogen we doen op werkelijk elke manier die we maar willen: we beperken ons niet tot mooie kleuringen, zoals door middel van tegels. We noemen het vlak n -gekleurd, als we n kleuren gebruiken om elk punt in het vlak van een kleur te voorzien.

Een verzameling van twee punten noemen we een *segment*. Een *monochromatische verzameling* is een verzameling waarvan alle elementen dezelfde kleur hebben. We kunnen ons probleem nu anders formuleren:

Wat is het kleinste aantal kleuren, voldoende om het vlak zó te kleuren dat het geen monochromatisch segment van lengte 1 toelaat?

Welke 2-kleuring je ook aan het vlak geeft, het bevat altijd een monochromatisch segment van lengte 1.

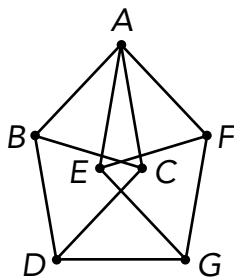
Je kunt proberen om dit zelf te bewijzen. De oplossing staat in het kadertje aan het eind van dit artikel.

Als het je gelukt is om een bewijs te vinden, heb je in feite aangetoond dat $\chi \geq 3$. In 1961 bewezen de Canadese broers Leo en William Moser nog iets beters: welke 3-kleuring je ook aan het vlak geeft, het bevat altijd een monochromatisch segment van lengte 1. Met andere woorden:

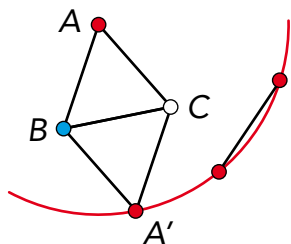
$$\chi \geq 4.$$

Om dit te bewijzen, tekenden de broers Moser in het (willekeurige) 3-gekleurde vlak het patroon dat je ziet in figuur 1. Elk lijnstukje in deze figuur heeft lengte 1. Veronderstel dat de figuur geen monochromatisch segment van lengte 1 heeft. Noem de drie kleuren van het vlak rood, wit en blauw. Het bewijs volgt nu het liedje *A, B, C, D, E, F, G, ...*

Als *A* rood is, dan moet van de punten *B* en *C* er een wit en de ander blauw zijn. Het punt *D* is dus weer rood. Net zo zijn *E* en *F* ook wit en blauw of omgekeerd. Ook het punt *G* is dus rood. Dit kan echter niet, want *DG* is een monochromatisch segment van lengte 1. Dat betekent dat de aanname



Figuur 1



Figuur 2

dat de figuur geen monochromatisch segment van lengte 1 heeft, onjuist is.

Figuur 1 geeft de oplossing, omdat van elke drie punten in de figuur er twee op afstand 1 liggen. Als in deze figuur geen monochromatisch segment van lengte 1 mag voorkomen, kunnen ten hoogste twee punten dezelfde kleur hebben.

EEN TWEEDE OPLOSSING Toen ik de oplossing van de broers Moser eens aan middelbare scholieren liet zien, was iedereen het erover eens dat het mooi en eenvoudig was. 'Maar hoe bedenkt je een dergelijke figuur?', vroeg iedereen. Als antwoord gaf ik een tweede oplossing. Iets minder elegant, maar wel natuurlijker te vinden.

Het is frappant dat beide oplossingen in hetzelfde jaar 1961 verschenen: de ene oplossing in Canada en de andere in Zwitserland. De Zwitserse oplossing is van Hugo Hadwiger. Hij redeneerde als volgt. Veronderstel dat we het vlak een 3-kleuring hebben gegeven (met de kleuren rood, wit en blauw) die geen monochromatisch segment van lengte 1 toelaat. In figuur 2 zie je een gelijkzijdige driehoek ABC met zijde 1. Deze driehoek heeft dus



Figuur 3a

hoeken in alle drie de kleuren. Als A rood is, dan is een van de punten B of C blauw en het andere is wit. Het punt A' symmetrisch met A ten opzichte van BC moet weer rood gekleurd zijn. Als we de figuur ABA'C roteren om A, dan vormen de punten A' een rode cirkel met straal AA'. Natuurlijk bevat deze cirkel een koorde van lengte 1 met beide eindpunten rood: een tegenspraak!

BOVENGRENS Bestaat er een bovengrens voor χ ? Dit is niet onmiddellijk helder. Als je eerst zelf wilt proberen een bovengrens te vinden, lees dan nog niet verder.

Zo'n bovengrens bestaat inderdaad. Er bestaat een 9-kleuring van het vlak die geen monochromatisch segment van lengte 1 heeft. Er geldt dus:

$$\chi \leq 9.$$

Om dit te bewijzen, betegelen we het vlak met vierkante tegels van 1 bij 1. We kleuren tegel 1 wit en de tegels eromheen (2 tot en met 9) geven we acht andere kleuren (zie figuur 3a). We maken een grote tegel van deze negen gekleurde tegels en betegelen er het gehele vlak mee door translatie (zie figuur 3b).

Voor elke kleur is er geen monochromatisch segment van lengte d met $\sqrt{2} < d < 2$. Probeer dit



Figuur 3b



Figuur 4a

zelf eens na te gaan. Als we figuur 3b verkleinen met een factor 1,5, dan krijgen we een kleuring die geen monochromatisch segment van lengte 1 heeft. (Merk overigens op dat door bovenstaande ongelijkheid het onbelangrijk is welke kleuren we de randen van de vierkanten geven.)

We hebben nu gezien hoe een betegeling ons heeft geholpen om aan te tonen dat $\chi \leq 9$. Kunnen we een andere betegeling bedenken die dit resultaat nog verbetert? Dat kan inderdaad! Er bestaat een 7-kleuring van het vlak die geen monochromatisch segment van lengte 1 heeft. Met andere woorden:

$$\chi \leq 7.$$

Ook dit kunnen we bewijzen. We betegelen daartoe het vlak met hexagonale tegels met zijde 1. We kleuren tegel 1 wit en de tegels eromheen (2 tot en met 7) geven we zes andere kleuren (zie figuur 4a).

We maken een grote tegel van deze zeven gekleurde tegels. Deze bloemvormige tegel heeft 18 zijden. We betegelen er het gehele vlak mee door deze tegel te verschuiven (zie figuur 4b).

Het is niet zo moeilijk om in te zien dat voor elke kleur er geen monochromatisch segment van lengte d met $2 < d < \sqrt{7}$ bestaat. Als we figuur 4b verkleinen met een factor 2,1, dan krijgen we een kleuring die geen monochromatisch segment van lengte 1 heeft. (Ook hier is het door bovenstaande ongelijkheid onbelangrijk welke kleuren de grenzen van de zeshoeken krijgen.)

Een ander bewijs, dat niet gebruik maakt van een hexagonale betegeling, werd in 1982 gevonden door de Hongaar László Székely. Hij deed dat door het vlak te betegelen met vierkanten waarvan de *diagonaal* 1 is. We beginnen met een rij van zeven verschillend gekleurde vierkanten (zie figuur 5a). Vervolgens maken we een oneindig lint door deze

Pythagoras is erg blij dat Alexander Soifer (1948) een artikel heeft willen schrijven over het chromatische-getal-probleem, een van de onderwerpen uit zijn boek *The Mathematical Coloring Book* (Springer New York, 2009). Soifer werd geboren in Rusland, maar is inmiddels al meer dan dertig jaar professor aan de University of Colorado in de Verenigde Staten. Hij heeft Erdősgetal 1. Voor de Pythagoraslezers schreef hij de volgende persoonlijke noot.

“ Beste Pythagoreeërs,

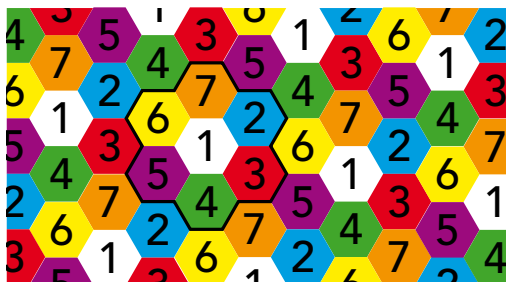
Ik ben blij dat een van de onderwerpen uit *The Mathematical Coloring Book* in jullie tijdschrift verschijnt.

Nederland heeft een speciaal plekje in mijn hart. In 1492 nam het joodse vluchtelingen uit Spanje op, die door Isabella en Ferdinand gedwongen werden zich te bekeren tot het christendom of te vertrekken. Tijdens de Nazibezetting van 1940-1945 verborg het Nederlandse volk heel wat mensen die door de invallers gezocht werden. De Duitsers slaagden erin Nederland economisch te exploiteren en de meeste Joden te deporteren. Echter, hun poging om het nationaal-socialisme te introduceren strandde. Zij waren niet in staat om de groei van een ondergrondse beweging te voorkomen.

Volken van helden bestaan niet. Maar onder de Nederlanders waren veel gewone mensen die de ziel van het land hebben gered. Hoe onvolmaakt de zuiveringen in Nederland na de Tweede Wereldoorlog ook geweest zijn, zij waren principiëler en strenger dan wat in de rest van Europa is gebeurd.

Tijdens mijn onderzoek naar het leven van de Nederlandse wiskundige Bartel van der Waerden heb ik gecorrespondeerd met Nederlanders en veel over jullie land en volk geleerd. Het resultaat is het boek *Life and Fate: In Search of Van der Waerden*, dat in 2014 zal verschijnen.

Alexander Soifer ”



Figuur 4b

zeven vierkanten steeds op dezelfde manier achter elkaar te plaatsen. Met dit lint betegelen we het gehele vlak zoals in figuur 5b: elk lint ligt tweeënhalf keer de zijde van een vierkant naar links verschoven ten opzichte van het lint erboven.

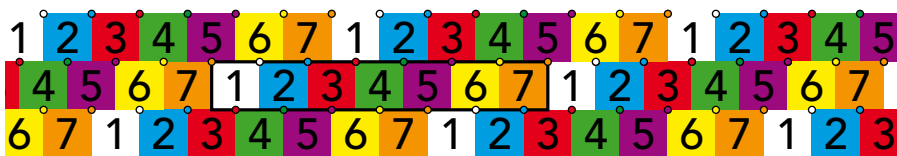
Het maakt nu uit welke kleuren de randen van de vierkanten krijgen. De grenzen aan de bovenkant en aan de rechterkant horen bij de desbetreffende tegel, op de hoekpunten linksboven en rechtsonder na. Twee verschillende vierkantjes met dezelfde kleur staan het dichtst bij elkaar als je één regel overslaat en schuin naar links naar boven gaat. De hoekpunten van deze vierkantjes staan op afstand 1 van elkaar (één diagonaal). Beide hoekpunten hebben echter een verschillende kleur, dus de afstand 1 wordt niet gerealiseerd.

EEN DERDE BEWIJS In 1995 heeft Edward Pegg twee 7-kleuringen van het vlak gevonden die geen monochromatisch segment van lengte 1 toestaan. Een is er afgebeeld in figuur 6 op de volgende pagina. Pegg gebruikt voor zes van de kleuren een zevenhoek en een heel klein vierkantje voor de zevende kleur (rood). Deze zevende kleur gebruikt slechts $\frac{1}{3}$ van de totale oppervlakte! In figuur 6 hebben de drie zwarte lijnstukken lengte 1.

Hoe zijn de tegels geconstrueerd? We tekenen drie tegels, twee kleine vierkantjes en een zevenhoek, in een assenstelsel (zie figuur 7). De vierkante tegel $OABC$ heeft als hoekpunt O de oorsprong en



Figuur 5a



Figuur 5b

als hoekpunt C het punt met coördinaten (x, x) .

De lijnstukken a en b hebben beide lengte 1 en vormen de grootste afstand binnen de tegel inclusief rand. Als we het uiteinde van lijnstuk a dat aan het kleine rode vierkantje grenst en het uiteinde van lijnstuk b dat aan het andere kleine rode vierkantje grenst beide rood kleuren, hebben we dus geen monochromatisch segment van lengte 1 meer binnen de tegel.

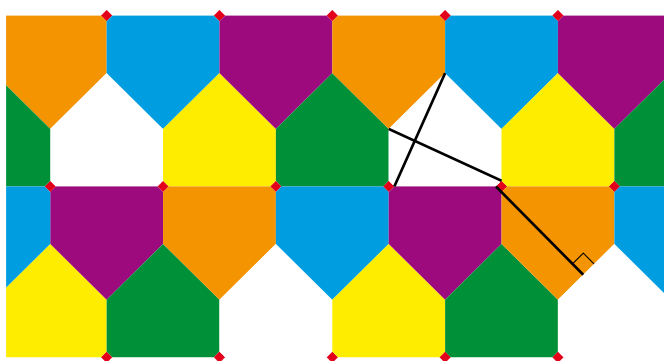
De lijnstukken c en d geven de kleinste afstand tussen twee verschillende tegels van dezelfde kleur en moeten beide strikt groter dan 1 zijn. Merk op dat de evenwijdige lijnen c en d niet evenwijdig aan een zijde van het kleine vierkante tegeltje lopen; wel bijna! Lijnstuk c is het grootste, dus a , b en c definiëren samen de vorm van de tegel. Probeer zelf te bedenken welke kleur elke rand moet krijgen.

Herhaaldelijk toepassen van de stelling van Pythagoras geeft een vergelijking waarmee we x kunnen benaderen. We vinden

$$\begin{aligned} x &\approx 0,04539936778, \\ \text{opp}(\text{vierkant}) &\approx 0,00412220519, \\ \text{opp}(\text{zevenhoek}) &\approx 0,62265127165. \end{aligned}$$

Een eenheid van betegeling bestaat uit een half vierkantje en een zevenhoekige tegel. De verhouding tussen de oppervlaktes van de twee soorten tegels is ongeveer $1 : 302$! Zouden we $\frac{1}{3}$ % van het vlak verwijderen, dan kon de rest met zes kleuren worden gekleurd zonder monochromatisch segment van lengte 1.

PAUL ERDŐS Het is verbazingwekkend dat we niet meer weten over de grenzen van χ dan alles wat in dit artikel aan de orde is geweest. We weten slechts dat χ de waarde 4, 5, 6 of 7 heeft. Een wijde spreiding! Wat denk jij dat de echte waarde is?



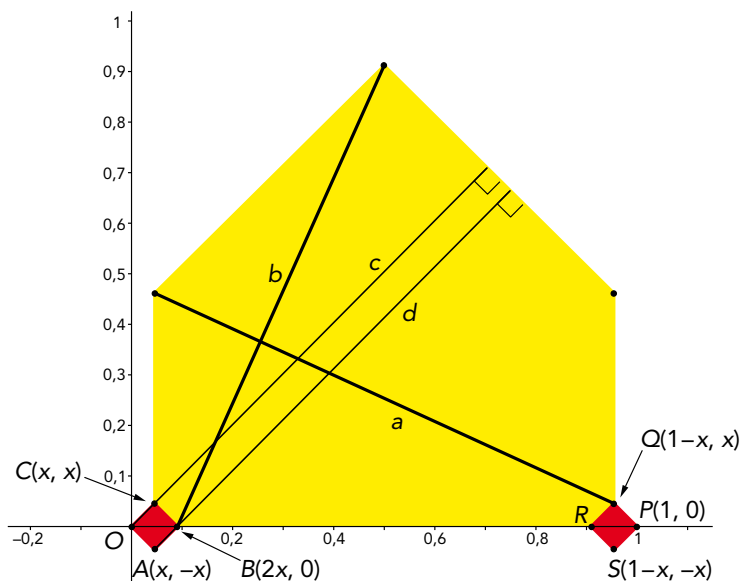
Figuur 6

De Amerikaanse wiskundige Victor Klee gaf in 1980 een lezing in Zürich over het chromatische-getal-probleem. In zijn publiek zat de Nederlandse algebraïcus Bartel van der Waerden, toen 72 jaar oud. Toen Klee de best bekende resultaten presenteerde, werd Van der Waerden zo enthousiast, dat hij niet meer naar de lezing luisterde – hij begon te werken aan het probleem. In feite probeerde hij te bewijzen dat $\chi = 7$.

Paul Erdős dacht dat $\chi \geq 5$. Hij is niet de bedenker van het chromatische-getal-probleem, al wordt zijn naam er wel vaak mee in verband gebracht. Het is typisch het soort wiskunde waarvan Erdős hield. Voor veel problemen die hij zelf bedacht, loofde hij

prijzen uit voor de eerste persoon die met een oplossing zou komen. Over het chromatische-getal-probleem zei hij in 1992: 'Ik kan geen geld bieden voor mooie problemen van andere mensen. Maar als dit probleem van mij was geweest, zou ik 250 dollar bieden voor een oplossing.'

Lang heb ik geloofd dat $\chi = 7$ en anders 6. Erdős zei wel eens, dat 'God een transfiniet Boek bezit, dat alle stellingen samen met hun beste bewijzen bevat, en als Hij het goed met mensen voorheeft, dan toont Hij hun even het Boek.' Als ik ooit deze eer verdiende en de keuze had, dan zou ik vragen naar de pagina met het chromatisch getal van het vlak. Jij niet? ■



Figuur 7

Op pagina 18 wordt gevraagd om te bewijzen dat $\chi \geq 3$. Stel dat je een of andere 2-kleuring van het vlak hebt. Teken daarop een gelijkzijdige driehoek met zijden 1. Het vlak heeft slechts twee kleuren en de driehoek heeft drie hoekpunten, dus (minstens) twee van deze drie hebben dezelfde kleur. Deze hoekpunten hebben afstand 1. Er is dus een monochromatisch segment van lengte 1.

HEXPUZZEL

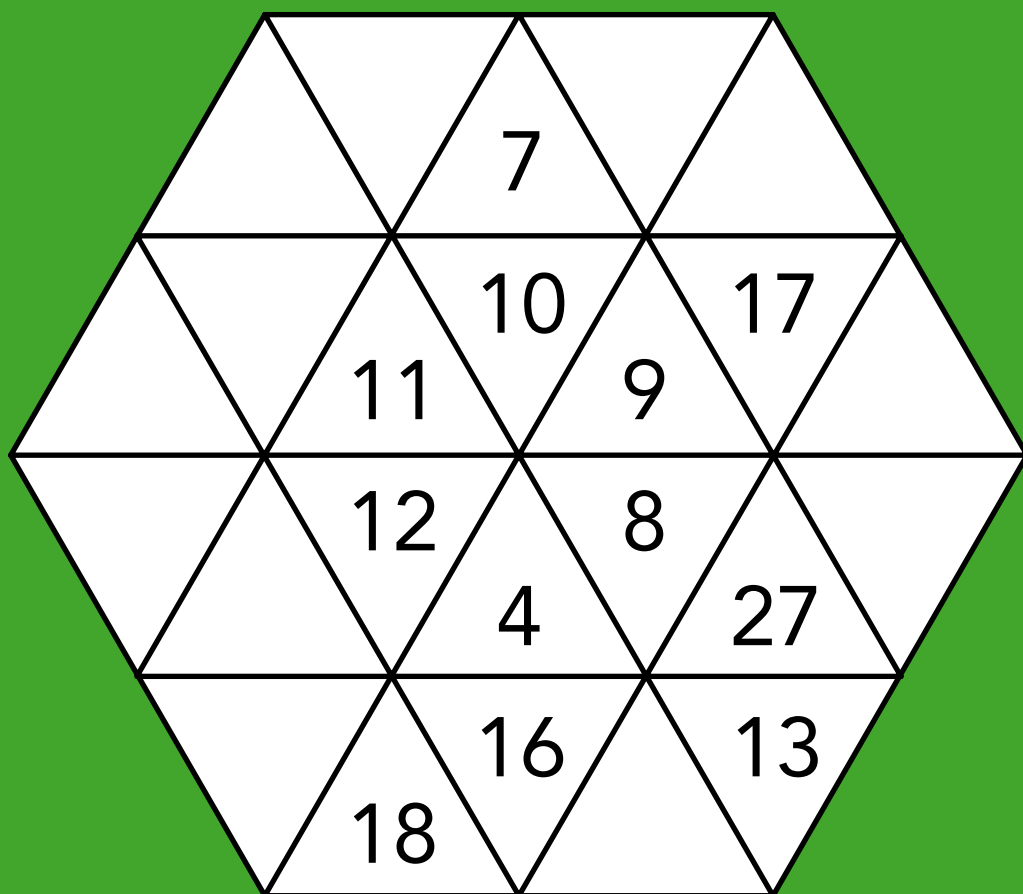
■ door Matthijs Coster

In de zeshoek moeten de getallen 4 tot en met 27 worden geplaatst, zó dat de som van alle rijen gelijk is. Deze som heet de *magische som*. Een rij bestaat uit vijf of zeven driehoekjes. In drie richtingen zijn er steeds vier rijen.

Twaalf getallen zijn al ingevuld. Bepaal, voor je

de twaalf ontbrekende getallen invult, eerst wat de magische som moet zijn. Het is niet mogelijk om de zeshoek te vullen met de getallen 1 tot en met 24. Kun je bedenken waarom niet?

De oplossing zal in de volgende *Pythagoras* verschijnen. ■



Een van de fraaiste methoden om een wiskundige stelling te bewijzen, is met behulp van plaatjes, zonder dat daar al teveel woorden aan worden vuilgemaakt. In dit artikel leiden we enkele mooie formules af door plaatjes te roteren.

■ door Paul Levrie (Faculteit Toegepaste Ingenieurswetenschappen, Universiteit Antwerpen)

BEWIJS DOOR ROTATIE?

Carl Friedrich Gauss (1777-1855), een van de geniaalste wiskundigen ooit, was slechts zeven jaar oud toen hij zijn leraar verbaasde door één-twee-drie de som uit te rekenen van de getallen 1, 2, 3, ..., 100. De manier waarop hij dit deed hoort thuis in 'Het Boek' waarnaar Paul Erdős regelmatig verwees en waarin volgens hem God – waarin hij overigens niet geloofde – het elegantste bewijs van elke stelling bijhield. De stelling waarover het in dit geval gaat is de volgende:

de som van de eerste n natuurlijke getallen is gelijk aan $\frac{1}{2}n(n+1)$.

24

Of, in een formule uitgedrukt:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n+1).$$

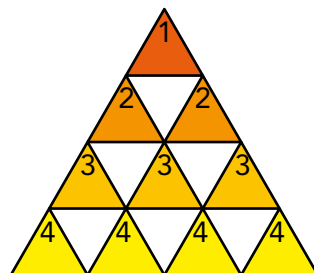
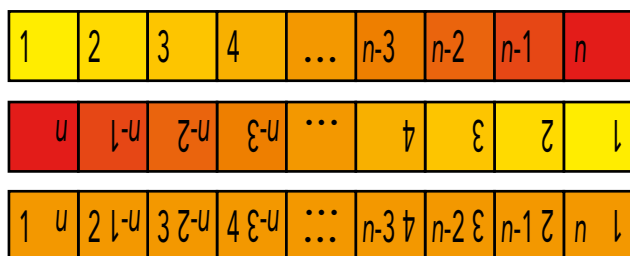
We kunnen de manier waarop de jonge Gauss deze som berekende als volgt beschrijven. We hebben zo ook meteen een bewijs van bovenstaande formule.

In figuur 1 staan de getallen waarvan we de som willen weten in een rijtje naast elkaar (bovenste plaatje). Draai deze strook over een hoek van 180° (middelste plaatje) en leg de twee stroken over elkaar heen (onderste plaatje). De som van alle getallen in deze strook is natuurlijk precies gelijk aan tweemaal de gezochte som $1 + 2 + 3 + \dots + n$. In elk vierkantje staan twee getallen. En omdat de som van deze twee getallen in elk vierkantje gelijk is aan $n+1$ en omdat er n vierkantjes zijn, volgt dadelijk:

$$2(1 + 2 + 3 + \dots + n) = n(n+1),$$

wat overeenkomt met wat onze stelling zegt.

SOM VAN KWADRATEN Het leuke aan deze methode is dat we haar kunnen aanpassen zodat ze ook werkt voor de som van de *kwadraten* van de eerste n natuurlijke getallen, dus voor $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$. Omdat deze som gelijk is aan $1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + \dots + n \cdot n$, kunnen we haar eenvou-



Figuur 1 Leg de bovenste twee stroken op elkaar. Dat geeft de onderste strook.

Figuur 2 Leg de eerste drie driehoeken op elkaar. Dat geeft de vierde driehoek.

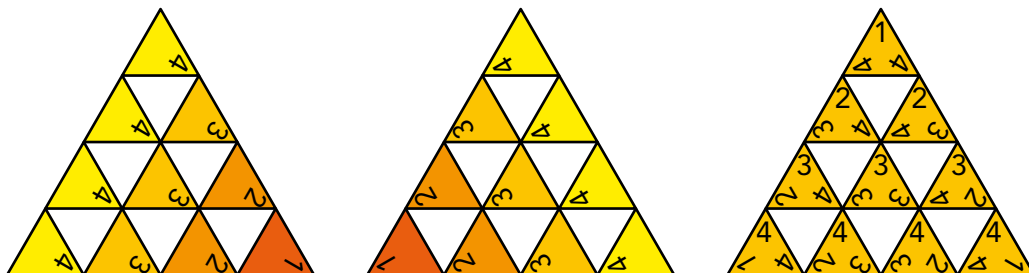
dig grafisch voorstellen in een driehoek. Voor $n = 4$ zie je deze driehoek in figuur 2 (links).

De som van alle getallen in de driehoek is precies gelijk aan $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$. En het is duidelijk hoe de driehoek er zal uitzien voor willekeurige n : onderaan staat dan n keer het getal n . Draai deze driehoek eerst linksom over een hoek van 120° (tweede plaatje) en doe met het resultaat ditzelfde nog eens (derde plaatje). Leg ten slotte de drie driehoeken over elkaar heen, dat geeft het plaatje rechts.

In elk klein driehoekje staan nu drie getallen. Zoals je kunt zien, is de som van die drie getallen voor elke driehoek gelijk. Voor $n = 4$ is deze som blijkbaar 9, maar als we verder redeneren met een willekeurige n , dan zal het bovenste driehoekje de getallen 1, n en n bevatten.

De som is dan $2n + 1$, en dat zal ook zo zijn voor de som van de drie getallen in de andere driehoekjes. Aan de ene kant hebben we dus drie driehoeken op elkaar gelegd, en in elk van deze driehoeken is de som van de getallen precies gelijk aan $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$. En aan de andere kant hebben we een driehoek die opgebouwd is uit $1 + 2 + 3 + \dots + n$ kleinere driehoekjes, en de som van de drie getallen in zo'n klein driehoekje is gelijk aan $2n + 1$. We kunnen dus besluiten:

$$3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) = (1 + 2 + 3 + \dots + n)(2n + 1).$$



1	2	3	4	...	n
2	4	6	8	...	$2n$
3	6	9	12	...	$3n$
...	...	...	...	...	...
n	$2n$	$3n$	$4n$	...	n^2

Figuur 3 Draai dit vierkant drie keer een kwartslag en leg de vier vierkanten op elkaar. Leid daaruit de formule voor de som van de eerste n derdemachten af.

Het rechterlid is volgens de stelling van Gauss gelijk aan $\frac{1}{2}n(n+1)(2n+1)$.

Met andere woorden:

de som van de kwadraten van de eerste n natuurlijke getallen is $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

Of, in formulevorm:

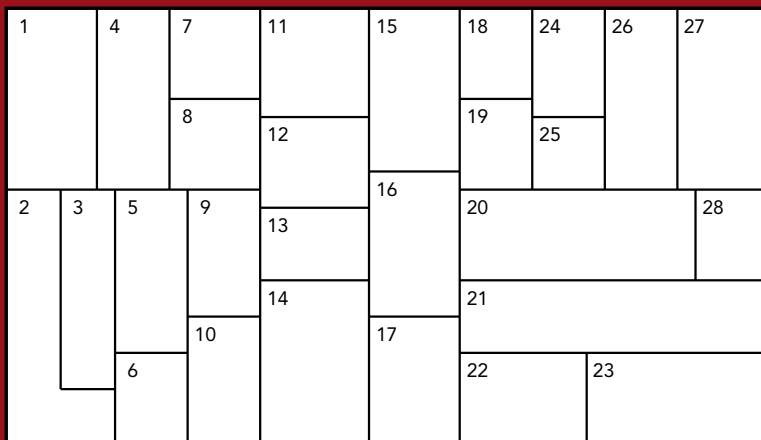
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

SOM VAN DERDEMACHTEN Kunnen we een dergelijke formule ook vinden voor de som van de eerste n derdemachten? Met behulp van het vierkant in figuur 3 lukt dat inderdaad. Probeer zelf na te gaan dat de som van de getallen in dit vierkant precies gelijk is aan $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$. Ga vervolgens te werk zoals hierboven. Uit wat je vindt, kun je de formule afleiden die de som van de eerste n derdemachten geeft. ■

Volgende maand kun je voor de vierde keer meedoen met de *Mathekalender*, een wedstrijd die via het internet wordt gespeeld in de vorm van een digitale adventskalender. Van 1 tot en met 24 december wordt dagelijks een vakje 'geopend' waarachter een wiskundeopgave verschijnt. In dit artikel laten we zo'n opgave zien uit de *Mathekalender* van vorig jaar. Deze opgave werd bedacht door Hajo Broersma (Universiteit Twente) en Cor Hurkens (TU Eindhoven).

■ door Hennie ter Morsche

MONDRIAANS KERSTKAART



De Nederlandse kunstschilder Piet Mondriaan heeft een kerstkaart ontworpen die in 28 gebieden is onderverdeeld. Hij wil elk van deze gebieden met één van de zes beschikbare kleuren rood, geel, blauw, wit, zwart en violet opvullen, zodanig dat gebieden die aan elkaar grenzen verschillende kleuren krijgen. Een kleuring met r rode, g gele, b blauwe, w witte, z zwarte en v violette gebieden heeft een zogenoemde *Mondriaanwaarde*

$$(r-9)^2 + 2(g-9)^2 + 3(b-8)^2 + 2w + 3z + 4v.$$

Mondriaan heeft een voorkeur voor ingekleurde kerstkaarten met een zo laag mogelijke Mondriaanwaarde. Wat is de laagst mogelijke Mondriaanwaarde van de getoonde kerstkaart?

ZES TRILJARD Het totale aantal mogelijkheden om de kerstkaart te kleuren zonder de restrictie dat aangrenzende gebieden verschillend gekleurd moe-

ten zijn, is $6^{28} \approx 6 \times 10^{21}$, oftewel ongeveer zes triljard. Met de genoemde restrictie neemt het aantal mogelijkheden uiteraard af, maar het aantal blijft gigantisch. Het nagaan van alle mogelijkheden is dus gedoemd te mislukken, ook met behulp van een computer. Maar met een slimme redenering lukt het je misschien om de oplossing te vinden! In de volgende *Pythagoras* geven we het antwoord.

DOE MEE! De drie Nederlandse technische universiteiten (Delft, Eindhoven en Twente, verenigd in 3TU.AMI) organiseren samen met het Duitse wiskunde-instituut Matheon al enige jaren een wiskundewedstrijd voor scholieren in de vorm van een digitale adventskalender: de *Mathekalender*. Ook dit jaar, van 1 tot en met 24 december, zal er weer een *Mathekalender* zijn, met dagelijks een wiskundeprobleem met tien mogelijke antwoorden. Los je puzzels zoals 'Mondriaans kerstkaart' graag op? Doe dan mee via <http://ami.3tu.nl/Mathekalender>. ■

Jaarlijks in januari vindt de eerste ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade plaats. Van de 5612 deelnemers aan de eerste ronde van januari 2012 zijn er zes die zich gedurende anderhalf jaar door de vervolgrondes en selectietoetsen heen geslagen hebben en zich uiteindelijk geplaatst hebben voor de Internationale Wiskunde Olympiade (IMO) 2013. In juli reisden ze af naar Santa Marta, een stadje aan de Caribische kust van Colombia. De IMO-opgaven zijn echte krakers. In dit artikel bekijken we opgave 2.

■ door Birgit van Dalen

KLEUREN SCHEIDEN IN COLOMBIA

IMO-opgave 2 gaat over configuraties van 2013 rode en 2014 blauwe punten in het vlak. De bedoeling is om deze punten met zo min mogelijk rechte lijnen van elkaar te scheiden: rode en blauwe punten mogen niet samen in één gebied terechtkomen dat ontstaat door het trekken van de scheidslijnen. Er mogen wel meerdere rode punten in één gebied zitten of juist meerdere blauwe.

Als alle 4027 punten op een rijtje zouden liggen, afwisselend rood en blauw, zouden we 4026 lijnen nodig hebben. Maar dit soort configuraties sluiten we uit: de punten moeten zó in het vlak liggen, dat als je een lijn trekt door twee van de punten, daar nooit een derde punt op ligt. Met deze voorwaarde erbij is nu de vraag wat het kleinste aantal scheidslijnen is waarmee je de rode en blauwe punten kunt scheiden, hoe de 4027 punten in het vlak ook liggen.

EENVOUDIGE GEVALLEN Omdat 4027 punten nogal veel is en het lastig is om daarbij een vermoeden van een goed antwoord te krijgen, kijken we eerst eens wat er gebeurt als we slechts drie punten zouden hebben: een rood punt en twee blauwe. Het is duidelijk dat we minstens één scheidslijn nodig hebben. Kunnen we met één scheidslijn de twee blauwe punten scheiden van het rode? Ja, dat lukt wel. Zelfs als het rode punt heel dicht bij de denkbeeldige lijn door de twee blauwe punten

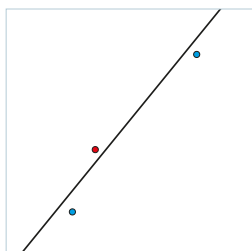
ligt, kunnen we er nog net wel een lijn precies tussendoor tekenen, zie figuur 1. (Bedenk dat wiskundig gezien punten geen dikte hebben en lijnen ook niet, waardoor het niet zo kan zijn dat de punten zo dicht bij elkaar liggen dat er geen ruimte meer is voor een scheidslijn. Zo lang de drie punten niet samen op een lijn liggen, is er altijd nog ruimte.)

Voor drie punten zijn we dus klaar: er is één scheidslijn nodig en dat is ook altijd genoeg. Op naar het volgende geval: twee rode punten en drie blauwe.

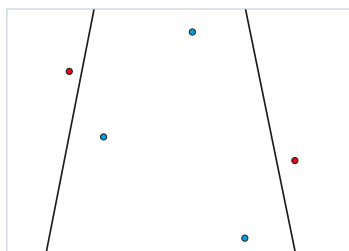
Vraag 1. Bedenk een configuratie van die vijf punten waarvoor één scheidslijn niet genoeg is. Probeer te beargumenteren waarom het echt niet kan met één scheidslijn.

We gaan proberen of het met twee scheidslijnen altijd lukt. In de configuratie van figuur 2 kunnen we de blauwe punten scheiden van de rode met twee lijnen. Maar dit gaat niet altijd goed: in figuur 3 kunnen we niet op die manier de blauwe punten isoleren.

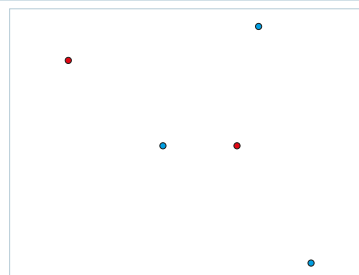
Vraag 2. Puzzel voordat je verder leest zelf even hieraan: lukt het je in figuur 3 om met twee lijnen de blauwe en rode punten in aparte gebieden te zetten?



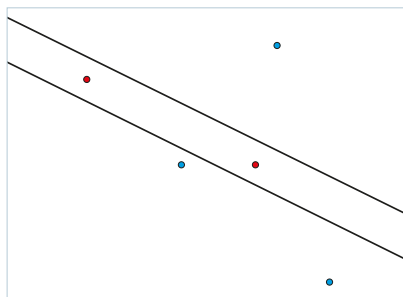
Figuur 1



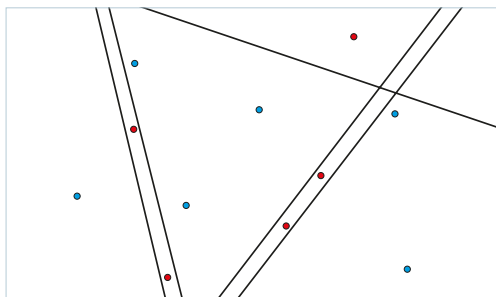
Figuur 2



Figuur 3



Figuur 4



Figuur 5

Misschien heb je het zelf wel ontdekt: we kunnen de twee rode punten isoleren, zie figuur 4. Dit lukt bij elke configuratie van twee rode en drie blauwe punten, want we kunnen altijd de twee rode punten insluiten met twee scheidslijnen die heel dicht aan weerszijden van de rode punten liggen; zo dichtbij dat er geen blauwe punten in het gebied terecht komen.

En zelfs met meer dan vijf punten kan dit principe gaan werken: we kunnen altijd twee punten isoleren met behulp van twee lijnen. Zo kunnen we meteen ook alle configuraties met vier rode en vijf blauwe punten afhandelen met vier scheidslijnen: we isoleren twee keer twee rode punten met twee keer twee scheidslijnen. En 2012 rode en 2013 blauwe punten gaat op dezelfde manier met 2012 scheidslijnen.

het met 2013 rode en 2014 blauwe punten net niet mooi uit, want we kunnen geen oneven aantal punten insluiten met een oneven aantal scheidslijnen. Het aantal lijnen wordt steeds even. Toch konden we één rood punt en twee blauwe wel met één lijn scheiden; dat is ook oneven. Dat brengt ons op een nieuw idee: we kunnen ook eerst één rood punt aan de buitenkant *afsnijden*, zodat we een even aantal rode punten overhouden en die weer twee aan twee kunnen isoleren. Zie figuur 5 voor een voorbeeld met vijf rode en zes blauwe punten.

Maar kunnen we wel altijd een rood punt aan de buitenkant afsnijden? In het voorbeeld van figuur 5 konden we zowel het rode punt bovenaan als het rode punt linksonder kiezen om af te snijden, maar de andere rode punten hadden we niet kunnen kiezen, omdat die omringd zijn door blauwe punten. Wat als alle rode punten omringd zijn door blauwe? Dan heb je een situatie zoals in figuur 6: als je

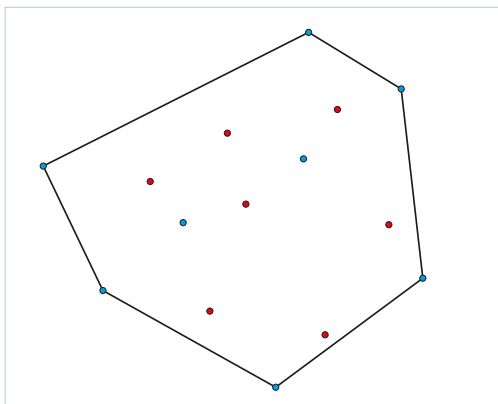
PUNTEN AFSNIJDEN Jammer genoeg komt

VIJF MEDAILLES VOOR NEDERLAND BIJ IMO 2013 Het Nederlandse team heeft het er op de Internationale Wiskunde Olympiade in Colombia geweldig goed van afgebracht. Jeroen Winkel (16 jaar, 5 vwo, Stedelijk Gymnasium Nijmegen) wist tot de beste 10% van de wereld door te dringen. Hij en Jeroen Huijben (17 jaar, 6 vwo, Theresia Lyceum Tilburg) ontvingen een zilveren medaille. Bronzen medailles gingen naar Peter Gerlagh (16 jaar, 5 vwo, Theresia Lyceum Tilburg), Michelle Sweering (16 jaar, 5 vwo, Erasmiaans Gymnasium Rotterdam) en Ragnar Groot Koerkamp (18 jaar, 6 vwo, Cambium College Zaltbommel). Tot slot kreeg Djurre Tijsma (18 jaar, 6 vwo, Christelijk Gymnasium Beyers Naudé Leeuwarden) een eervolle vermelding.

Het Belgische team verdiende een zilveren en twee bronzen medailles en twee eervolle vermeldingen.

In totaal deden er 527 deelnemers uit 97 landen mee. Daarvan ontvingen 45 deelnemers een gouden medaille, 92 een zilveren medaille en 141 een bronzen medaille. Het officiële landenklassement werd aangevoerd door China, Zuid-Korea en de Verenigde Staten. Nederland eindigde op de 25ste plaats – een prestatie van formaat, voor een klein land uit West-Europa – en België op de 44ste plaats.

Wil jij ook kans maken op een plek in het Nederlandse team voor de Internationale Wiskunde Olympiade? In januari is de eerste ronde op alle middelbare scholen (informeer bij je wiskundeleraar) en uit de deelnemers daaraan wordt het team voor IMO 2015 in Thailand geselecteerd.



Figuur 6

lijnstukken tekent die de ‘buitenste’ blauwe punten verbinden, krijg je een veelhoek zonder deuken, waarbinnen alle rode punten (en de overige blauwe punten) zitten. Zo’n veelhoek heet in de wiskunde het *convexe omhulsel* van de punten. Convex omdat er geen deuken in de veelhoek mogen zitten en omhulsel omdat het alle punten omvat.

In deze situatie kunnen we dus geen rood punt aan de buitenkant afsnijden. Er zitten wel volop blauwe punten aan de buitenkant, dus daar kunnen we gebruik van maken: we kunnen nu met één lijn twee blauwe punten tegelijk afsnijden. Dat lost het probleem van het oneven aantal rode punten niet op, maar we kunnen nu gewoon verder met de blauwe punten twee aan twee isoleren. In dit voorbeeld kunnen we deze zeven rode en acht blauwe punten scheiden met zeven lijnen, zie figuur 7.

Vraag 3. In figuur 7 hadden we nog een scheidingslijn kunnen besparen door de twee blauwe punten links met één in plaats van twee lijnen af te snijden. We hebben dan twee keer twee blauwe punten van de buitenkant afgesneden met twee keer één lijn. Kan dit altijd bij een configuratie van punten waarbij een blauwe veelhoek alle rode punten insluit, of bestaan er configuraties waarbij dit niet lukt?

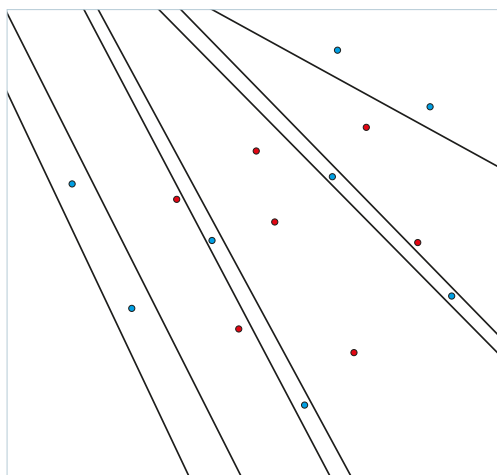
We hebben nu een methode gevonden om 2013 rode en 2014 blauwe punten te scheiden met 2013 lijnen:

- als er een rood punt aan de buitenkant zit, snijden we dat punt af met één lijn en isoleren we de overige 2012 rode punten daarna twee aan twee met in totaal 2012 lijnen;
- als er geen rood punt aan de buitenkant zit, snijden we twee blauwe punten aan de buitenkant af met één lijn en isoleren we de overige 2012 blauw-



we punten daarna twee aan twee met in totaal 2012 lijnen.

Nu blijft alleen de vraag over: kan het ook met minder dan 2013 scheidingslijnen? Voor twee rode en drie blauwe punten had je wellicht zelf al een configuratie gevonden die niet met één lijn kon. En zoiets kunnen we ook voor 2013 rode en 2014 blauwe punten maken. Het is hierbij handig om zoveel mogelijk rode en blauwe punten afwisselend neer te leggen, zodat er zoveel mogelijk scheidingslijnen nodig zijn. Alle punten op een lijn mag niet, maar op een cirkel mag bijvoorbeeld wel. We bekijken dus de configuratie met 2013 rode en 2013 blauwe punten op een cirkel, met steeds rood en blauw afgewisseld. Het laatste blauwe punt leggen we op een willekeurige plek ergens anders neer (wel zodanig dat er geen drie punten op één lijn terechtkomen, maar dat kan natuurlijk gemakkelijk). Nu moeten we steeds een scheidingslijn hebben tussen twee punten die naast elkaar op de cirkel liggen; dat zijn 4026 plekken. Elke scheidingslijn kan maar op twee plekken de cirkel snijden, dus maar twee keer twee naast elkaar gelegen punten van elkaar scheiden. We hebben dus in deze configuratie minstens 2013 scheidingslijnen nodig. Hiermee is het bewijs rond: 2013 scheidingslijnen is het minimale aantal. ■



Figuur 7

PYTHAGORAS OLYMPIADE

■ door Matthijs Coster, Eddie Nijholt en Harry Smit

Doe mee met de Pythagoras Olympiade! Elke aflevering bevat vier opgaven. De eerste twee zijn wat eenvoudiger; onder de goede inzendingen van leerlingen uit de klassen 1, 2 en 3 wordt een cadeaubon van Bol.com ter waarde van 20 euro verloot. De laatste twee zijn echte breinbrekers; onder de goede inzendingen van leerlingen (tot en met klas 6) wordt een bon van 20 euro verloot. Per aflevering wordt maximaal één bon per persoon vergeven.

Daarnaast krijgen leerlingen (tot en met klas 6) punten voor een *laddercompetitie*, waarmee eveneens een cadeaubon van Bol.com van 20 euro te verdienen valt. De opgaven van de onderbouw zijn 1 punt waard, de opgaven van de bovenbouw 2 punten. De leerling met de hoogste score in de laddercompetitie krijgt een bon. Zijn puntentotaal wordt weer op 0 gezet. Wie zes achtereenvolgende keren niets inzendt, verliest zijn punten in de laddercompetitie.

Met de bovenbouw-opgaven kun je ook een plaats in de finale van de Nederlandse Wiskunde Olympiade verdienen, mocht



het via de voorronden niet lukken: aan het eind van elke jaargang worden enkele goed scorende leerlingen uitgenodigd voor de NWO-finale. Niet-leerlingen kunnen met de Pythagoras Olympiade meedoen voor de eer-

HOE IN TE ZENDEN? Inzendingen ontvangen we bij voorkeur per e-mail (getypt of een scan van een handgeschreven oplossing):

pytholym@gmail.com

Je ontvangt een automatisch antwoord zodra we je bericht hebben ontvangen.

Eventueel kun je je oplossing sturen naar
Pythagoras Olympiade, PWN
p.a. Centrum Wiskunde & Informatica
Postbus 94079
1090 GB Amsterdam

Voorzie het antwoord van een duidelijke toelichting (dat wil zeggen: een berekening of een bewijs). Vermeld je naam en adres; leerlingen moeten ook hun klas en de naam van hun school vermelden.

Je inzending moet bij ons binnen zijn vóór 31 december 2013.

DE GOEDE INZENDERS VAN JUNI 2013

262: Tara van Belkom (klas 4), Gymnasium Felisenum, Velsen-Zuid; Jildert Denneeman (klas 3), Erasmiaans Gymnasium, Rotterdam; Maud Jonker (klas 3), Goois Lyceum, Bussum; Bram Jonkheer, (klas 4), Emelwerda College, Emmeloord; Arie van der Kraan, Nuth; Jan Otto Kranenburg, Zwolle; Michelle Sweering (klas 6), Erasmiaans Gymnasium Rotterdam; Tim Vermeulen (klas 5), Isendoorn College, Warnsveld; Art Waeterschoot (klas 5), H. Pius X-instituut, Antwerpen; David Welling (klas 4), Stedelijk Gymnasium, Nijmegen.

263: Tara van Belkom (klas 4), Gymnasium Felisenum, Velsen-Zuid; Maud Jonker (klas 3), Goois Lyceum, Bussum; Bram Jonkheer, (klas 4), Emelwerda College, Emmeloord; Arie van der Kraan, Nuth; Jan Otto Kranenburg, Zwolle; Michelle Sweering (klas 6), Erasmiaans Gymnasium Rotterdam; Tim Vermeulen (klas 5), Isendoorn College, Warnsveld; Art Waeterschoot (klas 5), H. Pius X-instituut, Antwerpen; David Welling (klas 4), Stedelijk Gymnasium, Nijmegen.

264: Kees Boersma, Vlissingen; Bram Jonkheer, (klas 4), Emelwerda College, Emmeloord; Arie van der Kraan, Nuth; Michelle Sweering (klas 6), Erasmiaans Gymnasium R'dam; Tim Vermeulen (klas 5), Isendoorn College, Warnsveld; Art Waeterschoot (klas 5), H. Pius X-instituut, Antwerpen.

265: Kees Boersma, Vlissingen; Bram Jonkheer, (klas 4), Emelwerda College, Emmeloord; Jori Koolstra (klas 6), Willem Lodewijk Gymnasium, Groningen; Arie van der Kraan, Nuth; Michelle Sweering (klas 6), Erasmiaans Gymnasium Rotterdam; Tim Vermeulen (klas 5), Isendoorn College, Warnsveld; Art Waeterschoot (klas 5), H. Pius X-instituut, Antwerpen.

Cadeaubonnen: Maud Jonker en Tim Vermeulen.

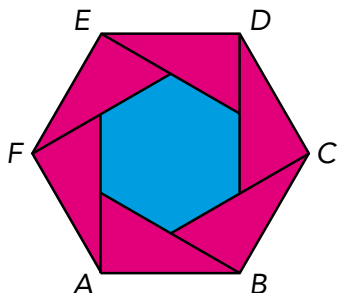
Stand laddercompetitie: Art Waeterschoot (22 p; cadeaubon), Bram Jonkheer (18 p), Tim Vermeulen (14 p), Jelmer Hinssen (13 p), Jori Koolstra (12 p), Michelle Sweering (12 p), Tara van Belkom (8 p), Lennart Muijres (7 p), Nathan van 't Hof (6 p), Frenk Out (5 p), Eline Vounckx (5 p), Ronen Brilleslijper (4 p), Marijke Bot (3 p), Elie Cambie (3 p), Jonas Cambie (3 p), Ritchie Keijsper (3 p), Jia-Jia ter Kuile (3 p), Marleen Meliefste (3 p), Pim Spelier (3 p), Matthijs Buringa (2 p), Jildert Denneeman (2 p), Maud Jonker (2 p), Alex Keizer (2 p), Timen Schenk (2 p), Tom Smeding (2 p), Jelle den Uil (2 p), David Welling (2 p), Luka Zwaan (2 p), Lisa Clappers (1 p), Thijs van Etten (1 p), Bram Honig (1 p), Bastiaan van der Kooij (1 p), Rein Lukkes (1p), Alexander Vermeersch (1 p).

OPGAVE 270

Susan heeft drie gelijke dropveters, die ze eerlijk moet verdelen over vijf personen. Wat is het kleinste aantal keer dat ze een dropveter of een stuk dropveter in twee stukken moet delen, om dit voor elkaar te krijgen?

OPGAVE 271

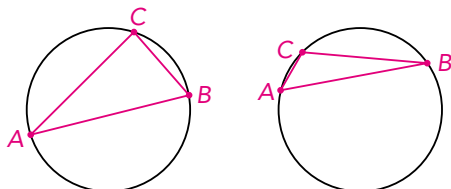
De regelmatige zeshoek $ABCDEF$ hieronder heeft oppervlakte 1. In de zeshoek zijn zes rechthoekige driehoeken geplaatst. Wat is de oppervlakte van de kleine blauwe zeshoek?



OPGAVE 272

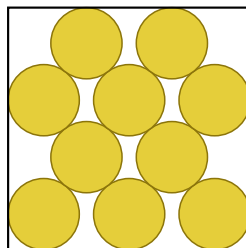
Op een cirkel worden drie punten A , B en C gekozen. Hieronder zie je twee voorbeelden; in het eerste geval zijn A , B en C hoekpunten van een scherphoekige driehoek, in het tweede geval van een stomphoekige driehoek.

Als A , B en C willekeurig gekozen zijn, wat is dan de kans dat driehoek ABC stomphoekig is?



OPGAVE 273

Tien kerstballen zitten in een vierkante doos, zoals in de figuur aangegeven. De straal van elke kerstbal 5. Hoe lang is één zijde van de doos?



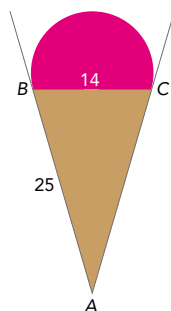
OPLOSSING 262

Karel heeft drie getallen a , b en c opgeschreven. Hij berekent $a + b$, $a + c$, $b + c$, $a - b$, $a - c$ en $b - c$. De uitkomsten (gerangschikt van klein naar groot) zijn 981, 1008, 1989, 3045, 4053 en 5034. Bepaal a , b en c .

Oplossing. Omdat alle uitkomsten positief zijn, is $a > b > c$. De som van de zes uitkomsten is 16110. Er geldt dus: $(a + b) + (a + c) + (b + c) + (a - b) + (a - c) + (b - c) = 4a + 2b = 16110$, waaruit volgt dat $2a + b = 8055$. Het grootste getal is $a + b$, dus $a + b = 5034$. We kunnen nu a oplossen: $a = 8055 - 5034 = 3021$. Dan volgt $b = 5034 - 3021 = 2013$. Ten slotte vinden we ook $c = 1032$.

OPLOSSING 263

Tony koopt een Italiaans ijsje met één bolletje. Het bolletje past precies in het kegelvormige hoorntje: het raakt de lijn door A en B in het punt B , en de lijn door A en C in het punt C . De afmetingen van het hoorntje zijn aangegeven in de figuur. Wat is de straal van het ijsbolletje?



Oplossing. Zie onderstaande figuur. Met Pythagoras in driehoek ANB vinden we:

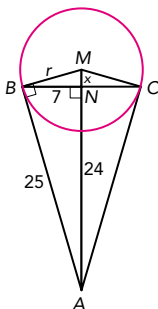
$$AN = \sqrt{25^2 - 7^2} = 24.$$

In driehoek MNB geldt: $x^2 + 7^2 = r^2$.

In driehoek ABM geldt: $25^2 + r^2 = (24 + x)^2$.

Uit de laatste twee vergelijkingen volgt dat $25^2 + x^2 + 7^2 = (24 + x)^2$. Haakjes wegwerken levert $674 + x^2 = 576 + 48x + x^2$, ofwel $48x = 98$. Dus $x = \frac{49}{24}$. Voor de straal r van het bolletje geldt dan: $r^2 = (\frac{49}{24})^2 + 7^2 = \frac{30625}{576}$, dus $r = 7\frac{7}{24}$.

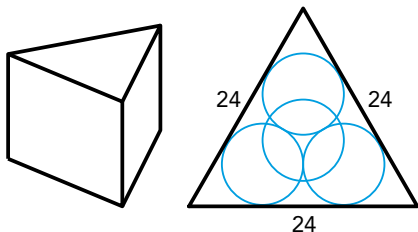
Je kunt de oplossing ook vinden door gebruik te maken van de gelijkvormigheid van de driehoeken ANB en BNM : $AN/AB = BN/BM$, ofwel $24/25 = 7/r$, waaruit volgt dat $r = 7\frac{7}{24}$.



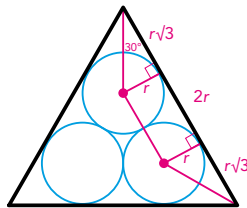
OPLOSSING 264

32

Hieronder zie je de verpakking van een set van vier Jeu-de-Boules-ballen. De bodem is een gelijkzijdige driehoek met zijden van 24 cm. Drie ballen liggen op de bodem, waarbij ze de wanden en elkaar raken (zie voor een bovenaanzicht de rechterfiguur). De vierde bal is hier bovenop geplaatst, en deze bal raakt de bovenzijde van de verpakking. Wat is de hoogte van de verpakking?



Oplossing. Noem de straal van één bal r . Een zijde van de gelijkzijdige driehoek is dan gelijk aan $(2 + 2\sqrt{3})r$ (zie het plaatje bovenaan volgende kolom). Stellen we deze waarde gelijk aan 24, dan



vinden we

$$r = \frac{24}{2 + 2\sqrt{3}} = 6\sqrt{3} - 6.$$

De middelpunten van de vier ballen vormen een regelmatig viervlak met zijden $2r$. Noem de hoekpunten (dus de middens van de ballen) A, B, C en D . De hoogte van het viervlak is de zijde MD , waarbij M het zwaartepunt van het grondvlak is. We weten dat AM precies tweederde van de zwaartelijn is, welke in dit geval gelijk is aan $r\sqrt{3}$.

We vinden $AM = \frac{2}{3}r\sqrt{3}$ en dus met de stelling van Pythagoras $MD = \frac{2}{3}r\sqrt{6}$. Aangezien de ballen nog een straal boven en een straal onder uitsteken, krijgen we als hoogte $(2 + \frac{2}{3}\sqrt{6})r = (2 + \frac{2}{3}\sqrt{6})(6\sqrt{3} - 6) = 12\sqrt{3} + 12\sqrt{2} - 12 - 4\sqrt{6}$ cm en dat is ongeveer 16,0 cm.

OPLOSSING 265

Barbara ziet een vermenigvuldigingsteken over het hoofd tussen twee getallen van drie cijfers. Ze schrijft nu een getal op van zes cijfers. Dit zescijferige getal blijkt precies 7 keer zo groot te zijn als het product van de twee driecijferige getallen. Kun je dit getal van zes cijfers reconstrueren?

Oplossing. Noem de twee getallen a en b , dan geldt: $7ab = 1000a + b$. Ten eerste zien we meteen dat b deelbaar moet zijn door a , en dus kunnen we schrijven $b = ak$. We krijgen $7a^2k = (1000 + k)a$ en dus $7ak = 1000 + k$. Hieruit zien we dat k 1000 moet delen. Verder moet $1000 + k$ deelbaar zijn door 7, dus $k + 6$ moet deelbaar zijn door 7, en dus $k \equiv 1$ modulo 7. Nu heeft het getal 1000 precies 16 delers, waarvan alleen 1, 8 en 50 gelijk zijn aan 1 modulo 7. Dit geeft:

- $k = 1, b = a$ en dus $a = b = 143$. We zien dat inderdaad $7 \cdot 143 \cdot 143 = 143143$.
- $k = 8, b = 8a$ en dus $a = 18, b = 144$ en inderdaad $7 \cdot 18 \cdot 144 = 18144$.
- $k = 50, b = 50a$ en dus $a = 3, b = 150$ en inderdaad $7 \cdot 3 \cdot 150 = 3150$.

De laatste twee oplossingen vallen niet onder getallen met drie cijfers, dus zijn a en b inderdaad (uniek) te achterhalen: beide zijn 143.

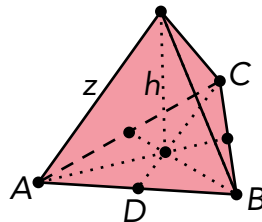
OPLOSSING THEETRAËDER

We geven de oplossing van de theezakjespuzzel op pagina 29 van het septembernummer.

Voor de inhoud I van de regelmatige tetraëder geldt de formule:

$$I = \frac{1}{3} \times \text{opp}(ABC) \times h = \frac{1}{3} \times \frac{z^2 \sqrt{3}}{4} \times \frac{z \sqrt{6}}{3} = \frac{z^3 \sqrt{2}}{12}.$$

De tekening geeft een hint over de locatie van het onderste punt van de hoogte h . Als de inhoud 20 cm^3 moet zijn, dan geldt dat



$$z = \sqrt[3]{\frac{240}{\sqrt{2}}} \approx 5,536 \text{ cm}.$$

De omtrek van de koker is gelijk aan $2z = 2\pi r$, waarbij r de straal van de koker is. Dat geeft $r = z/\pi \approx 1,76 \text{ cm}$. De lengte van de koker wordt dan $z\sqrt{3}/2 \approx 4,79 \text{ cm}$.



53ste jaargang nummer 2
november 2013
ISSN 0033 4766

Pythagoras stelt zich ten doel jongeren kennis te laten maken met de leuke en uitdagende kanten van wiskunde. *Pythagoras* richt zich tot leerlingen van vwo en havo en alle anderen die jong van geest zijn.

Internet www.pythagoras.nu

Hoofdredacteur Derk Pik

Eindredacteur Alex van den Brandhof

Redactie Matthijs Coster,
Jeanine Daems, Jan Guichelaar,
Klaas Pieter Hart, Paul Levrie,
Marc Seijlhouwer

Vormgeving Grafisch Team
Digipage BV, Leidschendam

Druk Drukkerij Ten Brink, Meppel

Uitgever Koninklijk Wiskundig
Genootschap (KWG)

Management Pythagoras Jan Turk,
Mark Veraar (KWG), Derk Pik

Lezersreacties en kopij

Bij voorkeur per e-mail; lezersreacties naar Jan Guichelaar, jan@pythagoras.nu en kopij naar Derk Pik, derk@pythagoras.nu.
Eventueel per post naar Pythagoras, p.a. Centrum Wiskunde & Informatica, Postbus 94079, 1090 GB Amsterdam.

Abonnementen, bestellingen en mutaties

Abonneservice Pythagoras
Postbus 2238
5600 CE Eindhoven
Telefoon 088 226 5258
E-mail: abonnementen@pythagoras.nu

Abonnementsprijs

(zes nummers per jaargang)
€ 26,00 (Nederland en België),
€ 29,00 (overige landen),
€ 17,00 (groepsabbonement NL/B),
€ 26,00 (geschenkabbonement NL/B),
€ 29,00 (geschenkabbonement overige landen).

Een geschenkabbonement stopt automatisch na één jaar. Overige abonnementen gelden tot wederopzegging. Zie www.pythagoras.nu voor verdere toelichtingen.

Aan dit nummer werkten mee

Alex van den Brandhof
(alex@pythagoras.nu),
Matthijs Coster
(matthijs@pythagoras.nu),
Jeanine Daems
(jeanine@pythagoras.nu),
Birgit van Dalen
(birgit@wiskundeolympiade.nl),
Jan Guichelaar
(jan@pythagoras.nu),
Klaas Pieter Hart
(kp@pythagoras.nu),
Paul Levrie
(paul@pythagoras.nu),
Hennie ter Morsche
(h.g.termorsche@tue.nl),
Eddie Nijholt
(eddie@pythagoras.nu),
Derk Pik
(derk@pythagoras.nu),
Marc Seijlhouwer
(marc@pythagoras.nu),
Harry Smit
(h.j.smit@students.uu.nl),
Alexander Soifer
(asoifer@uccs.edu).

Pythagoras wordt mede mogelijk gemaakt door de bijdragen van de onderstaande instituten en instellingen.



EULER'S IDENTITEIT

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Af en toe verschijnen er lijstjes met 'de mooiste formules aller tijden'. Wiskundeliefhebbers zijn het er meestal over eens dat bovenstaande formule op nummer 1 staat. In deze formule, voor het eerst bewezen door Leonhard Euler, komen de twee belangrijkste constanten uit de wiskunde, e en π , samen voor met de drie basisgetallen 0, 1 en i waaruit, in zekere zin, alle andere getallen voortkomen. Je kunt hem met wat moeite zelfs met middelbare-schoolwiskunde bewijzen; zie daarvoor het artikel 'De mooiste formule ooit, en hoe je hem zelf afleidt' in *Pythagoras* 50-5 (april 2011), te vinden in het archief op www.pythagoras.nu.