

PYTHA GORAS

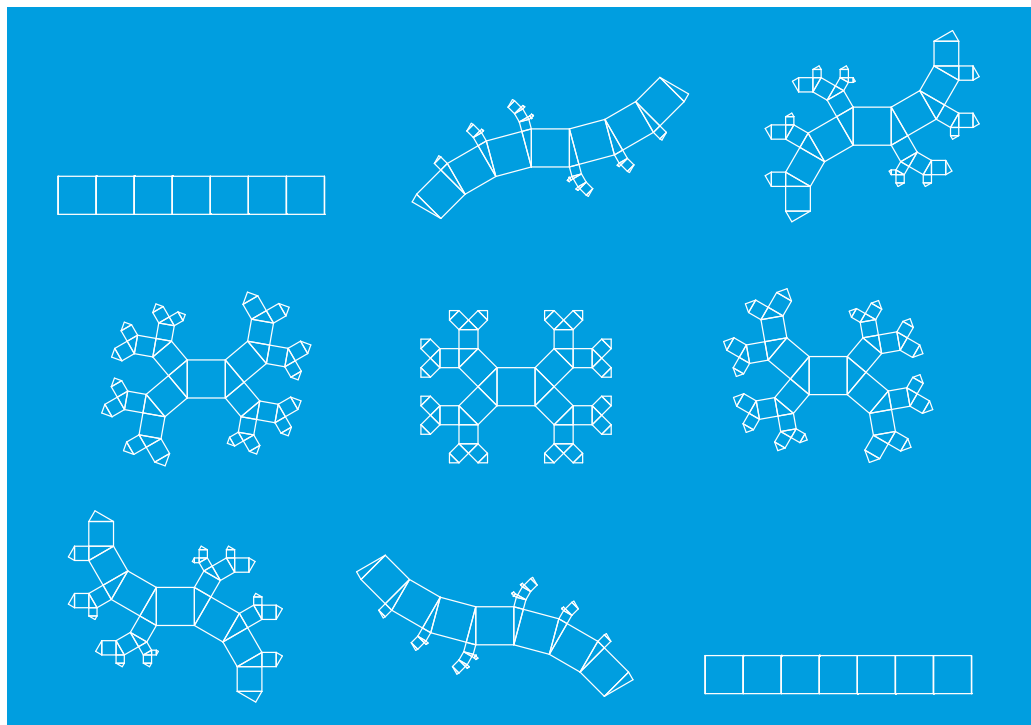
WISKUNDETIJDSCHRIFT VOOR JONGEREN



53ste JAARGANG - NUMMER 4 - FEBRUARI 2014

PRIJSVRAAG

BEWEGENDE WISKUNST



Doe mee met de prijsvraag van *Pythagoras*. Knutsel een bewegend wiskunstig werk in elkaar, of maak op de computer iets dat beweegt en op een of andere manier met wiskunde te maken heeft. Laat je inspireren door de voorbeeldfilmpjes op onze Facebookpagina, met onder meer een bewegende Pythagorasboom en een bewegende Mondriaan.

Je doet mee met een door jou gemaakt filmpje, dat je op YouTube zet. We ontvangen van jou de koppeling naar een YouTube-filmpje met je (digitale of handgemaakte) kunstwerk. De beweging moet uiteraard duidelijk zichtbaar zijn. Daarnaast stuur je ons een (korte) beschrijving van je kunstwerk. Je mag individueel meedoen, maar ook als groep. Meer informatie over richtlijnen en prijzen kun je vinden in het novembernummer of op www.pythagoras.nu.

Stuur je YouTube-koppeling en beschrijving naar prijsvraag@pythagoras.nu. Vermeld daarbij je naam, leeftijd, klas en school. Bij een klasseninzing moet ook de naam van de wiskundecent worden vermeld. Je inzending moet bij ons binnen zijn vóór 15 april 2014. Veel succes!

**Volg Pythagoras
ook op Facebook.**



www.facebook.com/Pythgrs



Scan mij!

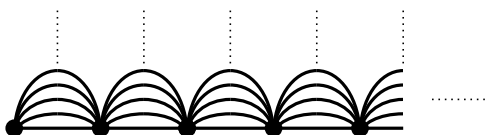
INHOUD



ROTERENDE RIJEN

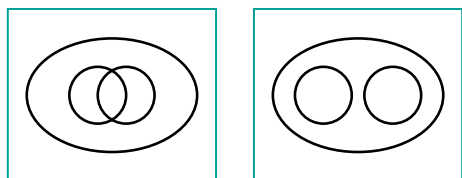
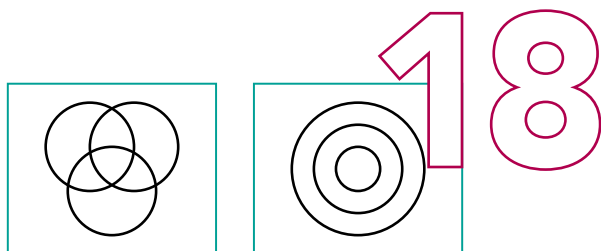
In de zesde aflevering van onze GeoGebra-serie maken we rijen punten en rijen driehoeken. Die driehoeken laten we vervolgens bewegen.

24



ONEINDIGE EULERWANDELINGEN

Een Eulerwandeling in een graaf is een wandeling waarbij elke lijn precies één keer wordt doorlopen. In de twintigste eeuw breidden Erdős en Vázsonyi het achttiende-eeuwse concept van Eulerwandelingen uit naar oneindige grafen.



BEDRIJF, BAKKERIJ EN KLEDINGWINKEL

Welke van bovenstaande vier figuren past het beste bij de drie woorden bedrijf, bakkerij en kledingwinkel? Een artikel over Venn- en Euler-diagrammen.

EN VERDER

- 2 Kleine nootjes
- 4 Getallen onthouden
- 9 Journaal
- 10 Een puzzel in evenwicht
- 14 Ster van de dag
- 15 Doorloper – oplossing
- 16 XKCD
- 23 Van A naar Berekenen
- 28 Producten van delers
- 30 Pythagoras Olympiade
- 33 Oplossing Fietslappuzzel

Omslagillustratie: de puzzelstukken van 'Een puzzel in evenwicht' (zie pagina 10).

■ **NIVEAUBALKJES** Sommige pagina's bevatten één of meer zwarte balkjes onder het paginanummer. Voor artikelen zonder balkje is geen specifieke voorkennis nodig. Artikelen met één balkje bevatten wiskunde uit de onderbouw. Artikelen met twee balkjes vereisen kennis uit de bovenbouw. Drie balkjes: net iets moeilijker.

KLEINE NOOTJES

■ door Jan Guichelaar

ZINNIGE ZIN

Vul in onderstaande zin twee getallen in, uitgeschreven in letters.

In deze zin staan letters 'e' en letters 'n'.

GETALLEN MAKEN

Neem een natuurlijk getal (1, 2, 3, ...) en vermenigvuldig het met 3. Tel daarna de cijfers bij elkaar op en deel die som ten slotte door 3. Dan krijg je altijd weer een natuurlijk getal (ken je de regel van deelbaarheid door 3?).

Vind de eerste zes getallen die tot 1 leiden. Wat is het kleinste getal dat tot 10 leidt? Kun je met elk getal eindigen?

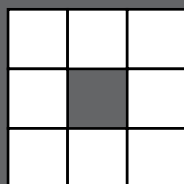
2 → 6 → 6 → 2
17 → 51 → 6 → 2
33 → 99 → 18 → 6

2

GATEN PLAKKEN MET BLOKKEN

Je hebt 13 houten kubusblokjes. Plak die zodanig aan elkaar dat je een bouwwerkje krijgt waar minstens één gat in zit. Figuur a toont een voorbeeld: een vierkant van 3 bij 3 met een gat. Blokjes mogen niet 'uitsteken', dus aan het bouwwerkje van figuur a mag je geen blokjes vastplakken zoals in figuur b, tenzij er een tweede gat ontstaat, zoals in figuur c.

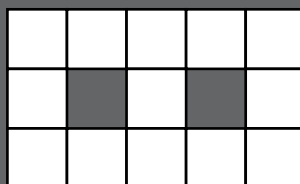
Hoeveel verschillende bouwwerkjes kun je maken? Twee bouwwerkjes zijn hetzelfde als ze door een draaiing (eventueel in de ruimte) in elkaar overgevoerd kunnen worden.



a



b



c

Kleine nootjes zijn eenvoudige opgaven die weinig of geen wiskundige voorkennis vereisen om opgelost te kunnen worden. De antwoorden vind je in het volgende nummer van *Pythagoras*.



SCHAATSWEDSTRIJD

Vijf vrienden starten op een schaatsbaan en rijden een wedstrijd over tien ronden. Na een tijdje rijden ze achter elkaar. Daarna wordt Kees vier keer door een vriend ingehaald en haalt zelf drie vrienden in. Toch wordt hij laatste. Hoe kan dat?

CHOCOLAATJES

Isa krijgt een zak chocolaatjes. Op de eerste dag geeft ze de helft weg en eet ze er zelf één. Hetzelfde doet ze op de tweede dag met wat ze nog over heeft. Enzovoort. Op de vijfde dag eet ze na haar gift haar laatste chocolaatje op. Hoeveel kreeg ze er?



OPLOSSINGEN KLEINE NOOTJES NR. 3

De cijfers van het nieuwe jaar. Nog elf keer: de jaren 2041, 2104, 2140, 2401, 2410, 4012, 4021, 4102, 4120, 4201, 4210.

Lange tunnel. Je moet $6 \times 40 = 240$ meter afleggen. Je loopt met 3,6 km/u, dat is precies 1 m/s. Je loopt dus in 240 seconden naar de restauratie. De voorkant van de trein legt in die 240 seconden de lengte L van de tunnel plus 240 meter af, met een snelheid van 216 km/u, ofwel 60 m/s. Dus $L + 240 = 60 \times 240 = 14.400$, dus $L = 14.400 - 240 = 14.160$ meter.

Bonbons. In totaal zijn er $24 \times (5 + 3 + 1) = 24 \times 9 = 216$ bonbons en $3 \times 24 = 72$ zakjes. Ieder krijgt dus $72/18 = 4$ zakjes met in totaal $216/18 = 12$ bonbons. Dat kan op de volgende manieren:

- 1 zakje met 5 bonbons, 2 zakjes met 3 bonbons en 1 zakje met 1 bonbon;
- 2 zakjes met 5 bonbons en 2 zakjes met 1 bonbon;
- 4 zakjes met 3 bonbons.

Oom Willem verdeelt de zakjes nu als volgt: 8 krijgen verdeling a, 8 verdeling b en 2 verdeling c. Er zijn overigens meerdere oplossingen.

Rare breuken. Twee mogelijke oplossingen zijn:

$$2\frac{1}{2} + 1\frac{2}{3} = 2\frac{1}{2} \times 1\frac{2}{3} \text{ en } 2\frac{1}{5} + 1\frac{5}{6} = 2\frac{1}{5} \times 1\frac{5}{6}.$$

Een oplossing met alleen de cijfers 1, 2, 3 en 4 is

$$2\frac{1}{3} + 1\frac{3}{4} = 2\frac{1}{3} \times 1\frac{3}{4}.$$

Invuloefening.

3	1	4
-1	2	1

0 2 3 5

Pythagoras leert je de beste rekentrucs. Laat je leraar of ouders verstandig staan door binnen tien seconden een wortel zonder rekenmachine te kennen of moeilijk ogende producten te berekenen.

■ door Marc Seijlhouwer

GETALLEN ONTHOUDEN

De afgelopen afleveringen gaven we al trucs voor het vermenigvuldigen, optellen en delen van getallen. Er is echter iets dat misschien nog handiger is dan het kennen van speciale trucs: je geheugen. En dan vooral je geheugen voor getallen. Door van getallen bepaalde dingen te onthouden, kan je heel veel berekeningen versnellen of zó uit je geheugen halen. En de meeste van deze trucs zijn niet moeilijker dan de tafels die je op de basisschool al in je hoofd stampte.

Om te beginnen is het handig om kwadraten te (her)kennen. Waarschijnlijk ken je de kwadraten onder de 100 al: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81 en 100. Met deze kwadratenkennis kan je al heel wat. Op het moment dat je een van deze getallen ziet tijdens het worteltrekken, weet je bijvoorbeeld dat de som meteen eenvoudiger wordt. Zo reken je bijvoorbeeld $\sqrt{324}$ snel uit: je hoeft alleen maar te weten dat $324 = 9 \times 36$. Aangezien dat twee kwadraten zijn, weet je nu dat

$$\sqrt{324} = \sqrt{9 \times 36} = \sqrt{9} \times \sqrt{36} = 3 \times 6 = 18.$$

Als je kwadraten nog wat verder leert (121, 144, 169, 196, 225, enzovoort) herken je steeds meer getallen als samenstellingen van kwadraten en kan je snel rekenen. Het is handig om alle kwadraten van de getallen 1 tot en met 25 te kennen. Dan had je ook 324 herkend als 18×18 .

Eigenlijk wil je zoveel mogelijk getallen herken-

nen als een of ander product. Om te beginnen kan je naast de kwadraten ook de producten van twee opeenvolgende getallen leren herkennen. We krijgen de volgende rij:

2, 6, 12, 20, 30, 42, 56, 72, 90, ...

Deze getallen liggen mooi tussen de kwadraten in. Zo is $(49 + 64)/2 = 56\frac{1}{2}$: een half meer dan 7×8 . Dit is waar voor alle opeenvolgende kwadraten. Bijvoorbeeld: $25^2 = 625$ en $26^2 = 676$. Het gemiddelde is $650\frac{1}{2}$. Ook geldt $25 \times 26 = 650$.

Opgave 1. Kan je dat met een berekening uitleggen?

MERKWAARDIGE PRODUCTEN Kwadraten helpen enorm bij sommen met merkwaardige producten. Alle drie de merkwaardige producten hebben termen met een kwadraat erin. We nemen als voorbeeld $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$. Als je kwadraten kent en oefent met het herkennen van de verschillen tussen twee kwadraten, kan je snel een som van de vorm aan de linkerkant van de vergelijking herkennen en oplossen. Daardoor gaat hoofdrekenen soms veel sneller.

Hoe pas je de merkwaardige producten dan toe? Stel dat je twee getallen hebt die niet te ver van elkaar liggen. Dan kan je een vermenigvuldiging vlug uitvoeren door het gemiddelde van de twee getallen en de helft van hun verschil te berekenen. Ver-

volgens kwadrateer je deze getallen en trek je ze van elkaar af. Bijvoorbeeld:

$$24 \times 28 = (26 - 2)(26 + 2) = 26^2 - 2^2 = 672.$$

Dit werkt alleen als beide getallen even of beide getallen oneven zijn, maar als dat niet het geval is, kun je dat oplossen door bij een van de twee getallen 1 op te tellen of af te trekken. Dit moet je daarna natuurlijk weer corrigeren. Een voorbeeld:

$$17 \times 18 = 16 \times 18 + 18 = (17 - 1)(17 + 1) + 18 = 17^2 - 1^2 + 18 = 306.$$

Omdat 17 en 18 opeenvolgende getallen zijn, hadden we hier ook de eigenschap die je in opgave 1 hebt bewezen, kunnen gebruiken:

$$17 \times 18 = (17^2 + 18^2)/2 - \frac{1}{2} = 306.$$

Dit helpt natuurlijk alleen als je $(17^2 + 18^2)/2$ al uit je hoofd kent en het niet hoeft uit te rekenen.

PRODUCTEN VAN OPEENVOLGENDE GETALLEN Stel, je kent 306 al uit je hoofd als 17×18 . Kan je dan ook 16×19 makkelijk uitrekenen? Of 14×21 ? Kijk nog eens naar de rij producten van twee opeenvolgende getallen:

2, 6, 12, 20, 30, 42, 56, 72, 90, ...

Er geldt:

$$\begin{aligned} 16 \times 19 &= 306 - 2, \\ 15 \times 20 &= 306 - 6, \\ 14 \times 21 &= 306 - 12. \end{aligned}$$

Opgave 2. Kan je uitvinden waarom dit zo is?

Nu heb je naast de tafels ook kwadraten en producten van opeenvolgende getallen in je hoofd zitten. Weet je nu genoeg om al het hoofdrekenen makkelijk te maken? Misschien wel, maar er zijn nog veel meer getallen die aandacht verdienen. Als je van een paar getallen bijzonderheden leert, kan je nog veel meer. We hebben al een paar trucs besproken voor specifieke getallen; als een getal op 5 eindigt,

kan je eenvoudig een kwadraat uitrekenen. Wat valt er nog meer te zeggen?

BIJZONDERE GETALLEN Priemgetallen herkennen kan helpen bij het vereenvoudigen van breuken. Zie je dat je na een vereenvoudiging een priemgetal boven of onder overhoudt, dan is verder vereenvoudigen onmogelijk en kan je dus ophouden.

Bij het ontbinden van de meeste grote getallen (uit het dagelijks leven) heb je genoeg aan de priemgetallen onder de 100:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

Allerlei machten van kleine getallen zijn ook handig, zoals de rij van machten van 2:

2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, ...

de rij van machten van 3:

3, 9, 27, 81, 243, 729, ...

en de rij van machten van 5:

5, 25, 125, 625, ...

Soms liggen machten dicht bij elkaar, zoals 125 en 128, of 243 en 256.

Als afsluiting schatten we een erg grote macht:

$$6^{15} = 2^{15} \times 3^{15} = 2^{15} \times (3^5)^3 \approx 2^{15} \times (2^8)^3 = 2^{39} = \frac{1}{2} \times 2^{40} \approx \frac{1}{2} \times 10^{12} = 5 \times 10^{11}.$$

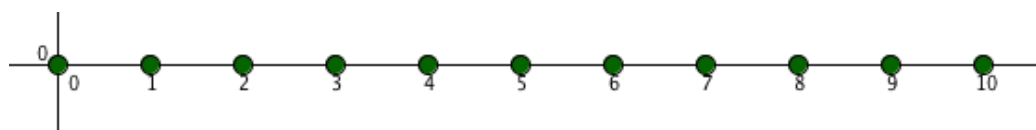
We gebruikten hier dat $3^5 \approx 2^8$ en $2^{10} \approx 10^3$. De werkelijke uitkomst van 6^{15} is 470.184.984.576. Dit wijkt slechts zes procent af van de geschatte waarde.

EIGEN TRUC? Zoals je ziet, kun je met een beetje onthoudwerk heel veel sommen behoorlijk vlug uitrekenen. Welke getallen zijn nog meer handig om paraat te hebben? Als je een goede truc hebt, laat het ons weten via post@pythagoras.nu. Leuke inzendingen worden beloond met een QAMA-rekenmachine. ■

In deze aflevering van de GeoGebraserie gaan we rijtjes maken. Niet alleen van punten, maar ook van driehoeken. We laten die driehoeken vervolgens draaien. Een filmpje van de bewegende driehoeken kun je zien op onze Facebookpagina: facebook.com/Pythgrs.

■ door Derk Pik

ROTTERENDE RIJEN



Figuur 1

Bij het tekenen met het computerprogramma GeoGebra moet je bepaalde figuren wel eens meerdere keren maken. Eerder in deze GeoGebraserie hebben we daarvoor al kennis gemaakt met de Macro. In deze aflevering leren we nog een andere structuur die het herhalen erg makkelijk maakt.

We beginnen met een eenvoudig voorbeeld. Stel, we willen de punten $(0, 0)$, $(1, 0)$, ..., $(10, 0)$ tekenen. Dit kan met de volgende opdracht:

Rij1 = Rij[(t, 0), t, 0, 10].

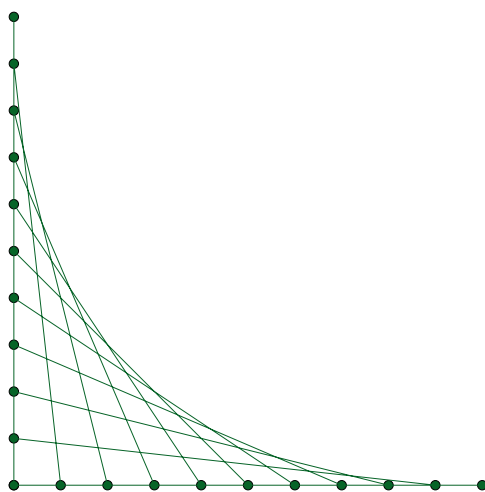
Het resultaat zie je in figuur 1. Hoe werkt deze opdracht? De eerste formule, $(t, 0)$, is het object dat wordt afgebeeld: in dit geval een punt met x-coördinaat t en y-coördinaat 0. Dan komt de variabele t en deze loopt van 0 tot en met 10 in gehele stappen. Je kunt nu wel raden met welke opdracht we elf punten op de y-as kunnen tekenen. Als volgt:

Rij2 = Rij[(0, t), t, 0, 10].

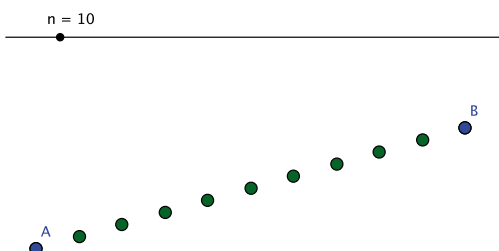
EEN RIJ LIJNSTUKKEN We gaan deze punten met lijnsegmenten verbinden zoals in de figuur. We kunnen de 11 segmenten stuk voor stuk met de muis tekenen, maar we kunnen ze ook door een commando invoeren. Een lijnsegment wordt getekend door het commando Lijnstuk(..., ...). Het lijnstuk van het derde element in Rij1 naar het negende element in Rij2 wordt getekend met de opdracht

Lijnstuk[Element[Rij1, 3], Element[Rij2, 9]]

Een rij in GeoGebra bestaat uit genummerde ele-



Figuur 2



Figuur 3

menten en het eerste object in de rij heeft nummer 1. Met de opdracht Element kies je een element uit de rij. De opdracht Element[Rij2, 1] geeft ons dus het eerste element in Rij2. Alle lijnen van figuur 1 krijg je in één keer door nog eens de Rij-opdracht te gebruiken:

```
Rij[Lijnstuk[Element[Rij1, i],
Element[Rij2, 12 - i]], i, 1, 11].
```

Uit al deze rechte lijnen ontstaat een mooie gladde kromme die op een parabool lijkt (zie figuur 2). De kromme is een voorbeeld van een zogeheten *Bézier-kromme*, vernoemd naar Pierre Bézier, een Franse ingenieur die deze krommen gebruikte bij de ontwerpen van auto's van het merk Renault.

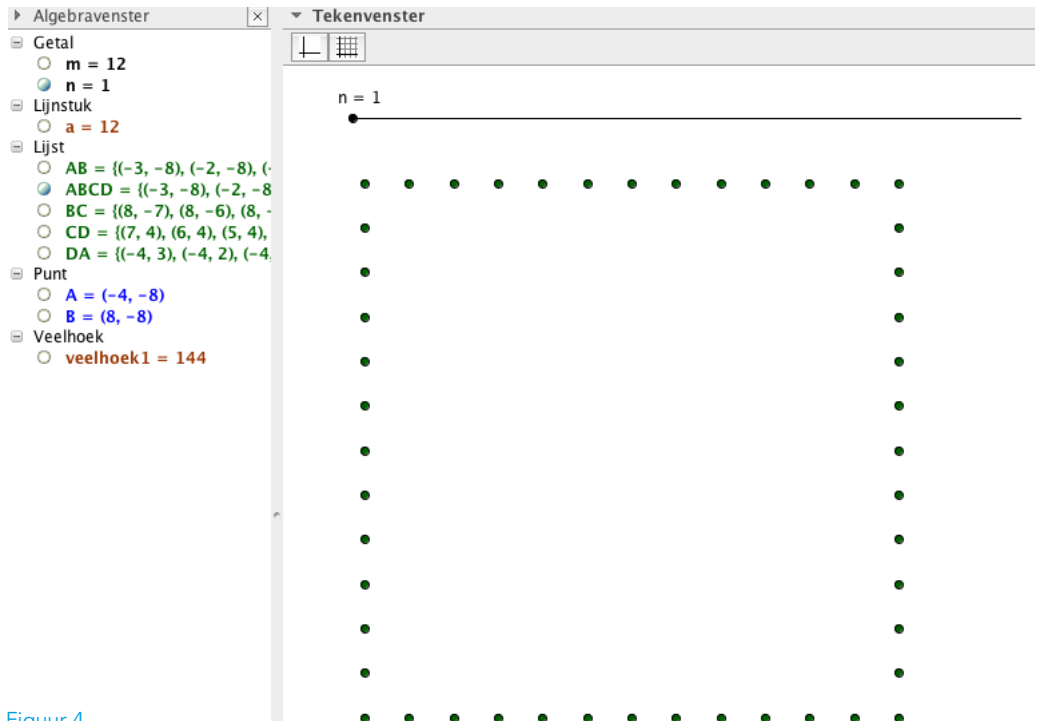
Stel, we hebben twee punten A en B getekend en we willen de afstand tussen de twee punten in n gelijke delen verdelen. We maken eerst een schuifknop voor n, waarbij we n geheel kiezen en laten lopen van 1 tot 100. We zetten n op 10. We voeren

vervolgens in:

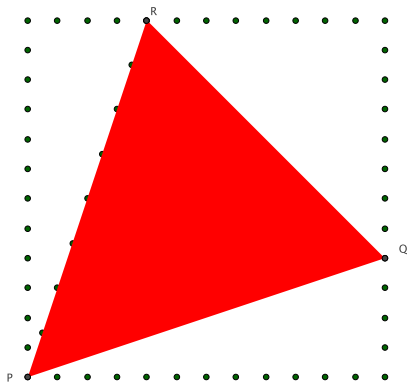
$$AB = \text{Rij}[tB + (1 - t)A, t, 0, 1, 1/n].$$

Het resultaat zie je in figuur 3. Hoe werkt deze opdracht eigenlijk? De variabele t loopt van 0 naar 1 in stapjes van $1/n$. Als $t = 0$ dan staat er A, en als $t = 1$ dan staat er B. Als t ergens tussen 0 en 1 in zit, dan bevindt het punt $tB + (1 - t)A$ zich ergens op het lijnstuk AB: het punt is een gewogen gemiddelde van A en B. Als je de schuifknop verschuift, zie je het aantal punten op het lijnstuk AB veranderen.

DRAAIENDE DRIEHOEKEN We kunnen meerdere rijen aan elkaar koppelen met de opdracht Samenvoegen. We laten dit zien aan de hand van een voorbeeld. Teken een vierkant ABCD. Maak een schuifknop n die een gehele waarde heeft en loopt van 1 tot 10. Definieer vervolgens $m = 12n$. Dit getal is het aantal punten min 1 dat we op een zijde van het vierkant zullen plaatsen. We maken de rijen



Figuur 4



Figuur 5

AB, BC, CD en DA:

$$\begin{aligned} AB &= \text{Rij}[tB + (1 - t)A, t, 1/m, 1, 1/m], \\ BC &= \text{Rij}[tC + (1 - t)B, t, 1/m, 1, 1/m], \\ CD &= \text{Rij}[tD + (1 - t)C, t, 1/m, 1, 1/m], \\ DA &= \text{Rij}[tA + (1 - t)D, t, 1/m, 1, 1/m]. \end{aligned}$$

We koppelen de rijen aan elkaar met

$$ABCD = \text{Samenvoegen}[AB, BC, CD, DA].$$

Maak nu de rijen AB, BC, CD en DA en ook het vierkant onzichtbaar. Het Algebra- en het Tekenscherm zien er nu uit als in figuur 4. In totaal bevinden er zich $4m = 48n$ punten op het vierkant. Omdat n nu nog de waarde 1 heeft, staan er dus 48 punten op het scherm. Dit aantal kunnen we verdelen in 3 keer $16n$ stukken. Met de volgende opdracht tekenen we een driehoek met als hoekpunten het eerste punt in de rij ABCD, het $(1 + 16n)$ -de punt en het $(1 + 32n)$ -de punt:

$$\begin{aligned} \text{Driehoek} &= \text{Veelhoek}[\text{Element}[ABCD, 1], \\ &\text{Element}[ABCD, 1 + 16n], \text{Element}[ABCD, \\ &1 + 32n]]. \end{aligned}$$

Het is leuk om deze driehoek te laten draaien: daarvoor moeten we de getallen 1 , $1 + 16n$ en $1 + 32n$ elk steeds met 1 ophogen. We veranderen de 1 in deze drie getallen achtereenvolgens in een 2, dan in een 3 enzovoort. We moeten wel oppassen dat de waarde niet groter wordt dan $48n$. Dit doen we met de functie Mod: de uitkomst van $\text{Mod}(a, b)$ is de rest van a na deling door b . Zo is $\text{Mod}(63, 48)$ gelijk aan 15.

Maak de schuifknop t die loopt van 0 naar $4m - 1$ in gehele stappen. De code voor de draaien-



Figuur 6

de driehoek wordt nu:

$$\begin{aligned} P &= \text{Element}[ABCD, t + 1], \\ Q &= \text{Element}[ABCD, \text{Mod}[t + 16n, 4m] + 1], \\ R &= \text{Element}[ABCD, \text{Mod}[t + 32n, 4m] + 1], \\ \text{Rood} &= \text{Veelhoek}[P, Q, R]. \end{aligned}$$

Maak de driehoek rood door het Eigenschappenvenster op te roepen en daar de kleur rood te selecteren. Als je van de variabele t de animatie aanzet, zal de driehoek langs het vierkant gaan draaien.

In de witte stukken aan de drie kanten van de rode driehoek plaatsen we nog drie andere driehoeken die we ook laten draaien. Hiervoor zetten we een rij punten op de zijken van de driehoek:

$$PR = \text{Rij}[tR + (1 - t)P, t, 1/(8n), 1, 1/(8n)].$$

We krijgen figuur 5. Nu moeten we de punten van het vierkant aan de kant van PR en de punten op het lijnstuk PR in goede volgorde samenvoegen. Dat doen we met

$$\begin{aligned} \text{RPbuiten} &= \text{Rij}[\text{Element}[ABCD, \text{Mod}[t + j + \\ &32n, 4m] + 1], j, 1, 16n], \\ \text{RPDriehoek} &= \text{Samenvoegen}[PR, \text{RPbuiten}]. \end{aligned}$$

We hebben een rij punten die we weer in drie gelijke stukken kunnen verdelen (het zijn er in totaal $24n$). Net als zo-even kunnen we er een driehoek in laten ronddraaien. Dit is nog een heel werk, maar als je de bovenstaande constructie goed hebt begrepen, weet je wat je moet doen: het is in feite steeds hetzelfde. Het uiteindelijke resultaat is afgebeeld in figuur 6. Een filmpje van het bewegen van de driehoeken kan je zien op onze Facebookpagina: facebook.com/pythgrs. ■

JOURNAAL

■ door Marc Seijlhouwer

'Computertaal' in Polynesië

Rond 1700 ontwikkelde Gottfried Leibniz het binaire (tweetalige) talstelsel. Twee Noorse psychologen hebben nu ontdekt dat inboorlingen van Polynesië, een eilandengroep in de Grote Oceaan, al tweehonderd jaar eerder binaire getallen toepasten. Het binaire talstelsel maakt enkel gebruik van nullen en enen. In plaats van eenheden, tientallen, honderdtallen enzovoort, zoals in ons decimale (tientallige) systeem, verwijzen de cijfers in een binair getal naar machten van 2: 1, 2, 4, 8, 16, ... Zo wordt het getal 13 in het binaire stelsel geschreven als 1101 ($1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$).

Andrea Bender en Sieghard Beller van de universiteit van Bergen in Noorwegen ontdekten dat Polynesiërs hun schapen en andere bezittingen telden op een manier waarbij ze het binaire stelsel combineerden met het tientallige stelsel. Daarmee blijkt dat het binaire systeem, dat tegenwoordig vooral bekend is als computertaal, al heel vroeg in gebruik was.

De Polynesiërs maakten op een slimme manier gebruik van binair tellen, waardoor hun rekensommen makkelijker werden. De eilandbewoners waren namelijk verre van primitief; vijfhonderd jaar geleden was er een bloeiende cultuur waarin vaak grote feesten werden gegeven, maar waar de bewoners

ook bijzondere hobby's hadden zoals wedstrijd-tuinieren. Voor dat soort bezigheden was het handig om snel en eenvoudig te kunnen rekenen. Dus bouwden de Polynesiërs het 'normale' tientallige stelsel een beetje om: de eenheden bleven van 0 tot 9 lopen, maar tientallen werden binair genoteerd. Het getal 77 liet zich schrijven als $40 + 20 + 10 + 7$, het getal 123 als $80 + 40 + 3$. Voor getallen tussen 160 en 799 werd 80 met een getal tussen 2 en 9 vermenigvuldigd, bijvoorbeeld $256 = 3 \times 80 + 10 + 6$.

Een nadeel van de binaire schrijfwijze is dat getallen al snel heel lang worden, een voordeel is dat optellen en vermenigvuldigen heel simpel is. De slimme combinatie van het binaire met het decimale systeem maakte dat de Polynesiërs voordeel hadden van zowel de korte schrijfwijze van decimale getallen als de rekenenvoer van het binaire systeem.

De Polynesiërs waren niet de enigen die een andere manier van tellen hadden. De Babyloniers, die eeuwen terug in het Midden-Oosten leefden en heel veel met wiskunde deden, gebruikten bijvoorbeeld een zestigtallig stelsel. En in de jungle van Papoea-Nieuw-Guinea woont een stam die een volledig tweetallig systeem heeft.

Bliksem uitgeplozen door wiskundigen

Weet jij hoe bliksem werkt? Misschien weet je wel dat het iets te maken heeft met botsende wolken, waardoor elektrische spanning ontstaat. Maar waarom ontstaat er spanning? En valt er wat te voorspellen over hoe een donderwolk zich ontwikkelt? Tot nu toe weet niemand de precieze bewegingen achter de bliksem. Daar proberen onderzoekers op het Centrum Wiskunde & Informatica iets aan te doen; zij zijn stapje voor stapje bezig met het simuleren van bliksem.

Dat is zeker niet eenvoudig; het kost bijvoorbeeld heel veel rekenkracht, waardoor het pas met de nieuwste generatie supercomputers mogelijk is om snel een bliksemwolk na te bootsen. Maar ook de wiskunde achter bliksem is ingewikkeld. Er zijn

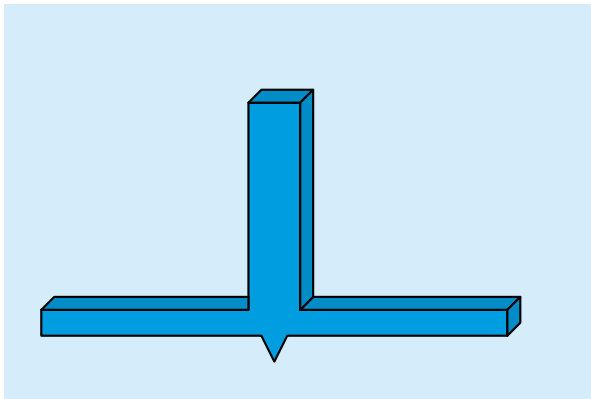
verschillende dingen waarmee je rekening moet houden. Zo moet je de elektriciteitsdeeltjes in een wolkje berekenen, maar ook voorspellen hoe een bliksemvork uiteindelijk de aarde bereikt. Dat zijn twee heel verschillende processen, waar ook verschillende berekeningen achter zitten.

Inmiddels zijn de onderzoekers een paar jaar bezig, en nu lukt het ze om een paar stapjes van een onweersbui na te maken op een computer. Het zal echter nog enkele jaren duren voordat er een betrouwbaar model is dat elke stap van het onweer goed voorspelt. Maar als er eenmaal zo'n model is, is dat een groot hulpmiddel voor meteorologen om voorspellingen te doen over onweersbuien.

Er zijn veel puzzels met houten stukjes waarbij je een vorm moet maken zoals een kubus of een ster. Dit artikel gaat ook over zo'n puzzel, maar eentje die je waarschijnlijk beter kan oplossen als je de stukken *niet* in je handen hebt dan wel. Zonder fysieke stukken moet je natuurlijk wel extra goed nadenken. In dit artikel lossen we de puzzel op door logisch denken.

■ door Marc van Kreveld

EEN PUZZEL IN EVENWICHT



10

Onze puzzel heeft acht gewone stukken en één basisstuk waarop de acht stukken geplaatst moeten worden. Het basisstuk is een balans: de stukken moeten zó geplaatst worden dat de puzzel in balans is. Verder moeten de stukken passen: aan elke kant van de balans moet een vierkant van 4×4 staan.

De stukken zijn zogeheten *tetromino's*: stukken die je kan maken door vier vierkantjes met zijden tegen elkaar te leggen. Zoals je in figuur 1 ziet, is één stuk langwerpig (een I-vorm), drie stukken hebben een L-vorm, twee een T-vorm en twee een soort Z-vorm.

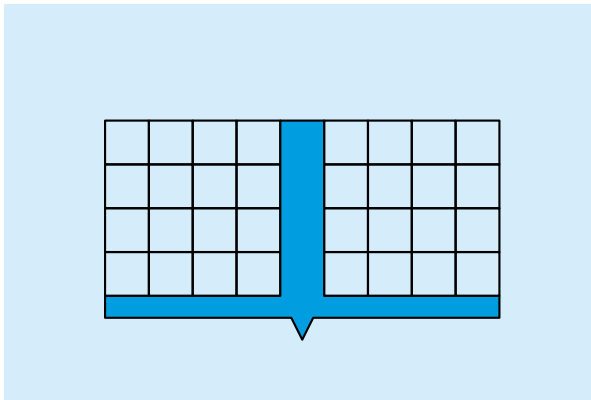
De stukken zijn driedimensionaal: ze hebben dikte. Voor de puzzel maakt dit niet veel uit, behalve dat je de stukken kan spiegelen in de derde dimensie. De L-vorm kan dus een gespiegelde L-vorm worden, en hetzelfde geldt voor de Z-vorm. Spiegelen van de I-vorm of de T-vormen geeft geen nieuwe mogelijkheden. Verder gaan we de puzzel tweedimensionaal behandelen.

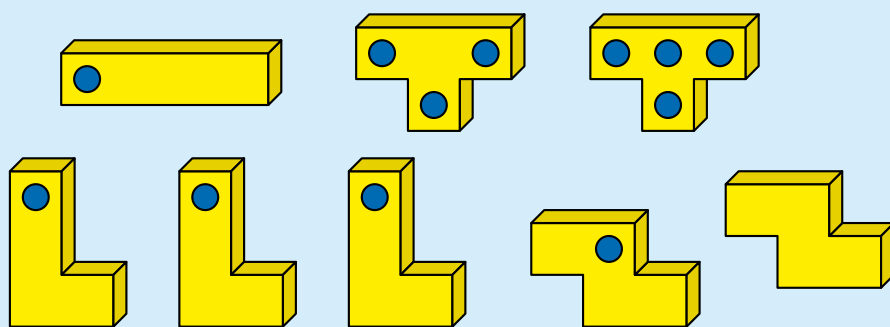
De puzzel heeft iets bijzonders: de stukken hebben extra gewicht dat de oplossing beïnvloedt. In figuur 1 zijn de plekken waar extra gewicht zit aangegeven met donkerblauwe stippen. Deze zitten steeds midden in één van de vierkantjes van een te-

tromino. Eén Z-stuk heeft geen extra gewicht, de meeste stukken hebben één extra gewicht, en de twee T-stukken hebben drie of zelfs vier extra gewichten. In totaal zijn er twaalf extra gewichten.

Nu moet je met de acht stukken twee vierkanten vormen én de puzzel in balans krijgen. Figuur 2 geeft aan hoe de oplossing moet zijn, en hoe niet.

Vraag. Wat is je eerste gedachte, gegeven dat twee stukken duidelijk het zwaarst zijn?





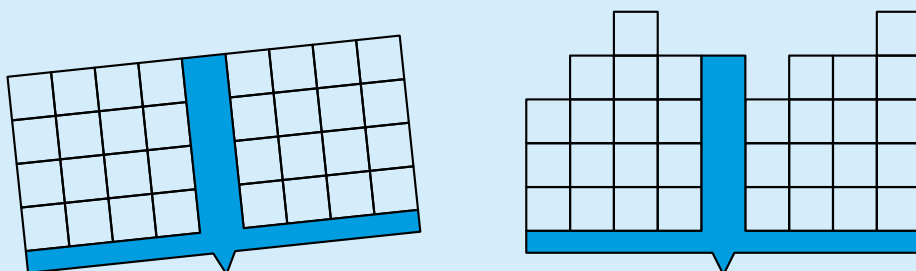
Figuur 1 De stukken van de puzzel. Met een donkerblauwe stip wordt aangegeven waar de extra gewichten zitten. Elke blauwe stip staat voor evenveel extra gewicht.

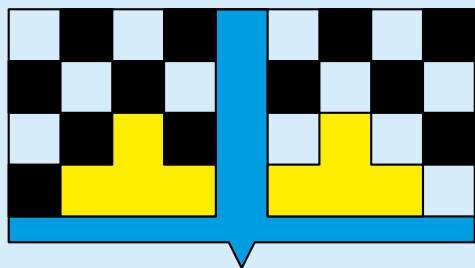
Misschien denk je: de twee zware stukken moeten aan verschillende kanten, want als ze bij elkaar zitten heeft de ene zijde al zeven extra gewichten en zijn er maar vijf extra gewichten over (en bovendien zal er nog minstens één extra gewicht aan de kant met de zeven extra gewichten moeten komen).

DOMINOSTENEN OP EEN SCHAAKBORD

Ken je het vraagstuk waarin een schaakbord (8×8 velden) bedekt moet worden met 32 dominostenen? Dat is heel makkelijk. Maar als je twee hoekvelden die diagonaal tegenover elkaar liggen weghaalt, en de resterende 62 velden met 31 domi-

Figuur 2 Links: hoe de goede oplossing eruit ziet. Midden: geen oplossing, want de balans is niet in evenwicht. Rechts: geen oplossing, want het zijn niet twee vierkanten.





Figuur 3 De T-stukken aan verschillende kanten (zonder de gewichten getekend). Er zijn nu verschillende aantallen witte en zwarte velden over, zowel links als rechts.

12

nostenen wilt bedekken, dan zal dat niet lukken. Dit kan je bewijzen, en misschien heb je het bewijs wel eens gezien. Waar een dominosteen ook ligt, hij zal altijd precies één wit veld en één zwart veld bedekken. Maar als je twee diagonaal tegenover elkaar liggende hoekvelden van het schaakbord weghaalt, dan haal je twee velden van dezelfde kleur weg, bijvoorbeeld twee zwarte. Je hebt dan 30 zwarte velden over en 32 witte, dus je kunt deze velden nooit met 31 dominostenen bedekken.

Terug naar onze balanspuzzel. Hoe zit het met zwarte en witte velden als we de tetromino's bekijken? Als we de I-tetromino op een schaakbord zouden neerleggen, dan bedekt die altijd twee witte en twee zwarte velden. Datzelfde geldt voor de L-vormen en de Z-vormen. Voor de T-vormen geldt iets anders. Deze bedekken óf één zwart veld en drie witte, óf omgekeerd. Kijk nu nog eens naar het linkerplaatje in figuur 2. Je ziet: de acht tetromino's bedekken precies twee vierkanten van 4×4 . Als die vierkanten een schaakbordpatroon zouden hebben, zou elk vierkant dus acht zwarte en acht witte velden hebben.

Wat betekent dit voor de twee T-stukken? Die moeten wel aan dezelfde kant liggen! Anders klopt de zwart-wit-telling niet aan beide kanten, zoals je in figuur 3 kunt zien. Dat betekent dus dat er veel meer gewichten aan de ene kant zitten dan aan de andere kant. De verdeling is 8 : 4 als we het lichte

Z-stuk (zonder extra gewicht) en nog een stuk (met één extra gewicht) samen met de twee T-stukken aan dezelfde kant plaatsen, en beter kunnen we het niet krijgen.

OP DE WIP Waar moeten die zware stukken dan geplaatst worden, als de andere kant veel minder extra gewicht heeft? Ongetwijfeld weet je dat gewichten meer naar het midden minder effect hebben dan gewichten meer aan de buitenkant. Als je vroeger met je broer of zus op de wip zat en jij was lichter, dan moest je naar achteren leunen en je broer of zus naar voren, anders kwam jouw kant niet naar beneden. In onze puzzel moeten de gewichten aan de kant van de T-stukken (laten we vanaf nu aannemen dat deze stukken links komen) meer in het midden komen, en de gewichten aan de andere kant juist meer aan de buitenkant.

Nu gebruiken we natuurkunde. Bij een balans van deze soort, een wip, geldt dat een gewicht dat op 20 cm van het midden zit evenveel effect heeft als twee gewichten die op 10 cm van het midden zitten. In de natuurkunde heet wat we zojuist 'effect' noemden het *moment*. De grootte van het moment krijg je door het gewicht te vermenigvuldigen met de horizontale afstand tot het kantelpunt, bij ons dus het midden. Nu zitten de gewichten in een oplossing in de eerste kolom, de tweede kolom, de derde kolom of de vierde kolom (van binnenuit ge-

teld) en het bijbehorende moment noemen we voor het gemak 1, 2, 3 of 4. Het maakt niet uit wáár een gewicht in een kolom zit, alleen maar in wélke kolom het zit.

TOTAALMOMENT Het oplossen van de puzzel is nu een rekensom, waarvan een voorbeeld is te zien in figuur 4. De acht stukken maken twee vierkanten, dus wat vorm betreft is de oplossing goed. Maar de balans is niet in evenwicht: links zit een totaalmoment van 17 en rechts zit een totaalmoment van 9.

Hoe laag kan het totaalmoment aan één kant zijn, als beide T-stukken daar zitten? Dit mag je zelf uitpuzzelen. Eventueel knip je de stukken uit met behulp van ruitjespapier, zet je stippen op de plekken waar extra gewicht zit, en schuif en draai je de stukken tot het past en het gewicht zo laag mogelijk is. Bedenk dat je de stukken ook kan spiegelen, dus ondersteboven leggen.

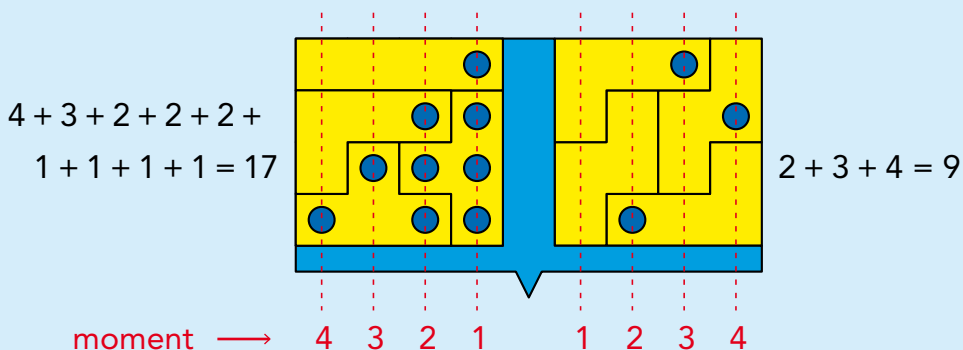
Hoe hoog kan het totaalmoment aan één kant zijn, als de overige stukken daar zitten? Ook dit kan je zelf uitzoeken door te proberen.

Als je goed gepuzzeld hebt, krijg je een totaalmoment van 13 als antwoord op beide laatste vragen. Dit is de oplossing die in balans is.

SLECHTS EEN PUZZELIDEE? Het is mogelijk om de puzzel van hout te maken, en bijvoorbeeld dikke metalen bouten en moeren te gebruiken voor de verzwareing. Maar het is erg lastig om de puzzel 'precies goed' te krijgen. De puzzel moet immers werkelijk *uit* balans zijn als de gewichtensom fout is en *in* balans als de gewichtensom goed is. Dit betekent dat het onderste puntje van het balansstuk afgevlakt moet zijn en precies de juiste breedte moet hebben.

Het is erg lastig om dit voor elkaar te krijgen. Mijn eigen eerste poging mislukte. Daarna maakte ik de puzzel opnieuw, maar dan groter: de hele puzzel is ongeveer 40 cm breed, en nu gaat het wel goed. Een foto van de houten puzzel in opgeloste toestand zullen we afbeelden in de volgende *Pythagoras*.

Bijna iedereen die de puzzel in handen krijgt, bekijkt eerst de stukken, merkt dat er twee zware stukken zijn, de T-stukken, en legt ze aan weerszijden van het midden. Daarna probeert hij of zij een tijdje een vierkant te krijgen aan één kant, maar dat lukt steeds niet... Wij weten nu waarom. ■



Figuur 4 De T-stukken zitten beide links. Links en rechts vormen beide een vierkant, maar de balans is niet in evenwicht.

STER VAN DE DAG

■ door Jan Guichelaar

De Ster van de dag gaat op en onder is de titel van een uitdagend *Zebraboekje* over de beweging van de zon aan de hemel. Schrijver Aad Goddijn, werkzaam aan de Universiteit Utrecht, wijst in het boek de weg om op elke plaats op aarde op elke dag de tijden van zonsopkomst, zonsondergang en de lengte van de dag te berekenen.

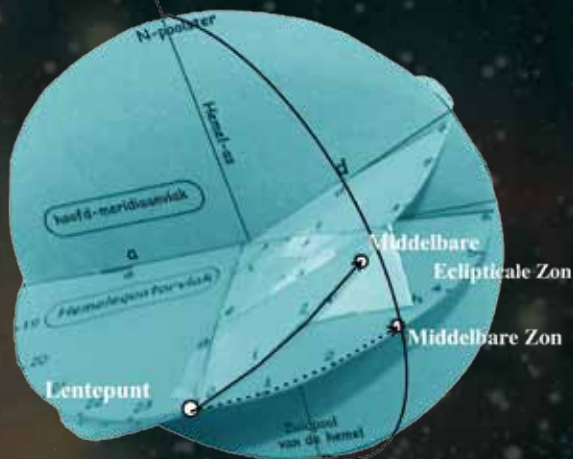
Het lijken zulke eenvoudige vragen, maar de antwoorden zijn niet makkelijk te berekenen. Goddijn is erin geslaagd alle natuurkundige verschijnselen die van invloed zijn op de gestelde vragen te benoemen en de benodigde berekeningen stapsgewijs te presenteren. De nadruk ligt op het zelf verwerken van alle ruimtelijke inzichten en doen van alle berekeningen. Bijzonder instructief zijn de bouwplaten, die zelf gemaakt kunnen worden, om de complexe driedimensionale structuur van het stelsel *waarnemer-aarde-zon* te doorgronden.

Voor een exact cirkelvormige baan van de aarde om de zon in het zogeheten *eclipticavlak* – waarbij de as van de aarde loodrecht op dit vlak zou staan, er geen storingen van de aardse dampkring zouden zijn en de zon als punt beschouwd zou mogen worden – zou elke dag op elk punt op aarde even lang duren, precies de helft daglicht en precies de helft nacht. Maar zo simpel is het niet; er moeten vele moeilijkheden overwonnen worden. We noemen er enkele.

Ten eerste staat de as van de draaiende aarde niet loodrecht op het eclipticavlak. Het evenaarsvlak, waar de draaiingsas van de aarde loodrecht op staat, maakt een hoek van $23,4^\circ$ met het eclipticavlak. Dat zorgt voor het verschil in de seizoenen: 's zomers – op het noordelijk halfrond – beschijnt een vaste bundel zonlicht een kleiner oppervlak van de aarde dan 's winters.

Ten tweede: de zon beschrijft elke dag vrijwel een cirkel op de hemelbol rond de aarde, verdeeld in een dagboog boven de evenaar van de waarnemer en een nachtboog onder de evenaar, die alleen in het lentepunt en herfstpunt gelijk zijn. In de zomer hebben de dagen meer dan 12 uur daglicht, in de winter minder. De berekening om tot de juiste formule te komen om de grootte van de dagboog te berekenen, doet Goddijn stap voor stap uit de doeken.

Ten derde moet met de grootte van de zon reke-



ning worden gehouden, evenals met de breking van lichtstralen in de aardse atmosfeer, waardoor de zon eerder opkomt en later ondergaat.

Verder moeten – door het vaststellen van tijdstippen over de wereldbol – tijdstippen van zonsdoorgang door de meridiaan door het zuiden, de culminatie, gecorrigeerd worden. Het is namelijk bij de culminatie niet precies 12 uur.

De zon beschrijft met constante snelheid een cirkel om de aarde (of omgekeerd). Dat houdt in dat de snelheid langs de hemelevenaar, die een hoek maakt met de ecliptica, niet helemaal constant is. Ook daarvoor moeten de berekeningen gecorrigeerd worden. Deze correctie veroorzaakt ook het zogenaamde analemma van de zon: als je elke dag op hetzelfde tijdstip met een vaste camera een foto van de zon maakt en de 365 foto's over elkaar legt, voert de zon een smalle achtvormige baan aan de hemel uit (op en neer vanwege zomer en winter, een beetje heen en weer, omdat de Middelbare Zon (langs de hemelevenaar) niet precies gelijk loopt aan de Eclipticale Zon, die in de ecliptica met constante snelheid rond de aarde loopt. Soms loopt hij iets voor, dan weer iets achter.

Tot slot: de aarde draait niet in een cirkel, maar in een ellipsbaan rond de zon, die in een van de brandpunten staat. De snelheid van de aarde om de zon is niet op elk punt gelijk. Ook dit vergt een correctie. De Ware Zon wijkt dus opnieuw iets af.

Kortom, een complexe benadering. Maar wie de stappen in het boekje goed volgt, kan ten slotte, op zijn eigen verjaardag en in zijn eigen woonplaats, de daglengte en de tijdstippen van zonsop- en zonsondergang berekenen. De complexiteit van het in kaart brengen van eenvoudige gebeurtenissen in het heel kleine stukje heelal rondom de aarde maakt indruk en stelt hoge eisen aan het ruimtelijk inzicht. ■

Aad Goddijn, *De Ster van de dag gaat op en onder. Rekenen aan zonsopkomst en zonsondergang* (Epsilon Uitgaven, Utrecht 2012).

DOORLOPER

OPLOSSING



Figuur 1

In het vorige nummer stond het (lege) diagram in figuur 1. De bedoeling was om per rij en per kolom steeds twee getallen in te vullen, die aan de beschrijvingen ernaast respectievelijk eronder voldoen. Gegeven was dat elk getal minimaal twee cijfers heeft en dat alle getallen verschillend zijn.

Links, rechts, boven en onder geven we achtereenvolgens aan met L, R, B, O. Bijvoorbeeld 'H3R' betekent: horizontaal, rij 3, rechts.

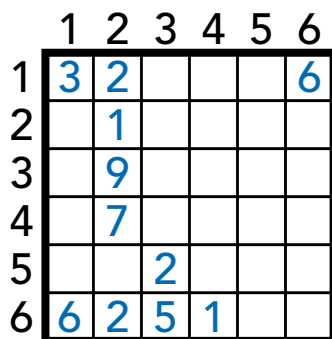
Direct kunnen een 6, 2, 5 en 1 worden ingevuld. Een macht van 6 eindigt namelijk altijd op 6 (H1R), een macht van 5 eindigt altijd op 25 (V3O) en het priemgetal in V4O is tweemaal een 45-voud plus 1.

We gaan verder met figuur 2. H6R is een deler van H1R. Deze deler is zeker niet 51**, want er is maar één macht van 6 groter dan 5100, namelijk 7776. H6L eindigt op een 5, dus dit getal heeft drie cijfers; dan komen 125 en 625 in aanmerking. V1O is een even getal, dus H6L is 625. H6R is van de vorm $1**$, met beide onbekende cijfers even. Er komen drie getallen in aanmerking: 128, 144 of 162. Het eerste vult, want 128 deelt pas 279936, dit is te groot. Voor zowel 144 als 162 geldt dat ze 1296 delen. H1R is dus 1296 of 7776. H1L is dus 16, 32 of 64. V2B kan alleen maar 2197 zijn, en dus is H1L 32.

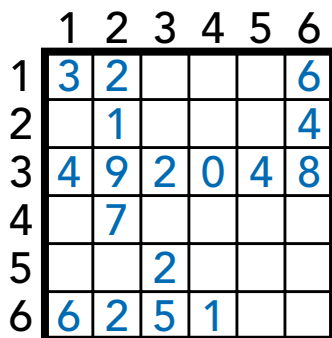
Door naar figuur 3. H3L kan alleen maar 49 zijn. Voor V6B komt alleen 648 in aanmerking. Daarmee ligt ook H3R vast: 2048.

Nu figuur 4. H2L is een macht van 2. Het tweede cijfer is een 1. Dan zijn er maar twee mogelijkheden: 512 en 8192. V1B is een 32-voud. 354* levert niets op. We vinden dus 384 (V1B) en 8192 (H2L). V1O is 256. H5L is 512. En V3B is $7920 = 8 \times 9 \times 10 \times 11$.

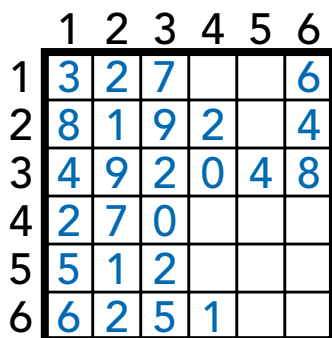
Ten slotte figuur 5. H4L is 270. Het alternatief 2700 zou betekenen dat bij V4O 5401 moet worden ingevuld, hetgeen niet past. De rest van de doorloper is nu makkelijk in te vullen. ■



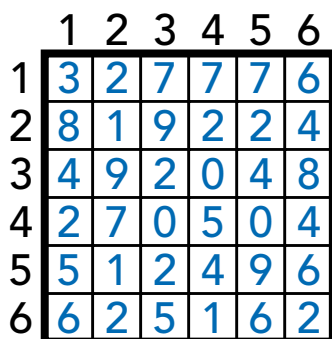
Figuur 2



Figuur 3



Figuur 4



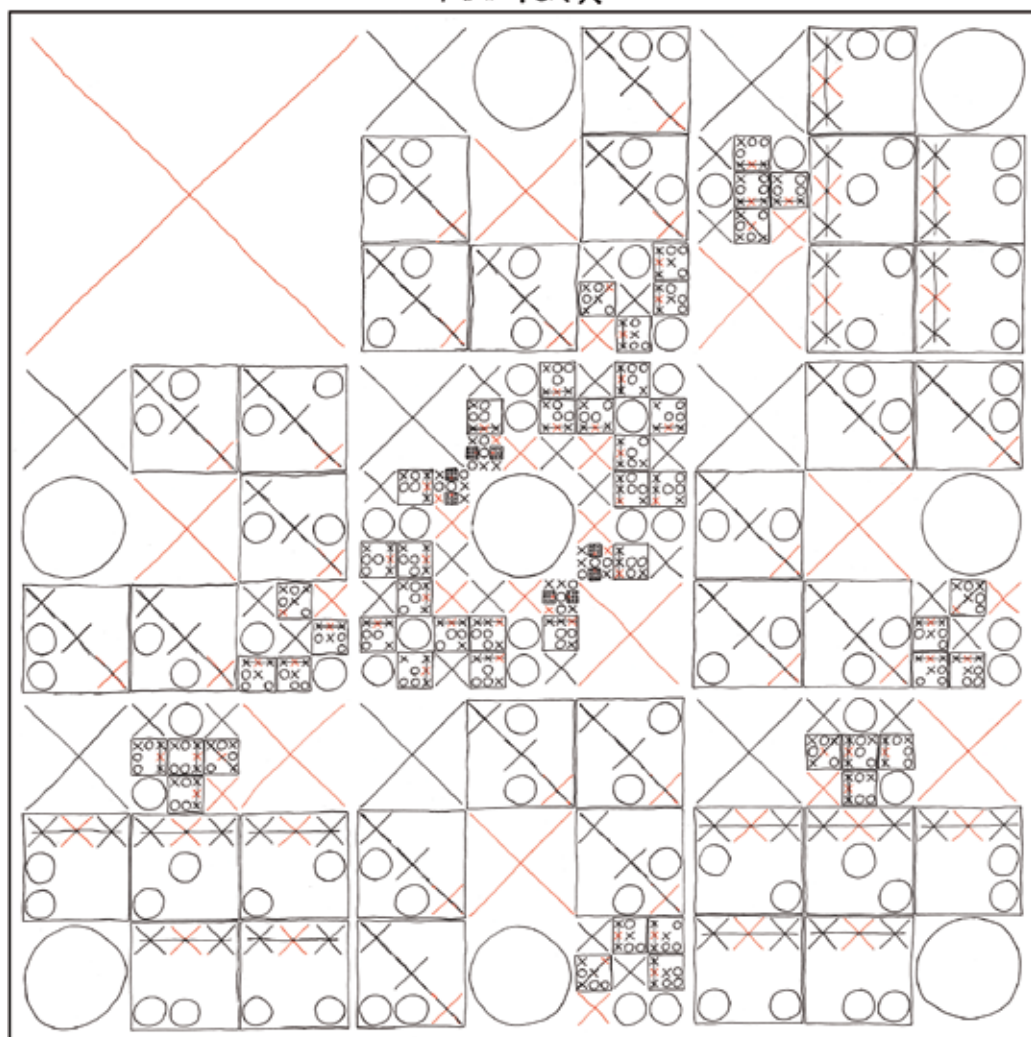
Figuur 5

XKCD

COMPLETE MAP OF OPTIMAL TIC-TAC-TOE MOVES

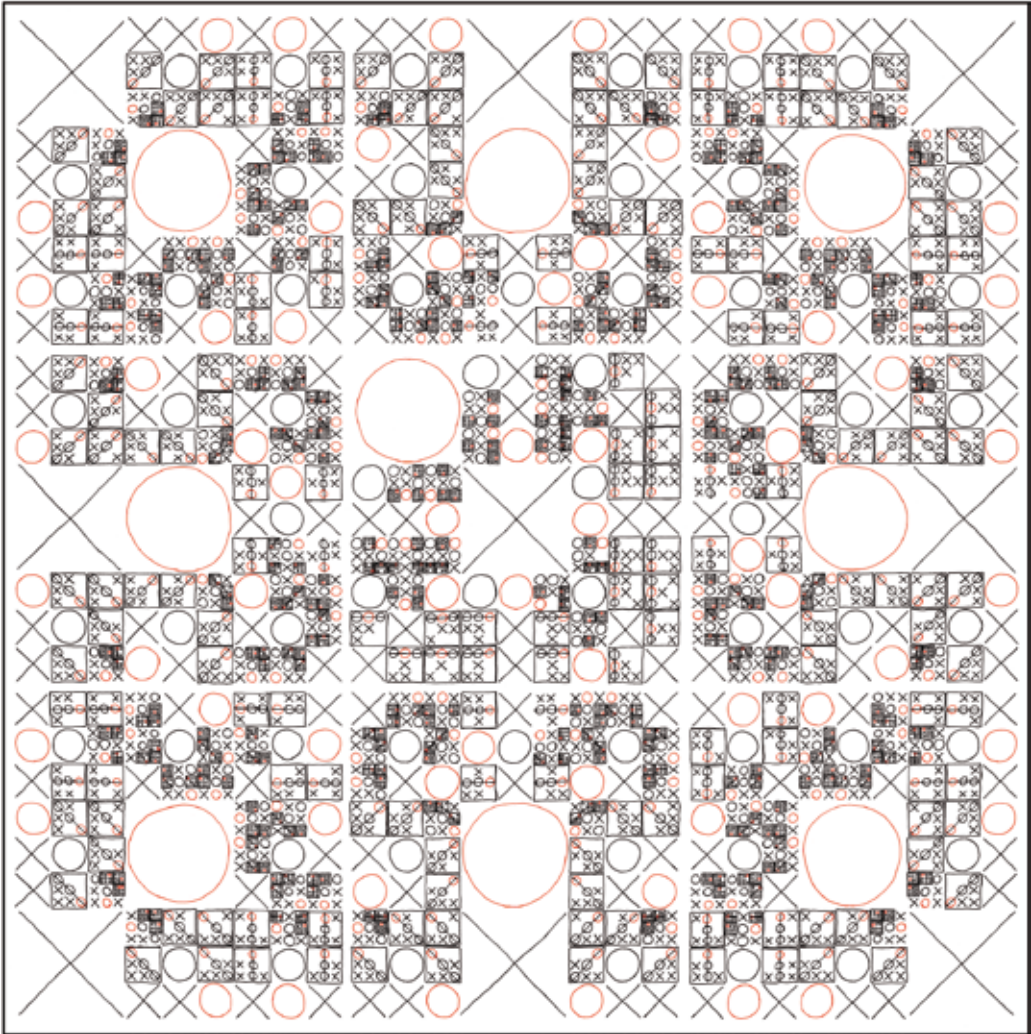
YOUR MOVE IS GIVEN BY THE POSITION OF THE LARGEST RED SYMBOL ON THE GRID. WHEN YOUR OPPONENT PICKS A MOVE, ZOOM IN ON THE REGION OF THE GRID WHERE THEY WENT. REPEAT.

MAP FOR X:



XKCD is een webstrip van de Amerikaan Randall Munroe. In het septembernummer toonden we een collage van zijn strips, die vaak over wiskunde gaan. In deze *Pythagoras* is XKCD opnieuw aan zet, nu met de *complete map of optimal tic-tac-toe moves* (tic-tac-toe is het bekende pen-en-papierspelletje *boter-kaas-en-eieren*).

MAP FOR O:



Verzamelingen en hun onderlinge verbanden kun je grafisch weergeven in een diagram. Heel bekend zijn de Venn diagrammen. Minder bekend zijn de Euler diagrammen. Venn diagrammen kunnen worden gezien als een speciaal geval van Euler diagrammen. Beide soorten staan centraal in dit artikel.

■ door Jaap Klouwen

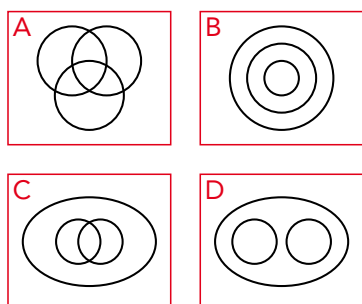
BEDRIJF, BAKKERIJ EN KLEDINGWINKEL

VENN- VERSUS EULERDIAGRAMMEN

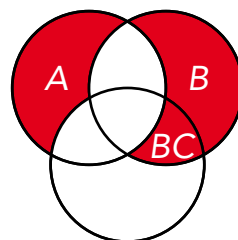
Nobiles Magazine is een tijdschrift voor studenten en starters die zich oriënteren op studie en carrière. In het winternummer van 2012 stond in de rubriek 'Hersengym' een aardige puzzel. De opdracht was om van de vier diagrammen die je in figuur 1 ziet, het juiste diagram aan te wijzen bij de gegeven begrippen 'bedrijf', 'bakkerij', 'kledingwinkel'.

Op het eerste gezicht een vreemde vraag, maar al snel is duidelijk dat een bakkerij en een kledingzaak bedrijven zijn, die geen gemeenschappelijke 'producten' hebben. Het juiste diagram is dus D. De grote ovaal daarin stelt de categorie 'bedrijven' voor en de beide kleine cirkels zijn de bakkerij en de kledingwinkel.

Figuur 1 bevat vier verschillende diagrammen met drie verzamelingen. Er zijn natuurlijk veel meer diagrammen mogelijk met drie verzamelingen. De volgende vraag dringt zich nu op: hoeveel elementair verschillende diagrammen zijn er mogelijk met drie verzamelingen?



Figuur 1 Welke figuur past het beste bij de drie woorden bedrijf, bakkerij en kledingwinkel?



Figuur 2 Venn diagram van A B BC.

Deze vraag zullen we in dit artikel beantwoorden. Twee bekende soorten diagrammen zijn *Venn diagrammen* en *Euler diagrammen*. Het verschil tussen deze twee grafische weergaven van verzamelingen én de manier waarop de puzzelvraag wordt opgevat, bepaalt het aantal oplossingen.

VENNDIAGRAMMEN MET DRIE VERZAMELINGEN

Venn diagrammen zijn vernoemd naar John Venn (1834-1923). In *Pythagoras* 52-4 (februari 2013) werd ook al aandacht besteed aan deze grafische manier om verzamelingen en hun onderlinge verbanden weer te geven.

In een Venn diagram komen alle overlappingen van de verzamelingen voor. Bij drie verzamelingen (A, B en C) zijn er $2^3 - 1 = 7$ deelgebieden (het buitengebied niet meegerekend). Als elk gebied wel of niet wordt gekleurd, zijn er zijn $2^7 = 128$ verschillende mogelijkheden om alle gebieden te kleuren.

In figuur 2 (maar ook al in figuur 1A) is een voorbeeld getekend. Gekleurd zijn daarin weergegeven alle elementen die alleen in A zitten (en dus

niet in B of C), die alleen in B zitten of de elementen die alleen in B én C zitten. We noteren dit met ' $A B BC$ '.

In figuur 2 zijn zeven deelgebieden te onderscheiden, namelijk A , B , C , AB , AC , BC en ABC . Meer overlappings zijn er niet; figuur 2 is dus een Venndiagram.

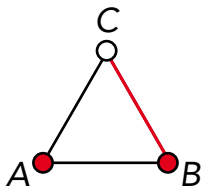
Hoeveel van de 128 Venndiagrammen zijn uniek? Dat is op verschillende manieren uit te zoeken. Een van die manieren is het (domweg) systematisch tellen en tekenen van mogelijke Venndiagrammen en daaruit bepalen welke 'oplossingen' gelijkwaardig zijn. We moeten wel eerst definiëren wat gelijkwaardig is: twee kleuringen zijn gelijkwaardig als door rotatie (draaiing) of spiegeling de ene kleuring overgaat in de andere. De elementen in de verzamelingen spelen dus geen rol, we kijken alleen naar de kleuringen. Zo gaat in figuur 2 de getekende kleuring $A B BC$ na spiegeling in de verticale lijn door de snijpunten tussen de cirkels die de verzamelingen A en B voorstellen, over in de kleuring $B A AC$.

Een hulpmiddel bij het vaststellen van het aantal gelijkwaardige oplossingen is de methode van de kleurendriehoek. A , B en C worden hierbij als de hoekpunten van een driehoek getekend, AB , AC en BC zijn de zijden tussen die punten en ABC is het binnendeel van de driehoek. Als BC deel uitmaakt van het Venndiagram, wordt die zijde gekleurd, anders niet. In figuur 3 is de kleurendriehoek van $A B BC$ uit figuur 2 getekend.

Met behulp van figuur 3 kun je zien dat er onder andere 6 gelijkwaardige oplossingen zijn:

1. $A B BC$;
2. $A B AC$;
3. $A C AB$;
4. $A C BC$;
5. $B C AB$;
6. $B C AC$.

Alle zes hebben dezelfde kleurendriehoek (na draaiing over 120° of -120° en/of spiegeling in een van de symmetrieassen). We zouden $A B BC$ een *voortbrenger* van die klasse kunnen noemen. Zo zijn er ook drietallen van gelijkwaardige oplossingen (bijvoorbeeld $A ABC$; $B ABC$; $C ABC$). Verder zijn er ook 'eenlingen' (bijvoorbeeld ABC , of $AB AC BC$).



Figuur 3 Kleurendriehoek van $A B BC$.

nr	naam	aantal	toegestaan?
1	$\emptyset$	1	nee
2	A	3	nee
3	$A AB$	6	nee
4	$A AB ABC$	6	ja
5	$A AB AC$	3	ja
6	$A AB AC ABC$	3	ja
7	$A AB AC BC$	3	ja
8	$A AB AC BC ABC$	3	ja
9	$A AB BC$	6	ja
10	$A AB BC ABC$	6	ja
11	$A ABC$	3	nee
12	$A B$	3	nee
13	$A B AB$	3	nee
14	$A B AB ABC$	3	ja
15	$A B AB AC$	6	ja
16	$A B AB AC ABC$	6	ja
17	$A B AB AC BC$	3	ja
18	$A B AB AC BC ABC$	3	ja
19	$A B ABC$	3	ja
20	$A B AC$	6	ja
21	$A B AC ABC$	6	ja
22	$A B AC BC$	3	ja
23	$A B AC BC ABC$	3	ja
24	$A B C$	1	ja
25	$A B C AB$	3	ja
26	$A B C AB ABC$	3	ja
27	$A B C AB AC$	3	ja
28	$A B C AB AC ABC$	3	ja
29	$A B C AB AC BC$	1	ja
30	$A B C AB AC BC ABC$	1	ja
31	$A B C ABC$	1	ja
32	$A BC$	3	nee
33	$A BC ABC$	3	nee
34	AB	3	nee
35	$AB ABC$	3	nee
36	$AB AC$	3	ja
37	$AB AC ABC$	3	ja
38	$AB AC BC$	1	ja
39	$AB AC BC ABC$	1	ja
40	ABC	1	nee

Tabel 1 De 40 verschillende Venndiagrammen met drie verzamelingen.

Na een grondige inventarisatie volgen uit de 128 mogelijke Venndiagrammen 40 voortbrengers. Deze zie je in tabel 1. De derde kolom geeft het aantal gelijkwaardige mogelijkheden aan. De vierde kolom bespreken we in de volgende paragraaf.

Een andere – veel elegantere – telmethode maakt gebruik van het lemma van Burnside (zie onderstaand kader). Dit is een resultaat uit de *groeptheorie*, handig bij het tellen van objecten die onderhevig zijn aan transformaties en symmetriën.

EULERDIAGRAMMEN MET DRIE VERZAMELINGEN Uit de context van de vraag ‘Bedrijf, bakkerij, kledingwinkel’ kun je afleiden dat sommige

van de 40 oplossingen niet zijn toegestaan. Er worden immers drie ‘verzamelingen’ genoemd, die een eventuele samenhang vertonen. Diagrammen die bij 0, 1 of 2 cirkels horen, mogen dus niet. Oplossing 1 ($\emptyset$, de lege verzameling) is niet toegestaan: er zit helemaal niets in! Ook oplossing 2 mag niet: die bestaat alleen maar uit één ‘cirkel’ A. Oplossing 3 kan ook niet: A AB betekent dat B een deelverzameling is van A. Dat kan, maar er is geen C! De vierde kolom van tabel 1 geeft aan welke van de 40 oplossingen toegestaan zijn bij de vraag ‘Bedrijf, bakkerij, kledingwinkel’. Dat blijken er 29 zijn.

Maar er speelt nog een ander aspect. Als we terugkijken naar de oorspronkelijke vraag, zien we in figuur 1 alleen maar oplossingen met cirkels. Bij

HET LEMMA VAN BURNSIDE

Het lemma of de telstelling van Burnside is een resultaat uit de *groeptheorie*, een deelgebied van de algebra. De Brit William Burnside (1852-1927) vermeldde het lemma in 1887 in een boek en schreef het toe aan Frobenius, maar ook Cauchy kende het lemma al. Daarom staat het ook wel bekend als ‘het lemma dat niet van Burnside is’.

Om duidelijk te maken wat het lemma zegt, geven we een voorbeeld. Neem de ‘groep’ van vier operaties $G = \{E, R90, R180, R270\}$. Hierin betekent Rx een rotatie (met de klok mee) over een hoek van x graden. Verder is E de identiteit: een rotatie over 0 graden. Deze operatie doet dus in feite niets. Een van de eigenschappen van een groep is: als je twee operaties achter elkaar uitvoert, krijg je opnieuw een operatie uit G . Op andere eigenschappen van groepen (er zijn er veel meer) gaan we nu niet in.

Laat de elementen van deze groep werken op een vierkant. We beschouwen alle mogelijke kleuringen van de hoekpunten met twee kleuren, rood en blauw. Dan zijn er $2^4 = 16$ mogelijke vierkanten; je ziet ze in figuur 10. Ze zijn verdeeld in zes klassen; hierover straks meer.

We kijken bij elk element van G hoeveel vierkanten erdoor in zichzelf overgaan (zogenaamde dekpunten). Pas je de identiteit E toe op een vierkant, dan gaat dit vierkant uiteraard in zichzelf over; dit geldt voor alle 16 elementen. Dus voor E is het aantal 16. Zoek zelf uit dat deze aantallen voor $R90$, $R180$ en $R270$ respectievelijk 2, 4 en 2 zijn.

Een *equivalentieklasse* is een verzameling vierkanten waarvoor geldt dat je met elke operatie binnen dezelfde klasse blijft. Het lemma van Burnside zegt dat het aantal equivalentieklassen N gelijk is aan het gemiddelde van bovenstaande vier aantallen. Dus:

$$N = \frac{16 + 2 + 4 + 2}{4} = 6.$$

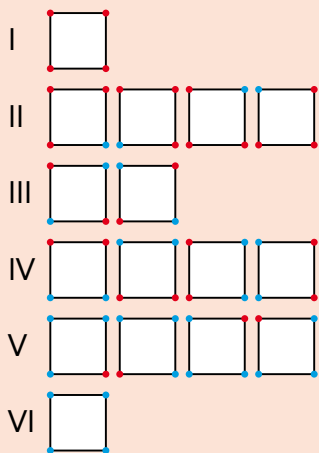
Nu is ook duidelijk waarom en hoe de 16 vierkanten in figuur 10 verdeeld zijn in 6 klassen.

Hoe kunnen we het lemma van Burnside toepassen op de vraag ‘Bedrijf, bakkerij, kledingwinkel’? We zagen dat er 40 oplossingen zijn (zie tabel 1). Op eenzelfde manier als hierboven kunnen we ons aantal van 40 equivalentieklassen in de 128 mogelijkheden vinden.

Een formele definitie van het lemma van Burnside is: het aantal equivalentieklassen van een verzameling X onder G is gelijk aan

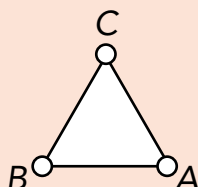
$$\frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \#g$$

met $\#G$ het aantal elementen in de groep G en $\#g$ het aantal dekpunten onder g in X .

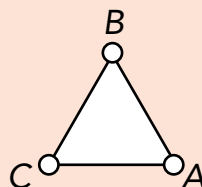


Figuur 10 Alle mogelijke kleuringen van de hoekpunten van een vierkant met twee kleuren.

juiste interpretatie van die figuren blijkt dat de vier gegeven mogelijkheden eigenlijk helemaal geen Venndiagrammen zijn, maar zogeheten *Eulerdiagrammen*, naar Leonhard Euler (1707-1783). Dit begrip is veel minder bekend dan het Venndiagram. Een Eulerdiagram is een weergave van verzamelingen door enkelvoudige, gesloten krommen, meestal cirkels. De grootte van de cirkels is onbelangrijk; het gaat er om hoe de cirkels elkaar overlappen. De eigenschappen 'disjunct' (geen gemeenschappelijke elementen), 'doorsnede' (de wel gemeenschappelijke elementen) en 'deelverzameling' komen in een Eulerdiagram tot uiting. In het algemeen wordt er geen kleuring toegepast om delen van het diagram mee te laten tellen of uit te sluiten.



Figuur 11 De identiteit, gevolgd door een lijnspiegeling.



Figuur 12 Draaiing over 120° .

Het gaat bij het lemma van Burnside om het tellen van het aantal equivalentieklassen, onder bepaalde vormen van symmetrie. Allereerst moeten we de letters en symbolen binnen onze context verklaren. X stelt onze verzameling van 128 Venndiagrammen voor, en G is een transformatie, gebaseerd op een symmetrie of spiegeling die een Venndiagram overvoert in een ander Venndiagram. Er zijn in dit geval zes transformaties. De drie verzamelingen A , B en C van de Venndiagrammen kunnen namelijk getekend worden als cirkels in een regelmatige driehoek (zie ook de kleurendriehoek in figuur 3). Rotaties over 120° of -120° voeren die driehoek over in weer een driehoek. De zes transformaties zijn:

1. de identiteit, d.w.z. een rotatie over 0° ;
2. de identiteit, gevolgd door een lijnspiegeling (bijvoorbeeld de middelloodlijn van AB);
3. een rotatie over 120° ;
4. een rotatie over 120° , gevolgd door een lijnspiegeling;
5. een rotatie over -120° ;
6. een rotatie over -120° , gevolgd door een lijnspiegeling.

Er geldt dus: $\#G = 6$. Voor elk van de zes transformaties gaan we nu na hoeveel elementen 'op hun plaats blijven' (dekpunten) bij toepassing ervan. We

Een Venndiagram is een striktere vorm van een Eulerdiagram. Het bevat altijd de 2^n mogelijke deelgebieden (inclusief het buitengebied) van n verzamelingen. Door middel van kleuring (of anti-kleuring) worden de disjunctie, doorsnede en deelverzameling aangegeven.

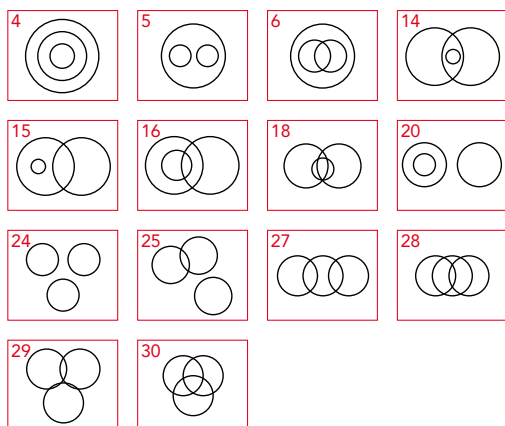
Het is nu duidelijk dat de vier plaatjes bij 'Bedrijf, bakkerij, kledingwinkel' Eulerdiagrammen zijn. De vraag is dus ook: welke van de 29 toegestane oplossingen zijn te tekenen als een Eulerdiagram? Met andere woorden, welke zijn 'cirkeltekenbaar'?

Er blijken 14 cirkeltekenbare oplossingen te zijn, zie figuur 4. In tabel 1 zijn ze blauw gekleurd. Zes ervan kunnen met drie cirkels van gelijke diame-

kunnen drie verschillende soorten transformaties onderscheiden:

- I. De identiteit beeldt driehoek ABC weer af op zichzelf. Alle $2^7 = 128$ oplossingen zijn hier dus dekpunten (invariant).
- II. De drie transformaties 2, 4 en 6 beelden driehoek ABC af op BAC , ACB of CBA . Twee hoekpunten zijn daarbij dus van plaats gewisseld. Zie als voorbeeld figuur 11. De identiteit, gevolgd door een lijnspiegeling, beeldt ABC af als BCA . De punten A en B moeten dus dezelfde kleur hebben, evenals AC en BC . Er zijn dan nog 5 vrije keuzes voor kleur of niet: A/B , C , AC/BC , AB en ABC . Er zijn dus $2^5 = 32$ invariante oplossingen.
- III. De twee transformaties 3 en 5 beelden driehoek ABC af op CAB respectievelijk BCA . Figuur 12 geeft de afbeelding na het toepassen van transformatie 3. Alle drie de hoekpunten veranderen dus van plaats. Zij moeten dus allemaal dezelfde kleur hebben om invariant te zijn. Er zijn nu maar 3 vrije keuzes: $A/B/C$, $AB/AC/BC$ en ABC , $2^3 = 8$ invarianties dus.

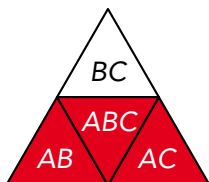
Het aantal equivalentieklassen wordt daarmee volgens het lemma van Burnside: $\frac{1}{6}(2^7 + 3 \cdot 2^5 + 2 \cdot 2^3) = \frac{1}{6}(128 + 96 + 16) = 40$.



Figuur 4 De 14 Eulerdiagrammen. De nummers in de linkerbovenhoeken corresponderen met de nummers in tabel 1.

ter worden getekend. De Eulerdiagrammen hebben 0, 2, 4 of 6 gemeenschappelijke punten. Een oneven aantal snijpunten is niet mogelijk, want een snijpunt van twee cirkels betekent dat er nog een gemeenschappelijk punt is. Of dat er nu één is of (oneindig) veel doet er hier niet toe. Hieronder bewijzen we kort de juistheid voor de gevallen 0 en 2 snijpunten.

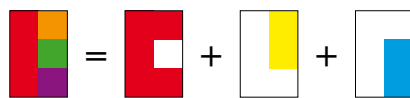
- **0 snijpunten (4 oplossingen).** Ga uit van twee cirkels die 'los' van elkaar liggen. Een derde cirkel die de andere twee niet snijdt, kan alleen maar ook los (nummer 24 in figuur 4 en tabel 1), in één van die twee (20) of er geheel omheen liggen (5). Waren we gestart met twee in elkaar liggende cirkels, dan is de enige nieuwe mogelijkheid voor een derde, niet snijdende cirkel om die er geheel omheen te leggen (4).
- **2 snijpunten (4 oplossingen).** De enige startmogelijkheid met twee cirkels is twee elkaar snijdende cirkels. Een derde cirkel, die dan dus geen extra snijpunten meer mag opleveren, ligt los (nummer 25 in figuur 4 en tabel 1), in een van de twee al getekende cirkels (15), in de doorsnede van beide al getekende cirkels (14) of om die twee cirkels (6). Ga op eenzelfde manier na dat er respectievelijk 2 en 4 oplossingen zijn bij 4 en 6 snijpunten.



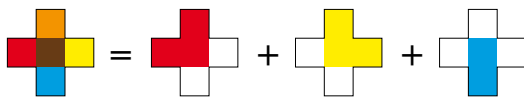
Figuur 5 Mogelijk Eulerdiagram van AB AC BC ABC , met verzameling A donker weergegeven.



Figuur 6 Een mogelijke kleurencode.



Figuur 7 Een kleurenoplossing van A AB AC BC .

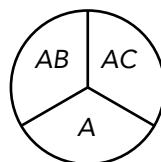


Figuur 8 Een kleurenoplossing van A B C AB ABC .

ANDERE TEKENBARE OPLOSSINGEN Er zijn toegestane oplossingen van 'Bedrijf, bakkerij, kledingwinkel' die niet te tekenen zijn als Eulerdiagram met drie cirkels. Oplossing 39 in tabel 1 is bijvoorbeeld niet cirkeltekenbaar als Eulerdiagram. We kunnen de oplossing wel tekenen, maar niet met drie cirkels. Figuur 5 geeft een mogelijke tekening, met daarin verzameling A donker gekleurd. Ook B en C zijn van dezelfde (congruente) convexe vorm. (Een figuur is convex als je er een touwtje omheen kunt spannen, dat overal tegen de randen van de figuur aanligt.)

Met een kleurencode kunnen we ook een ander soort Eulerdiagram maken. Stel dat we de eigenschappen A , B en C de drie primaire kleuren rood, geel en blauw geven. Dan is AB oranje (rood en geel), AC paars (rood en blauw), BC groen (geel en blauw) en ABC bruin. In figuur 7 en 8 zie je twee voorbeelden: figuur 7 toont een kleurenoplossing van nummer 7 in tabel 1, figuur 8 van nummer 26. Hoe alle toegestane oplossingen het 'beste' kunnen worden getekend, is nog onderwerp van studie. Men vermoedt dat van alle 29 toegestane oplossingen alleen de oplossingen 7, 17 en 38 niet met congruente, convexe figuren kunnen worden getekend. Zo is oplossing 5 ook te tekenen als driedeling van een cirkel, zie figuur 9. ■

Met dank aan Wieb Bosma.



Figuur 9 Convexe, congruente tekening van oplossing 5.

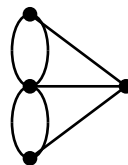
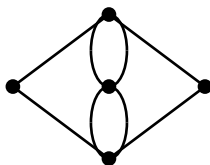
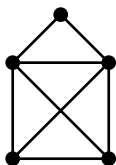
■ door Dave Odegard

Op 26 maart vorig jaar was het honderd jaar geleden dat de legendarische wiskundige Paul Erdős werd geboren. Daarom besteedde *Pythagoras* in 2013 een serie artikelen aan de wiskunde waarmee deze Hongaar zich bezighield. Omdat veel Erdősproblemen zo prikkelend zijn, zetten we de serie nog even voort in 2014. In deze aflevering: oneindige Eulergrafen.

■ door Alex van den Brandhof



ONEINDIGE EULERWANDELINGEN



Figuur 1 (links) Een graaf met twee punten van oneven graad. Een Eulerwandeling is daarom mogelijk.

Figuur 2 (midden) Een graaf waarvan alle punten even graad hebben. De graaf bevat daarom een Eulercircuit.

Figuur 3 (rechts) Een graaf waarvan alle punten oneven graad hebben, en dus noch een Eulerwandeling, noch een -circuit bevat.

24

Op een middag in het jaar 1930 werd er aangeklopt bij een schoenenwinkel in Boedapest. Het winkelmeisje opende de deur en liet de middelbare schoolier binnen. Wat een vreemde snuiter, moet zij gedacht hebben. Wie klopt er nou op de deur, als de winkel gewoon open is? De jongen vroeg naar de zoon van de winkeleigenaar, waarop het meisje hem leidde naar een kantoorje achter de winkel.

De rare jongen was Paul Erdős. Vázsonyi, de eigenaar van de schoenenwinkel, vond dat zijn veertienjarige zoon Andrew maar eens kennis moest maken met Erdős. Andrew zat dikwijls in het kantoorje wiskundige puzzels op te lossen; Erdős zou hem vast kunnen inspireren. Beroemd was Erdős nog niet – hij was zeventien jaar – maar zijn naam was wel al opgedoken in *KöMaL* (Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok, ofwel: wis- en natuurkundetijdschrift voor middelbare scholen), de *Pythagoras* van Hongarije. Erdős was een trouwe inzender van de opgaven in dat blad.

Erdős kwam meteen ter zake. ‘Geef me een getal van vier cijfers’, zei hij. De jonge Vázsonyi schrok van deze ongebruikelijke opening, maar de vraag

was eenvoudig. ‘2.532’, antwoordde hij. Erdős weer: ‘Het kwadraat ervan is 6.411.024. Hoeveel bewijzen voor de stelling van Pythagoras ken je?’ ‘Eén,’ zei Vázsonyi. ‘Ik ken er zevenendertig. Wist je trouwens dat alle punten op de reële rechte geen aftelbare verzameling vormen?’ (Voor het begrip ‘aftelbaar’: zie kader.)

Wie Erdős niet kende, zou denken met een blaaskaak van doen te hebben. Maar zo was zijn gedrag niet bedoeld: het was Erdős’ manier om uit te vinden in welke gebieden uit de wiskunde Vázsonyi en hij een klik hadden. Hier openbaarde zich al de opvatting van Erdős om wiskunde te zien als sociale bezigheid. Wiskunde doe je samen, een standpunt dat Erdős zijn leven lang heeft gehad.

EULERGRAFEN Een *graaf* in de wiskunde is wat we in het dagelijks leven een netwerk noemen: een verzameling punten die al dan niet zijn verbonden door lijnen. Voorbeelden zie je in de figuren 1, 2 en 3. De grafietheorie heeft zich sinds de achttiende eeuw, toen de Zwitser Leonhard Euler zich er voor het eerst mee bezighield, ontwikkeld tot een tak

van de wiskunde met vruchtbare toepassingen, van spoorwegennetten (waarbij de punten de stations zijn en de lijnen de spoorwegverbindingen) tot het world-wide-web (hier zijn de punten de websites en de lijnen de zogeheten hyperlinks).

Naar Euler zijn de Eulerwandeling en het Eulercircuit vernoemd. Een *Eulerwandeling* is een wandeling in een graaf, waarbij elke lijn precies één keer wordt doorlopen. Komen begin- en eindpunt van de wandeling overeen, dan heet de wandeling een *Eulercircuit*.

Er bestaat een verrassend eenvoudige manier om vast te stellen of er in een graaf een Eulerwandeling of -circuit mogelijk is. Uiteraard moet de graaf samenhangend zijn (dat wil zeggen dat elk punt vanuit elk ander punt bereikbaar is) en bovendien moet voor een Eulercircuit elk punt even graad hebben (de graad van een punt is het aantal lijnen dat uit dat punt vertrekt). Voor een Eulerwandeling moeten er precies twee punten zijn van oneven graad. In figuur 1 is een Eulerwandeling mogelijk, in figuur 2 een Eulercircuit en in figuur 3 is zo'n wandeling of circuit onmogelijk.

ONEINDIGE GRAFEN Zes jaar na zijn eerste ontmoeting met Erdős – ze waren inmiddels goed bevriend – deed Vázsonyi onderzoek in de grafentheorie. Zijn doel was om Eulers stelling uit te breiden naar oneindige grafen. Een oneindige graaf is een graaf met een aftelbaar aantal lijnen. Een Eulerwandeling in een oneindige graaf is een aaneengesloten rij lijnen, waarbij elke lijn precies eenmaal voorkomt. Zo'n wandeling heeft geen begin- of eindpunt: de rij zet zich in twee richtingen oneindig voort. Van een Eulercircuit kan in een oneindige graaf geen sprake zijn, omdat er geen expliciet begin- en eindpunt zijn. De simpelst denkbare graaf met een oneindige Eulerwandeling zie je in figuur 4.

Het is evident dat als er in een oneindige graaf een Eulerwandeling mogelijk is, de graaf samenhangend moet zijn en geen van de punten oneven graad heeft (dat wil zeggen: elk punt heeft ofwel even graad ofwel graad oneindig). Deze voorwaarden zijn noodzakelijk (en we nemen in de rest van dit artikel aan dat aan deze voorwaarden wordt voldaan), voldoende zijn ze echter duidelijk niet. Fi-

guur 5 (op pagina 26) toont een oneindige samenhangende graaf zonder punten van oneven graad, maar deze graaf bevat geen Eulerwandeling.

Vázsonyi zocht naar verdere voorwaarden en kwam tot de ontdekking dat ook het volgende nodig is: verwijder je een eindig aantal lijnen uit de samenhangende graaf, dan moet het aantal oneindige componenten van het restant niet groter zijn dan twee. Figuur 5 voldoet niet aan deze voorwaarde: laat je de vier lijnen weg die uit het (enige) punt van graad 4 vertrekken, dan valt de graaf uiteen



Figuur 4 In deze graaf is een oneindige Eulerwandeling mogelijk.

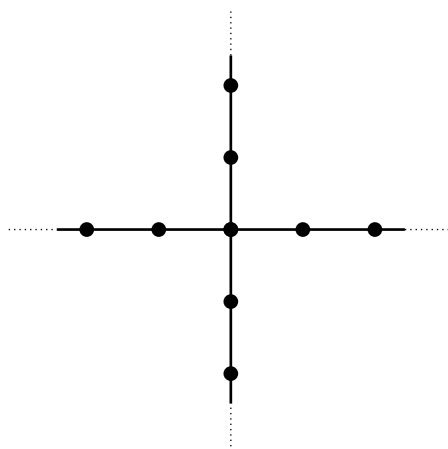
AFTELBARE VERZAMELINGEN

Hoeveel punten liggen er op de reële rechte?

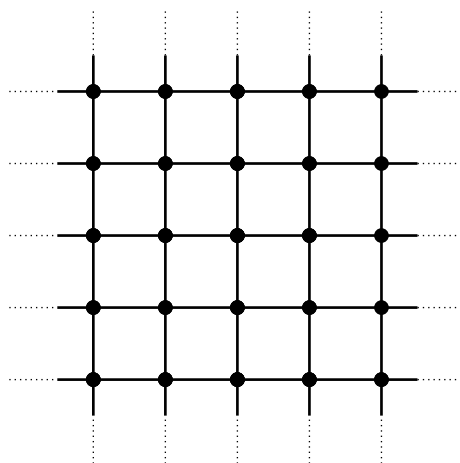
Deze vraag stelde Georg Cantor zich in de tweede helft van de negentiende eeuw. Die vraag was ongetwijfeld al vaker gesteld, maar niemand had een antwoord gevonden dat Cantor bevredigde. Heel concreet: zijn er evenveel natuurlijke als reële getallen? Cantor formuleerde duidelijk wat hij met 'evenveel' bedoelde: bestaat er een 1-op-1-correspondentie tussen de verzameling $\{1, 2, 3, \dots\}$ en de verzameling van alle getallen op de reële rechte? Met andere woorden: kun je alle reële getallen op een rij zetten zonder er één over te slaan?

Bij de gehele getallen en zelfs bij de breuken lukt dat wel. Maar bij de reële getallen ligt de situatie anders. Cantor bewees dat je nooit alle getallen op de reële rechte achter elkaar kunt opschrijven zonder er één over te slaan. Cantor noemde een oneindige verzameling getallen waarvan je alle elementen netjes op een rij kunt zetten *aftelbaar*. Oneindige verzamelingen waarbij dat niet lukt, noemde hij *overaftelbaar*.

In *Pythagoras* 48-3 (januari 2009) staat een uitgebreid artikel over Cantor: 'Georg Cantor (1845-1918): bedwinger van het oneindige'.



Figuur 5 Deze graaf bevat geen oneindige Eulerwandeling.



Figuur 7 In deze graaf is een oneindige Eulerwandeling mogelijk.

in vier oneindige componenten (en één punt van graad 0). Figuur 6 voldoet echter wel aan Vázsonyi's voorwaarde. Maar helaas, deze graaf bevat, net als figuur 5, geen Eulerwandeling.



Figuur 6 Deze graaf bevat geen oneindige Eulerwandeling.

EEN TELEFOONTJE VAN ERDŐS Vázsonyi belde Erdős op om hem zijn ontdekking te vertellen. Vol trots meldde hij hem de nodige voorwaarde voor een Eulerwandeling in een oneindige graaf. Nu was het nog zoeken naar een *voldoende* voorwaarde.

Slechts twintig minuten nadat ze hadden opgehangen, ging Vázsonyi's telefoon. 'Hallo, Erdős hier, ik heb een voldoende voorwaarde gevonden: als je uit een oneindige graaf een eindig deel weghaalt en het restant bestaat uit precies één oneindige component, dan heeft de graaf een Eulerwandeling.'

Vázsonyi kon zich wel voor de kop slaan. Als hij iets langer had nagedacht, had hij dat ook zelf kunnen bedenken. Nu moest hij de *credits* delen. Maar wat hij toen nog niet wist, was dat dit hem als een van de eersten het Erdősgetal 1 zou opleveren.

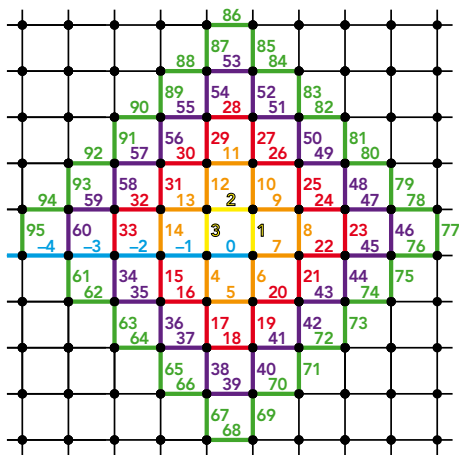
Tevreden waren Vázsonyi en Erdős nog niet.

Een graaf die aan Erdős' voorwaarde voldoet, bevat weliswaar een Eulerwandeling, maar er zijn ook oneindige grafen die niet aan de voorwaarde voldoen en toch een Eulerwandeling hebben. Figuur 4 maakt dit duidelijk.

Kortom: Vázsonyi's voorwaarde is noodzakelijk maar niet voldoende, Erdős' voorwaarde daarentegen is voldoende maar niet noodzakelijk. Met andere woorden: Vázsonyi eist te weinig, Erdős te veel. Een voorwaarde die zowel voldoende als noodzakelijk is, is het mooist. In hun artikel 'Über Euler-Linien unendlicher Graphen' uit 1938 bewezen Erdős, Vázsonyi en Tibor Grünwald, die zich als derde co-auteur aansloot, de volgende stelling:

Stelling. Een oneindige graaf G bevat een Eulerwandeling dan en slechts dan als de graaf samenhangend is, geen punten van oneven graad bevat, en bovendien voldoet aan de volgende twee eisen:

- als uit G een willekeurige eindige deelgraaf wordt weggelaten, is het aantal oneindige componenten dat we overhouden ten hoogste twee;
- als uit G een eindige deelgraaf wordt weggelaten waarvoor geldt dat elk punt in die deelgraaf een even graad heeft, is het aantal oneindige componenten dat we overhouden precies één.



Figuur 8 Een mogelijke Eulerwandeling in de graaf van figuur 7.

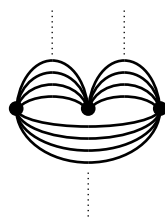
Met het ‘weglaten van een eindige deelgraaf’ wordt bedoeld dat een eindig aantal lijnen wordt verwijderd. De punten waaruit die verwijderde lijnen vertrekken, blijven staan in de overblijvende graaf.

Neem bijvoorbeeld de graaf in figuur 7. Aan alle voorwaarden in de stelling wordt voldaan, dus er bestaat een oneindige Eulerwandeling. Hoe je zo’n wandeling vindt, vertelt de stelling niet. Figuur 8 toont een mogelijke oplossing. Vanaf lijn 0 ga je in een horizontale lijn naar links ($-1, -2, -3, \dots$). De andere kant op zet de wandeling zich voort via een soort ruitenpatroon: eerst de gele ruit, dan oranje, rood, paars, groen enzovoorts. Het is duidelijk dat elke lijn van de graaf op deze manier precies één keer wordt doorlopen.

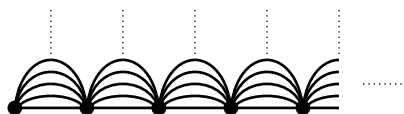
Erdős had een uitstekende intuïtie en kon razendsnel denken. Daarom kwam zijn telefoontje zo rap nadat hij door Vázsonyi met het probleem werd geconfronteerd. Hij voelde haarfijn aan dat bovenstaande stelling volledig is, maar om dat op een nette, formele manier aan te tonen, is een A4-’tje niet toereikend. Het artikel van Erdős, Vázsonyi en Grünwald telt zeventien pagina’s.

In het artikel beschouwen ze ook *eenzijdig* oneindige Eulerwandelingen: een aaneengesloten rij lijnen met een specifiek beginpunt, waarin elke lijn precies eenmaal voorkomt. Zo’n wandeling zet zich dus in slechts één richting oneindig voort. Het artikel is als pdf te vinden op <http://goo.gl/T9xT5j>.

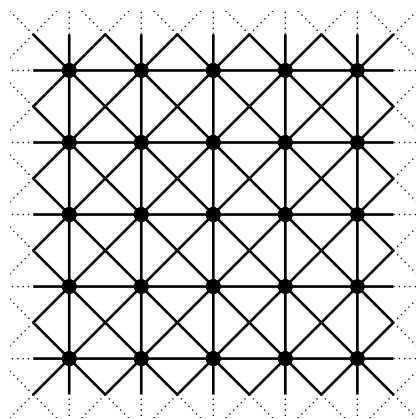
Opgave. Bestaat er een oneindige Eulerwandeling in de grafen in figuur 9, 10 en 11? ■



Figuur 9 Bevat deze graaf een oneindige Eulerwandeling?



Figuur 10 Bevat deze graaf een oneindige Eulerwandeling?



Figuur 11 Bevat deze graaf een oneindige Eulerwandeling?

De Nederlandse Wiskunde Olympiade (NWO) is een jaarlijkse wiskundewedstrijd voor middelbare scholieren. Via twee voorrondes kwamen dit jaar 143 van de bijna 7500 deelnemers in de finale terecht, waarin ze op 13 september 2013 op de TU Eindhoven in drie uur vijf lastige opgaven moesten oplossen. Bob Zwetsloot, die als derde van de vijfdeklassers is geëindigd, beschrijft twee oplossingen van opgave 4 van deze finale.

■ door Bob Zwetsloot

PRODUCTEN VAN DELERS

In opgave 4 van de NWO-finale 2013 staan positieve delers van een getal centraal. Een deler van n is een getal waardoor n deelbaar is, zonder rest. Zo zijn de getallen 1, -1, 2, -2, 3, -3, 6 en -6 alle delers van 6. In opgave 4 gaat het alleen om de positieve delers: 1, 2, 3 en 6. De toevoeging 'positief' laten we vanaf nu weg. Als we het over delers hebben, bedoelen we positieve delers.

In de opgave wordt de functie $P(n)$ gedefinieerd als het product van alle delers van n . In ons voorbeeld met $n = 6$ is dus $P(6) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 6 = 36$. Nog een voorbeeld, met $n = 20$: de delers zijn 1, 2, 4, 5, 10 en 20, dus $P(20) = 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 20 = 8000$.

In het algemeen geldt: als $d_1, d_2, \dots, d_k$ de delers van n zijn, dan is $P(n) = d_1 \cdot d_2 \cdot \dots \cdot d_k$. We kunnen hier meteen een belangrijke eigenschap van $P(n)$ uit afleiden: als $P(n) = d_1 \cdot d_1 \cdot \dots \cdot d_k$ deelbaar is door een bepaald priemgetal p , dan moet minstens één van de d_i 's deelbaar zijn door p , en aangezien de d_i 's allemaal delers zijn van n , is p dan ook een deler van n . Dus elke priemdelers van $P(n)$ is ook een priemdelers van n .

We kijken nu naar wat er eigenlijk wordt gevraagd in de opgave. Dat zijn twee dingen:

- Vind alle positieve gehele getallen n waarvoor geldt dat $P(n) = 15n$.
- Laat zien dat er geen positieve gehele getallen n bestaan waarvoor geldt dat $P(n) = 15n^2$.

Ook hier zullen we de toevoegingen 'positief' en 'geheel' weglaten; vanaf nu nemen we aan dat n dat is.

We bekijken twee bewijzen voor deze opgave: eerst richten we ons specifiek op deze twee deelopgaven, daarna kijken we wat algemener naar $P(n)$ en zoeken we naar een methode waarmee we ook andere eigenschappen van $P(n)$ kunnen ontrafelen.

DE SPECIFIEKE METHODE In vraag a zoeken we alle getallen n met $P(n) = 15n$. Aangezien $P(n)$ nu deelbaar is door $15 = 3 \cdot 5$, is $P(n)$ ook deelbaar door de priemgetallen 3 en 5. Zoals we net al hebben gezien, moet n dan ook deelbaar zijn door 3 en 5. Daarmee is n ook deelbaar door $3 \cdot 5 = 15$. Als $n > 15$, dan zijn in elk geval 3, 5, 15 en n delers van n , dus dat zijn allemaal verschillende factoren van $P(n)$. Dus dan is $P(n)$ minstens $3 \cdot 5 \cdot 15 \cdot n = 225n > 15n$. Dat kan dus niet en we concluderen dat de getallen $n > 15$ niet voldoen. En wat als $n = 15$? Dan is $P(15) = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 15 = 15 \cdot 15$, dus $n = 15$ voldoet. Daarmee hebben we bewezen dat $n = 15$ het enige getal is waarvoor $P(n) = 15n$.

Dan nu vraag b. We moeten bewijzen dat er geen getallen n bestaan met $P(n) = 15n^2$. Stel nu eens dat er wél een n is waarvoor $P(n) = 15n^2$. Net als bij vraag a moet n dan deelbaar zijn door 15. We hebben gezien dat $P(15) = 15 \cdot 15 \neq 15 \cdot 15^2$, dus 15 voldoet niet. Dus $n \geq 30$. Dan moet gelden $\frac{n}{5} \geq \frac{30}{5} = 6 > 5$, oftewel $\frac{n}{5} > 5$. Dus dan zijn $1 < 3 < 5 < \frac{n}{5} < \frac{n}{3} < n$ zes verschillende delers van n , en daarmee ook zes factoren in $P(n)$. Dus $P(n) \geq 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \frac{n}{5} \cdot \frac{n}{3} \cdot n = n^3$. Aangezien $n \geq 30 > 15$, geldt dan $P(n) \geq n^3 = n \cdot n^2 > 15 \cdot n^2$, en dat is een tegenspraak. Dus er is géén n waarvoor geldt dat $P(n) = 15n^2$.

DE ALGEMENE METHODE Om een beter idee te krijgen van de eigenschappen van de functie $P(n)$, vullen we eerst maar eens een aantal kleine getallen voor n in, bijvoorbeeld:

- $P(5) = 1 \cdot 5 = 5 = 5^1$;
- $P(8) = 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 8 = 64 = 8^2$;
- $P(10) = 1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 10 = 100 = 10^2$;

• $P(12) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 12 = 1728 = 12^3$.

Het lijkt erop dat $P(n)$ altijd een macht van n is. Die conclusie is echter iets te overhaast getrokken, want $P(9) = 1 \cdot 3 \cdot 9 = 27$, en dat is geen macht van 9. Maar we zijn hier wel iets op het spoor.

Als voor een zeker (positief, geheel) getal d geldt dat d een deler is van n , dan geldt daardoor automatisch ook dat $\frac{n}{d}$ een deler is van n , want $\frac{n}{d} \cdot d = n$. Dus als $d \neq \frac{n}{d}$, dan zijn $\frac{n}{d}$ en d twee verschillende delers van n met product n . In dat geval noemen we d en $\frac{n}{d}$ een *delerpaar*. Dus zolang $d \neq \frac{n}{d}$ voor alle delers d van n , zit elke deler d van n in een delerpaar. Dit gaat alleen mis als er een d bestaat met $d = \frac{n}{d}$; dan geldt $d^2 = n$, oftewel $d = \sqrt{n}$. Dus alle delers van n zitten in een delerpaar, behalve $\sqrt{n}$, als dat een deler van n is. En $\sqrt{n}$ is alleen een deler van n als n een kwadraat is.

Hiermee kunnen we $P(n)$ omschrijven. Voor elk getal n dat geen kwadraat is, bestaat $P(n)$ uit het product van allemaal verschillende delerparen. Elk delerpaar heeft product n , dus het product van al die delerparen is een macht van n . Dus geldt $P(n) = n^a$ voor een zekere waarde van a (wederom: positief, geheel). Voor alle kwadraten n geldt $P(n) = \sqrt{n} \cdot n^a$, doordat elke deler behalve $\sqrt{n}$ in een delerpaar met product n zit, en $\sqrt{n}$ overblijft. Als we beide gevallen kwadrateren, dan zien we dat $P(n)^2 = n^{2a}$ als n geen kwadraat is en $P(n)^2 = n^{2a+1}$ als n wel een kwadraat is. Dus eigenlijk geldt $P(n)^2 = n^b$ met b een positief geheel getal, want uit de vorige twee vergelijkingen kunnen we opmaken dat $P(n)^2$ ofwel een even macht ofwel een oneven macht van n is, maar in ieder geval een gehele macht van n is.

Terug naar de opgave. In de vraag ging het om

alle getallen n met $P(n) = 15n$. We hebben net gezien dat voor die getallen n geldt dat $P(n)^2 = n^b$ voor een zekere b . Als we $P(n) = 15n$ kwadrateren, vinden we $P(n)^2 = 225n^2$. Dus $n^b = P(n)^2 = 225n^2$. Als we beide kanten van de vergelijking delen door n^2 (dit mag, omdat $n \neq 0$) geldt $n^{b-2} = 225$. Het getal 225 is alleen een eerstemacht (225^1) en een kwadraat (15^2), maar geen hogere macht, dus de enige oplossingen zijn $(n, b) = (225, 3)$ en $(n, b) = (15, 4)$.

We mogen nu niet direct concluderen dat $n = 15$ en $n = 225$ allebei voldoen. Weliswaar is $P(n)^2$ in beide gevallen een macht van n , maar we weten niet zeker of daar ook de juiste exponent b bij hoort. Dus we berekenen $P(15)$ en $P(225)$ en kijken of ze voldoen. Voor $n = 15$ geldt $P(15) = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 15 = 15 \cdot 15$, dus $n = 15$ voldoet. Voor $n = 225$ geldt $P(225) = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 15 \cdot 25 \cdot 45 \cdot 75 \cdot 225 = 15 \cdot 225^4 \neq 15 \cdot 225$, dus $n = 225$ voldoet niet. Aan gezien we alle andere gevallen al hadden uitgesloten, is $n = 15$ de enige oplossing.

Tot slot vraag b. Waarom is er geen n met $P(n) = 15n^2$? We maken weer vergelijkingen, zoals net. Na kwadrateren van $P(n) = 15n^2$ krijgen we $P(n)^2 = 225n^4$. Er geldt nog steeds $P(n)^2 = n^b$, dus $n^b = P(n)^2 = 225n^4$. Deel beide kanten door n^4 , dat geeft $n^{b-4} = 225$. We weten nog dat 225 alleen een eerstemacht en een kwadraat is, dus zijn de enige twee oplossingen $(n, b) = (225, 5)$ en $(n, b) = (15, 6)$. Nu hoeven we alleen nog $n = 15$ en $n = 225$ te controleren. Voor $n = 15$ geldt $P(15) = 15 \cdot 15 \neq 15 \cdot 15^2$, dus $n = 15$ voldoet niet, en voor $n = 225$ geldt $P(225) = 15 \cdot 225^4 \neq 15 \cdot 225^2$, dus ook $n = 225$ voldoet niet. Er is dus geen enkele n waarvoor $P(n) = 15n^2$. ■

PYTHAGORAS OLYMPIADE

■ door Matthijs Coster, Eddie Nijholt en Harry Smit

Doe mee met de Pythagoras Olympiade! Elke aflevering bevat vier opgaven. De eerste twee zijn wat eenvoudiger; onder de goede inzendingen van leerlingen uit de klassen 1, 2 en 3 wordt een cadeaubon van Bol.com ter waarde van 20 euro verloot. De laatste twee zijn echte breinbrekers; onder de goede inzendingen van leerlingen (tot en met klas 6) wordt een bon van 20 euro verloot. Per aflevering wordt maximaal één bon per persoon vergeven.

Daarnaast krijgen leerlingen (tot en met klas 6) punten voor een *laddercompetitie*, waarmee eveneens een cadeaubon van Bol.com van 20 euro te verdienen valt. De opgaven van de onderbouw zijn 1 punt waard, de opgaven van de bovenbouw 2 punten. De leerling met de hoogste score in de laddercompetitie krijgt een bon. Zijn puntentotaal wordt weer op 0 gezet. Wie zes achtereenvolgende keren niets inzendt, verliest zijn punten in de laddercompetitie.

Met de bovenbouw-opgaven kun je ook een plaats in de finale van de Nederlandse Wiskunde Olympiade verdienen, mocht



het via de voorronden niet lukken: aan het eind van elke jaargang worden enkele goed scorende leerlingen uitgenodigd voor de NWO-finale. Niet-leerlingen kunnen met de Pythagoras Olympiade meedoen voor de eer.

HOE IN TE ZENDEN? Inzendingen ontvangen we bij voorkeur per e-mail (getypt of een scan van een handgeschreven oplossing):

pytholym@gmail.com

Je ontvangt een automatisch antwoord zodra we je bericht hebben ontvangen.

Eventueel kun je je oplossing sturen naar
Pythagoras Olympiade, PWN
p.a. Centrum Wiskunde & Informatica
Postbus 94079
1090 GB Amsterdam

Voorzie het antwoord van een duidelijke toelichting (dat wil zeggen: een berekening of een bewijs). Vermeld je naam en adres; leerlingen moeten ook hun klas en de naam van hun school vermelden.

Je inzending moet bij ons binnen zijn vóór 30 april 2014.

30 DE GOEDE INZENDERS VAN NOVEMBER 2013

270: Jildert Denneman (klas 4), Erasmiaans Gymnasium Rotterdam; Wout Gevaert (klas 5), Goese Lyceum, Goes; Yvette Keij (klas 4), Goois Lyceum, Bussum; Michelle Sweering (klas 6), Erasmiaans Gymnasium Rotterdam; Tim Vermeulen (klas 6), Isendoorn College, Warnsveld.

271: Sterre ter Beek (klas 3), Goois Lyceum, Bussum; Ivo van Dijk (klas 5), Goois Lyceum, Bussum; Wout Gevaert (klas 5), Goese Lyceum, Goes; Oscar Heijdra (klas 3), Goois Lyceum, Bussum; Laurens Hilbrands (klas 3), Goois Lyceum, Bussum; Yvette Keij (klas 4), Goois Lyceum, Bussum; Michelle Sweering (klas 6), Erasmiaans Gymnasium Rotterdam; Tim Vermeulen (klas 6), Isendoorn College, Warnsveld; Robert van der Waall, Hilversum; Seb Waterreus (klas 3), Goois Lyceum, Bussum; Marinda Westerveld (klas 5), Goois Lyceum, Bussum.

272: Kees Boersma, Vlissingen; Wout Gevaert (klas 5), Goese Lyceum, Goes; Oscar Heijdra (klas 3), Goois Lyceum, Bussum; Michelle Sweering (klas 6), Erasmiaans Gymnasium Rotterdam; Tim Vermeulen (klas 6), Isendoorn College, Warnsveld; Marinda Westerveld (klas 5), Goois Lyceum, Bussum.

273: Kees Boersma, Vlissingen; Wout Gevaert (klas 5), Goese Lyceum, Goes; Michelle Sweering (klas 6), Erasmiaans

Gymnasium Rotterdam; Tim Vermeulen (klas 6), Isendoorn College, Warnsveld; Robert van der Waall, Hilversum.

Cadeaubonnen: Oscar Heijdra en Wout Gevaert.

Stand laddercompetitie: Michelle Sweering (24 p; cadeaubon), Jelmer Hinssen (18 p), Bram Jonkheer (18 p), Jori Koolstra (18 p), Tara van Belkom (8 p), Lennart Muijres (7 p), Wout Gevaert (6 p), Nathan van 't Hof (6 p), Tim Vermeulen (6 p), Eva Kapitein (5 p), Frenk Out (5 p), Eline Vounckx (5 p), Art Waeterschoot (5 p), Bob Zwetsloot (5 p), Ronen Brilleslijper (4 p), Marijke Bot (3 p), Elien Cambie (3 p), Jonas Cambie (3 p), Jildert Denneman (3 p), Oscar Heijdra (3 p), Ritchie Keijsper (3 p), Jia-Jia ter Kuile (3 p), Marleen Meliefste (3 p), Timen Schenk (3 p), Pim Spelier (3 p), Sjoerd de Vries (3 p), Marinda Westerveld (3 p), Matthijs Buringa (2 p), Maud Jonker (2 p), Yvette Keij (2 p), Alex Keizer (2 p), Tom Smeding (2 p), Jelle den Uil (2 p), David Welling (2 p), Luka Zwaan (2 p), Sterre ter Beek (1 p), Lisa Clappers (1 p), Ivo van Dijk (1 p), Thijs van Etten (1 p), Laurens Hilbrands (1 p), Bram Honig (1 p), Bastiaan vd Kooij (1 p), Rein Lukkes (1 p), Anne Noom (1 p), Alexander Vermeersch (1 p), Seb Waterreus (1 p), Marc Zuurbier (1 p).

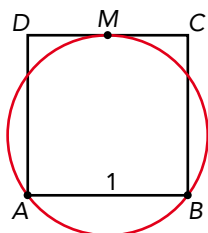
OPGAVE 278

Sinds de 49ste jaargang van *Pythagoras* (2009-2010) staan er in elke aflevering vier opgaven in de Pythagoras Olympiade. Elke jaargang bestaat uit zes afleveringen (twee afleveringen voor Oud en Nieuw en vier afleveringen na Oud en Nieuw). Veronderstel dat de Pythagoras Olympiade nog blijft bestaan tot en met de aflevering van *Pythagoras* waarin de opgave staat die hetzelfde nummer heeft als het jaartal waarin die opgave verschijnt. In welke aflevering van *Pythagoras* (jaargang en nummer) staat dan die opgave?



OPGAVE 279

Gegeven is een vierkant $ABCD$ waarvan de zijden lengte 1 hebben. Een cirkel gaat door A , B en het midden M van zijde CD . Wat is de straal van deze cirkel?



OPGAVE 280

Gegeven is een rij getallen $a_0, a_1, a_2, \dots$. De *verschilrij* $v_0, v_1, v_2, \dots$ is als volgt gedefinieerd:

$$v_n = a_{n+1} - a_n.$$

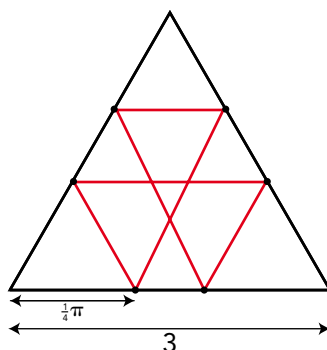
De *tweede verschilrij* $w_0, w_1, w_2, \dots$ is de verschilrij van de verschilrij, dus:

$$w_n = v_{n+1} - v_n.$$

De rij $a_0, a_1, a_2, \dots$ is gelijk aan $w_0, w_1, w_2, \dots$. Bovendien is gegeven dat $a_3 = 60$. Bereken a_{12} .

OPGAVE 281

In een gelijkzijdige driehoek met zijde 3 zijn alle wanden spiegels. Op een van de zijden wordt op afstand $\frac{1}{4}\pi$ van een hoekpunt een laserstraal afgeschoten onder een hoek van 60° . Na vijf keer spiegelen komt de laserstraal weer terug waar hij was. Wat is de afstand die het licht aflegt voordat het weer terug is waar het begon?



OPLOSSING 270

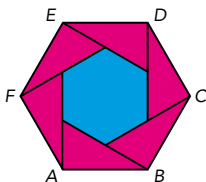
Susan heeft drie gelijke dropveters, die ze eerlijk moet verdelen over vijf personen. Wat is het kleinste aantal keer dat ze een dropveter of een stuk dropveter in twee stukken moet delen, om dit voor elkaar te krijgen?

Oplossing. Het eindresultaat moet zijn dat alle vijf personen $\frac{3}{5}$ van een dropveter hebben. Deel eerst alle drie de dropveters in twee stukken: één stuk van $\frac{3}{5}$ deel en één stuk van $\frac{2}{5}$ deel. Drie personen kunnen hun deel al ontvangen. Eén van de resterende stukken dropveters moet nog worden opgedeeld in twee stukken van $\frac{1}{5}$ deel. De twee personen die nog niets hadden, krijgen nu elk een stuk van $\frac{2}{5}$ deel en een stuk van $\frac{1}{5}$ deel. Er moet in totaal dus vier keer worden gedeeld. Met minder dan vier keer delen is het onmogelijk om de drie dropveters zo te verdelen over vijf personen dat elk $\frac{3}{5}$ deel krijgt.

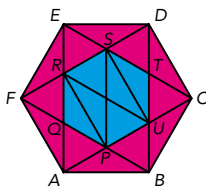
Opmerking. Enkele inzenders geven de volgende oplossing: deel alle drie de dropveters in tweeën; geef vijf stukken weg en gooi de laatste halve dropveter weg. Deze oplossing, waarbij in totaal slechts drie keer wordt gedeeld, wordt fout gerekend, omdat gevraagd wordt om drie gelijke dropveters te *verdelen* over vijf personen. Dan kan je er niets van weggooien!

OPLOSSING 271

De regelmatige zeshoek $ABCDEF$ hieronder heeft oppervlakte 1. In de zeshoek zijn zes rechthoekige driehoeken geplaatst. Wat is de oppervlakte van de kleine blauwe zeshoek?



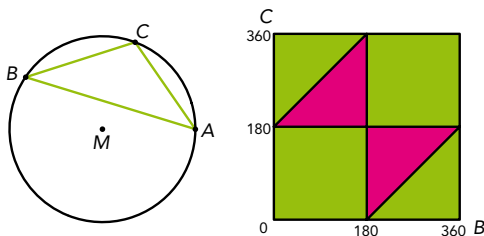
Oplossing. Zie onderstaande figuur. Teken de diagonalen AC , AE , BD , BF , CE en DF . Teken vervolgens in de blauwe zeshoek de diagonalen PR , PS , RU en SU . Ga zelf na dat $\angle FAR = 30^\circ$. Spiegel driehoek FAR in lijn FC , dat geeft driehoek FEQ . Nu volgt eenvoudig: driehoek FQR is gelijkzijdig en QR ligt op lijnstuk AE . Nu volgt dat de driehoeken FQR en FAQ gelijke oppervlakte hebben. Elk van de getekende driehoeken in onderstaande figuur is congruent met driehoek FQR óf met driehoek FAQ . Nu is het een kwestie van driehoeken tellen. In totaal zijn er 18 driehoeken, waarvan er 6 in het blauwe gebied liggen. De blauwe zeshoek heeft dus oppervlakte $\frac{1}{3}$.



OPLOSSING 272

Op een cirkel worden willekeurig drie punten A , B en C gekozen. Wat is de kans dat driehoek ABC stomphoekig is?

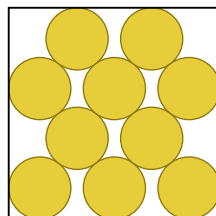
Oplossing. Zie de figuur bovenaan de volgende kolom. Kies eerst punt A willekeurig op de cirkel en draai de cirkel vervolgens zo, dat A helemaal rechts ligt (linkerfiguur). De hoeken AMB en AMC nemen een waarde aan tussen 0° en 360° (positieve draairichting, d.w.z.: tegen de klok in). Als beide hoeken kleiner zijn dan 180° , of beide groter zijn dan 180° , is driehoek ABC stomphoekig (de getekende groene driehoek is een voorbeeld waarbij de hoeken AMB en AMC kleiner zijn dan 180°). Als



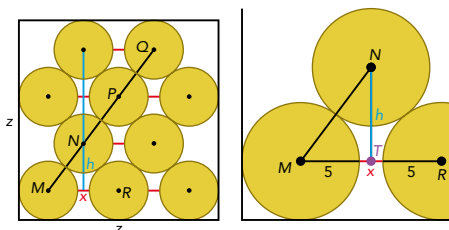
een van de hoeken kleiner is dan 180° en de ander groter is dan 180° , kan driehoek ABC zowel scherp- als stomphoekig zijn. In de rechterfiguur zijn de punten B en C tegen elkaar uitgezet. We kleuren de punten B en C rood dan wel groen, als de bijbehorende driehoek ABC scherp dan wel stomp is. Door de oppervlakte te bepalen van het groene vlakdeel ten opzichte van het totale vlak, vinden we dat de kans op een stomphoekige driehoek gelijk is aan $\frac{3}{4}$.

OPLOSSING 273

Tien kerstballen zitten in een vierkante doos, zoals in de figuur aangegeven. De straal van elke kerstbal is 5. Hoe lang is één zijde van de doos?



Oplossing. Zie onderstaande figuur. Merk eerst op dat de middelpunten M , N , P en Q op één lijn liggen. We kunnen de lengte van de zijde van de doos (z) nu uitdrukken in zowel x (de rode lijnstukjes) als h (de blauwe lijnstukjes): $z = 2x + 30$ en $z = 3h + 10$, ofwel $2x + 30 = 3h + 10$. We vinden: $x = \frac{3}{2}h - 10$. Met de stelling van Pythagoras in driehoek MTN vinden we: $(5 + \frac{1}{2}x)^2 + h^2 = 10^2$, ofwel $(\frac{3}{4}h)^2 + h^2 = 100$. Na wegwerken van de haakjes vinden we $\frac{25}{16}h^2 = 100$, ofwel $h = 8$. Dus de gevraagde zijde is dus $z = 3 \cdot 8 + 10 = 34$.



OPLOSSING FIETSLAMPPUZZEL

In het vorige nummer stond de volgende opgave. De taartpunt rechts is een zesde deel van de figuur links. Wat is de verhouding b/a , als de zes blauwe stukken in de linkerfiguur elk even groot zijn als de rode zes-hoek in het midden van de linkerfiguur?

In de rechterfiguur moet gelden dat de oppervlakte van het blauwe deel zes keer zo groot is als de oppervlakte van het rode gelijkzijdige driehoekje. Er geldt:

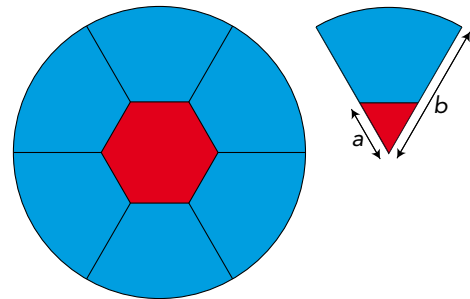
$$\text{opp}(\text{taartpunt}) = \frac{\pi b^2}{6} \text{ en } \text{opp}(\text{rood}) = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}.$$

Verder is

$$\text{opp}(\text{blauw}) = \text{opp}(\text{taartpunt}) - \text{opp}(\text{rood}) = \frac{\pi b^2}{6} - \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}.$$

We willen dat

$$\frac{\pi b^2}{6} - \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = 6 \times \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$$



ofwel

$$\frac{\pi b^2}{6} = 7 \times \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}.$$

Daaruit volgt dat

$$\frac{b}{a} = \sqrt{\frac{21\sqrt{3}}{2\pi}} \approx 2,41.$$



53ste jaargang nummer 4
februari 2014
ISSN 0033 4766

Pythagoras stelt zich ten doel jongeren kennis te laten maken met de leuke en uitdagende kanten van wiskunde. *Pythagoras* richt zich tot leerlingen van vwo en havo en alle anderen die jong van geest zijn.

Internet www.pythagoras.nu

Hoofredacteur Derk Pik

Eindredacteur Alex van den Brandhof

Redactie Matthijs Coster,
Jeanine Daems, Jan Guichelaar,
Klaas Pieter Hart, Paul Levrie,
Marc Seijlhouwer

Vormgeving Grafisch Team Digipage,
Leidschendam

Druk Drukkerij Ten Brink, Meppel

Uitgever Koninklijk Wiskundig
Genootschap (KWG)

Management Pythagoras Jan Turk,
Mark Veraar (KWG), Derk Pik

Lezersreacties en kopij

Bij voorkeur per e-mail; lezersreacties naar Jan Guichelaar, jan@pythagoras.nu en kopij naar Derk Pik, derk@pythagoras.nu.
Eventueel per post naar Pythagoras, p.a. Centrum Wiskunde & Informatica, Postbus 94079, 1090 GB Amsterdam.

Abonnementen, bestellingen en mutaties

Abonneeservice Pythagoras
Postbus 2238
5600 CE Eindhoven
Telefoon 088 226 5258
E-mail: abonnementen@pythagoras.nu

Abonnementsprijs

(zes nummers per jaargang)
€ 26,00 (Nederland en België),
€ 29,00 (overige landen),
€ 17,00 (groepsabonnement NL/B),
€ 26,00 (geschenkabonnement NL/B),
€ 29,00 (geschenkabonnement overige landen).

Een geschenkabonnement stopt automatisch na één jaar. Overige abonnementen gelden tot wederopzegging. Zie www.pythagoras.nu voor verdere toelichtingen.

Aan dit nummer werkten mee

Alex van den Brandhof
(alex@pythagoras.nu),
Matthijs Coster
(matthijs@pythagoras.nu),
Jeanine Daems
(jeanine@pythagoras.nu),
Jan Guichelaar
(jan@pythagoras.nu),
Klaas Pieter Hart
(kp@pythagoras.nu),
Jaap Klouwen
(j.klouwen@hva.nl),
Marc van Kreveld
(m.j.vankreveld@uu.nl),
Paul Levrie
(paul@pythagoras.nu),
Eddie Nijholt
(eddie@pythagoras.nu),
Dave Odegard
(dave@odegard.demon.nl),
Derk Pik
(derk@pythagoras.nu),
Marc Seijlhouwer
(marc@pythagoras.nu),
Harry Smit
(h.j.smit@students.uu.nl),
Bob Zwetsloot
(by.bob@ziggo.nl).

Pythagoras wordt mede mogelijk gemaakt door de bijdragen van de onderstaande instituten en instellingen.



TU Delft TU/e

UNIVERSITEIT
TWENTE.



VIÈTE / RUDIO

$$\pi = 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}} \dots$$

In Amerika is 3.14 de schrijfwijze voor de waarde van het getal π in twee decimalen nauwkeurig én voor de datum 14 maart. Daarom hebben de Amerikanen deze datum tot pi-dag gedoopt. Op deze dag wordt op allerlei wiskunde-instituten en -faculteiten *pie* (taart) gegeten.

Voor π bestaan veel fraaie formules, bijvoorbeeld in de vorm van een oneindige som, een integraal of een kettingbreuk. De eerste die een formule voor π in de vorm van een oneindig product gaf, was François Viète (1540-1603). Hierboven is de formule weergegeven in onze moderne notatie. De formule bevat (naast plustekens, maaltekens en deelstrepen) slechts tweeën en worteltekens! De convergentie werd pas in 1891 bewezen door Ferdinand Rudio (1856-1929).