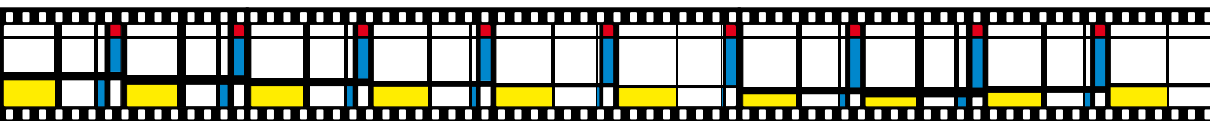
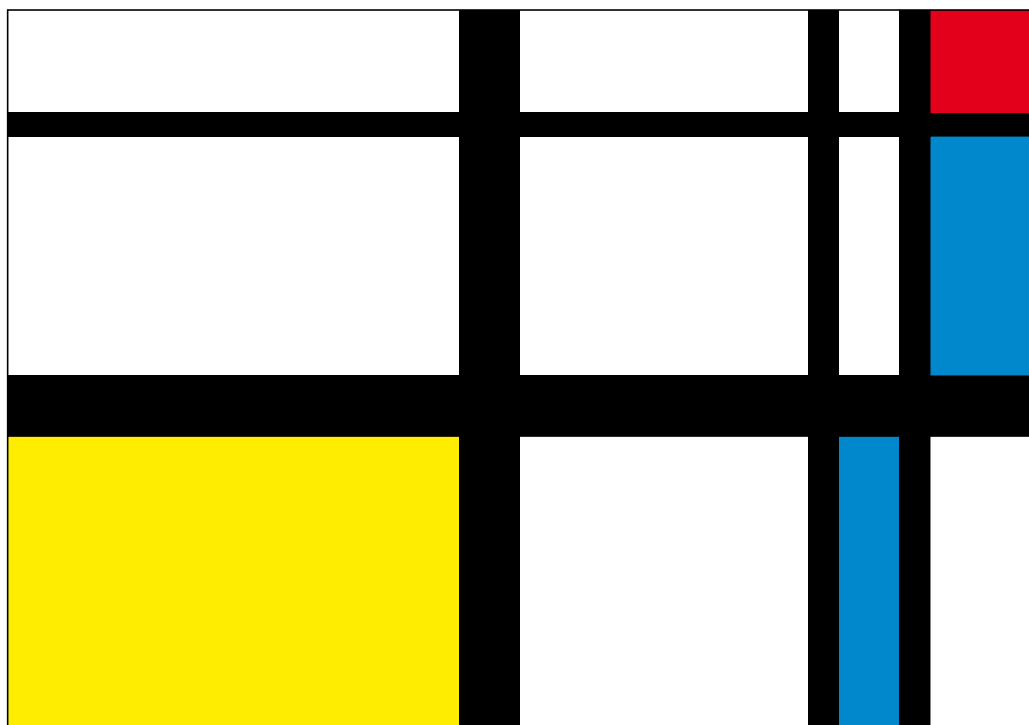


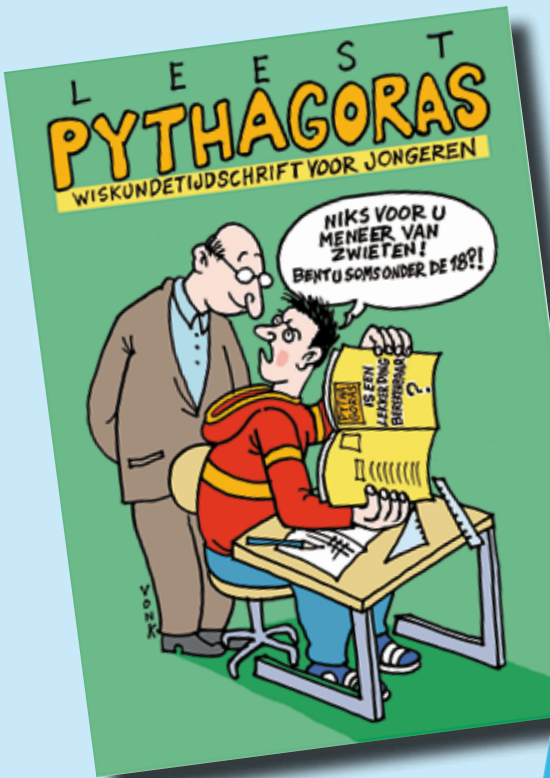
PYTHA GORAS

WISKUNDETIJDSCHRIFT VOOR JONGEREN

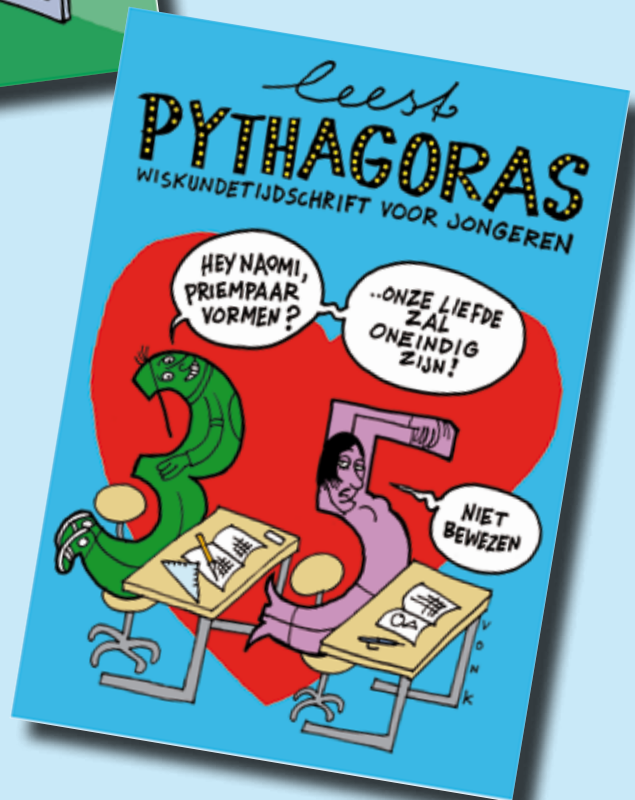


53ste JAARGANG - NUMMER 3 - JANUARI 2014

PYTHAGORAS DOOR DE OGEN VAN BEREND VONK



De cartoonist Berend Vonk heeft in opdracht van Pythagoras twee posters gemaakt. Ze zijn afgebeeld in het midden van dit nummer. Op formaat A2 zijn de posters voor € 3,50 te koop op wiskunde-evenementen waar Pythagoras aanwezig is, zoals bijvoorbeeld de Nationale Wiskunde Dagen (31 januari en 1 februari 2014 in congrescentrum Leeuwenhorst te Noordwijkerhout). Wie een of meer posters (zonder vouwen!) toegestuurd wil krijgen, betaalt (bovenop de prijs van de posters) helaas hoge verzendkosten (minimaal € 9,00). Neem voor meer informatie contact op met Derk Pik: derk@pythagoras.nu.



INHOUD

6

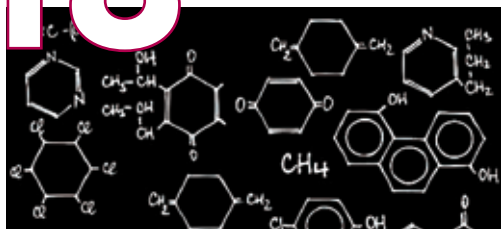


CALEIDOSCOPEN

Met een caleidoscoop worden gekleurde stukjes plastic door drie spiegels meerdere keren weerspiegeld. Dat geeft mooie symmetrische figuren.

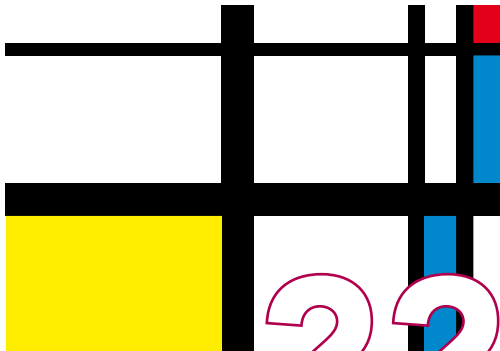
Dit gaan we nadoen met het computerprogramma *GeoGebra*.

18



HET KLOPPEND MAKEN VAN REACTIEVERGELIJKINGEN

Het kloppend maken van een reactievergelijking is een puzzel die met een in de scheikundeles aangeleerde strategie meestal op een kladblaadje wel kan worden opgelost. In een aantal gevallen is een wiskundige aanpak handiger en misschien zelfs noodzakelijk als helderziendheid je in de steek laat.



22

PRIJSVRAAG: BEWEGENDE WISKUNST

Doe mee met de prijsvraag, die in het teken staat van bewegende wiskunde. In het vorige nummer kon je er al van alles over lezen. In dit nummer geven we een paar voorzetten om je op ideeën te brengen.

EN VERDER

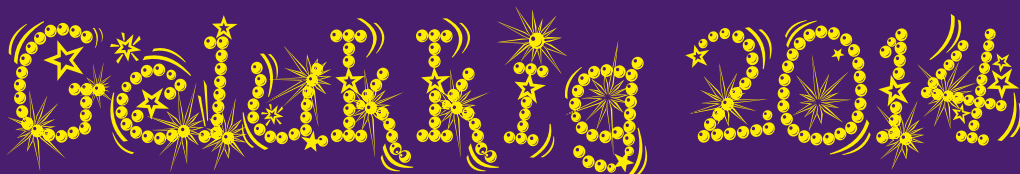
- 2 Kleine nootjes
- 4 Delen en breuken
- 10 Colins theorema
- 11 Journaal
- 12 Ceva's stelling
- 14 Fietslappuzzel
- 15 Doorloper
- 16 Pythagoras door de ogen van Berend Vonk
- 24 Convexe veelhoeken
- 27 Hexpuzzel – oplossing
- 28 Op zoek naar 2013
- 30 Pythagoras Olympiade
- 33 Oplossing Mondriaans kerstkaart

Omslagillustratie: een 'bewegende Mondriaan'. Bekijk het filmpje op facebook.com/Pythgrs.

■ **NIVEAUBALKJES** Sommige pagina's bevatten één of meer zwarte balkjes onder het paginanummer. Voor artikelen zonder balkje is geen specifieke voorkennis nodig. Artikelen met één balkje bevatten wiskunde uit de onderbouw. Artikelen met twee balkjes vereisen kennis uit de bovenbouw. Drie balkjes: net iets moeilijker.

KLEINE NOOTJES

■ door Jan Guichelaar



DE CIJFERS VAN HET NIEUWE JAAR

In het nieuwe jaar komt elk van de cijfers 0, 1, 2 en 4 precies eenmaal voor. In de komende eeuwen/millennia doet zich dat nog een aantal keren voor. Hoeveel keer? Welk jaar is het verste in de toekomst?

2 LANGE TUNNEL

Je zit voor in een hogesnelheidstrein, die 216 kilometer per uur rijdt, en wilt wat drinken in de restauratie, die zes wagons van elk 40 meter lang teruglopen is. Je loopt rustig met 3,6 kilometer per uur. Als je gaat lopen, rijdt de trein net een heel lange tunnel in. Als je bij de restauratie aankomt, rijdt je net de tunnel weer uit. Hoe lang is de tunnel?

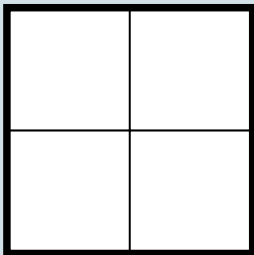


BONBONS

Oom Willem heeft 24 zakjes met vijf bonbons, 24 met drie bonbons en 24 met één bonbon. Hij wil ieder van zijn 18 neefjes en nichtjes evenveel bonbons geven. Dat lukt, en ze krijgen ieder zelfs evenveel zakjes. Hoe verdeelt oom Willem de zakjes aan zijn neefjes en nichtjes?



Kleine nootjes zijn eenvoudige opgaven die weinig of geen wiskundige voorkennis vereisen om opgelost te kunnen worden. De antwoorden vind je in het volgende nummer van *Pythagoras*.



INVULOEFENING
Vul in het rooster van 2 bij 2 hokjes vier gehele getallen in op zo'n manier, dat de zes sommen van de rijen, kolommen en diagonalen 0, 1, 2, 3, 4 en 5 zijn.

RARE BREUKEN

Zoek een oplossing voor onderstaande vergelijking. Lukt het je om ook een oplossing te vinden met alleen de cijfers 1, 2, 3 en 4 voor de letters *a*, *b*, *c* en *d*?

$$a\frac{b}{c} + b\frac{c}{d} = a\frac{b}{c} \times b\frac{c}{d}$$

(Bron: W.T. Williams & G.H. Savage, *The Penguin Problems Book*)

OPLOSSINGEN KLEINE NOOTJES NR. 2

Geldinzameling. Noem het aantal leerlingen in de eerste, tweede en derde klas respectievelijk *x*, *y* en *z*. Dan geldt: $\frac{1}{2} \cdot x \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot y \cdot 1,5 + \frac{1}{4} \cdot z \cdot 2 = 200$, ofwel $\frac{1}{2}(x + y + z) = 200$. Dus het totale aantal onderbouwleerlingen is $x + y + z = 400$.

Vijf opeenvolgende getallen. Van de vijf getallen zijn er minstens twee even, waarvan er zeker dus één deelbaar is door 4. Het product *P* is dus deelbaar door 8. Er zitten minstens een drievoud en een vijfvoud in vijf opeenvolgende getallen. Daarom is *P* ook deelbaar door $3 \times 5 = 15$. Conclusie: *P* is deelbaar door $8 \times 15 = 120$.

Vijftien keer springen.

0	9	14	1
4	6	3	5
12	10	13	11
2	8	15	7

Rood- en zwartharigen. Met elf keer varen lukt het om allemaal aan de overkant te komen, volgens onderstaand schema (r = roodharige, z = zwartharige):

vaarrichting	linkeroever	rechteroever
→	rrrzzzz	–
←	rzzzz	rr
→	rrzzzz	r
←	zzzz	rrr
→	rzzzz	rr
←	rz	rrzzz
→	rrzz	rz
←	rr	rzzzz
→	rrr	zzz
←	r	rrzzzz
→	rr	rzzz
←	–	rrrzzzz

Slim wegen. Snijd de balk in stukken van 1, 3 en 9 kilogram. $1 = 1$, $2 + 1 = 3$, $3 = 3$, $4 = 1 + 3$, $5 + 1 + 3 = 9$, $6 + 3 = 9$, $7 + 3 = 1 + 9$, $8 + 1 = 9$, $9 = 9$, $10 = 1 + 9$, $11 + 1 = 3 + 9$, $12 = 3 + 9$, $13 = 1 + 3 + 9$.

Laat je leraar versteld staan met de rekenrucs van *Pythagoras*! Na vermenigvuldigingen en schattingen met de QAMA-rekenmachine gaan we het in deze aflevering hebben over deelsommen en breuken. Altijd lastig, maar met wat schattings- en rekenrucs word je snel een deelwonder.

■ door Marc Seijlhouwer

DELEN EN BREUKEN

We beginnen met schattingen. In het dagelijks leven zijn die vaak net zo bruikbaar als precieze berekeningen. Ze kosten echter veel minder tijd. We hebben het de vorige keer al gehad over schatten, maar daarbij ging het nauwelijks over delen. Delen en vermenigvuldigen lijken erg op elkaar, dus de manieren van schatten gaan ook ongeveer hetzelfde.

Om een deelsom te schatten, ga je op zoek naar een eenvoudiger deling van getallen die dichtbij de oorspronkelijke getallen liggen. Stel dat je per maand 127 euro zak- en kleedgeld krijgt. Hoeveel is dat dan per dag? Het uitrekenen van $127/30$ is geen simpele opgave. Maar $120/30$ is dat wel; dat komt precies uit op 4. Aangezien 127 dichtbij 120 ligt, heb je dus iets meer dan 4 euro per dag te besteden.

DEELBAARHEIDSCRITERIA Voor het schatten, maar meer nog bij het precies uitrekenen, helpt het om eerst zoveel mogelijk te vereenvoudigen. Zie je bijvoorbeeld twee even getallen, dan is door 2 delen een goede optie. Op dezelfde manier kan het helpen om te herkennen of een getal deelbaar is door 3 of 5.

Om te checken of een getal deelbaar is door 3 kan je de cijfers van dit getal bij elkaar optellen. Is het resultaat deelbaar door 3? Dan was het oorspronkelijke getal dat ook! Neem bijvoorbeeld de breuk $8121/54$. Kunnen we dit vereenvoudigen door te delen door 3? We berekenen $8 + 1 + 2 + 1$

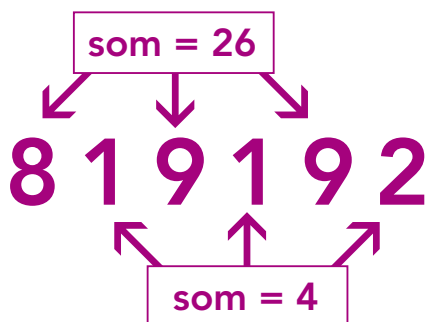
= 12 en vervolgens $1 + 2 = 3$, dus de teller is deelbaar door 3. Voor 54 doen we hetzelfde: $5 + 4 = 9$, dus de noemer is ook deelbaar door 3. Met wat snel (hoofd)rekenwerk kom je op de eenvoudiger breuk $2707/18$. Verder vereenvoudigen kunnen we niet: 2707 is niet deelbaar door 2 en niet door 3. Lukt het om een snelle schatting te maken van het antwoord?

Voor 5 is het vereenvoudigen nog eenvoudiger: eindigt het getal met een 5 of een 0? Dan is het deelbaar door 5, anders niet.

Ook is het leuk om de truc voor 7 te kennen, omdat die erg mysterieus lijkt. Is een getal deelbaar door 7? Dat check je door het laatste cijfer te verdubbelen en af te trekken van het getal dat overblijft als je het laatste cijfer weghaalt. Is het getal dat je dan overhoudt deelbaar door 7? Dan ook het oorspronkelijke getal. Zo checken we voor 548: $8 \times 2 = 16$, $54 - 16 = 38$, en dat is niet deelbaar door 7. Kan jij uitvinden of 12964 deelbaar is door 7?

Het laatste priemgetal waar nog een hanteerbaar criterium voor deelbaarheid voor bestaat, is 11. Om erachter te komen of 6570091 deelbaar is door 11, bepalen we de som van de cijfers op de oneven plaatsen 6, 7, 0, 1 en de cijfers op de even plaatsen 5, 0, 9. De som van de oneven cijfers is 14 en van de even cijfers is 14. We trekken deze twee van elkaar af: is het resultaat deelbaar door 11, dan was het getal waar we mee begonnen dat ook. In dit geval komt er 0 uit: dit is deelbaar door 11.

Is 819192 deelbaar door 11?



$26 - 4 = 22$: dit is deelbaar door 11, dus is 819192 dat ook.

GROOTSTE GEMENE DELER Naast snelle vereenvoudigingen zijn er twee zwaardere wapens in de strijd tegen ingewikkelde breuken: de *grootste gemene deler* en het *kleinste gemene veelvoud*. De grootste gemene deler (ggd) van twee gehele getallen a en b is het grootste gehele getal waardoor zowel a als b gedeeld kan worden zonder dat er een rest overblijft. De ggd kunnen we bijvoorbeeld gebruiken om erachter te komen dat we een breuk niet verder meer kunnen vereenvoudigen.

We laten eerst een handige manier zien hoe je de ggd van twee getallen kunt uitrekenen. We maken gebruik van de eigenschap dat de grootste gemene deler van a en b gelijk is aan de grootste gemene deler van a en $a - b$. Als voorbeeld berekenen we de ggd van 234 en 230. We schrijven dit op als $\text{ggd}(234, 230)$. Er geldt:

$$\text{ggd}(234, 230) = \text{ggd}(234 - 230, 230).$$

Nu hoeven we alleen nog maar $\text{ggd}(4, 230)$ te bepalen. We zien meteen dat dit gelijk is aan 2. Bij moeilijker getallen kan je hier zonodig een paar keer mee door gaan: de berekening wordt steeds eenvoudiger.

GROTE GETALLEN Kunnen we de breuk $96577/193194$ vereenvoudigen? We zouden kunnen proberen om de teller en de noemer te delen door allerlei priemgetallen, maar dat leidt tot veel reken-

werk en uiteindelijk tot niets. Het is veel makkelijker om de grootste gemene deler te berekenen:

$$\begin{aligned}\text{ggd}(96577, 193194) &= \\ \text{ggd}(96577, 193194 - 2 \times 96577) &= \\ \text{ggd}(96577, 40) &.\end{aligned}$$

We zouden nu verder kunnen gaan op dezelfde manier, maar veel eenvoudiger is het om op te merken dat $40 = 2^3 \times 5$, dus we hoeven alleen maar te controleren of 96577 deelbaar is door 2 of door 5. Dit is niet zo, dus de ggd is 1 en de breuk kan niet verder worden vereenvoudigd.

GELIJKNAMIG MAKEN Om twee breuken bij elkaar op te kunnen tellen, moeten de noemers hetzelfde zijn. Een eenvoudig voorbeeld is: $\frac{1}{6} + \frac{1}{9} = \frac{3}{18} + \frac{2}{18} = \frac{5}{18}$. Rechts in de noemer staat het kleinste gemene veelvoud (kgv) van 6 en 9. Hoe vind je dit kgv? Er geldt de mooie formule

$$a \times b = \text{kgv}(a, b) \times \text{ggd}(a, b).$$

Hieruit volgt bijvoorbeeld dat $\text{kgv}(6, 9) = (6 \times 9)/3 = 6 \times 3 = 18$. De ggd en het kgv zijn dus erg handig bij lastige breuken.

Ken jij nog speciale, gemakkelijk uit te rekenen breuken? Laat het weten via post@pythagoras.nu. We verloten weer een QAMA-rekenmachine voor mooie oplossingen. ■

GeoGebra heeft allerlei mogelijkheden om punten en andere objecten te spiegelen. In deze aflevering maken we twee caleidoscopen. Bij de eerste caleidoscoop kunnen we zelf een tekening maken die meerdere keren gespiegeld wordt. Bij de tweede caleidoscoop zullen we allerlei gekleurde scherfjes willekeurig laten bewegen. We maken daarbij gebruik van het zogeheten 'scripting-venster'.

■ door Derk Pik

CALEIDOSCOPEN

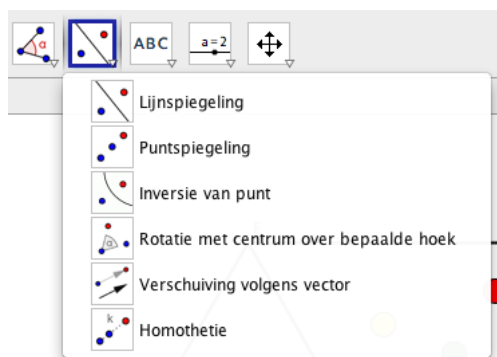
Je hebt vast wel eens in een caleidoscoop gekeken. Gekleurde scherfjes plastic worden door drie spiegels meerdere keren weerspiegeld en geven samen mooie symmetrische figuren. Dit gaan we nadoen met het computerprogramma GeoGebra.

We beginnen met een eenvoudige caleidoscoop, waar een aantal gekleurde punten meerdere keren gespiegeld wordt. Het spoor van de spiegelingen zal mooie effecten opleveren.

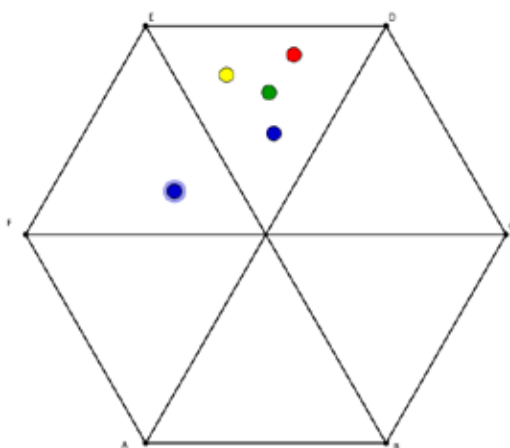
Teken eerst een regelmatige zeshoek met zijn drie diagonalen. Plaats vier gekleurde punten in een van de driehoeken en maak deze punten zo groot mogelijk met het Eigenschappenvenster. Je krijgt dan iets dat lijkt op figuur 1.

Nu gaan we de punten spiegelen. Selecteer de knop lijnspiegeling (zie figuur 2), dan het te spiegelen object (bijvoorbeeld het blauwe punt) en ten slotte het lijnstuk waarin we willen spiegelen, bijvoorbeeld lijnstuk BE. Als resultaat ontstaat er een nieuw punt in de driehoek links van de bovenste driehoek (zie figuur 3).

Spiegel het nieuwe blauwe punt in het volgende lijnstuk en ga hier mee door totdat er in elke

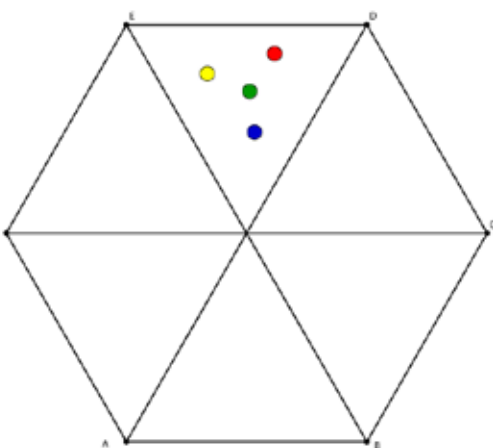


Figuur 2

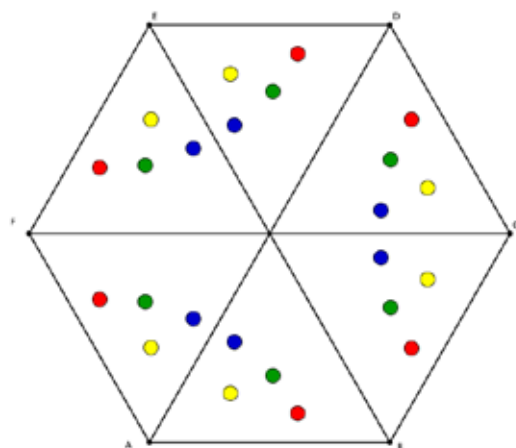


Figuur 3

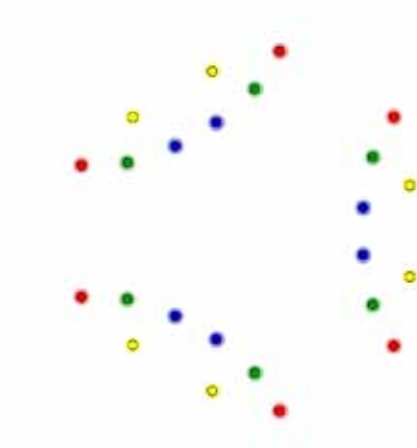
driehoek een blauw punt staat. Doe hetzelfde met de andere punten en zet met 'Eigenschappen' het spoor aan. Het resultaat zie je in figuur 4. Als je de zwarte lijnstukken en de hoekpunten onzichtbaar maakt, houd je figuur 5 over. Beweeg vervolgens de punten met je muis. Je krijgt dan een figuur die lijkt op een caleidoscoopplaatje (zie figuur 6).



Figuur 1



Figuur 4



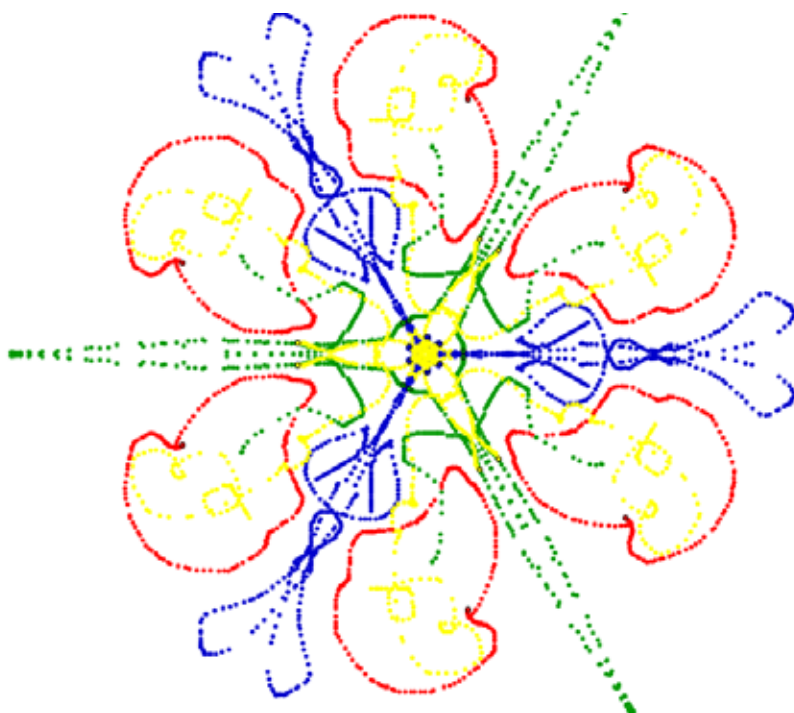
Figuur 5

SCHERFJES Nu gaan we een caleidoscoop maken die meer op een echte lijkt. We maken scherfjes die net als bij een echte caleidoscoop op een willekeurige manier over het vlak bewegen. Mooi gevormde scherfjes kunnen we maken met ‘starre veelhoeken’.

Om alles een beetje eenvoudig te houden, nemen we als scherfje een gelijkzijdige driehoek. Nu moeten we toevalskoördinaten genereren. We wil-

len dat het scherfje niet te wild over het scherm heen springt, dus we draaien het scherfje maximaal 10° met de klok mee of tegen de klok in en we veranderen de coördinaten elke tijdseenheid slechts een beetje.

We hebben een klokje nodig dat bij elke tik drie toevalsgetallen genereert: twee coördinaten en een hoek. Dit doen we met een schuifknop die we in-



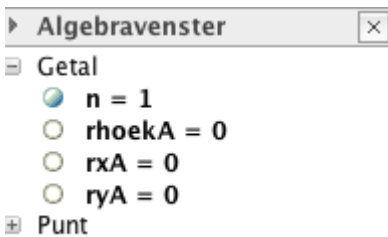
Figuur 6



Figuur 7



Figuur 11



Figuur 8

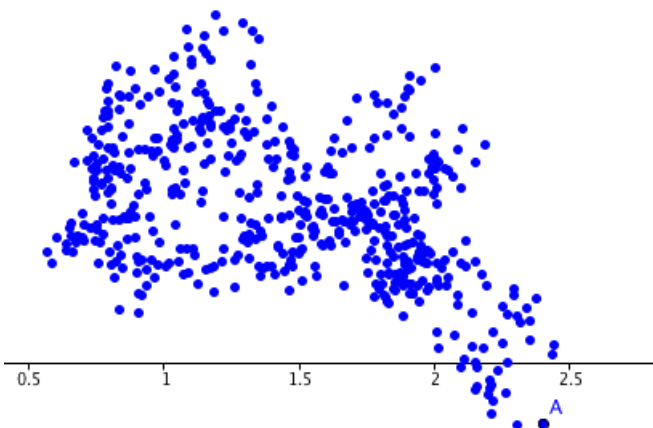


Figuur 9 Het 'Scripting'-venster van de variabele n

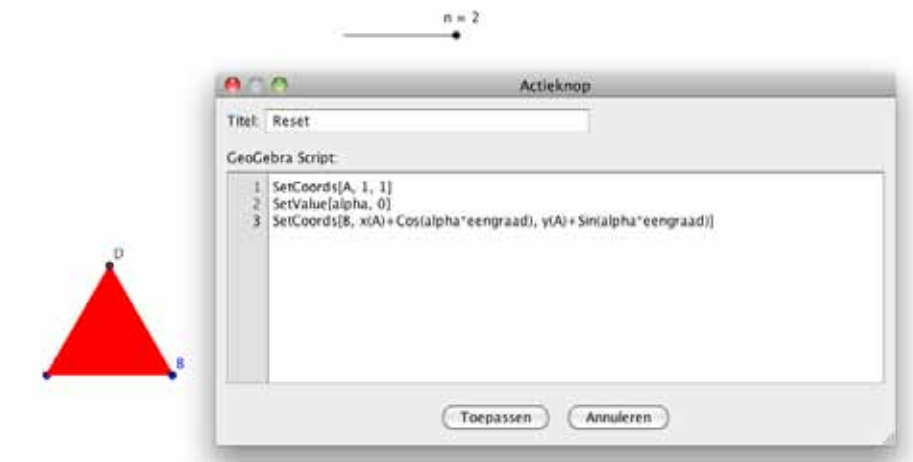
stellen op gehele getallen, waarbij de variabele heen en weer gaat bewegen tussen de getallen 1 en 2 (zie figuur 7).

Maak het assenstelsel zichtbaar en voer in het vak 'Invoer' in: $A = (1, 1)$. Definieer vervolgens de variabelen rxA en ryA . In deze variabelen zullen we steeds de veranderingen in de x - en de y -coördinaat van A opslaan. De verandering van de hoek slaan we steeds op in de variabele $rhoekA$. Maak ook deze variabele aan. We hebben nu vier variabelen: de schuifknop n , en de variabelen $rhoekA$, rxA , ryA (zie figuur 8).

We willen de drie variabelen rxA , ryA en $rhoekA$ een nieuwe waarde geven, telkens als de schuifknop n verspringt. Open het Eigenschappenvenster van de schuifknop en selecteer 'Scripting'. Voer de bovenste drie regels in van de code in figuur 9. Deze regels doen het volgende: aan de variabelen rxA en ryA wordt steeds een nieuw toevoegingsgetal toegekend, dat homogeen gekozen wordt



Figuur 10



Figuur 12

uit het interval $[-0,4; 0,4]$. Vervolgens worden deze waarden opgeteld bij de coördinaten van A. Om dit stukje code steeds uit te voeren als de schuifknop verandert, moeten we de optie 'On Update' aanklikken. Als je nu de schuifknop heen en weer beweegt, zal je het punt A over het vlak zien bewegen. Als je het spoor van A aanzet, zie je de baan van A. Zet de animatie aan met de animatiesnelheid op 100. Er ontstaat al gauw een puntenwolk (zie figuur 10).

We willen echter nog wel wat meer dan een puntenwolk. We gaan nu een scherfje maken dat beweegt en draait over het vlak. Definieer het punt $B = (2, 1)$ en de variabele $\alpha = 0$. Omdat je in het scripting-venster geen graden kan invoeren, definiëren we ook nog $\text{eengraad} = 1^\circ$. (Hier zie je dat GeoGebra een jong programma is. Je zou dit gradenteken graag direct in het venster willen invoeren. We hopen natuurlijk dat het gradensymbool in de toekomst aan dit venster zal worden toegevoegd.) We voeren nu de onderste twee regels in van het scripting-venster van figuur 9.

Teken een gelijkzijdige driehoek met hoekpunten A en B. Als je de animatie van de schuifknop nu aanzet, zie je de driehoek door het platte vlak bewegen. De afstand tussen de hoekpunten A en B is steeds 1. Omdat de willekeurig bewegende driehoek soms van het scherm afloopt, willen we een 'reset'-knop maken die de scherfjes weer op hun beginplaats terugzet. Druk op de knop 'Actieknop invoegen' (zie figuur 11). Er verschijnt een venster waarin we het punt A en de hoek α op een beginwaarde kunnen zetten (zie figuur 12).

AFWERKING Nu is het harde werk gedaan: we hebben een bewegende en draaiende gelijkzijdige driehoek. We maken er op dezelfde manier als in

de eerste helft van dit artikel een caleidoscoop van. Daarvoor hoeven we alleen maar een aantal spiegellijnen en een aantal scherfjes te definiëren. Geef de scherfjes leuke kleuren, maak ze half-doorzichtig en maak de spiegellijnen onzichtbaar. Het resultaat is een eenvoudige caleidoscoop.

We kunnen de caleidoscoop nog wat verbeteren. Ten eerste kunnen we elk scherfje op een ander niveau zetten, zodat het rode scherfje bijvoorbeeld altijd als onderste laag wordt afgebeeld. (Open het Eigenschappenvenster van dit scherfje, ga naar 'Geavanceerd' en zet de 'Laag' op 0.) Ten slotte zetten we een zwarte en ondoorzichtige zeshoek om de driehoekjes heen. Zet in 'Stijl' de kleur op 'omgekeerde vulling'. Het gebied aan de buitenkant van de zeshoek wordt nu zwart. Als we de laag op 9 zetten, staat de zwarte kleur het verst op de voorgrond, dus verdwijnen de scherfjes erachter als ze zich te ver van de oorsprong verwijderen. Het resultaat is een heuse caleidoscoop (zie figuur 13)! ■



Figuur 13

Meestal worden in *Pythagoras* pas verschenen wiskundeboeken besproken. Deze keer is dat een beetje anders: *An Abundance of Katherines* is een roman (een Young Adult boek) en het is al uit 2006 (Nederlandse vertaling uit 2007). Waarom toch aandacht voor dit boek? Het gaat wel een beetje over wiskunde. En het is een aanrader voor de Pythagoras-lezer.

■ door Jeanine Daems

COLINS THEOREMA

Het verhaal van *19 keer Katherine* begint op de dag nadat wonderkind Colin Singleton zijn highschool-diploma heeft ontvangen en voor de negentiende keer is gedumpt door een meisje dat Katherine heet. Vriend Hassan neemt hem mee op roadtrip, voor de afleiding. Hassan is vooral goed in weinig uitvoeren (hij heeft net een 'tussenjaar' achter de rug, maar heeft zich nog steeds niet ingeschreven voor een studie) en zijn grootste idool is tv-rechter Judge Judy. Colin kent elf talen en zijn grootste passie is anagrammen maken. In omgaan met mensen is hij wat minder goed, hoewel hij er dus wel steeds weer in slaagt een Katherine voor zich te winnen. Aan de andere kant: die relaties eindigen telkens doordat hij gedumpt wordt.

Colin voelt dat het langzamerhand tijd wordt om zijn potentieel waar te gaan maken. Hij verlangt naar een Eureka-moment, naar een prestatie van formaat, naar ertoe doen. Maar intussen is hij wonderkind af en nog geen genie, en bovendien ook niet meer de vriend van Katherine XIX.

Colin en Hassan belanden al vrij snel in het dorpje Gutshot, waar ze Lindsey ontmoeten, die rondleidingen geeft naar het graf van Aartshertog Franz Ferdinand. Zo'n beetje iedereen in het dorpje werkt in de fabriek van Lindseys moeder. Colin en Hassan krijgen daar een baantje: ze mogen medewerkers en oud-medewerkers van de fabriek interviewen om zo de geschiedenis van het bedrijf vast te leggen.

Ondertussen is Colin nog steeds geobsedeerd door Katherine XIX en door de vraag hoe het nou komt dat hij steeds degene is die gedumpt wordt. En dan

krijgt hij zijn Eureka-moment: hij bedenkt het zogeheten *Theorema van de Onderliggende Katherine-Voorspelbaarheid*. Hij stelt een relatie voor als een grafiek die begint op de x-as en ook weer eindigt op de x-as. Als in de periode daartussen de grafiek positief is, is het meisje de dumper, en als de grafiek in die periode negatief is, is de jongen de dumper. De variabelen die meespelen zijn: leeftijd, populariteitsindex, aantrekkelijkheidsindex, dumper/gedumpte-index en introvert/extravert-index.

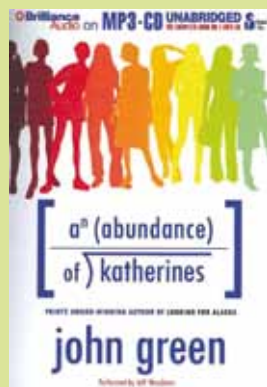
Wat wiskundig leuk is, is niet de precieze formule, maar wel Colins gepruts, zijn gespeel met de variabelen en zijn gedachten over het beschrijven van dingen die al gebeurd zijn tegenover het voorspellen van nieuwe gebeurtenissen. En hoe komt het nou dat hij het Theorema maar niet kloppend krijgt voor Katherine III?

Auteur John Green is geen wiskundige, maar zijn vriend Daniel Biss wel. Biss is veelvuldig geraadpleegd voor de wiskundige onderdelen van het verhaal, en heeft een appendix bij het boek geschreven waarin hij (kort en basaal) ingaat op de wiskunde achter Colins Theorema.

Kortom: voor de wiskundige diepgang hoeft je dit boek niet te lezen, maar voor wie van lezen én wiskunde houdt is het zeker erg leuk! ■

John Green, *An Abundance of Katherines* (Dutton Books, 2006).

Nederlandse vertaling: *19 keer Katherine* (vertaald door Aleid van Eekelen-Benders, Lemniscaat, 2007).



JOURNAAL

■ door Marc Seijlhouwer

Groepsdruk in kaart gebracht

Wiskundigen van de University of Strathclyde in Glasgow, Schotland, hebben berekend hoe mensen elkaar beïnvloeden. Ze bekeken allerlei verschillende groepen mensen, van connectors op middelbare scholen tot Braziliaanse boeren. Door te kijken wie beïnvloedt in de omgeving van die mensen, konden ze met een zogeheten *differentiaalvergelijking* een algemeen model maken.

Het model gebruikt de informatie uit de groepen om te voorspellen hoe een groep of samenleving in de loop der tijd verandert. Door het model lange tijd te laten rekenen, kunnen zelfs toekomstvoorspellingen worden gemaakt.

Volgens Ernesto Estrada, een van de onderzoekers, zijn twee soorten druk belangrijk. Ten eerste de directe druk, van vrienden, collega's, familie en anderen waarmee je dagelijks omgaat. Ten tweede is er de indirecte druk, die vanuit de 'maatschappij' komt. Dat zijn dingen als trends, overheidsbeleid en media.

In afgesloten gemeenschappen – zoals die van boeren – hebben vrienden, kennissen en dorpsoudsten veel invloed. Naarmate een groep meer van de buitenwereld afweet – door televisie te kijken, kranten te lezen of in een stad te wonen – wordt de indirecte druk steeds belangrijker.

Hersenonderzoek naar getalbegrip

Onlangs zijn twee hersenstudies gedaan naar het vermogen om aantallen te herkennen: een Nederlands onderzoek met volwassenen, en een Amerikaans onderzoek met baby's.

Onderzoekers van de Universiteit Utrecht ontdekten een hersengebied waar hoeveelheden herkend worden. Daarmee lijkt getalbegrip diep in onze hersenen ingebakken. Met een MRI-scanner bekeken de onderzoekers acht volwassen hersenen. Terwijl de proefpersonen naar stipjes keken, gingen de wetenschappers op zoek naar het deel van het brein dat oplichtte. Elke keer lichtte een ander deel op bij een andere hoeveelheid stipjes, terwijl de vorm van de 'stippen' niet uitmaakte; bij driehoekjes of sterretjes reageerden de hersenen op dezelfde manier.

Het onderzoek maakt duidelijk dat er een hersengebied is dat hoeveelheden herkent. Dat betekent echter niet dat wiskunde ook op die manier verwerkt wordt. De grote vraag blijft daarom onbetwist: is wiskunde een aangeboren menselijke eigenschap, of ontwikkelen wij wiskundige vaardigheden doordat deze in de cultuur van de mensen zit?

Onderzoek van de Amerikaanse Duke Universi-

ty in Durham komt een stap in de richting van een antwoord op deze laatste vraag. De onderzoekers uit Durham hebben namelijk aangetoond dat een baby van een half jaar oud die aantallen van elkaar kan onderscheiden, drie jaar later beter is in rekentestjes.

Een paar jaar geleden lieten de wetenschappers baby's plaatjes zien met figuren. Vier driehoeken bijvoorbeeld, of twaalf cirkels. Tegelijkertijd hoorden ze vier lettergrepen achter elkaar, of twaalf. 'Ba-ba-ba-ba' bijvoorbeeld of twaalf keer 'ba'. Hoe jong ze ook waren, de baby's wisten het juiste geluid met het juiste aantal figuren te combineren. Hoorden ze 'ba-ba-ba-ba', dan keken ze langer naar het plaatje met vier figuren en hoorden ze twaalf keer 'ba', dan keken ze langer naar het plaatje met twaalf figuren.

De zoektocht naar of een mens zoiets als reken-talent heeft, is al lange tijd aan de gang. Een onderzoek gebeurt vaak met volwassenen, zoals het Utrechtse onderzoek, maar bij hen is het moeilijk om te zien of rekentalent aangeboren is of dat ze gewoon goed hebben geleerd. Met het onderzoek uit Durham lijkt het erop dat je (gedeeltelijk) met rekentalent geboren wordt.

De stelling van Ceva geeft een prachtig criterium wanneer drie lijnen vanuit de drie hoekpunten van een driehoek elkaar snijden in één punt. Uit de stelling kunnen heel veel standaardeigenschappen van de driehoek worden afgeleid, zoals bijvoorbeeld het feit dat de hoogtelijnen van een driehoek elkaar in één punt snijden. Het is leuk om te proberen zelf een gevolg van deze stelling te bedenken.

■ door Jan Guichelaar

CEVA'S STELLING

Giovanni Ceva (1647-1734) was een Italiaans wiskundige en waterbouwkundige, professor in Mantua. Zijn belangrijkste werk, uit 1678, is *De lineis rectis* (Latijn voor *Over rechte lijnen*). In 1711 publiceerde hij *De re nummaria* (*Over geldzaken*), een van de eerste werken over wiskundige economie. De volgende stelling is naar Ceva vernoemd; hij publiceerde de stelling in zijn boek uit 1678. Het gaat om een herontdekking, want al in de elfde eeuw werd de stelling bewezen door de Arabische wiskundige Yusuf ibn Ahmad al-Mu'taman ibn Hud. En wie weet kennen de Oude Grieken de stelling ook al.

Stelling van Ceva. Beschouw driehoek ABC in figuur 1. Kies willekeurig een punt S binnen de driehoek. Trek vanuit A , B en C de lijnstukken AP , BQ en CR , die alle door S gaan. De punten P , Q en R verdelen de zijden van de driehoek in de stukken a , b , c , d , e en f , en er geldt:

$$\frac{a \times c \times e}{b \times d \times f} = 1.$$

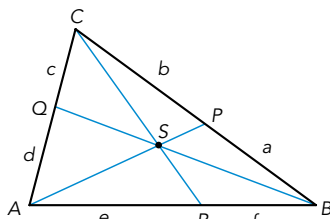
Het omgekeerde geldt ook: als de gelijkheid geldt, dan gaan AP , BQ en CR door één punt.

HET BEWIJS Zie figuur 2. Trek door C een lijn evenwijdig aan AB . Verleng AP en BQ tot zij de lijn door C snijden in U en V . Er gelden de volgende gelijkvormigheden (vanwege de evenwijdigheid van AB en UV zijn de hoeken van elk tweetal driehoeken gelijk):

- $\triangle UCP \sim \triangle ABP$,
- $\triangle VCQ \sim \triangle BAQ$,
- $\triangle UCS \sim \triangle ARS$,
- $\triangle VCS \sim \triangle BRS$.

Hieruit volgen de volgende evenredigheden:

$$\begin{aligned} \bullet \frac{m}{e+f} &= \frac{b}{a}, \\ \bullet \frac{n}{e+f} &= \frac{c}{d}, \\ \bullet \frac{m}{e} &= \frac{t}{u}, \\ \bullet \frac{n}{f} &= \frac{t}{u}. \end{aligned}$$



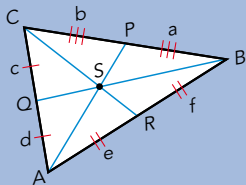
Figuur 1

12

ZWAARTELIJNEN De zwaartelijnen in een driehoek gaan door één punt. Omdat de zwaartelijnen de overstaande zijden middendoor delen (per definitie), geldt $a = b$, $c = d$ en $e = f$. Dus

$$\frac{a \times c \times e}{b \times d \times f} = \frac{a \times c \times e}{a \times c \times e} = 1.$$

Uit de omgekeerde stelling van Ceva volgt dan dat de drie zwaartelijnen van een driehoek door één punt gaan.



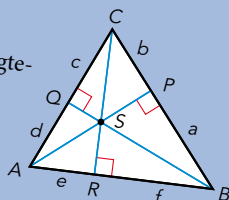
HOOGTELIJNEN De hoogtelijnen in een driehoek staan (per definitie) loodrecht op de overstaande zijden. Deze lijnen gaan door één punt. Er geldt namelijk:

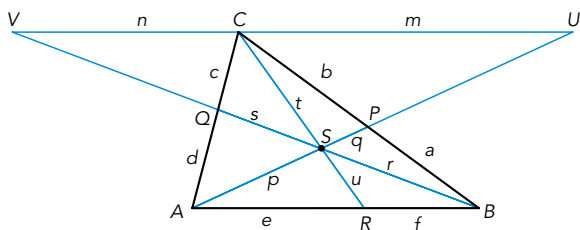
$$\begin{aligned} \bullet \cos \angle A &= \frac{e}{c+d} = \frac{d}{e+f}, \\ \bullet \cos \angle B &= \frac{a}{e+f} = \frac{f}{a+b}, \\ \bullet \cos \angle C &= \frac{c}{a+b} = \frac{b}{c+d}. \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat

$$\frac{a \times c \times e}{b \times d \times f} = 1,$$

en dus gaan de drie hoogtelijnen door één punt.





Figuur 2

Kruiselingen vermenigvuldigen van de laatste twee geeft $mu = te$ en $nu = tf$, waarmee

$$\frac{m}{n} = \frac{mu}{nu} = \frac{te}{tf} = \frac{e}{f}.$$

Dan krijgen we:

$$\frac{a \times c \times e}{b \times d \times f} = \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} \times \frac{e}{f} = \frac{e+f}{m} \times \frac{n}{e+f} \times \frac{m}{n} = 1.$$

Bekijk figuur 3 voor het bewijs van de omkering. Stel dat CR' niet door het snijpunt S van AP en BQ gaat en stel dat

$$\frac{a \times c \times e'}{b \times d \times f'} = 1.$$

Dan volgt uit de stelling van Ceva met CR door S

Figuur 3

en de zojuist opgeschreven gelijkheid het volgende:

$$\frac{e'}{f'} = \frac{e}{f}.$$

Met $e + f = e' + f'$ hebben we dan $e = e'$ en $f = f'$, waaruit volgt dat R' samenvalt met R en dus CR' wél door S gaat. Deze tegenspraak leidt tot de conclusie dat onze veronderstelling onjuist was en dat CR' dus wel degelijk door S gaat.

Veel driehoekseigenschappen kunnen met Ceva makkelijk worden bewezen. In de kadertjes zie je een aantal voorbeelden. ■

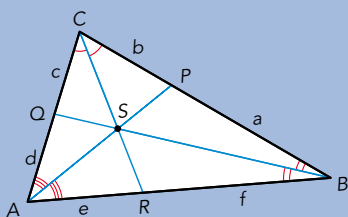
DEELLIJNEN Een deellijn (of bissectrice) deelt een hoek middendoor. Voor de deellijnen in een driehoek geldt:

$$\frac{a \times c \times e}{b \times d \times f} = \frac{a}{b} \times \frac{\sin \frac{1}{2} \angle A}{\sin \frac{1}{2} \angle A} \times \frac{c}{d} \times \frac{\sin \frac{1}{2} \angle B}{\sin \frac{1}{2} \angle B} \times \frac{e}{f} \times \frac{\sin \frac{1}{2} \angle C}{\sin \frac{1}{2} \angle C} = \frac{e+f}{\sin \angle P} \times \frac{\sin(180^\circ - \angle P)}{c+d} \times \frac{a+b}{\sin \angle Q} \times \frac{\sin(180^\circ - \angle Q)}{e+f} \times \frac{c+d}{\sin \angle R} \times \frac{\sin(180^\circ - \angle R)}{a+b} = 1.$$

We hebben hier gebruik gemaakt van de sinus-regel:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

en van de eigenschap dat $\sin \delta = \sin(180^\circ - \delta)$. We kunnen nu concluderen dat de drie deellijnen door één punt gaan.



TOEGIFT We kunnen een aardig extra stellinkje afleiden, waarvan ik de naam niet ken. Er geldt in de driehoek in figuur 2:

$$\frac{t}{u} = \frac{b}{a} + \frac{c}{d}.$$

Om dit te bewijzen, gebruiken we opnieuw de volgende evenredigheden:

$$\frac{m}{e+f} = \frac{b}{a} \quad \text{en} \quad \frac{n}{e+f} = \frac{c}{d}.$$

(*)

Wegens gelijkvormige driehoeken geldt:

$$\frac{t}{u} = \frac{m+n}{e+f}.$$

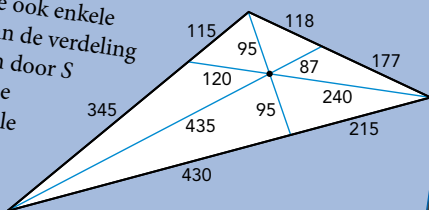
Samen met (*) volgt nu:

$$\frac{t}{u} = \frac{m+n}{e+f} = \frac{\frac{b(e+f)}{a} + \frac{c(e+f)}{d}}{e+f} = \frac{b}{a} + \frac{c}{d}.$$

Je kunt natuurlijk nog twee gelijkheden opschrijven voor de twee andere lijnstukken door S . Dit zijn

$$\frac{p}{q} = \frac{d}{c} + \frac{e}{f} \quad \text{en} \quad \frac{r}{s} = \frac{a}{b} + \frac{f}{e}.$$

Hiermee leren we ook enkele eigenschappen van de verdeling van de lijnstukken door S kennen. Een mooie driehoek waarin alle lijnstukken gehele getallen zijn, zie je hiernaast.



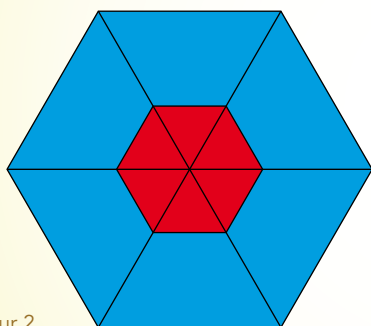
FIETSLAMPPUZZEL

■ door Frank Roos

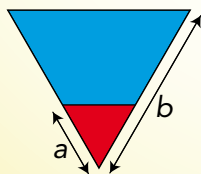
De fietslamp die je in figuur 1 ziet, bracht mij op het idee van de volgende puzzel. Teken een regelmatige zeshoek; noem de lengte van elke zijde van de zeshoek a . Verbind het middelpunt van de zeshoek met de zes hoekpunten. De zes driehoeken die zo ontstaan, zijn dan gelijkzijdig. Beredeneer zelf waarom dat zo is.

Verleng deze zes 'spaken' tot ze elk de lengte b hebben gekregen. Verbind de uiteinden tot een nieuwe regelmatige zeshoek. Er is nu een krans van zes congruente gelijkbenige trapezia ontstaan, zie figuur 2.

De vraag die ik mijzelf stelde, luidt: hoe groot is de verhouding b/a , als de oppervlakte van één zo'n (blauw) trapezium gelijk is aan de oppervlakte van de kleine (rode) zeshoek?



Figuur 2



Figuur 3

OPLOSSING We bekijken één 'taartpunt', zie figuur 3. Gebruik de volgende eigenschap: de verhouding van de oppervlaktes van twee gelijkvormige figuren is gelijk aan het kwadraat van de verhouding van de lengtes van twee overeenkomstige zijden. In formulevorm:

$$\text{opp}(\text{grote driehoek}) / \text{opp}(\text{kleine driehoek}) = (b/a)^2,$$

ofwel



Figuur 1

$$\text{opp}(\text{grote driehoek}) = \text{opp}(\text{kleine driehoek}) \times (b/a)^2.$$

Verder geldt uiteraard:

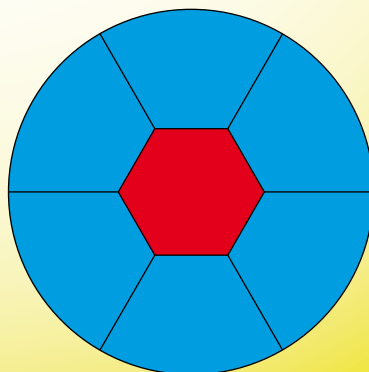
$$\text{opp}(\text{trapezium}) = \text{opp}(\text{grote driehoek}) - \text{opp}(\text{kleine driehoek}).$$

Dus

$$\begin{aligned} \text{opp}(\text{trapezium}) &= \\ \text{opp}(\text{kleine driehoek}) \times (b/a)^2 - \text{opp}(\text{kleine driehoek}) &= \\ = ((b/a)^2 - 1) \times \text{opp}(\text{kleine driehoek}). \end{aligned}$$

De wens is dat $(b/a)^2 - 1 = 6$. Dan is $b/a = \sqrt{7} \approx 2,65$.

OMGESCHREVEN CIRKEL Terug naar de fietslamp. We vervangen nu de buitenste regelmatige zeshoek van figuur 2 door zijn omgeschreven cirkel. De 'spaken' in de rode zeshoek laten we weg, net als in de fietslamp. Het resultaat zie je in figuur 4. Wat wordt dan de verhouding b/a , als we weer zeven gelijke oppervlaktes willen hebben? De oplossing hiervan geven we in het volgende nummer van *Pythagoras*. ■



Figuur 4

DOORLOPER

■ door Matthijs Coster

Het diagram hieronder bevat zes rijen en zes kolommen. Naast elke rij en onder elke kolom staan steeds twee beschrijvingen. Vul per rij en per kolom steeds twee getallen in, die aan de beschrijvingen voldoen (één cijfer per hokje). Alle getallen bevatten minimaal twee cijfers. Bovendien zijn alle getallen verschillend.

Wellicht ten overvloede: machten van n zijn n^2, n^3, n^4 , enzovoort. Een perfect getal is een getal waarvan de som van de echte delers gelijk is aan het getal zelf. Bijvoorbeeld 6 is een perfect getal, want $1 + 2 + 3 = 6$.

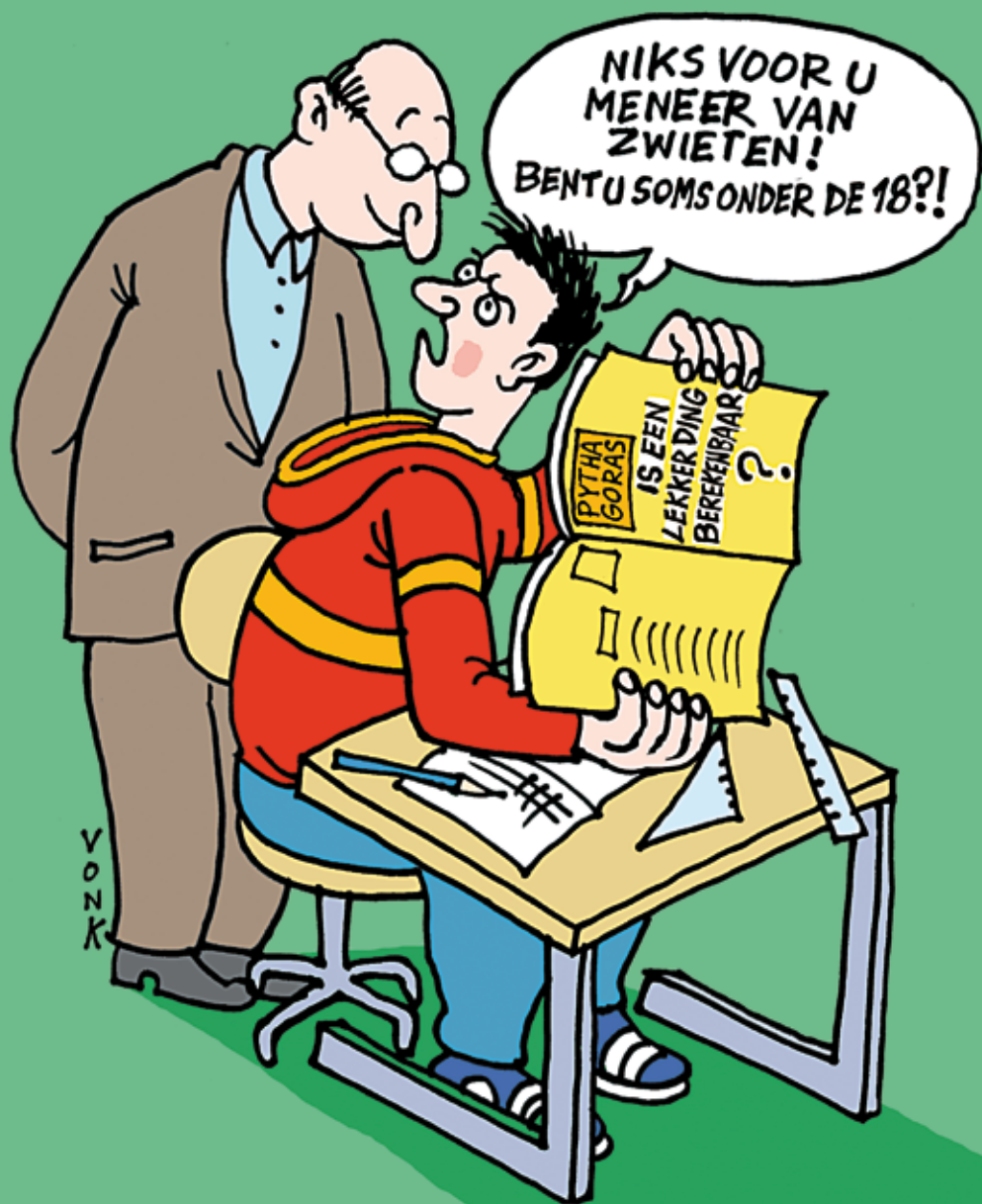
De oplossing zal in de volgende *Pythagoras* verschijnen. ■

	1	2	3	4	5	6	
1							macht van 2; macht van 6
2							macht van 2; product 3 opeenvolgende getallen
3							macht van 7; macht van 2
4							veelvoud van 45; product 3 opeenvolgende getallen
5							macht van 2; perfect getal
6							macht van 5; deler van 'horizontaal 1 (rechts)'

deeler van 'horizontaal 1 (rechts); product 2 opeenvolgende getallen; macht van 5
product 3 opeenvolgende getallen; priemgetal, tevens 1 plus het dubbele van 'horizontaal 4 (links)'
product 4 opeenvolgende getallen; macht van 2
product 2 opeenvolgende getallen; macht van 2
product 3 opeenvolgende getallen; macht van 2
macht van 13; product 2 opeenvolgende getallen
veelvoud van 'horizontaal 1 (links)';

L E E S T PYTHAGORAS

WISKUNDE TIJDSCHRIFT VOOR JONGEREN



leest
PYTHAGORAS
WISKUNDE TIJDSCHRIFT VOOR JONGEREN



Het kloppend maken van een reactievergelijking is een puzzel die met een in de scheikundeles aangeleerde strategie meestal op een kladblaadje wel kan worden opgelost. In een aantal gevallen is een wiskundige aanpak handiger en misschien zelfs noodzakelijk als helderziendheid je in de steek laat.

■ door Jan Dijkstra, Arjeh Cortissos en Derk Pik

HET KLOPPEND MAKEN VAN REACTIE- VERGELIJKINGEN

18 De reactie van zilver met salpeterzuur tot zilvernitraat, water en stikstofmonoxide is zonder een wiskundige aanpak vrijwel niet te doen. De coëfficiënten geven we als onbekenden a , b , c , ... weer:

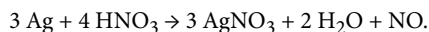


Er komen vier verschillende atoomsoorten in voor: zilver (Ag), waterstof (H), stikstof (N) en zuurstof (O). Links en rechts moet er van elk van deze soorten hetzelfde aantal staan:

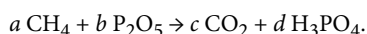
$$\begin{aligned} \text{Ag:} & \quad a = c, \\ \text{H:} & \quad b = 2d, \\ \text{N:} & \quad b = c + e, \\ \text{O:} & \quad 3b = 3c + d + e. \end{aligned}$$

We krijgen vier vergelijkingen met vijf onbekenden a , b , c , d en e . Het gaat om verhoudingen; daarom kunnen we kiezen $a = 1$. We houden vier vergelijkingen over met vier onbekenden. Omdat het om een uitvoerbare chemische reactie gaat, moet er een betekenis hebbende oplossing bestaan. Deze is snel te vinden: uit de eerste vergelijking volgt $c = 1$, uit

de tweede $d = \frac{1}{2}b$ en uit de derde $e = b - 1$. Wanneer we dit substitueren in de vierde vergelijking, vinden we $b = \frac{4}{3}$. Vervolgens vinden we dan $d = \frac{2}{3}$ en $e = \frac{1}{3}$. Aangezien we de coëfficiënten moeten weergeven met zo eenvoudig mogelijk gehele getallen krijgen we na vermenigvuldiging met 3:



Berekeningen maken ook direct duidelijk wanneer je te maken hebt met een niet-uitvoerbare chemische reactie (nepreactie), bijvoorbeeld de reactie van methaan met difosforpentaoxide tot koolstofdioxide en fosforzuur:



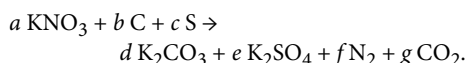
Dit levert de volgende vergelijkingen:

$$\begin{aligned} \text{C:} & \quad a = c, \\ \text{H:} & \quad 4a = 3d, \\ \text{P:} & \quad 2b = d, \\ \text{O:} & \quad 5b = 2c + 4d. \end{aligned}$$

Na de keuze $a = 1$ houden we vier vergelijkingen over met drie onbekenden. Uit de eerste drie vergelijkingen vinden we onmiddellijk $c = 1$, $d = \frac{4}{3}$ en $b = \frac{2}{3}$. Deze waarden voldoen niet aan de vierde vergelijking: de vergelijkingen zijn niet kloppend te maken.

Kan je zelf met bestaande stoffen nog andere nepreacties verzinnen? Laat het ons weten via post@pythagoras.nu.

MEERDERE OPLOSSINGEN We presenteren nu reactievergelijkingen waar we een andere oplossingsstrategie moeten ontwikkelen. De vergelijking die we gaan analyseren is de explosie van buskruit:



We krijgen de volgende vergelijkingen:

$$\begin{aligned} \text{K:} & \quad a = 2d + 2e, \\ \text{N:} & \quad a = 2f, \\ \text{O:} & \quad 3a = 3d + 4e + 2g, \\ \text{C:} & \quad b = d + g, \\ \text{S:} & \quad c = e. \end{aligned}$$

De strategie om $a = 1$ te stellen, geeft ons $2f = 1$, dus $f = \frac{1}{2}$, en vier vergelijkingen met nog vijf onbekenden:

$$\begin{aligned} 1 &= 2d + 2e, \\ 3 &= 3d + 4e + 2g, \\ b &= d + g, \\ c &= e. \end{aligned}$$

Is er een systematische strategie om dit stelsel vergelijkingen op te lossen?

VRIJE VARIABELEN We schrijven de vergelijkingen nog eens op. We zorgen dat de eerste vergelijking de eerste variabele a bevat en we brengen alle variabelen naar de linkerkant:

$$\begin{array}{rcccccl} a & & -2d & -2e & & = 0, \\ a & & & & -2f & = 0, \\ 3a & & -3d & -4e & -2g & = 0, \\ & b & & & & \\ & & -d & & -g & = 0, \\ & & & & & \\ & c & & -e & & = 0. \end{array}$$

We trekken de eerste vergelijking 1 keer van de tweede af. Vervolgens trekken we de eerste vergelijking 3 keer van de derde af. Er staat dan

$$\begin{array}{rcccccl} a & & -2d & -2e & & = 0, \\ & & 2d & +2e & -2f & = 0, \\ & & 3d & +2e & -2g & = 0, \\ & b & & & & \\ & & -d & & -g & = 0, \\ & & & & & \\ & c & & -e & & = 0. \end{array}$$

We zetten de vergelijkingen in een andere volgorde, zodat de tweede vergelijking met de eerstvolgende variabele (b) begint en, meteen ook maar, de derde vergelijking met de derde variabele (c). We krijgen

$$\begin{array}{rcccccl} a & & -2d & -2e & & = 0, \\ & b & & & -g & = 0, \\ & & -d & & & \\ & & & -e & & = 0, \\ & c & & & & \\ & & 2d & +2e & -2f & = 0, \\ & & 3d & +2e & -2g & = 0. \end{array}$$

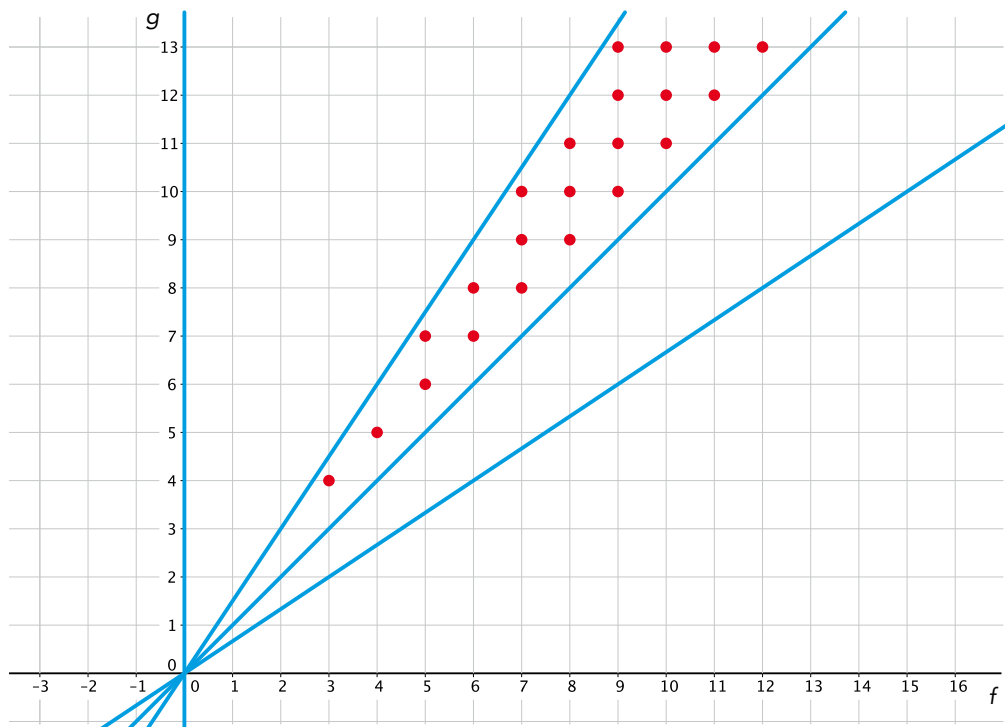
Als we de vierde vergelijking door 2 delen en vervolgens drie keer van de laatste vergelijking aftrekken, krijgen we het stelsel

$$\begin{array}{rcccccl} a & & -2d & -2e & & = 0, \\ & b & & & -g & = 0, \\ & & -d & & & \\ & & & -e & & = 0, \\ & c & & & & \\ & & d & +e & -f & = 0, \\ & & & -e & +3f & -2g = 0. \end{array}$$

Nu brengen we f en g naar de andere kant en zien dat elke keuze voor f en g een nieuwe unieke oplossing voor a , b , c , d en e levert. Je bepaalt deze waarden gewoon van onder naar boven:

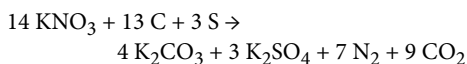
$$\begin{array}{rcccccl} a & & -2d & -2e & & = 0, \\ & b & & & -g & = 0, \\ & & -d & & & = g, \\ & & & -e & & = 0, \\ & c & & & & \\ & & d & +e & & = f, \\ & & & e & & = 3f - 2g. \end{array}$$

De variabelen f en g heten daarom *vrije variabelen*. Kiezen we bijvoorbeeld $f = 7$ en $g = 9$, dan vinden we $e = 3$, $d = 4$, $c = 3$, $b = 13$ en $a = 14$. Kiezen we $f = 5$ en $g = 6$, dan vinden we $e = 3$, $d = 2$, $c = 3$, $b = 8$ en $a = 10$. De bijbehorende vergelijkingen

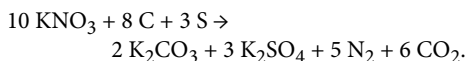


De ongelijkheden $f > 0$, $-2f + 3g > 0$, $3f - 2g > 0$ en $-f + g > 0$. Er blijft een smalle punt over waarin de coördinaten (f, g) liggen die een oplossing geven van de reactievergelijking. Punten die op een lijn door de oorsprong liggen, geven dezelfde reactievergelijking. We zien ook dat de reactievergelijking oneindig veel verschillende oplossingen heeft. Immers: elk rijtje horizontale punten geeft stuk voor stuk verschillende oplossingen voor de reactievergelijking en deze rijtjes worden naar boven toe steeds breder.

zijn:



en



Welke reactievergelijkingen kan je nu maken? Het

is duidelijk dat elk tweetal f en g een oplossing geeft. In het geval van ons voorbeeld zijn de uitkomsten allemaal geheel, echter niet altijd positief.

Voor welke f en g zijn alle waarden a tot en met e positief? Daarvoor bepalen we eerst bij willekeurige f en g de oplossing:

$$a = 2f, \quad b = -2f + 3g, \quad c = 3f - 2g, \\ d = -2f + 2g \quad \text{en} \quad e = 3f - 2g.$$

Al deze waarden moeten groter zijn dan 0. Dit

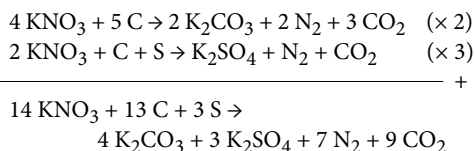
komt neer op de ongelijkheden

$$f > 0, -2f + 3g > 0, 3f - 2g > 0 \text{ en } -2f + 2g > 0.$$

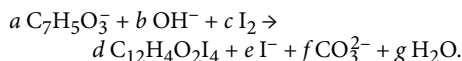
Deze ongelijkheden kunnen we weergeven in een assenstelsel met f op de horizontale as en g op de verticale as (zie de figuur op pagina 20). Hier geeft elke keuze van f en g in bovenstaande vergelijkingen gehele waarden voor a tot en met e . Dit is toe- val. Als we een andere vergelijking bekijken, kun- nen er heel goed breuken in voorkomen. In dat geval kunnen we de uitkomsten met het kleinste ge- mene veelvoud van de noemers vermenigvuldigen.

WAT IS HIER SCHEIKUNDIG AAN DE

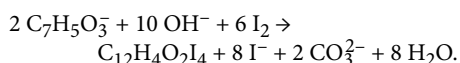
HAND? De reactievergelijkingen hierboven kun- nen we verkrijgen als de som van twee parallel ver- lopende reacties. Beide vergelijkingen kunnen in willekeurige verhoudingen worden opgeteld. We geven een voorbeeld:



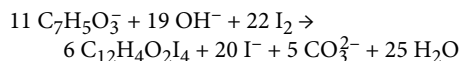
We geven nog een ander voorbeeld waarbij de la- ding ook een rol speelt. Het betreft een redoxreac- tie:



Dit geeft de vergelijkingen $7a = 12d + f$, $5a + b = 4d + 2g$, $3a + b = 2d + 3f + g$ en $2c = 4d + e$, en de lading geeft $a + b = e + 2f$. De waarden $f = 2$ en $g = 8$ geven de oplossing:

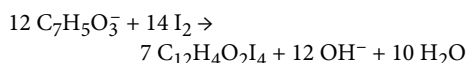


Kan je zelf berekenen dat $f = 5$ en $g = 25$ de oplos- sing

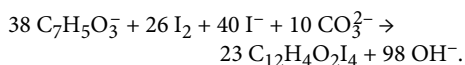


geeft?

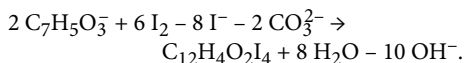
Een scheikundige manier om oplossingen te vinden, is het achterhalen van twee basisreacties waaruit alle oplossingen door optellen en aftrek- ken naar voren komen. Welke twee basisreacties kunnen dat zijn? De applet www.berkeleychurchill.com/software/chembal.php geeft de volgende ver- gelijkingen:



en



Hoe vind je de eerste vergelijking hierboven terug? We vermenigvuldigen de bovenste basisreactiever- gelijking met $\frac{4}{5}$ en de onderste met $-\frac{1}{5}$. Vervolgens tellen we ze bij elkaar op. We krijgen



We zien I^- en CO_3^{2-} links en OH^- rechts van de pijl met een minteken. Als we deze naar de andere kant brengen, hebben we de gezochte vergelijking.

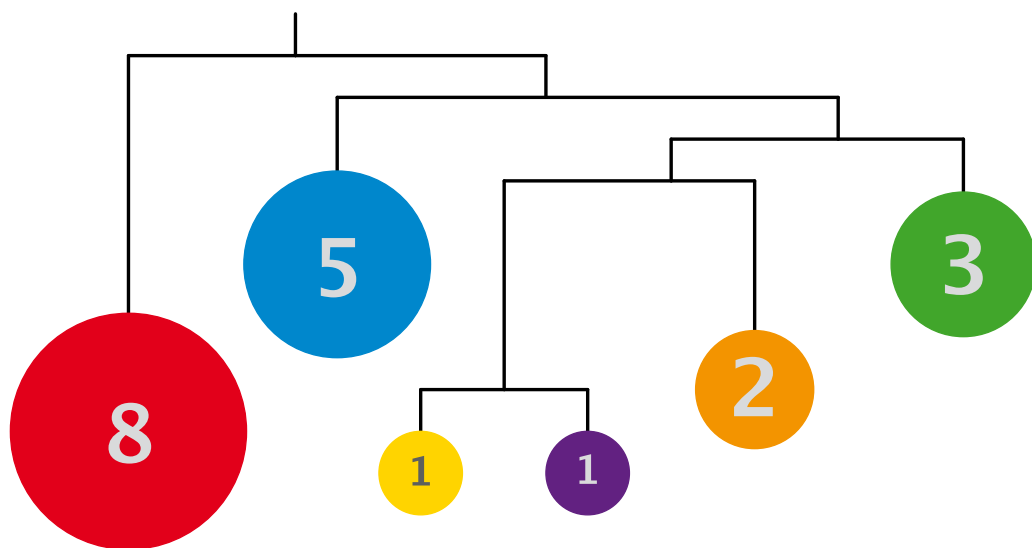
TOT SLOT Met de benadering met vrije variabe- len kan je bepalen hoeveel verschillende oplossin- gen een reactievergelijking heeft. Als er maar één vrije variabele is, dan heeft de vergelijking slechts één echte oplossing. Als er twee vrije variabelen zijn, dan krijgen we de situatie van ons voorbeeld: er is een tweedimensionaal gebied van oplossingen. Het kan nog steeds zo zijn dat er door de ongelijk- heden geen oplossing is.

Als er drie vrije variabelen zijn, krijgen we een ruimtelijke punt met roosterpunten. Kan je een ver- gelijking verzinnen, waarbij drie vrije variabelen optreden? Het is het leukste wanneer de vergelij- king relatief toch nog eenvoudig is. ■

PRIJSVRAAG

■ door Derk Pik

BEWEGENDE WISKUNST



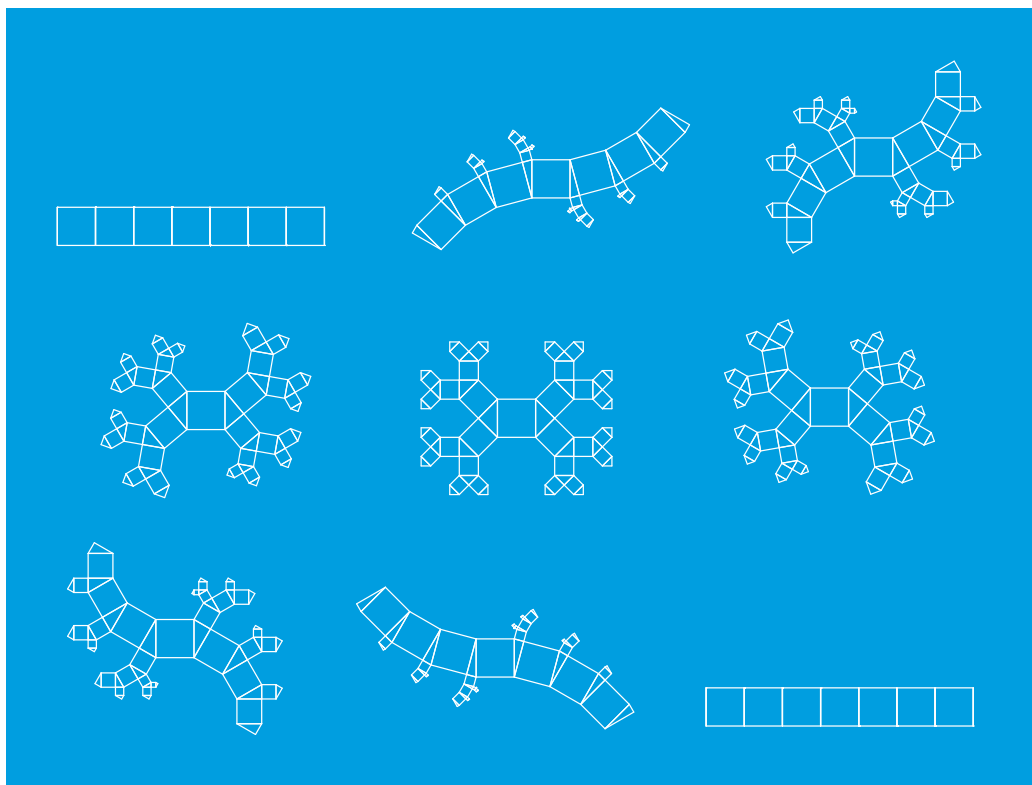
Figuur 1 Een mobile die wij in GeoGebra maakten. Een bewegende versie kun je zien op onze Facebookpagina: facebook.com/Pythgrs. Kan jij een mobile in echt maken?

In de vorige *Pythagoras* presenteerden we onze nieuwe prijsvraag met het thema 'bewegende wiskunde'. We hebben daarbij twee categorieën: digitale en handgemaakte bewegende wiskunst. Van deze laatste variant zijn veel voorbeelden in musea te vinden. In het Guggenheim Museum in New York zijn bijvoorbeeld mobiles te zien van Alexander Calder (1898-1976). Hij gebruikte prachtige vormen, waarbij de gewichtjes in een of andere mooie verhouding staan. Welke lengtes moeten de dwarsbalkjes hebben, als hun gewicht verwaarloosbaar is? Of als hun gewicht niet verwaarloosbaar is? En kan

de mobile altijd vrij ronddraaien? Je kunt proberen een mobile te maken met veel verschillende vormen, gewichten en kleuren.

Een andere fantastische 'bewegende wiskunstenaar' is de Zwitser Jean Tinguely (1925-1991). Hij maakte apparaten die kunnen tekenen, enorme piepende en draaiende machines met grote gietijzeren wielen en fontein die waterstralen in prachtige curves omhoog spuiten. Zijn werk is te zien in Museum Tinguely in Basel.

Het Freudenthal Instituut in Utrecht had eens een wedstrijd waar een tekenmachine met bestaan-



Figuur 2 Negen stills uit een filmpje (zie Facebook) van een zogenaamde Pythagorasboom-worm.

de speciaal ontwikkelde software moest worden bedacht (zie <http://goo.gl/6TPjfb>). Het is natuurlijk geweldig als je zo'n machine in het echt gaat maken!

Op het omslag zie je een still uit een door ons gemaakte 'bewegende Mondriaan'. Een filmpje kun je zien op onze Facebookpagina (facebook.com/Pythagoras). Misschien lukt het jou om een *Victory Boogie Woogie* met springende vierkantjes te maken!

DOE MEE! Je doet mee met een door jou gemaakt filmpje, dat je op YouTube zet. We ontvangen van jou de koppeling naar een YouTube-filmpje met je (digitale of handgemaakte) kunstwerk. De beweging moet uiteraard duidelijk zichtbaar zijn. Daarnaast stuur je ons een (korte) beschrijving van je kunstwerk. Je mag individueel meedoen, maar ook als groep. Meer informatie over richtlijnen en de prijzen kun je vinden in het vorige nummer of op onze website.

Stuur je YouTube-koppeling en beschrijving naar prijsvraag@pythagoras.nu. Vermeld daarbij je naam, leeftijd, klas en school. Bij een klasseninzending moet ook de naam van de wiskundeleraar worden vermeld. Je inzending moet bij ons binnen zijn vóór 15 april 2014. Veel succes! ■



Figuur 3 De Tinguely-Brunnen in het centrum van Basel. Alles beweegt; bekijk een filmpje op onze Facebookpagina.

Het vorige jaar heeft de redactie van *Pythagoras* uitgeroepen tot Erdősjaar: ter gelegenheid van de honderdste geboortedag op 26 maart 2013 van de legendarische wiskundige Paul Erdős verscheen in elke *Pythagoras* die in 2013 uitkwam, een artikel over de wiskunde die Erdős na aan het hart lag. De 'Erdős-wiskunde' is zó leuk, dat we genoeg stof hebben voor meer afleveringen. We zetten de serie daarom nog even voort.

■ door Klaas Pieter Hart



CONVEXE VEELHOEKEN

Paul Erdős bewees samen met zijn goede vriend George Szekeres dat, gegeven een natuurlijk getal n , je altijd een natuurlijk getal N kunt vinden zó dat in elk N -tal punten in het vlak (waarvan er niet drie op één lijn liggen) een convexe n -hoek te vinden is. De vraag is wat de kleinste waarde van N is, die voldoet. Erdős en Szekeres vermoedden dat $N = 2^{n-2} + 1$ genoeg is. Over dit vermoeden, dat nog steeds open staat, ging het artikel 'Happy end' in *Pythagoras* 52-4 (februari 2013).

In dit artikel bekijken we hoe Erdős en Szekeres in ieder geval konden laten zien dat er überhaupt zo'n N is, en hoe ze de eerste bovengrenzen voor die N bepaalden.

ERDŐS, SZEKERES EN VIERTALLEN In elk vijftal punten (waarvan niet drie op één lijn) kun je altijd een convexe vierhoek vinden. Het bewijs van dit speciale geval van het vermoeden van Erdős en Szekeres, afkomstig van Esther Klein, kun je lezen in het genoemde artikel 'Happy end'.

De eerste stap in hun algemene onderzoeken was de volgende opmerking: een n -tal punten $x_1, \dots, x_n$ in het vlak vormen een convexe n -hoek precies dan als elk viertal uit dat n -tal een convexe vierhoek vormen.

Opgave 1. Kun je deze bewering zelf bewijzen?

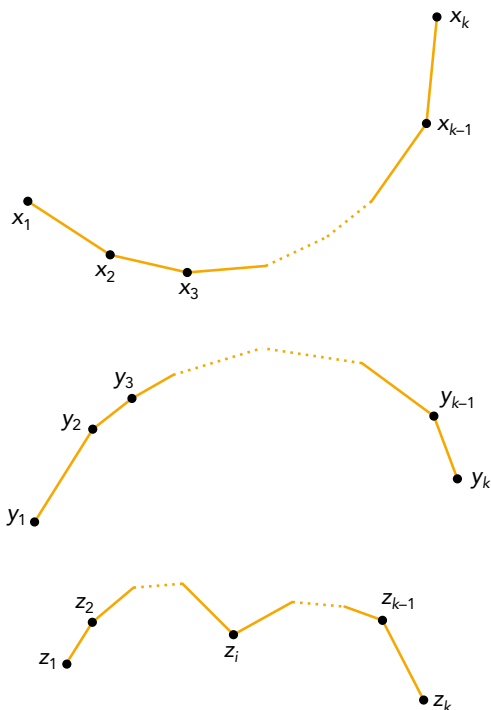
Gecombineerd met de opmerking van Esther Klein dat je in elk vijftal een convex viertal kunt vinden laat dit zien dat in een grote hoeveelheid punten een heleboel convexe viertallen te vinden zijn: elk

vijftal bevat tenslotte een convex viertal. Dit suggereert toch wel een beetje dat er een N als gewenst zou moeten bestaan.

De oplossing van het probleem bleek al te bestaan. Het bestaan van zo'n N volgt namelijk uit een stelling die een paar jaar eerder was bewezen en die nu bekend staat als de Stelling van Ramsey. Deze zeer algemene stelling zegt, in het geval waarin we geïnteresseerd zijn, het volgende.

Stelling van Ramsey. Voor elke n bestaat een N met de volgende eigenschap: telkens als je de viertallen getallen uit $\{1, 2, \dots, N\}$ in twee groepen verdeelt, zeg A en B , dan kun je n getallen $a_1, \dots, a_n$ in $\{1, 2, \dots, N\}$ vinden zó dat het volgende geldt: alle viertallen uit $\{a_1, \dots, a_n\}$ zitten in A óf alle viertallen uit $\{a_1, \dots, a_n\}$ zitten in B .

Hiermee is het probleem opgelost: neem, bij gegeven $n \geq 5$, de N uit de Stelling van Ramsey. Neem nu N punten in het vlak en verdeel de viertallen in twee groepen: groep A bestaat uit de convexe viertallen, groep B bestaat uit de rest: de niet-convexe viertallen. De Stelling van Ramsey garandeert ons dan dat er n punten $x_1, \dots, x_n$ zijn zó dat alle viertallen uit $\{x_1, \dots, x_n\}$ tot A behoren of zó dat alle viertallen uit $\{x_1, \dots, x_n\}$ tot B behoren. De laatste mogelijkheid kan echter niet: telkens als je vijf (of meer) punten hebt, zit daar een convex viertal onder. Dat is het geval van Esther Klein. Er moet dus gelden dat alle viertallen uit $\{x_1, \dots, x_n\}$ tot A beho-



De k -hoeken $x_1x_2\dots x_k$ en $y_1y_2\dots y_k$ zijn convex.
De k -hoek $z_1z_2\dots z_k$ is dat niet.

ren. Dat wil zeggen dat al die viertallen convex zijn. Uit opgave 1 volgt dan dat de n -hoek bepaald door $\{x_1, \dots, x_n\}$ zelf convex is.

TARSY EN DRIETALLEN Zoals gezegd, de Stelling van Ramsey is heel algemeen; hij geldt niet alleen voor viertallen, maar ook voor tweetallen (zie het artikel 'De stelling van Ramsey', *Pythagoras* 44-5 (april 2005)), voor drietallen, ..., voor k -tallen, ...

Met behulp van de stelling voor drietallen kun je het n -hoekprobleem ook oplossen. Tijdens een tentamen vond Michael Tarsy, een Israelische student, het volgende argument: neem, bij gegeven n , het getal N als gegarandeerd door de Stelling van Ramsey voor drietallen. Neem nu N punten in het vlak en nummer ze willekeurig. Verdeel de drietallen in twee groepen: A bestaat uit de drietallen die

tegen de klok in genummerd worden en B bestaat uit de drietallen die met de klok mee genummerd zijn. Dan zijn er dus n punten waarvan óf alle drietallen tegen de klok in gaan óf alle drietallen met de klok mee. Dan vormen die n punten een convexe n -hoek.

Opgave 2. Bewijs de laatste bewering. Hint: bewijs dat elke vierhoek convex is.

EEN BOVENGRENS VOOR N DOOR ERDŐS EN SZEKERES

Beide toepassingen van de Stelling van Ramsey geven nogal grote bovengrenzen voor de N die je nodig hebt om een convexe n -hoek te garanderen. In hun artikel over de convexe n -hoeken bewezen Erdős en Szekeres ook een stelling over monotone rijen:

Stelling van Erdős en Szekeres over monotone rijen. Gegeven is een rij met $n^2 + 1$ verschillende getallen. Hieruit kan je zeker ofwel een monotoon dalende ofwel een monotoon stijgende deelrij met $n + 1$ elementen kiezen.

In het artikel 'Van klein naar groot' in *Pythagoras* 53-1 (september 2013) is het bewijs van Abraham Seidenberg te lezen. Het bewijs van Erdős en Szekeres zelf, dat wat ingewikkelder was dan dat van Seidenberg, combineerden ze met een ander idee om zo op veel betere bovengrenzen voor N te komen. Dat idee hebben we ook al aan het werk gezien in *Pythagoras* (zie opnieuw het artikel 'Happy end'): als je de punten in het vlak hebt gekozen, kun je de hele configuratie zó draaien dat geen enkele verbindingslijn tussen twee punten evenwijdig aan de x - of y -as loopt. Dat betekent dat voor elk tweetal punten x_1 en x_2 de helling van de lijn x_1x_2 ongelijk aan nul is (en ook ongelijk aan oneindig).

Neem een aantal van die punten, zeg $x_1, \dots, x_k$, genummerd van links naar rechts; als de hellingen van $x_1x_2, x_2x_3, \dots, x_{k-1}x_k$ een monotone rij vormen, dan is de k -hoek $x_1x_2\dots x_k$ zeker convex (zie de eerste twee plaatjes in bovenstaande figuur).

Het bewijs gaat nu als volgt: definieer voor k en l het getal $C(k, l)$ als het kleinste aantal punten dat

je nodig hebt om te garanderen dat je k punten hebt met een stijgende rij hellingen of l punten met een dalende rij hellingen. Dan is de kleinste N die we voor een convexe n -hoek nodig hebben niet groter dan $C(n, n)$.

Erdős en Szekeres bewezen toen de volgende formule:

$$C(k, l) = C(k-1, l) + C(k, l-1) - 1. \quad (*)$$

Opgave 3. Ga zelf na dat $C(k, 3) = k$ voor alle k , en dat altijd $C(k, l) = C(l, k)$.

Door terug te rekenen kun je een formule voor $C(n, n)$ opstellen:

$$C(n, n) = \binom{2n-4}{n-2} + 1.$$

Opgave 4. Probeer dit zelf af te leiden (zie ook 'De stelling van Ramsey', *Pythagoras* 44-5 (april 2005)).

HET BEWIJS We nemen $C(k-1, l) + C(k, l-1) - 1$ punten en tonen aan dat we k punten met stijgende hellingen kunnen vinden of l punten met dalende hellingen. Hoe werkt dat? Door zoveel mogelijk stijgende en dalende rijtjes te verzamelen en dan te concluderen dat we hebben wat we zochten.

Neem de eerste $C(k-1, l)$ punten; daar vinden we l punten met dalende hellingen (en dan zijn we klaar) of $k-1$ punten met stijgende hellingen. In dat laatste geval noemen we het laatste punt in dat rijtje a_1 ; we zetten het apart en voegen punt nummer $C(k-1, l) + 1$ toe. Weer vinden we l punten met dalende hellingen (en dan zijn we klaar) of $k-1$ punten met stijgende hellingen; in het eerste geval stoppen we en in het tweede geval noemen we het laatste punt a_2 , zetten het apart en voegen punt nummer $C(k-1, l) + 2$ toe.

In het ongunstigste geval vinden we zo een rij punten $a_1, a_2, \dots, a_{C(k, l-1)}$ die elk aan het eind van een rijtje van lengte $k-1$ met stijgende hellingen staan. Onder deze punten vinden we er k met stijgende hellingen (en zijn we weer klaar) of $l-1$ met dalende hellingen, zeg $b_1, \dots, b_{l-1}$. Nu is b_1 eindpunt van een rij $c_1, \dots, c_{k-2}, c_{k-1} = b_1$ met stijgende hellingen. Omdat geen drie punten op één lijn liggen, zijn de twee hellingen $c_{k-2}b_1$ en b_1b_2 verschillend.

Er zijn nu twee mogelijkheden:

- helling $c_{k-2}b_1$ is kleiner dan helling b_1b_2 ; dan vormen de hellingen in $(c_1, \dots, c_{k-2}, b_1, b_2)$ een stijgende rij.
- helling $c_{k-2}b_1$ is groter dan helling b_1b_2 ; dan vormen de hellingen in $(c_{k-2}, b_1, \dots, b_{l-1})$ een dalende rij.

Opgave 5. Onderzoek wat er gebeurt als je dit bewijs toepast op de stelling van Erdős en Szekeres over monotone rijen. Definieer getallen $M(k, l)$ en probeer een formule als in $(*)$ te bedenken.

(ON)GELIJKHEID Strikt genomen hebben we alleen bewezen dat $C(k, l) \leq C(k-1, l) + C(k, l-1) - 1$, en dus ook dat

$$C(n, n) \leq \binom{2n-4}{n-2} + 1.$$

Erdős en Szekeres schreven in hun artikel dat het niet heel moeilijk is om aan te tonen dat

$$C(n, n) > \binom{2n-4}{n-2}.$$

Dat wil zeggen dat je altijd $\binom{2n-4}{n-2}$ punten kunt tekenen zonder een n -tal met stijgende hellingen en zonder een n -tal met dalende hellingen.

Opgave 6. Bereken $C(3, 3)$, $C(4, 4)$ en $C(5, 5)$ en maak telkens een verzameling met $C(n, n) - 1$ punten die niet een rijtje van lengte n hebben met een monotone rij hellingen.

OVER DE BOVENGRENS Voor de binomiaalcoëfficiënt die in de formule voor $C(n, n)$ staat, geldt een mooie schatting:

$$\frac{4^n}{2n+1} \leq \binom{2n}{n} \leq \frac{4^n}{\sqrt{3n+1}}.$$

Hieruit concluderen we dat $C(n, n)$ ongeveer zo groot is als 4^{n-2} en dat is toch een stuk groter dan de vermoede waarde van $2^{n-2} + 1$ voor de N die nodig is voor convexe n -hoeken.

Opgave 7. Probeer de ongelijkheden voor $\binom{2n}{n}$ zelf te bewijzen of zoek op internet naar een bewijs. ■

HEXPUZZEL

OPLOSSING

In het vorige nummer stond de volgende puzzel: plaats in figuur 1 de getallen 4 tot en met 27, zó dat de som van alle rijen gelijk is. Deze som heet de *magische som*. Een rij bestaat uit vijf of zeven driehoekjes. In drie richtingen zijn er steeds vier rijen.

Om de puzzel op te lossen, rekenen we eerst de magische som uit. Daartoe tellen we de getallen 4 tot en met 27 op:

$$4 + 5 + \dots + 27 = \frac{1}{2} \cdot 24(4 + 27) = 372.$$

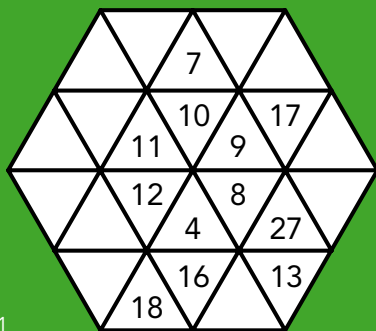
Dit moet steeds worden verdeeld over vier rijen. Per rij is de som dus 93. In de rode en de groene rij (zie figuur 2) kunnen we nu de getallen 19 en 21 invullen.

Ook de som van de getallen in de rode driehoek (zie figuur 3) moet 93 zijn, omdat de som van elk van de drie rijen met lengte vijf rondom de driehoek 93 is. Voor de rode driehoek blijft dus $372 - 3 \cdot 93 = 93$ over. Om dezelfde reden is ook de som van de getallen in de groene driehoek 93. Dat levert 5 op linksonder in de rode en 6 linksboven in de groene driehoek.

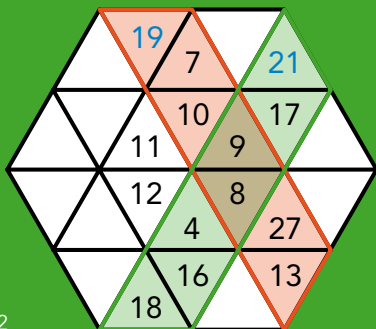
We moeten nog een plekje vinden voor 14, 15, 20, 22, 23, 24, 25 en 26. In elke horizontale rij staan nog twee lege vakjes. Hieronder vermelden we per rij wat de som is van deze twee vakjes, met de mogelijkheden om die som samen te stellen met de beschikbare getallen:

- rij 1: $46 = 20 + 26 = 22 + 24$;
- rij 2: $40 = 14 + 26 = 15 + 25$;
- rij 3: $37 = 14 + 23 = 15 + 22$;
- rij 4: $46 = 20 + 26 = 22 + 24$.

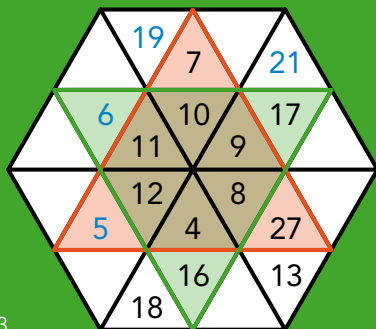
We concluderen dat 20, 22, 24 en 26 in rij 1 en 4 moeten staan. Voor rij 2 zijn dan alleen nog 15 en 25 beschikbaar. En voor rij 3 de getallen 14 en 23. Stel, 14 staat in rij 3 helemaal links. Dan heb je in de schuine rij met $14 + 5 + 18 = 37$ nog 56 over voor twee vakjes. Dat kan niet, dus in rij 3 moeten we links 23 invullen en rechts 14. Stel, 15 staat in rij 2 helemaal links. Dan heb je in de schuine rij met $23 + 15 + 6 + 19 = 63$ nog 30 over voor één vakje. Dat kan niet, dus in rij 2 vullen we links 25 in en rechts 15. Ten slotte vullen we in rij 1 links 20 in en rechts 26. En in rij 4 links 22 en rechts 24. In figuur 4 zie je de compleet ingevulde zeshoek. ■



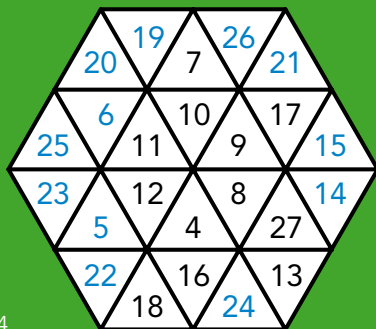
Figuur 1



Figuur 2



Figuur 3



Figuur 4

Deze maand vindt weer de eerste ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade plaats. Vorig jaar deden er bijna 7500 leerlingen van 283 middelbare scholen mee. Dit jaar hopen we dat opnieuw zoveel leerlingen een gooi doen naar een plaats in de tweede ronde. Als opwarmer bespreken we in dit artikel de laatste opgave van de eerste ronde van vorig jaar. Hoewel deze het slechtst werd gemaakt, is hij minder ondoorgroendelijk dan hij op het eerste gezicht lijkt.

■ door Jaap de Jonge

OP ZOEK NAAR 2013

Wat de opgaven van de Wiskunde Olympiade zo aantrekkelijk maakt, is dat ze altijd weer anders zijn. Heb je net met een slimme aanpak een opgave opgelost, bij de volgende sta je weer met lege handen en is het de vraag hoe je de oplossing nú weer vindt. Voor de liefhebber zijn de mooiste opgaven eigenlijk diegene waarvoor je (bijna) niets hebt aan alles wat je daarvoor al gedaan hebt. Zo'n opgave was de laatste in de eerste ronde van 2013.

Opgave B4 (NWO, eerste ronde 2013). We schrijven de getallen 1 tot en met 30000 achter elkaar op zodat een lange rij cijfers ontstaat: 123456789101112.....30000. Hoe vaak komt 2013 in deze rij voor?

Deze opgave is onder meer zo mooi omdat 'met lege handen staan' in wiskundeolympiadeland eigenlijk niet bestaat. Misschien heb je op het eerste gezicht geen idee hoe je een probleem moet aanpakken, maar je kunt altijd proberen het beter te leren kennen en wellicht beter te begrijpen.

Veel mooie opgaven laten je even schrikken en duizelen van de schijnbaar gigantische hoeveelheid mogelijkheden die er voor de oplossing bestaan of van de schijnbaar enorme hoeveelheid mogelijkheden waarbinnen je het antwoord moet zoeken. De getallen 1 tot en met 30000 achter elkaar gezet, hoeveel cijfers achter elkaar levert dat wel niet op? Flink wat, natuurlijk, maar in elk geval niet zo

moeilijk uit te rekenen. Want de 9 getallen 1 tot en met 9 bestaan elk uit 1 cijfer, de 90 getallen van 10 tot en met 99 elk uit 2 cijfers, de 900 getallen van 100 tot en met 999 elk uit 3 cijfers, de 9000 getallen van 1000 tot en met 9999 elk uit 4 cijfers, en de 20001 getallen van 10000 tot en met 30000 elk uit 5 cijfers, wat het totaal brengt op $1 \times 9 + 2 \times 90 + 3 \times 900 + 4 \times 9000 + 5 \times 20001 = 138894$ cijfers op een rij. Dat is best veel, maar in elk geval niet oneindig. Veel minder dan een miljoen zelfs, merken we optimistisch op, dus domweg de hele rij langslopen zou altijd nog kunnen. Met vier cijfers per seconde zouden we binnen tien uur klaar zijn, moe en onvoldaan om onze domme inzet van 'brute force' – het tegendeel van slim denken.

GERICHT ZOEKEN De vraag is of we gericht naar 2013 kunnen zoeken, zodat we het overgrote deel van de cijfers in die lange rij kunnen overslaan. Tja, 2013 komt als getal meteen al voor na 2012, en daarna natuurlijk nog in 12013 (na 12012) en in 22013 (na 22012). Het grote probleem zit hem in de situaties dat een eerste deel van 2013 in een eerste getal voorkomt, en het resterende deel in het daaropvolgende getal, zoals bij het paar 1320-1321. Hoe vaak zou zoiets voorkomen? Dat kunnen we uitvinden door naar vergelijkbare splitsingen van 2013 te kijken. Maar... dan zijn we er ook meteen; 'het grote probleem' ontmaskeren we als de aanpak voor de oplossing!

De cijferreeks 2013 kan voorkomen als onderdeel van één getal (zoals 2013 zelf of 20131 of

3 5 1 0 1 3 5 1 1 1 3 5 1 2 1 3 5 1 3 1 3 5 1 4 1 3 5 1 5 1 3 5 1 6 1 3 5 1 7 1 3 5 1 8 1 3 5 1 9



12013) of kan zijn samengesteld uit delen van opeenvolgende getallen (zoals de tweede helft van 1320 met de eerste helft van 1321). Als samenstelling van vier opeenvolgende getallen zal 2013 niet voorkomen, domweg omdat de cijfers 2, 0, 1 en 3 niet in die volgorde voorkomen. Zou een samenstelling uit drie verschillende getallen wel kunnen? Bekijken we niet 2013 maar, bijvoorbeeld, 9101, dan lukt het met de reeks 9-10-11. Maar in het geval van 2013 gaat dat niet. Van de drie getallen zou het middelste 0 of 1 moeten zijn of het niet-toegestane 'getal' 01. Het is onmiddellijk duidelijk dat die situatie niet kan optreden.

Dat betekent dat 2013 alleen maar voorkomt als onderdeel van één getal of als samenstelling van het eind van een getal en het begin van het volgende getal. Die situaties kunnen we eenvoudig op volgorde zetten:

- 2013 is het begin van een getal in de rij. Dit levert meteen al elf gevallen: 2013, 20130, 20131, ..., 20139.
- 2013 bestaat uit een 2 waarop het ene getal eindigt en 013 waarmee het volgende getal begint. Maar behalve 0 zelf beginnen getallen normaal gesproken niet met een 0, dus dit is geen reële situatie.
- 2013 bestaat uit een 20 waarop het ene getal eindigt en 13 waarmee het volgende getal begint. Dat is interessant: even nadenken doet je beseffen dat daarmee het eerste getal zelf ook met 13 moet beginnen! Die situatie komt ook elf keer voor: 1320-1321 en dan nog 13020-13021, 13120-13121, ..., 13920-13921.

- 2013 bestaat uit een 201 waarop het ene getal eindigt en 3 waarmee het volgende getal begint. Merk op dat vijfcijferige getallen daarvoor niet in aanmerking komen, omdat het enige vijfcijferige getal dat met een 3 begint, 30000 is. We hoeven dus alleen naar viercijferige getallen te kijken, en concluderen dat alleen 3201-3202 de juiste combinatie geeft.

- 2013 is het eind van een getal in de rij, waarbij we het getal 2013 zelf uitsluiten, omdat we dat al bij de eerste situatie hebben geteld. Dit levert twee extra gevallen op: 12013 en 22013.

Tellen we alle mogelijkheden op, dan vinden we 25 keer het getal 2013 in de gegeven rij. Kwestie van netjes ordenen en goed tellen, dat is alles! Maar eerlijk is eerlijk: dat is makkelijk gezegd, nu we het antwoord hebben. Zelf had ik de opgave haastig gemaakt en was ik niet in de buurt van 25 mogelijkheden gekomen! Het is dan ook niet voor niets een B-opgave: met goed denkwerk prima te doen, maar te moeilijk om eventjes uit je mouw te schudden. Maar ja, waarom zou je aan opgaven willen werken waarop je het antwoord onmiddellijk weet?

DOE MEE! Ook in de eerste ronde van 2014 zullen weer opgaven voorkomen die er afschrikwekkend uitzien. Denk dan aan 2013! Lees goed, lees de opgave nog eens, laat op je inwerken wat het probleem van de opgave nou werkelijk is. Grote kans dat je dan voor je het weet al aan de oplossing bent begonnen! ■

13520 13521 13522 13523 13524 13525 13526 13527 13528 13529

PYTHAGORAS OLYMPIADE

■ door Matthijs Coster, Eddie Nijholt en Harry Smit

Doe mee met de Pythagoras Olympiade! Elke aflevering bevat vier opgaven. De eerste twee zijn wat eenvoudiger; onder de goede inzendingen van leerlingen uit de klassen 1, 2 en 3 wordt een cadeaubon van Bol.com ter waarde van 20 euro verloot. De laatste twee zijn echte breinbrekers; onder de goede inzendingen van leerlingen (tot en met klas 6) wordt een bon van 20 euro verloot. Per aflevering wordt maximaal één bon per persoon vergeven.

Daarnaast krijgen leerlingen (tot en met klas 6) punten voor een *laddercompetitie*, waarmee eveneens een cadeaubon van Bol.com van 20 euro te verdienen valt. De opgaven van de onderbouw zijn 1 punt waard, de opgaven van de bovenbouw 2 punten. De leerling met de hoogste score in de laddercompetitie krijgt een bon. Zijn puntentotaal wordt weer op 0 gezet. Wie zes achtereenvolgende keren niets inzendt, verliest zijn punten in de laddercompetitie.

Met de bovenbouw-opgaven kun je ook een plaats in de finale van de Nederlandse Wiskunde Olympiade verdienen, mocht



het via de voorronden niet lukken: aan het eind van elke jaargang worden enkele goed scorende leerlingen uitgenodigd voor de NWO-finale. Niet-leerlingen kunnen met de Pythagoras Olympiade meedoen voor de eer.

HOE IN TE ZENDEN? Inzendingen ontvangen we bij voorkeur per e-mail (getypt of een scan van een handgeschreven oplossing):

pytholym@gmail.com

Je ontvangt een automatisch antwoord zodra we je bericht hebben ontvangen.

Eventueel kun je je oplossing sturen naar Pythagoras Olympiade, PWN

p.a. Centrum Wiskunde & Informatica

Postbus 94079

1090 GB Amsterdam

Voorzie het antwoord van een duidelijke toelichting (dat wil zeggen: een berekening of een bewijs). Vermeld je naam en adres; leerlingen moeten ook hun klas en de naam van hun school vermelden.

Je inzending moet bij ons binnen zijn vóór 1 maart 2014.

30 DE GOEDE INZENDERS VAN NOVEMBER 2013

266: P. Dekker, Krimpen aan de Lek; Jori Koolstra (klas 6), Willem Lodewijk Gymnasium, Groningen; Michelle Sweering (klas 6), Erasmiaans Gymnasium Rotterdam; Tim Vermeulen (klas 6), Isendoorn College, Warnsveld; R. van der Waall (Huizen).

267: P. Dekker, Krimpen aan de Lek; Jelmer Hinssen (klas 3), Stedelijk Gymnasium, Nijmegen; Eva Kapitein (klas 6), Murellius Gymnasium, Alkmaar; Jori Koolstra (klas 6), Willem Lodewijk Gymnasium, Groningen; Arie van der Kraan, Nuth; Peter van der Lecq, Utrecht; Anne Noom (klas 5), Gymnasium Felisenum, Velsen-Zuid; Timen Schenk (klas 5), Gymnasium Felisenum, Velsen-Zuid; Michelle Sweering (klas 6), Erasmiaans Gymnasium Rotterdam; Tim Vermeulen (klas 6), Isendoorn College, Warnsveld; Sjoerd de Vries (klas 5), Gymnasium Felisenum, Velsen-Zuid; R. van der Waall, Huizen; Art Waeterschoot (klas 5), H. Pius X-instituut, Antwerpen; Marc Zuurbier (klas 4), Gymnasium Felisenum, Velsen-Zuid; Bob Zwetsloot (klas 5), Teylingen College, locatie Leeuwenhorst, Noordwijkerhout.

268: Kees Boersma, Vlissingen; P. Dekker, Krimpen aan de Lek; Jelmer Hinssen (klas 3F), Stedelijk Gymnasium, Nijmegen; Eva Kapitein (klas 6A), Murellius Gymnasium, Alkmaar; Jori Koolstra (klas 6B), Willem Lodewijk Gymnasium, Groningen; Peter van der Lecq, Utrecht; Michelle Sweering (klas 6), Erasmiaans Gymnasium Rotterdam; Tim Vermeulen (klas 6 vwo), Isendoorn College, Warnsveld; Sjoerd de Vries (klas 5), Gymnasium Felisenum, Velsen-Zuid; R. van der Waall, Huizen; Art Waeterschoot (klas 5), H. Pius X-instituut, Antwerpen; Bob Zwetsloot (klas 5), Teylingen College, locatie Leeuwenhorst, Noordwijkerhout.

269: Kees Boersma, Vlissingen; P. Dekker, Krimpen aan de Lek;

Jelmer Hinssen (klas 3F), Stedelijk Gymnasium, Nijmegen; Eva Kapitein (klas 6A), Murellius Gymnasium, Alkmaar; Jori Koolstra (klas 6B), Willem Lodewijk Gymnasium, Groningen; Arie van der Kraan, Nuth; Peter van der Lecq, Utrecht; Michelle Sweering (klas 6), Erasmiaans Gymnasium Rotterdam; Tim Vermeulen (klas 6 vwo), Isendoorn College, Warnsveld; R. van der Waall, Huizen; Art Waeterschoot (klas 5), H. Pius X-instituut, Antwerpen; Bob Zwetsloot (klas 5), Teylingen College, locatie Leeuwenhorst, Noordwijkerhout.

Cadeaubonnen: Jelmer Hinssen en Eva Kapitein.

Stand laddercompetitie: Tim Vermeulen (20 p; cadeaubon), Jelmer Hinssen (18 p), Bram Jonkheer (18 p), Jori Koolstra (18 p), Michelle Sweering (18 p), Tara van Belkom (8 p), Lennart Muijres (7 p), Nathan van 't Hof (6 p), Eva Kapitein (5 p), Frenk Out (5 p), Eline Vounckx (5 p), Art Waeterschoot (5 p), Bob Zwetsloot (5 p), Ronen Brilleslijper (4 p), Marijke Bot (3 p), Elien Cambie (3 p), Jonas Cambie (3 p), Ritchie Keijsper (3 p), Jia-Jia ter Kuile (3 p), Marleen Meliefste (3 p), Timen Schenk (3 p), Pim Spelier (3 p), Sjoerd de Vries (3 p), Matthijs Buringa (2 p), Jildert Denneman (2 p), Maud Jonker (2 p), Alex Keizer (2 p), Tom Smeding (2 p), Jelle den Uil (2 p), David Welling (2 p), Luka Zwaan (2 p), Lisa Clappers (1 p), Thijs van Etten (1 p), Bram Honig (1 p), Bastiaan vd Kooij (1 p), Rein Lukkes (1 p), Anne Noom (1 p), Alexander Vermeersch (1 p), Marc Zuurbier (1 p).

Noot van de redactie: in het vorige nummer is R. van der Waall per abuis niet vermeld, waarvoor onze excuses. De opgaven 262 tot en met 265 had hij allemaal goed.

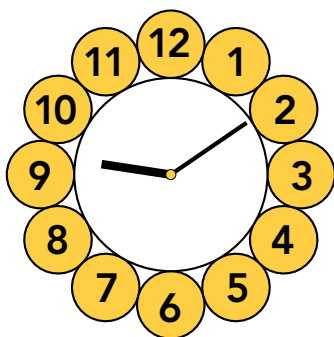
OPGAVE 274

$$2 + 1 + 7 = 10$$

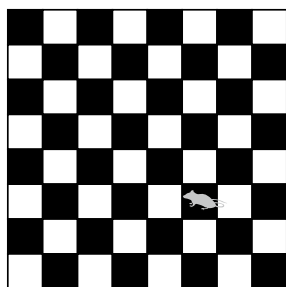
De som van de cijfers van het driecijferige getal 217 is gelijk aan 10. Hoeveel positieve, driecijferige getallen zijn er in totaal waarvoor geldt dat de som van de cijfers gelijk is aan 10?

OPGAVE 275

Onderstaande klok bestaat uit twaalf cirkels met straal 1, waarin de getallen 1 tot en met 12 zijn geplaatst, en een grote cirkel, waarin zich de grote en kleine wijzer bevinden. Wat is de straal van de grote cirkel?



OPGAVE 276



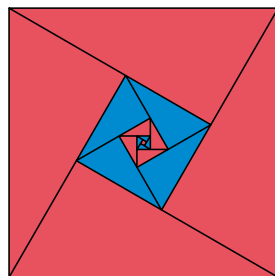
Op een schaakbord (van 8×8 velden) liggen 64 rijstkorrels. Geen enkele rijstkorrel ligt op een rand. Er mogen wel meerdere rijstkorrels op één veld liggen, en er mogen (dus) ook velden leeg zijn. Een muis loop over het schaakbord en eet de rijstkorrels. Per rijstkorrel in zijn buik kan hij een vakje

naar links, naar rechts, naar voren of naar achteren. Als hij bijvoorbeeld drie rijstkorrels heeft gegeten, kan hij eerst naar rechts en dan twee keer naar voren. Met n rijstkorrels in zijn buik kan hij zich n keer op deze manier verplaatsen. De muis eet onderweg alle rijstkorrels die hij tegenkomt op de velden die hij aandoet.

Laat zien dat er altijd een veld is waar de muis kan beginnen en vanaf dat veld een route op het schaakbord kan vinden waarbij hij alle 64 rijstkorrels opeet.

OPGAVE 277

Gegeven is een vierkant met zijden van 2. Hierin leggen we vier rode driehoeken met hoeken van 30° , 60° en 90° , zoals in de figuur. Vervolgens leggen we op dezelfde manier vier blauwe driehoeken (eveneens met hoeken van 30° , 60° en 90°) in het aldus ontstane kleinere vierkant. In het vierkant dat nu ontstaat, leggen we weer vier rode driehoeken. Dit proces zetten we eindeloos voort. Wat zal na oneindig veel stappen de oppervlakte van het totale rode gebied zijn?



OPLOSSING 266

Je hebt 15 kaasprikkertjes. Leg met een willekeurig aantal hiervan een driehoek, door de einden aan elkaar te leggen. Prikkertjes mogen in elkaars verlengde liggen om een driehoekszijde te vormen. Hoeveel driehoeken kun je maken?

Oplossing. We kunnen alle mogelijkheden uitschrijven (abc betekent: een driehoek met zijden van a , b respectievelijk c kaasprikkertjes): 111, 122, 133, 144, 155, 166, 177, 222, 233, 244, 245, 255, 256, 266, 267, 333, 334, 335, 344, 345, 346, 355, 356, 357, 366, 444, 445, 446, 447, 455, 456, 555.

Het aantal mogelijke driehoeken kunnen we ook vinden door middel van een berekening. Noem de

zijden van de driehoek a , b en c . Veronderstel dat $a \leq b \leq c$. Bovendien moet gelden $c < a + b$ (driehoeksongelijkheid). We onderscheiden twee gevallen: $a + b \leq 8$ en $a + b \geq 9$.

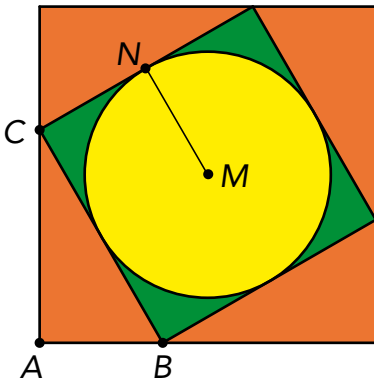
In het eerste geval kan c de waarden $b, \dots, 7$ aannemen, maar wel moet gelden $c \leq a + b - 1$. Er moet gelden $a \leq 4$. Als $a = 1$, is $b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Als $a = 2$, is $b \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$. Als $a = 3$, is $b \in \{3, 4, 5\}$. En als $a = 4$, is $b \in \{4\}$. Aangezien $b \leq c \leq a + b$, zijn er a mogelijke waarden voor c . In al deze gevallen geldt $a + b + c \leq 15$. Het aantal mogelijke driehoeken is $7 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 1 \cdot 4 = 30$.

We zoeken ook in het tweede geval het aantal mogelijke driehoeken. Er geldt $a + 2b \leq a + b + c \leq 15$ ofwel $b \leq (15 - a)/2$. In dit geval geldt $a + b \geq 9$, ofwel $9 - a \leq b \leq (15 - a)/2$, ofwel $3 \leq a$. Uit $3a \leq a + b + c \leq 15$ volgt $a \leq 5$. We vinden uiteindelijk de driehoeken 366, 455, 456 en 555. Dit zijn dus 4 driehoeken.

Het totale aantal driehoeken is dus $30 + 4 = 34$.

OPLOSSING 267

Gegeven is een vierkant waarbinnen een kleiner vierkant is getekend met de hoekpunten op de zijden. Binnen het kleine vierkant ligt een cirkel met middelpunt M die alle zijden raakt, onder andere in N . Er geldt $NM = AB$. Bereken $\angle ABC$.



Oplossing. De zijde van het groene vierkant is twee keer de straal van de gele cirkel, dus $BC = 2MN = 2AB$. Er geldt:

$$\cos \angle ABC = \frac{AB}{BC} = \frac{AB}{2AB} = \frac{1}{2},$$

dus $\angle ABC = 60^\circ$.

OPLOSSING 268

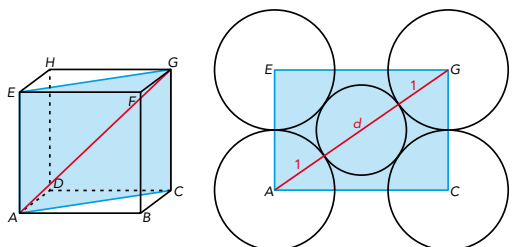
In het restaurant 'De schijf van wortel vijf' staan er vijf items op de menukaart. De prijs van elk item is een geheel, positief getal. Het bijzondere is dat de ober altijd precies weet wat er besteld is, enkel en alleen door te kijken naar de totale prijs van wat er besteld is. Dit is ongeacht hoeveel er besteld is, maar wel wanneer hij er zeker van is dat geen enkel item meer dan één keer voorkomt. Wat is de kleinste mogelijke prijs voor alle vijf items tezamen?

Oplossing. Er zijn $2^5 = 32$ mogelijkheden om een combinatie te kiezen van deze 5 gerechten. Eén van die mogelijkheden is niets kiezen. Als we deze mogelijkheid uitsluiten, houden we 31 mogelijkheden over. De gerelateerde totaalbedragen variëren van € 1 tot en met € 31. Door de verschillende gerechten achtereenvolgens € 1, € 2, € 4, € 8 en € 16 te laten kosten, kunnen al deze bedragen worden gerealiseerd. Het totaalbedrag voor alle gerechten is dan € 31.

OPLOSSING 269

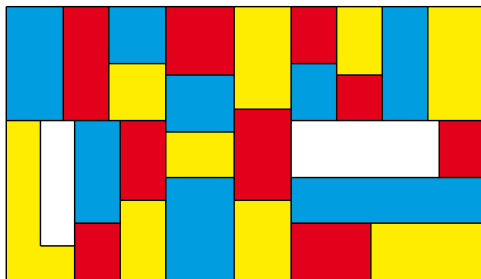
In een kubus van $4 \times 4 \times 4$ worden negen ballen geplaatst: acht ballen met straal 1, en de negende bal wordt precies in het midden geplaatst. Wat is de straal van deze negende bal, als deze bal de resterende acht ballen raakt?

Oplossing. Noem de middelpunten van de acht ballen met straal 1 achtereenvolgens A, B, C, D, E, F, G, H . Deze acht punten zijn de hoekpunten van een kubus van $2 \times 2 \times 2$ (zie linkerfiguur). We bekijken de dwarsdoorsnede $ACGE$ van deze kubus (zie rechterfiguur). Met Pythagoras (in driehoek ABC) vinden we $AC = 2\sqrt{2}$. Nogmaals Pythagoras toepassen (in driehoek ACG) geeft $AG = 2\sqrt{3}$. Deze diagonaal AG omvat twee stralen van ballen met straal 1 en de diameter van de kleinere bal. Deze bal heeft dus straal $\frac{1}{2}(2\sqrt{3} - 2) = \sqrt{3} - 1$.



OPLOSSING MONDRIAANS KERSTKAART

We geven de oplossing van de puzzel op pagina 26 van het novembernummer. Eerst tonen we aan dat niet alle zes gebieden 1 tot en met 6 met de drie kleuren rood, geel en blauw gekleurd kunnen worden. Gebied 3 grenst aan elk van de overige vijf gebieden. Stel dat gebied 3 geel is. De gebieden 1, 2, 6, 5, 4 moeten dan afwisselend rood en blauw zijn. Dat is echter onmogelijk, omdat dit aantal gebieden on-even is: 1 en 4 krijgen dan dezelfde kleur en dat mag niet. Met hetzelfde argument kun je bewijzen dat de acht gebieden 16, 19, 20, 21, 25, 26, 27, 28 niet met louter rood, geel en blauw gekleurd kunnen worden. We concluderen dat ten minste één van de zes gebie-



den 1, 2, 3, 4, 5, 6 en ten minste één van de acht gebieden 16, 19, 20, 21, 25, 26, 27, 28 een van de kleuren wit, zwart en violet moet hebben, waaruit volgt dat $w + z + v \geq 2$, en dus $2w + 3z + 4v \geq 2(w + z + v) \geq 4$. Omdat $(r - 9)^2 + 2(g - 9)^2 + 3(b - 8)^2 \geq 0$, is de kleinste mogelijke Mondriaanwaarde 4. De figuur laat zien dat deze Mondriaanwaarde ook echt mogelijk is ($r = g = 9, b = 8, w = 2, z = v = 0$).



53ste jaargang nummer 3
januari 2014
ISSN 0033 4766

Pythagoras stelt zich ten doel jongeren kennis te laten maken met de leuke en uitdagende kanten van wiskunde. Pythagoras richt zich tot leerlingen van vwo en havo en alle anderen die jong van geest zijn.

Internet www.pythagoras.nu

Hoofredacteur Derk Pik

Eindredacteur Alex van den Brandhof

Redactie Matthijs Coster,
Jeanine Daems, Jan Guichelaar,
Klaas Pieter Hart, Paul Levrie,
Marc Seijlhouwer

Vormgeving Grafisch Team
Digipage BV, Leidschendam

Druk Drukkerij Ten Brink, Meppel

Uitgever Koninklijk Wiskundig
Genootschap (KWG)

Management Pythagoras Jan Turk,
Mark Veraar (KWG), Derk Pik

Lezersreacties en kopij

Bij voorkeur per e-mail; lezersreacties naar Jan Guichelaar, jan@pythagoras.nu en kopij naar Derk Pik, derk@pythagoras.nu.
Eventueel per post naar Pythagoras, p.a. Centrum Wiskunde & Informatica, Postbus 94079, 1090 GB Amsterdam.

Abonnementen, bestellingen en mutaties

Abonneservice Pythagoras
Postbus 2238
5600 CE Eindhoven
Telefoon 088 226 5258
E-mail: abonnementen@pythagoras.nu

Abonnementsprijs

(zes nummers per jaargang)
€ 26,00 (Nederland en België),
€ 29,00 (overige landen),
€ 17,00 (groepsabonnement NL/B),
€ 26,00 (geschenkabonnement NL/B),
€ 29,00 (geschenkabonnement overige landen).

Een geschenkabonnement stopt automatisch na één jaar. Overige abonnementen gelden tot wederopzegging. Zie www.pythagoras.nu voor verdere toelichtingen.

Aan dit nummer werkten mee

Alex van den Brandhof
(alex@pythagoras.nu),
Arjeh Cortissos
(cortissos@hotmail.com),
Matthijs Coster
(matthijs@pythagoras.nu),
Jeanine Daems
(jeanine@pythagoras.nu),
Jan Dijkstra
(j.j.dijkstra@vu.nl),
Jan Guichelaar
(jan@pythagoras.nu),
Klaas Pieter Hart
(kp@pythagoras.nu),
Jaap de Jonge
(jaap@wiskundeolympiade.nl),
Paul Levrie
(paul@pythagoras.nu),
Eddie Nijholt
(eddie@pythagoras.nu),
Derk Pik
(derk@pythagoras.nu),
Frank Roos
(fd_r@yahoo.com),
Marc Seijlhouwer
(marc@pythagoras.nu),
Harry Smit
(h.j.smit@students.uu.nl).

Pythagoras wordt mede mogelijk gemaakt door de bijdragen van de onderstaande instituten en instellingen.



ACKERMANN

$$A(m, n) = \begin{cases} n + 1 & \text{als } m = 0 \\ A(m - 1, 1) & \text{als } m > 0 \text{ en } n = 0 \\ A(m - 1, A(m, n - 1)) & \text{als } m > 0 \text{ en } n > 0 \end{cases}$$

De functie die je hier ziet, is de zogeheten *Ackermannfunctie*, vernoemd naar de Duitse wiskundige Wilhelm Ackermann (1896-1962). De functie wordt recursief gedefinieerd voor natuurlijke getallen m en n . Het is een van de bekendste voorbeelden van een functie die meer dan exponentieel stijgt. Sterker nog: de Ackermannfunctie is sneller dan alles wat je met 'gewone' wiskunde (zoals de faculteit of n^n) kunt maken. De waarde van $A(4, 2)$ is $2^{65.536} - 3$, een getal dat al 19.729 cijfers heeft!

