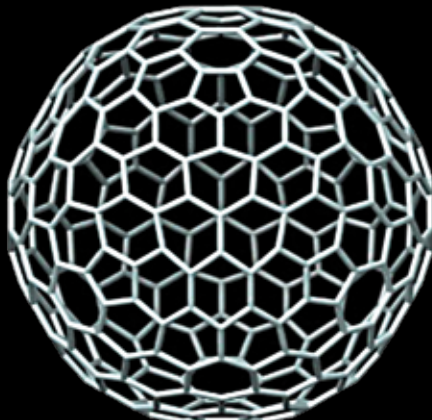
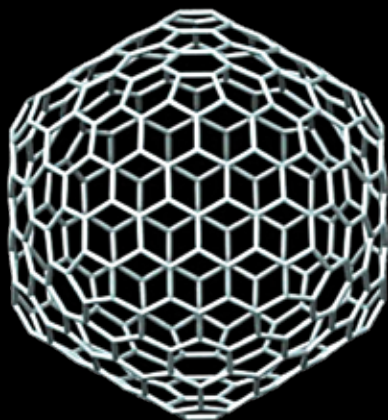
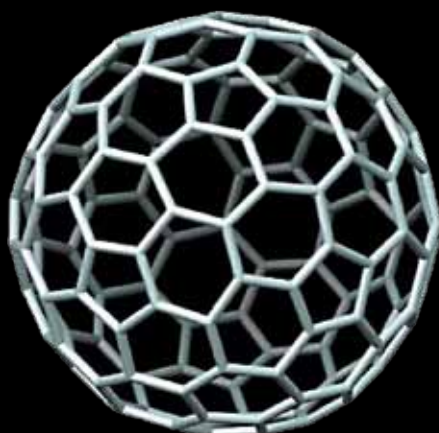
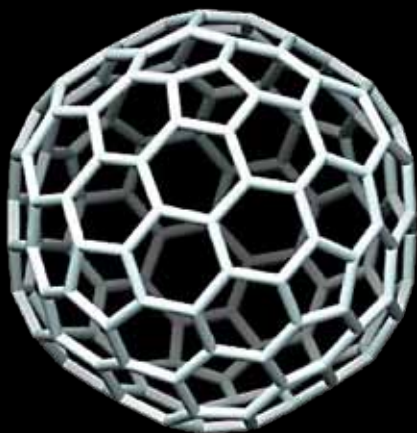
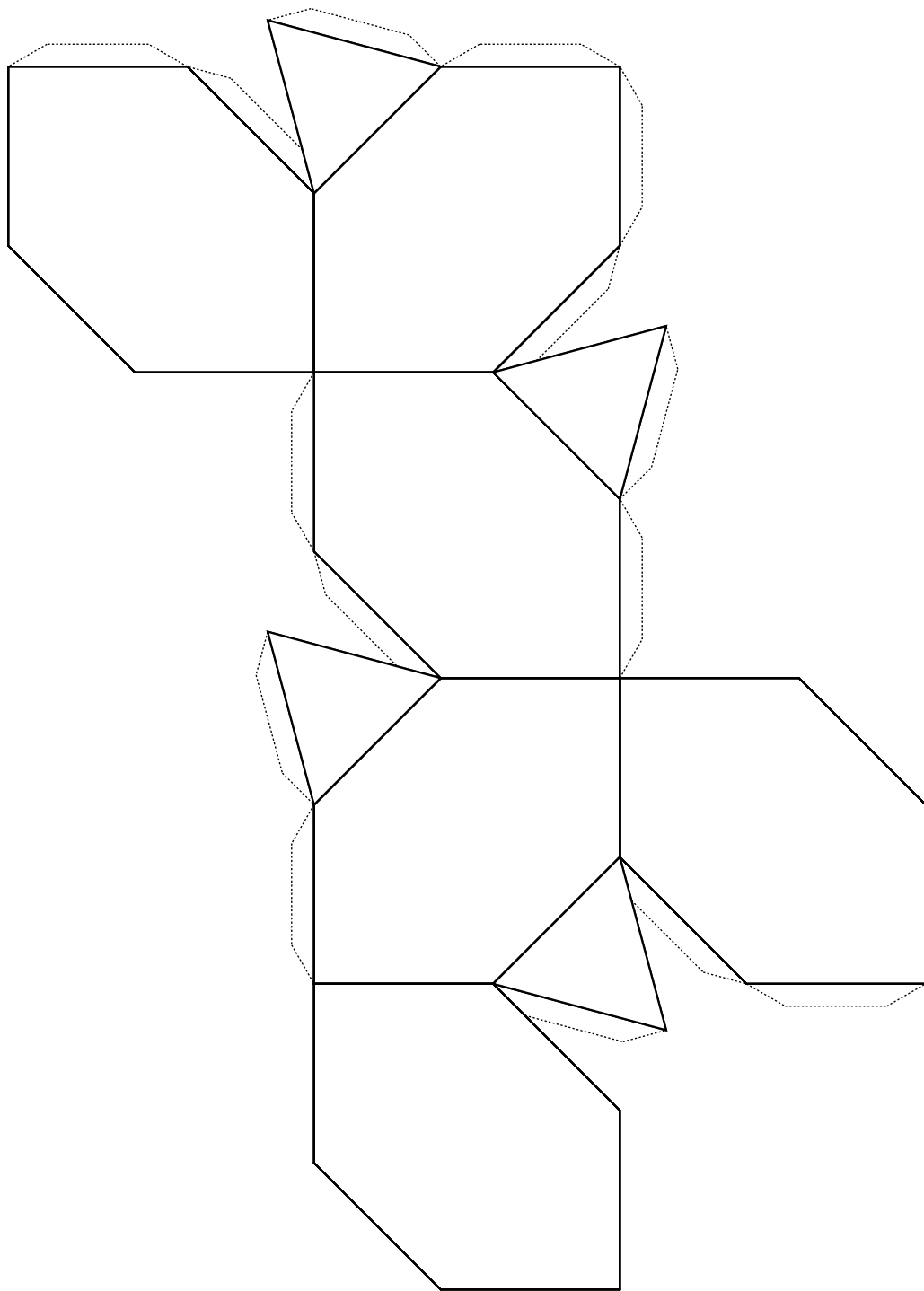


PYTHA GORAS

WISKUNDETIJDSCHRIFT VOOR JONGEREN



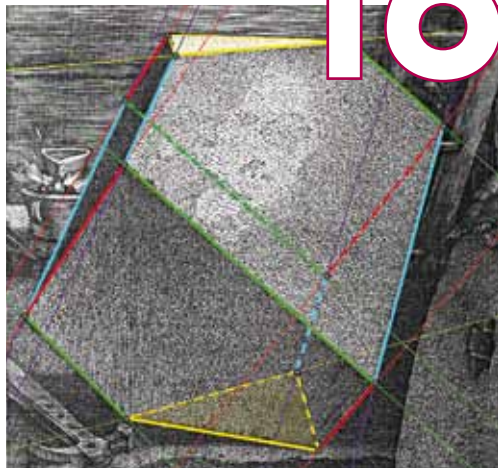
53ste JAARGANG - NUMMER 5 - APRIL 2014



Je ziet hier een bouwplaat van een zogeheten *Goldbergveelvvlak*. Lees het artikel op pagina 20. De bouwplaat kun je ook downloaden van onze website: **www.pyth.eu**.

INHOUD

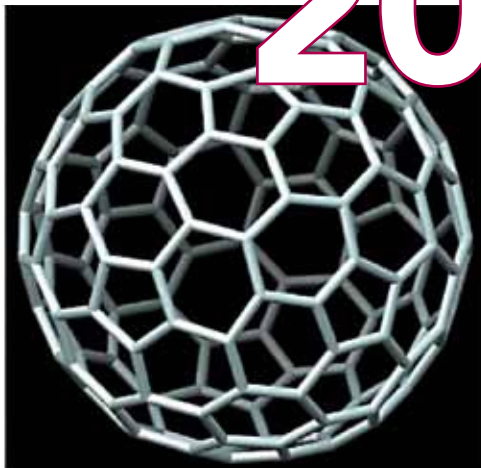
16



VIJFHONDERD JAAR MELENCOLIA I

Albrecht Dürer maakte *Melencolia I* in 1514. Dat is precies vijfhonderd jaar geleden. We gaan deze gravure analyseren met behulp van GeoGebra.

20



GOLDBERGVEELVLAKKEN

Twee Amerikaanse neurowetenschappers hebben onlangs een nieuwe klasse van veelvlakken ontdekt, die ze *Goldbergveelvlakken* doopten. Het is voor het eerst sinds vierhonderd jaar dat een nieuw type convexe veelvlakken met gelijke ribben en zogeheten 'icosahedrale symmetrie' is ontdekt.

EN VERDER

- 2 Kleine nootjes
- 4 Tweede- en derdemachtswortels
- 6 Divergente reeksen:
een duivelsuitvinding
- 11 Priempracht
- 12 Journaal
- 13 De cosinusregel in drie dimensies
- 22 Groepsindelingen
- 26 Drijvende stenen en vliegende
nijlpaarden
- 29 Hoe fotografeer je een 4d-kubus?
- 30 Pythagoras Olympiade
- 33 Oplossing 'Een puzzel in evenwicht'

NIEUW

www.pyth.eu

Het webadres van *Pythagoras* is veranderd van www.pythagoras.nu in www.pyth.eu. Ook de e-mailadressen zijn aangepast: die eindigen nu allemaal op @pyth.eu (zie ook het colofon op pagina 33).

Omslagillustratie: Van Goldbergkooi naar Goldbergveelvlak. Illustraties zijn gemaakt met UCSF Chimera software. Met toestemming overgenomen uit *PNAS*, vol. 111, no. 8 (25 februari 2014).

■ **NIVEAUBALKJES** Sommige pagina's bevatten één of meer zwarte balkjes onder het paginanummer. Voor artikelen zonder balkje is geen specifieke voorkennis nodig. Artikelen met één balkje bevatten wiskunde uit de onderbouw. Artikelen met twee balkjes vereisen kennis uit de bovenbouw. Drie balkjes: net iets moeilijker.

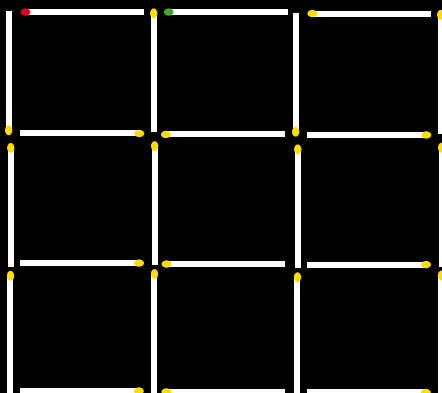
KLEINE NOOTJES

■ door Jan Guichelaar

STEEDS MINDER VIERKANTEN

Leg met 24 lucifers een rooster van 3 bij 3 vierkantjes. Behalve negen vierkantjes van 1 bij 1, heb je ook vier vierkanten van 2 bij 2 en één van 3 bij 3. In totaal zijn er dus 14 vierkanten.

Als je de lucifer met de rode kop weghaalt, zijn er in totaal nog 11 vierkanten. En als je de lucifer met de groene kop weghaalt, zijn er in totaal 10 vierkanten. Kun je door één of meer lucifers weg te nemen een figuur maken die in totaal k vierkanten bevat, met k een getal kleiner dan 14? Neem steeds zo weinig mogelijk lucifers weg.



SOM EN PRODUCT

Als je twee enen en drie tweeën bij elkaar optelt, krijg je hetzelfde als wanneer je deze vijf getallen met elkaar vermenigvuldigt. Kun je een ander vijftal getallen bedenken met deze merkwaardige eigenschap?

$$1 + 1 + 2 + 2 + 2 = 1 \times 1 \times 2 \times 2 \times 2$$



VIER KAARTEN

Alice trekt vier kaarten uit een spel van 52 kaarten, bekijkt ze, en legt ze dicht op een rijtje. Ze zegt tegen Evert: 'Het zijn een ♣, een ♦, een ♥ en een ♠. Het zijn ook twee boeren, een 5 en een 10.'

Verder geeft ze de volgende aanwijzingen: 'De ♥ ligt links van de ♠ en rechts van de 5. De ♣ ligt rechts van de ♦. De rode 10 ligt niet direct naast de ♣.' Links en rechts hoeft niet te betekenen direct grenzend aan. Na even denken zegt Evert welke kaarten het zijn en in welke volgorde ze liggen. Kun jij dat ook?

Kleine nootjes zijn eenvoudige opgaven die weinig of geen wiskundige voorkennis vereisen om opgelost te kunnen worden. De antwoorden vind je in het volgende nummer van *Pythagoras*.

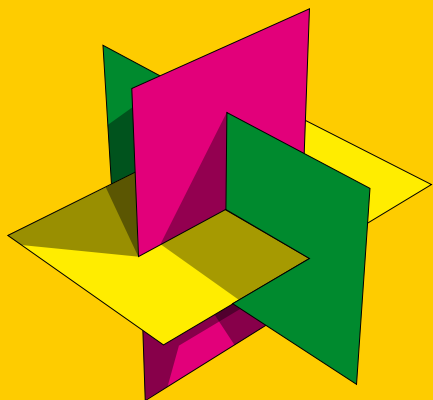


MET DE KLOK MEE

Op elk tijdstip sluiten de kleine en de grote wijzer van een klok een hoek in. Deze hoek, gemeten van kleine naar grote wijzer met de klok mee, is kleiner dan (of gelijk aan) 180° of groter dan 180° . Noem de 'kleiner-dan-periodes' tussen 12 uur en 6 uur samen P , en die tussen 6 uur en 12 uur Q . Geldt $P = Q$, $P > Q$ of $P < Q$?

DE RUIMTE VERDELEN

Teken in gedachten vier oneindig doorlopende platte vlakken in de ruimte. Twee vlakken mogen elkaar snijden, of evenwijdig zijn aan elkaar, of samenvallen. Het is eenvoudig om de ruimte te verdelen in 2 stukken; neem vier samenvallende vlakken. Wat is het grootste aantal stukken waarin je de ruimte kunt verdelen? Kun je de ruimte verdelen in alle aantallen stukken kleiner dan dit maximum?



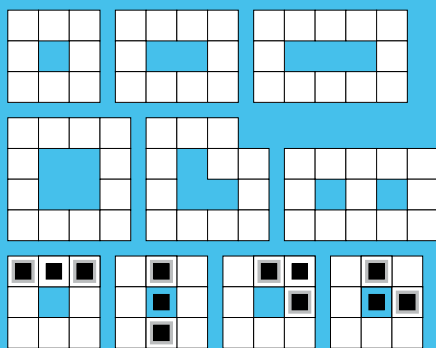
OPLOSSINGEN KLEINE NOOTJES NR. 4

Zinnige zin. 'In deze zin staan tien letters 'e' en zes letters 'n'.

Getallen maken. De eerste zes getallen die tot 1 leiden, zijn 1, 4, 7, 10, 34, 37. Het kleinste getal dat tot 10 leidt, is 1333. Een ander getal dat tot 10 leidt, is 1633.

Je kunt met elk getal eindigen. Noem het eindgetal G . Neem dan als begingetal het getal dat bestaat uit G enen. Vermenigvuldigen met 3 geeft het getal dat bestaat uit G drieën. De som van de cijfers is $3G$. Delen door 3 geeft G .

Gaten plakken met blokken. Er zijn 10 oplossingen. De witte vierkantjes vormen steeds de onderste laag, de grijze vierkantjes de middelste laag en de zwarte vierkantjes de bovenste laag.



Schaatswedstrijd. Na een tijdje rijdt Kees op de laatste plaats. Vervolgens wordt hij door de andere vier op een ronde gereden en heeft op alle vier dus een achterstand van ruim een ronde. Van de vier haalt hij er drie net weer in, maar blijft dus bijna een ronde op drie vrienden achter, en ruim een ronde op de vierde.

Chocolaatjes. Isa begon met 62 chocolaatjes. Op dag 1 eindigt ze met 30 ($= 62/2 - 1$) chocolaatjes. Op dag 2 eindigt ze met 14, op dag 3 met 6, op dag 4 met 2 en op dag 5 met 0.

Verbaas je leraar en leer sneller rekenen met de rekentrucs van *Pythagoras*. Inmiddels heb je al een hele rits aan trucs en zou je bijna alle 'gewone' sommetjes moeten kunnen maken. In de vorige aflevering heb je onder andere kunnen lezen welke kwadraten je zou moeten kennen om snel bepaalde wortels uit te kunnen rekenen. In deze aflevering gaan we nog even verder met het berekenen en het schatten van wortels.

■ door Marc Seijlhouwer

TWEEDE- EN DERDEMACHTS- WORTELS

4

Ken je alle kwadraten van de getallen 1 tot en met 25 uit het hoofd? Deze kan je gebruiken om een wortel te berekenen of nauwkeurig te schatten. Handig bijvoorbeeld voor bij de stelling van Pythagoras. Het gaat als volgt.

- Neem een getal waarvan je de wortel wilt berekenen, bijvoorbeeld 79.
- Kijk welk kwadraat er het dichtst bij ligt. Het getal 79 ligt tussen de kwadraten $8^2 = 64$ en $9^2 = 81$. Het ligt het dichtst bij het kwadraat van 9.
- De waarde 9 is iets te groot: er moet wat vanaf. Dit is de geheimzinnige term:

$$\frac{9^2 - 79}{2 \cdot 9} = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}.$$

- Een goede schatting is nu: $\sqrt{79} = 9 - \frac{1}{9} = 8\frac{8}{9} \approx 8,8889$. In werkelijkheid is $\sqrt{79} \approx 8,8881$. Onze uitkomst is dus niet verkeerd voor een snelle schatting!

Opgave 1. Kun je de 'geheimzinnige term' verklaren?

Bij grotere getallen nemen we grotere stappen. Als voorbeeld nemen we $\sqrt{1350}$. Omdat 1350 inligt tussen $35^2 = 1225$ en $40^2 = 1600$, schatten we:

$$\sqrt{1350} \approx 35 + \frac{1350 - 35^2}{2 \cdot 35} = 35 + \frac{125}{70} = 35\frac{25}{14} \approx 36,79.$$

De echte waarde is 36,74.

DERDEMACHTSWORTELS Het kunnen schatten of berekenen van de derdemachtswortel van een getal kan handig zijn als je bijvoorbeeld het volume van een kubus kent en de afmetingen wilt weten. Straks gaan we derdemachtswortels schatten, maar eerst geven we een leuke truc met derdemachten.

Je vraagt aan iemand met een rekenmachine om van een geheel getal onder de honderd de derdemacht te berekenen. Hij geeft het getal 658503. Na enig denken (hooguit een paar seconden) zeg jij: de derdemachtswortel is 87. Succes verzekerd, alleen, hoe doe je dit?

Je moet er wel iets voor uit je hoofd leren: de derdemachten van de getallen 1 tot en met 10.

Deze zijn:

1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000.

Valt je iets op aan dit rijtje? Misschien niet, maar er is wel degelijk iets speciaals: elk getal eindigt op een ander cijfer, van 0 tot en met 9. Dat feit kan je gebruiken om op een bijna magische manier derdemachtswortels uit te rekenen, mits het getal dat je voorgeschooteld krijgt natuurlijk een derdemacht is.

Hoe werkt het dan? Bekijk het laatste cijfer van het getal waar je de derdemachtswortel van moet berekenen. Het laatste cijfer van dit getal is een aanwijzing voor de eenheden van de derdemachtswortel. Stel bijvoorbeeld dat het laatste cijfer 3 is (zoals in ons voorbeeld); we weten dat $7^3 = 343$. Op deze manier vinden we het rechtercijfer van onze derdemachtswortel: dat is 7. Je moet dus eigenlijk de volgende tabel uit je hoofd leren:

1	1
2	8
3	7
4	4
5	5
6	6
7	3
8	2
9	9
0	0

Dit is goed te doen vanwege de structuur die in de tabel zit.

Nu kijken we naar de linkerkant van het getal; om precies te zijn hoeveel duizendtallen er in het opgegeven getal zitten. In ons voorbeeld, 658503, is dit 658. Nu zoeken we de grootste derdemacht van een geheel getal die nog kleiner is dan 658. We vinden $8^3 = 512$. Het linkercijfer van onze derdemachtswortel is daarom 8. Dus $\sqrt[3]{658503} = 87$.

Een ander voorbeeld: wat is de derdemachtswortel van 68921? 1 is het laatste cijfer van 1^3 ; dat is

dus simpel, het rechtercijfer van de wortel is 1. Het linkercijfer komt uit op 4, want 68 (het aantal duizendtallen) is groter dan $4^3 = 64$ maar kleiner dan $5^3 = 125$. Dus 68921 is de derdemacht van 41. Zo snel gaat het!

Nog één voorbeeld: het rechtercijfer van de derdemachtswortel van 148877 is 3, en het linkercijfer is 5, want 148 (het aantal duizendtallen) is groter dan $5^3 = 125$ maar kleiner dan $6^3 = 216$. Dus $\sqrt[3]{148877} = 53$.

Deze truc werkt voor alle derdemachten van 0 tot en met 100; tenzij je bereid bent nog meer derdemachten uit je hoofd leren. Als je eenmaal begint met leren raak je er steeds meer aan gewend om meer getallen uit je hoofd te kennen. Misschien kan je wel trainen met Wrts!

SCHATTEN Natuurlijk wil je ook wel eens een derdemachtswortel uitrekenen die niet precies uitkomt. Er is een soortgelijke schattingsmethode zoals boven. Het gaat als volgt.

- Neem een getal waarvan je de derdemachtswortel wilt berekenen, bijvoorbeeld 79.
- Kijk welke derdemacht er het dichtst bij ligt. Het getal 79 ligt tussen de derdemachten $4^3 = 64$ en $5^3 = 125$. Het dichtstbij ligt de derdemacht van 4.
- De waarde 4 is te klein: er moet iets bij. Dit is de geheimzinnige term:

$$\frac{79 - 4^3}{3 \cdot 4^2} = \frac{15}{48} = \frac{5}{16}.$$

- Een goede schatting is nu: $\sqrt[3]{79} \approx 4 + \frac{5}{16} = 4,3125$. In werkelijkheid is $\sqrt[3]{79} \approx 4,29$. Opnieuw blijkt dat onze schatting heel goed is!

Opgave 2. Kun je ook deze 'geheimzinnige term' verklaren?

Ken je zelf een leuke rekentruc? Tips zijn welkom. Ons e-mailadres: post@pyth.eu. Een leuke inzending wordt beloond met een QAMA-rekenmachine. ■

[5]
Madras Port Trust Office
Accounts Department.
27th February 1913.
29/1/13

Received by Mr G H Hardy F.R.S.
Letter of Mr Hardy dated 22 July 1940.
Dear Sir,

I am very much gratified on perusing your letter of the 8th February 1913. I was expecting a reply from you similar to the one which a Mathematics Professor at London wrote asking me to study carefully Bromwich's Infinite series and not fall into the pitfalls of divergent series. I have found a friend in you who views my labours sympathetically. This is already some encouragement to me to proceed with my onward course. I find in many a place in your letter rigorous proofs are required and so on and you ask me to communicate the methods of proof. If I had given you my methods of proof I am sure you will follow the London Professor. But as a fact I did not give him any proof but made some assertions as the following under my new theory. I told him that the sum of an infinite no of terms of the series:—
 $1 + 2 + 3 + 4 + \dots = -\frac{1}{2}$ under my theory. If I tell you this ^{as my goal} you will at once point out to me the lunatic asylum; I dilate on this simply to convince you that you will not be able to follow my methods of proof if I indicate the lines on which I proceed in a single letter. You may ask how you can accept results based upon wrong premises. What I tell you is this. Verify the results I give and if they agree with your results, got by treading on the groove in which the present day mathematicians move, you should at least grant that there may be some truths in my fundamental basis. So what I now want at this stage is for eminent professors like you to recognise that there

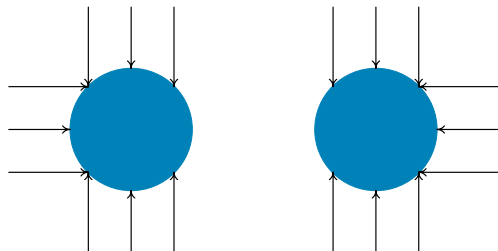
Een reeks is een som met oneindig veel termen, bijvoorbeeld $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$. Archimedes werkte er al mee. Tegenwoordig zijn ze overal in de exacte wetenschap te vinden. Divergente reeksen zijn reeksen waarvan de limiet niet bestaat, of oneindig is. Deze reeksen vormen een geval apart. In dit artikel bestuderen we er één, namelijk $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots$.

■ door Paul Levrie (Faculteit Toegepaste Ingenieurswetenschappen, Universiteit Antwerpen)

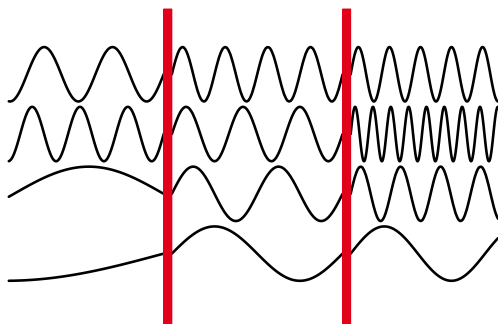
DIVERGENTE REEKSEN: EEN DUIVELSUITVINDING

De Nederlandse natuurkundige Hendrik Casimir (1909-2000) is vooral bekend voor zijn Casimir-effect uit de kwantumfysica. In dit effect kom je de reeks $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots$ tegen. Het Casimir-effect is eenvoudig uit te leggen aan de hand van een oude gravitatie-theorie.

Nicolas Fatio de Duillier (1664-1753) gaf in 1690 de volgende mechanische verklaring voor de onderlinge aantrekking van twee lichamen. Om te beginnen veronderstelde hij dat de ruimte geen vacuüm is, maar vol kleine deeltjes of golven zit die met een hoge snelheid in willekeurige richtingen bewegen. Als die deeltjes of golven op hun weg een massa tegenkomen, dan vindt er een botsing plaats. Stel nu dat zich in de ruimte twee massa's bevinden zoals in figuur 1. De pijlen geven inslaande deeltjes weer. Het effect van de deeltjes die invallen vanuit een richting loodrecht op de verbindingslijn van de twee massa's wordt gecompenseerd door de even zoveel deeltjes die aan de andere kant inslaan. Maar in het gebied tussen de twee massa's zullen zich geen horizontaal bewegende deeltjes bevinden. De massa's verhinderen dat met hun aanwezigheid (ze zitten namelijk in de weg). Gevolg is dat het effect van de horizontaal inslaande deeltjes niet wordt ge-



Figuur 1 Twee massa's; de pijltjes geven inslaande deeltjes weer.



Figuur 2 De onderste golf tussen de twee platen heeft frequentie 1, de golven erboven hebben achtereenvolgens frequentie 2, 3, 4.

compenseerd. Daardoor worden de twee massa's naar elkaar toe gedreven.

In 1948 verscheen Casimirs artikel 'On the attraction between two perfectly conducting plates' in de *Proceedings van de Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen*. Casimir paste hier ongeveer hetzelfde principe toe als Fatio, maar hield hierbij rekening met de kwantumwereld waarin wij leven. De ruimte zit vol met in alle richtingen bewegende deeltjes en antideeltjes die op willekeurige momenten ontstaan en ook weer verdwijnen. De redenering van Fatio de Duillier zou hier dus gebruikt kunnen worden, ware het niet dat er ook deeltjes en antideeltjes zullen ontstaan in het gebied tussen de twee massa's. Maar, zei Casimir, als we nu bijvoorbeeld twee metalen platen nemen en we brengen die zo dicht bij elkaar dat bepaalde deeltjes er niet tussen passen, dan zitten we wel in de situatie zoals beschreven door Fatio. En dan zouden die twee platen naar elkaar toe geduwd moeten worden. Volgens de kwantumtheorie zullen tussen de

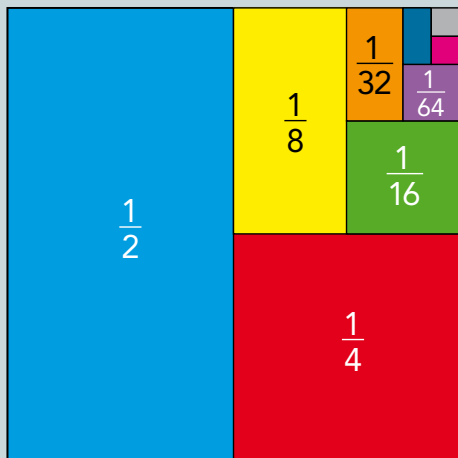
WAT IS EEN REEKS?

Een reeks in de wiskunde is een som met oneindig veel termen. Reeksen vormen de basis van een heel deel van de wiskunde, maar dan vooral reeksen waarvan de som een eindig resultaat oplevert. We spreken in dit geval van een *convergente* reeks. Vooral dit soort reeksen heeft vele toepassingen.

Als voorbeeld zie je hieronder een meetkundige interpretatie van de reeks

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = 1.$$

waarbij elke term de helft is van de vorige.



Reeksen waarvan de som geen eindige waarde oplevert, noemen we ook wel *divergente* reeksen. Dergelijke reeksen leken aanvankelijk nutteloos te zijn, maar blijken nu toch toepassingen te hebben.

twee platen enkel deeltjes kunnen ontstaan waarvan de golflengte precies een geheel aantal keer in de afstand tussen deze platen past (zie figuur 2).

Buiten deze platen kunnen deeltjes een willekeurige golflengte hebben. Dit heeft tot gevolg dat de energiedichtheid tussen de platen kleiner is dan de energiedichtheid buiten de platen. En een maat voor de energiedichtheid tussen deze platen is op een factor na gegeven door de volgende som:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots$$

Als we afspreken dat de onderste golf tussen de platen in figuur 2 als frequentie 1 heeft, dan hebben de golven erboven respectievelijk de frequenties 2, 3, 4, enzovoort. Voor de totale energie moeten we de energie van al die deeltjes optellen. Dat maakt dat het resultaat een som bevat zoals die hierboven.

RAMANUJAN EN DIVERGENTE REEKSEN

Op 16 januari 1913 schreef de toen onbekende Indische klerk Srinivasa Ramanujan (1887-1920) vanuit Madras een brief naar de Britse wiskundige G.H. Hardy (1877-1947). De brief van 10 bladzijden bevatte naast een inleiding ook 120 formules, zonder bewijs. Eén ervan was de volgende:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots = -\frac{1}{12}.$$

De drie puntjes in het linkerlid duiden erop dat je moet blijven optellen *ad infinitum*, dus zonder te stoppen. De oneindige som in het linkerlid wordt in de wiskunde een (oneindige) reeks genoemd.

Het resultaat van Ramanujan is op zijn minst onwaarschijnlijk te noemen. Hoe kan je nu een negatief resultaat krijgen als je (oneindig veel!) positieve getallen optelt? Ook Hardy zal waarschijnlijk wel even zijn wenkbrauwen hebben gefronst, maar nadat hij met zijn wiskundecollega J.E. Littlewood (1885-1977) de brief wat grondiger bestudeerd had, besliste hij om Ramanujan naar Engeland te halen.

Ramanujan was hierover verbaasd, want zelf vertelt hij in een volgende brief naar Hardy, op 27 februari, over zijn wedervaren met een professor uit Londen, die hem naar aanleiding van zijn schrijven had geantwoord dat hij niet in de valkuil van de divergente reeksen mocht vallen. Ramanujan schreef hierover naar Hardy: 'Ik vertelde hem dat in mijn theorie $1 + 2 + 3 + 4 + \dots = -\frac{1}{12}$. Als ik dit aan u vertel, dan verwijst u me dadelijk naar een gekkenhuis.' De eerste pagina van Ramanujans brief is afgedrukt op pagina 6.

Het is niet zo moeilijk om na te gaan of er in de formule van Ramanujan een grond van waarheid zit. Dat zie je in het kader op pagina 9. Soortgelijke manieren om zo de som te bepalen leiden overigens altijd tot hetzelfde resultaat, namelijk $-\frac{1}{12}$.

RAMANUJANS REEKS TOEGEPAST OP HET CASIMIR-EFFECT

De energiedichtheid tussen de twee evenwijdige platen is dus nu gekend: volgens Ramanujan hebben we

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots = -\frac{1}{12}.$$

De kracht tussen de twee platen kan hieruit afgeleid

worden, en die is gelijk aan

$$F = -\frac{p\hbar c}{24L^2}.$$

Hierbij is $\hbar$ de gereduceerde constante van Planck (een natuurkundige constante die de basis vormt van de kwantumfysica waarin verondersteld wordt dat energie gekwantiseerd is, dus enkel kan voor-

komen in veelvoud van een basisenergie waarvan de grootte bepaald is door deze constante), c de lichtsnelheid, en L de afstand tussen de twee platen. Het minteken wijst op aantrekking.

Het Casimir-effect is in 1997 experimenteel geverifieerd: twee metalen platen die zeer dicht bij elkaar geplaatst worden, trekken elkaar aan. De waargenomen waarden komen met een nauwkeurigheid

DE REEKS $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots$

Noteer het resultaat van de reeks $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ door de letter S . We schrijven deze vergelijking nu tweemaal, onder elkaar, en wel als volgt:

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = S$$

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = S$$

Als we dan de beide vergelijkingen bij elkaar optellen, in het linkerlid door de termen die onder elkaar staan samen te tellen, dan vinden we daar als som 1, en als som van de rechterleden vinden we $2S$. Hieruit volgt dus dat $S = \frac{1}{2}$. De volgende stap begint op dezelfde manier, maar nu vermenigvuldigen we S achter-eenvolgens met -1 , met 1 , met -1 , enzovoort:

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = S$$

$$-1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = -S$$

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots = S$$

$$-1 + 1 - 1 + \dots = -S$$

$$1 - 1 + \dots = S$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

Opnieuw tellen we alles bij elkaar op. Voor de som van de linkerleden vinden we $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots$. De som van de rechterleden is $S - S + S - S + S + \dots$, en omdat S een factor is van elke term kunnen we dit resultaat schrijven als $(1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots) \cdot S$. De som tussen de haken is precies gelijk aan S ; dat hadden we in het begin zo afgesproken. We kunnen dus nu besluiten:

$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots = S \cdot S = \frac{1}{4}, \quad (*)$$

want we hadden berekend dat $S = \frac{1}{2}$.

DE REEKS $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \dots$

Met het resultaat $(*)$ als startpunt kunnen we één-twee-drie de som $1 + 2 + 3 + 4 + \dots$ bepalen. Noem de gezochte som even R , en vermenigvuldig deze som met -4 :

$$R = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \dots$$

$$-4R = -4 - 8 - 12 - \dots$$

Deze twee vergelijkingen tellen we op, en we nemen hierbij in het rechterlid gelijkgekleurde termen samen:

$$-3R = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots$$

En omdat we al hadden berekend dat het rechterlid de waarde $\frac{1}{4}$ heeft (zie $(*)$), kunnen we Ramanujan nu gelijk geven:

$$-3R = \frac{1}{4} \quad \text{en dus} \quad R = -\frac{1}{12}.$$

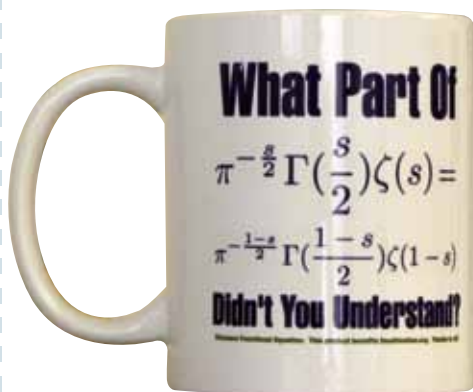
van 1% overeen met de theoretische berekeningen.

Het Casimir-effect blijkt ook praktisch nut te hebben, bijvoorbeeld bij het volgende fenomeen: microscopische onderdelen van computers blijken nogal eens aan elkaar te blijven plakken, wat problemen veroorzaakt bij het hanteren ervan (in het Engels heet dit effect *stiction*). Het blijkt mogelijk te zijn van de Casimirkracht een afstotende kracht te maken in plaats van een aantrekkende.

Het Casimir-effect zorgt er bijvoorbeeld ook voor dat gekko's op muren en plafonds kunnen lopen zonder naar beneden te vallen: de miljoenen microscopische haartjes op hun poten worden aangetrokken door het oppervlak waarover ze lopen.

WAT MEER ACHTERGROND Ramanujan was niet de eerste die over divergente reeksen schreef. Hij had alvast als illustere voorganger Leonhard Euler (1707-1783), een Zwitsers wiskundige aan wie we onder andere een aantal veelgebruikte notaties in de wiskunde te danken hebben. De nu nog steeds gebruikte functienotatie $f(x)$ bijvoorbeeld, en de letter e die de basis vormt van de exponentiële functie. Ook de i bij de complexe getallen heeft hij ingevoerd.

Euler was zeer veelzijdig, en liet een omvangrijk oeuvre na, dat je volledig gratis online kunt raadplegen (www.eulerarchive.org). Zo begon hij met de studie van wat later de *Riemann-zetafunctie* genoemd werd. De definitie ervan voor de gehele getallen $s = 1, 2, 3, \dots$ luidt als volgt:



Figuur 3 Riemanns functionaalvergelijking

'Ik ben ervan overtuigd dat met elke reeks een waarde overeenkomt.'

Leonhard Euler (1707-1783)

'Ik geef toe dat ik alle redeneringen en berekeningen die gebaseerd zijn op niet-convergente reeksen altijd verdacht zal blijven vinden, zelfs als er dingen uit zouden volgen die overeenkomen met resultaten die op een andere manier zijn afgeleid.'

Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783)

'Divergente reeksen zijn een uitvinding van de duivel, en het is een schande er een bewijs op te baseren.'

Niels Henrik Abel (1802-1829)

' $1 + 2 + 4 + 8 + \dots = -1$ lijkt paradoxaal, want het is onnatuurlijk om aan een reeks met positieve termen een negatieve som toe te kennen.'

Godfrey Hardy (1877-1949)

$$\zeta(s) = 1 + 2^{-s} + 3^{-s} + 4^{-s} + 5^{-s} + \dots$$

Als je voor s de waarde -1 kiest, dan komt er te staan:

$$\zeta(-1) = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots,$$

de reeks waarover Ramanujan het had. Euler vond (honderd jaar vóór Riemann) een vergelijking waaraan de Riemann-zetafunctie voldoet, de zogenaamde *functionaalvergelijking* (afgebeeld op de mok in figuur 3). Met deze vergelijking kan je toch een betekenis geven aan de oneindige sommen die je krijgt als je s kleiner kiest dan 0 in de bovenstaande vergelijking. Voor onze reeks vind je dan inderdaad als som:

$$\zeta(-1) = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots = -\frac{1}{12}.$$

Wetenschappers noemen dit *zeta-regularisatie*.

Bernhard Riemann (1826-1866) nam later de draad weer op en gaf het eerste bewijs van deze functionaalvergelijking voor de zetafunctie. Zijn onderzoeken in dit verband leidden tot de formulering van de ondertussen beroemde *Riemann-hypothese*, die een uitspraak doet over de s -waarden waarvoor deze som gelijk is aan nul. Het Amerikaanse Clay Mathematics Institute looft een prijs van één miljoen dollar uit voor wie deze Riemann-hypothese kan bewijzen. Het is een van de zogeheten millenniumproblemen. ■

PRIEMPRACHT

■ door Alex van den Brandhof

Voor de priemgetallen was 2013 een voorspoedig jaar. Het grootste tot nu toe gevonden priemgetal werd gevonden (het vorige record stamt uit 2008) en, indrukwekkender nog, twee beroemde priemproblemen die al eeuwen op een oplossing wachten, maakten een sprong voorwaarts: het priemtweelingvermoeden en het vermoeden van Goldbach. Niet dat deze problemen nu geheel opgelost zijn, maar er zit schot in de zaak. De Chinese wiskundige Yitang Zhang (1955) zette de deur naar een bewijs van het priemtweelingvermoeden op een kier en de jonge Peruaan Harald Helfgott (1977) bewees een zwakke versie van het Goldbachvermoeden.

Wat dat betreft hadden Pythagorasredacteur Paul Levrie en zijn collega en vriend Rudi Penne geen beter moment kunnen kiezen voor de verschijning van hun boek *De pracht van priemgetallen*. Deze pracht doen Levrie en Penne op een onderhoudende manier uit de doeken in hun verhaal over de eeuwenlange zoektocht naar verborgen patronen. Alle belangrijke wiskundigen en hun relaties met priemgetallen komen aan de beurt, van de beroemde Oude Grieken Aristoteles, Eratosthenes en Euclides tot de tot 2013 onbekende Zhang en Helfgott.

Natuurlijk blijven de beroemde onderwerpen niet onderbelicht, zoals de Kleine Stelling van Fermat, de Mersenne-priemgetallen, het priemtweelingvermoeden, de Riemann-hypothese, de vermoedens van Goldbach en van Bertrand en het nut van priemgetallen voor beveiligingscodes.

Maar aan deze lijst weten de auteurs nog veel toe te voegen. Om maar iets te noemen: het vermoeden van Gilbreath. In 1936 noteerde de toen 22-jarige student Norman Gilbreath uit verveling de verschillen tussen de opeenvolgende priemgetallen, de verschillen van de verschillen, de verschillen van de verschillen van de verschillen, enzovoort. Zijn lijst



Figuur 1 De lijst van Norman Gilbreath

zag er uit zoals figuur 1. Naar rechts en naar beneden is de tabel in feite oneindig lang. Tot zijn verbazing zag Gilbreath dat elke rij, behalve de eerste, met een 1 begint. Dit vermoeden bleek al een halve eeuw eerder te zijn geponeerd door de Fransman François Proth. Tot op heden is het niet zeker dat het vermoeden waar is.

Tot slot iets uit 'Priempret', de titel van het hoofdstuk vol met – veelal nutteloze, maar vermakelijke – weetjes en trivia. Bestaat er een 3×3 -tovervierkant met negen opeenvolgende priemgetallen? Een tovervierkant is een vierkant waarbij elke rij, kolom en diagonaal dezelfde som heeft. De vraag werd in 1988 gesteld door Martin Gardner (1914-2010) en werd nog in hetzelfde jaar positief beantwoord door Harry Nelson. Het vierkant van Nelson is afgebeeld in figuur 2. Hij vond overigens nog 21 andere vierkanten ook.

De grappige metaforen en smakelijke anekdotes maken *De pracht van priemgetallen* tot een heerlijk boek. De schrijvers hebben besloten om ook af en toe een bewijsje of formule op te nemen, maar die zijn zoveel mogelijk geïsoleerd in kadertjes, zodat 'de lichtvoetige lezers ze kunnen vermijden als landmijnen', zoals ze het zelf in hun inleiding omschrijven. ■

Paul Levrie en Rudi Penne, *De pracht van priemgetallen. Het verhaal van een eeuwenlange zoektocht naar verborgen patronen* (Prometheus/Bert Bakker, 2014).

1480028159	1480028153	1480028201
1480028213	1480028171	1480028129
1480028141	1480028189	1480028183

Figuur 2 Een tovervierkant met negen opeenvolgende priemgetallen

Cyclonen voorspellen met een zeepbel

Cyclonen en andere tropische stormen zijn een groot probleem; ze richten vaak enorme schade aan en zorgen voor veel doden. Meteorologen zouden graag betere voorspellingen van deze superstormen maken, maar tot nu toe lukt het ze niet. Een nieuwe aanpak van een team van zes onderzoekers van twee Franse universiteiten zou in de toekomst misschien uitkomst kunnen bieden: ze gebruiken een zeepbel om op kleine schaal te begrijpen wat er op de oceanen in het groot gebeurt.

Daarbij beginnen ze met het simuleren van de zeepbel. Omdat je de omgeving veel beter kan controleren, is een zeepbel met wiskunde makkelijker te beschrijven dan een cycloon. Daarvoor worden ingewikkelde vergelijkingen gebruikt. Deze vergelijkingen (van Navier en Stokes) zijn al twee eeuwen oud. Desondanks heeft men er nog steeds niet echt grip op gekregen – zie het volgende stukje in dit Journaal. Met de wiskundige beschrijving en een computer konden de onderzoekers uit Frank-

rijk kleine draaikolkjes op de zeepbel laten ontstaan en beschrijven. Door vervolgens ook in het laboratorium een zeepbel met draaikolkjes te maken, konden ze het model kloppend maken met de werkelijkheid.

Door de snelheid en de beweging van draaikolken te begrijpen, zouden weerkundigen in de toekomst misschien eerder een toekomstige cycloon kunnen herkennen. Op de zeepbel werkte het goed, maar in het groot is het wel ingewikkelder; daar zijn de draaikolken driedimensionaal, terwijl ze op een zeepbel tweedimensionaal zijn. Dat maakt de berekeningen al ingewikkelder. Bovendien komen er heel veel omgevingsverstoringen kijken bovenop zee: de zon, het warme oceanewater, harde wind vanaf land, noem maar op. De wetenschappers zien het zeepbelonderzoek dan ook meer als een begin van een nieuw onderzoeksgebied. Om werkelijk cyclonen aan te zien aankomen, moet nog veel meer gebeuren.

12

Kazach claimt oplossing Navier-Stokes-probleem

Een van de beroemde milleniumproblemen – problemen waar een beloning van één miljoen dollar aan vastzit – is misschien opgelost. De 72-jarige Mukhtarbay Otelbayev van de Eurasian National University in Astana, de hoofdstad van Kazachstan, claimt de oplossing van het Navier-Stokes-probleem te hebben gevonden. Hij zegt er dertig jaar aan gewerkt te hebben.

Het Navier-Stokes-probleem gaat over de gelijknamige vergelijkingen. Deze werden in de eerste helft van de negentiende eeuw opgesteld. Ze beschrijven hoe allerlei gassen en vloeistoffen zich verplaatsen in de ruimte. Dankzij toepassing van numeriek-wiskundige methoden en de komst van steeds krachtiger computers zijn *benaderende* oplossingen van de Navier-Stokes-vergelijkingen te vinden die voor praktische toepassingen volstaan. Wil je bijvoorbeeld een vliegtuig of een kunsthart ontwerpen, dan kun je niet om de Navier-Stokes-vergelijkingen heen. Er zijn nog veel meer toepas-

singen; in computerspelletjes kan water heel realistisch stromen, golven en kolken dankzij het gebruik van de Navier-Stokes-vergelijkingen.

Over *exacte* oplossingen van de vergelijkingen breken wiskundigen zich echter nog altijd het hoofd. Voor het millenniumprobleem hoeft echter geen exacte, algemene oplossing te worden bepaald. ‘Slechts’ het *wel of niet bestaan* van zo’n oplossing hoeft te worden bewezen.

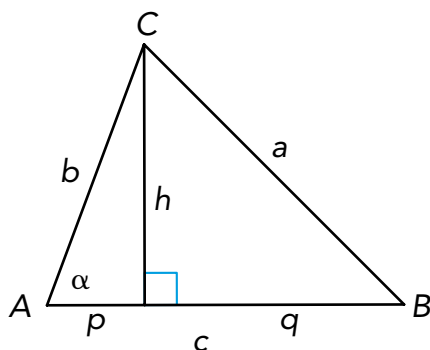
Het controleren van Otelbayev’s artikel is moeilijk – niet in de laatste plaats omdat Otelbayev geen Engels spreekt en zijn artikel in het Russisch schreef. Zijn studenten zijn momenteel bezig het manuscript te vertalen in het Engels.

Op 4 februari was TUE-hoogleraar Barry Koren, die onderzoek doet in de stromingsleer, te gast in *De wereld draait door*, waarin hij een en ander uit de doeken doet over het millenniumprobleem en over de twijfel die hij heeft over Otelbayev’s oplossing. Terugkijken kan via <http://goo.gl/FExUmH>.

Zoals je ongetwijfeld weet, beschrijft de stelling van Pythagoras een verband tussen de drie zijden van een rechthoekige driehoek. De cosinusregel is een veralgemening van deze stelling: deze regel beschrijft voor een willekeurige driehoek een relatie tussen de drie zijden van een driehoek en de cosinus van een hoek. Ook dat is misschien niet nieuw voor je. Maar wist je dat er ook een cosinusregel in drie dimensies bestaat?

■ door Jan Guichelaar

DE COSINUSREGEL IN DRIE DIMENSIES



Figuur 1

De stelling van Pythagoras voor de zijden van een rechthoekige driehoek met rechthoekszijden x en y , en schuine zijde z luidt $x^2 + y^2 = z^2$. Voor een algemene driehoek geldt deze stelling natuurlijk niet. Als de drie zijden a , b en c van een driehoek ABC bekend zijn, zijn de hoeken met behulp van de cosinusregel te berekenen. Er geldt namelijk:

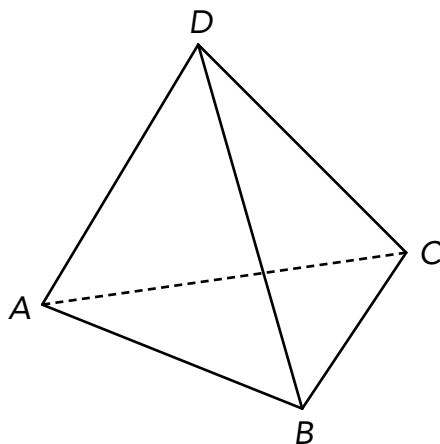
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.$$

Voor scherphoekige driehoeken leiden we deze regel als volgt af. In driehoek ABC van figuur 1 hebben we getekend: hoek α bij hoekpunt A , de hoogtelijn h van C op c , die c verdeelt in p en q . Er geldt:

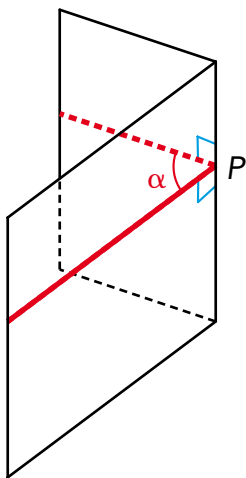
$$\begin{aligned} a^2 &= h^2 + q^2 = h^2 + (c - p)^2 = \\ &= h^2 + c^2 - 2cp + p^2 = \\ &= h^2 + p^2 + c^2 - 2cp = \\ &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha. \end{aligned}$$

Hierbij hebben we gebruik gemaakt van de stelling van Pythagoras ($h^2 + p^2 = b^2$) en van het feit dat $\cos \alpha = p/b$. De cosinusregel geldt ook in stomphoekige driehoeken; probeer dit zelf eens te bewijzen (gebruik het feit dat $\cos \alpha = -\cos(180^\circ - \alpha)$).

EEN IDEE VOOR DE COSINUSREGEL IN DRIE DIMENSIES De meest voor de hand liggende driedimensionale figuur om eens naar te kijken is een viervlak $ABCD$. We hebben als grenzen vier driehoeken (zie figuur 2). In twee dimensies beschrijft de cosinusregel een verband tussen de lengtes van de zijden van een driehoek. In drie dimensies nemen we de oppervlaktes van de zijvlakken van ons viervlak. De oppervlakte van $\triangle ABC$ korten we af met O_D (punt D is het hoekpunt tegenover $\triangle ABC$). En net zo: O_A , O_B en O_C . In onze formule



Figuur 2 Een viervlak



Figuur 3 Hoek tussen twee vlakken

moeten we dus misschien wel de volgende kwadraten gebruiken: O_A^2 , O_B^2 , O_C^2 en O_D^2 . Zou het iets kunnen zijn als:

$$O_D^2 = O_A^2 + O_B^2 + O_C^2 - \text{'iets met cosinussen'}$$

In de tweedimensionale cosinusregel hadden we maar één hoek tegenover a . Hoe zit het nu tegenover O_D ? Daar hebben we wel één zogenaamde 'ruimtehoek' (een omgekeerd driehoekig patatzakje), maar we hebben ook drie hoeken tussen telkens twee zijvlakken: α , de hoek tussen de twee zijvlakken ABD en ACD (we leggen direct uit wat de hoek tussen twee vlakken is), β , de hoek tussen BCD en BAD , en tenslotte γ tussen CAD en CBD . Als we nu dezelfde structuur aanhouden als die in het tweedimensionale geval, zou de volgende formule wel eens de juiste kunnen zijn:

$$O_D^2 = O_A^2 + O_B^2 + O_C^2 - 2O_AO_B \cos \gamma - 2O_BO_C \cos \alpha - 2O_AO_C \cos \beta.$$

Wat is nu precies de hoek tussen twee elkaar snijvende vlakken? Neem een punt P op de snijlijn en teken vanuit dat punt twee halve rechten in beide vlakken, die allebei loodrecht op de snijlijn staan. De hoek tussen deze twee halve rechten noemen we de hoek tussen de twee vlakken (zie figuur 3).

We hebben nu wel een aardige formule gegokt, maar is deze ook juist? Als je een ingewikkelde formule wilt controleren, is het vaak verstandig om eerst eens een paar bijzondere gevallen te controleren.

EEN 'GEHEEL PLAT' VIERVLAK Stel je eens voor dat punt D nauwelijks boven $\triangle ABC$ ligt, ei-

genlijk in vlak ABC (zie figuur 4). Dan zijn de drie hoeken α , β en γ alle drie 180° , en de cosinussen zijn dan: $\cos \alpha = \cos \beta = \cos \gamma = \cos 180^\circ = -1$. Dan starten we met het rechterlid van de formule die we willen bewijzen en proberen dan het linkerlid eruit te krijgen:

$$\begin{aligned} O_A^2 + O_B^2 + O_C^2 - 2O_AO_B \cos \gamma - \\ 2O_BO_C \cos \alpha - 2O_AO_C \cos \beta = \\ O_A^2 + O_B^2 + O_C^2 + 2O_AO_B + 2O_BO_C + \\ 2O_AO_C = (O_A + O_B + O_C)^2 = O_D^2. \end{aligned}$$

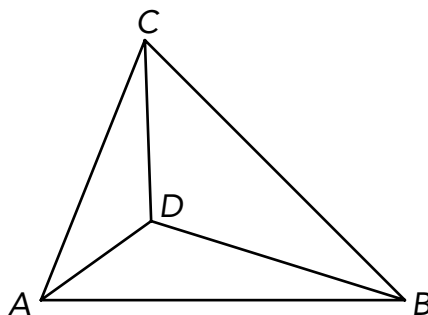
Dat is dus in ieder geval in orde.

EEN REGELMATIG VIERVLAK Een regelmatig viervlak, dus een viervlak met vier gelijkzijdige driehoeken (zie figuur 5), geeft het volgende resultaat. Als we de lengte van de ribben op 1 zetten, dan kun je zelf wel berekenen dat de hoogte van een zijvlak gelijk is aan $\frac{1}{2}\sqrt{3}$. Wat is nu de hoek tussen elk tweetal vlakken? Verbind A en B met het midden M van DC . Door de symmetrie staan AM en BM loodrecht op DC . De zijden van $\triangle ABM$ zijn 1, $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ en $\frac{1}{2}\sqrt{3}$. Bereken nu zelf met de cosinusregel in twee dimensies dat $\cos \varphi = \frac{1}{3}$ (waarbij $\varphi = \angle AMB$).

Controle van de formule (van rechterlid naar linkerlid) levert dan:

$$\begin{aligned} O_A^2 + O_B^2 + O_C^2 - 2O_AO_B \cos \gamma - \\ 2O_BO_C \cos \alpha - 2O_AO_C \cos \beta = \\ O_A^2 + O_A^2 + O_A^2 - 2O_A^2 (\cos \gamma + \cos \alpha + \cos \beta) \\ = 3O_A^2 - 2O_A^2 \cdot 3\cos \varphi = 3O_A^2 - 2O_A^2 \\ = O_A^2 = O_D^2. \end{aligned}$$

Opnieuw klopt de formule.



Figuur 4 'Geheel plat' viervlak

DE STELLING VAN PYTHAGORAS IN DRIE DIMENSIES

Laten we nu een viervlak nemen met $\angle CDA = \angle CDB = 90^\circ$ en $\angle ADB = \delta$ (zie figuur 6). Dus CD staat loodrecht op elk lijnstuk in het vlak ABD . Trek CV loodrecht op AB . Uit $CD \perp AB$ en $CV \perp AB$, volgt dat $AB \perp DV$.

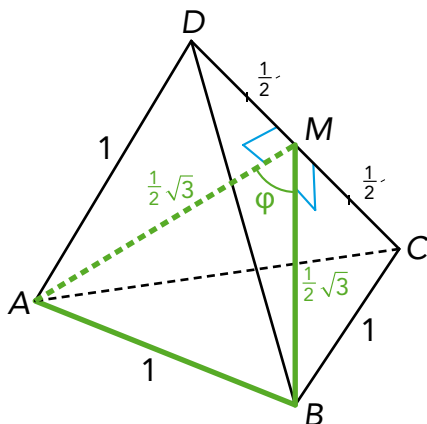
We hebben nu:

- $O_D = \frac{1}{2} AB \cdot CV$,
- $O_A = \frac{1}{2} DB \cdot DC$,
- $O_B = \frac{1}{2} DA \cdot DC$,
- $O_C = \frac{1}{2} AB \cdot DV$.

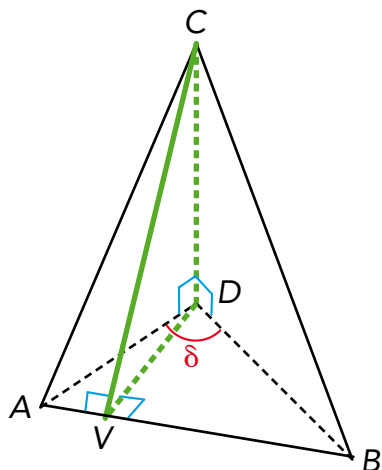
Dan volgt:

$$\begin{aligned} 4O_D^2 &= AB^2 \cdot CV^2 = AB^2 \cdot (DV^2 + DC^2) = \\ 4O_C^2 + (DA^2 + DB^2 - 2DA \cdot DB \cos \delta) \cdot DC^2 &= \\ 4O_C^2 + 4O_B^2 + 4O_A^2 - 2 \cdot 4O_A O_B \cos \delta. \end{aligned}$$

Daar de twee andere cosinussen nul zijn, omdat de hoeken 90° zijn, staat hier, na deling door 4, opnieuw de cosinusregel in drie dimensies.



Figuur 5 Regelmatic viervlak



Figuur 6 Bijzonder geval met de stelling van Pythagoras in drie dimensies

Er volgt nog een mooi nevenresultaat. Als we ook $\delta = 90^\circ$ nemen, krijgen we de stelling van Pythagoras in drie dimensies (in punt D zijn alle hoeken recht):

$$O_A^2 + O_B^2 + O_C^2 = O_D^2.$$

ALGEMEEN VIERVAK Soms lukt het om vanuit een paar eenvoudige gevallen toe te werken naar het algemene geval. Dat is hier niet zo: het algemene bewijs van de cosinusregel in drie dimensies is behoorlijk wat ingewikkelder dan de bewijzen voor de bijzondere gevallen in dit artikel. Zonder vectoren, inproduct én het uitproduct is het bijna niet te doen. Als je dit bij Wiskunde D hebt gehad, is het echter wel een leuke toepassing!

Een goede tekst (in het Engels) over vectoren is te vinden op de site van wiskundige Joel Feldman: <http://goo.gl/wqCeTY> (pdf). Een bewijs voor de (algemene) driedimensionale cosinusregel wordt gevraagd in opgave 23 (pagina 17). De oplossing staat in dezelfde pdf op pagina 25-26. ■

De gravure *Melencolia I* van de Duitser Albrecht Dürer is een vaak geanalyseerd kunstwerk. Het is mysterieus genoeg om zich nooit helemaal te laten vangen. Wij gaan met behulp van GeoGebra allerlei aspecten van de compositie analyseren. Je zult zien dat je er veel beter door gaat kijken!

■ door Niels Dekker



Over de gravure *Melencolia I* en haar maker Albrecht Dürer (1471-1528) is veel geschreven. Meerdere boeken zijn verschenen met alleen deze prent als onderwerp. Dürer is de man die de perspectiefleer vanuit Italië naar Noord-Europa bracht.

We beginnen met het importeren van een afbeelding van *Melencolia I* in GeoGebra. Op het internet heb je de prent via Google Afbeeldingen zo gevonden. Sla het bestand op in je computer. Voer vervolgens de afbeelding in GeoGebra in met Bewerken → Afbeelding invoegen van → Bestand. Je kunt nu de naam kiezen van de afbeelding.

Je krijgt er meteen twee punten bij, A en B. Sleep A naar de oorsprong en B naar het punt (10, 0). De afbeelding staat nu mooi horizontaal. Schakel het ruitjespapier uit.

Figuur 2  Kegelsnede door vijf punten

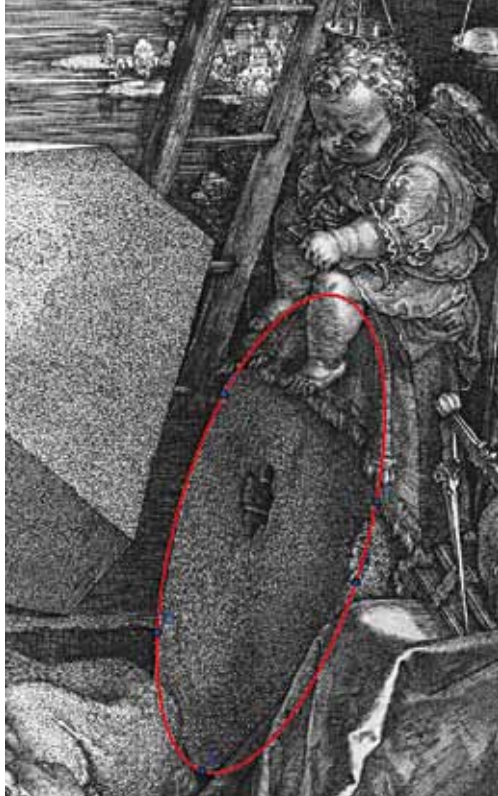
MOLENSTEEN Het kleine engeltje zit op een molensteen. Een molensteen van opzij gezien heeft de vorm van een ellips. Laten we onderzoeken in hoeverre de steen een ellips benadert.

Klik op de ellipsknop (zie figuur 2). Plaats op de rand van de molensteen vijf punten. Door met deze punten te schuiven krijg je een goed idee welke ellips het beste is. Twee dingen vallen op: het engeltje zit wel op de molensteen, maar niet bovenop de ellips en het gat van de molensteen zit niet in het midden (zie figuur 3).

De molensteen is natuurlijk een driedimensionale figuur. Vanwege het perspectief waarin de molensteen is getekend, ligt het kruisvormige gat niet in het midden van de ellips. Niet goed te verklaren is het feit dat de bovenkant van de molensteen, waar het kleine engeltje op zit, dichterbij de buurt van het midden van de molensteen ligt dan de onderkant. Is de steen aan de bovenkant wat korter?

CIRKELS Boven de zandloper bevindt zich een zonnewijzer waarvan de boven- en onderkant delen van cirkels zijn (zie figuur 4). We kunnen het

◀ **Figuur 1** Albrecht Dürer (1471-1528) maakte *Melencolia I* in 1514. Dat is precies vijfhonderd jaar geleden. Het maakjaar komt op twee manieren terug in de gravure: in het magische vierkant én rechtsonder in de signering AD 1514, waarbij AD zowel staat voor Anno Domini (in het jaar van de Heer) als voor Albrecht Dürer.



Figuur 3

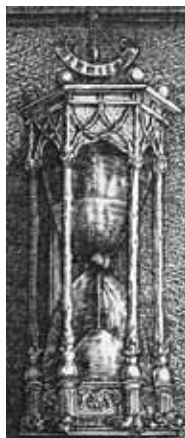
middelpunt van deze zonnewijzer gebruiken om andere cirkels in de kopergravure te construeren.

We zien dan iets onverwachts! De twee hangende objecten – de lege weegschaal en de bel – hangen even ver van dit middelpunt vandaan. Verder liggen de hoekpunten van de drie zijden van het grote veelvlak beneden twee aan twee op een cirkel met hetzelfde middelpunt (zie figuur 5).

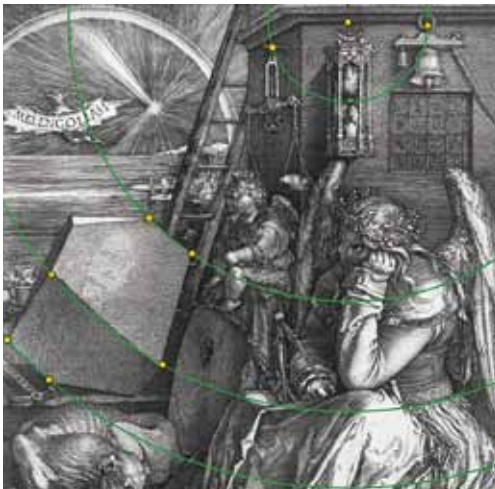
REGELMATIGE DRIEHOEK Voor het analyseren van de compositie zijn regelmatige veelhoeken, zoals de gelijkzijdige driehoek, ook heel interessant.

We construeren een gelijkzijdige driehoek op de volgende twee hoekpunten: het middelpunt van de bol linksonder en de meteoriet in de regenboog. In deze driehoek tekenen we de symmetrieas door het hoekpunt linksonder (zie figuur 6).

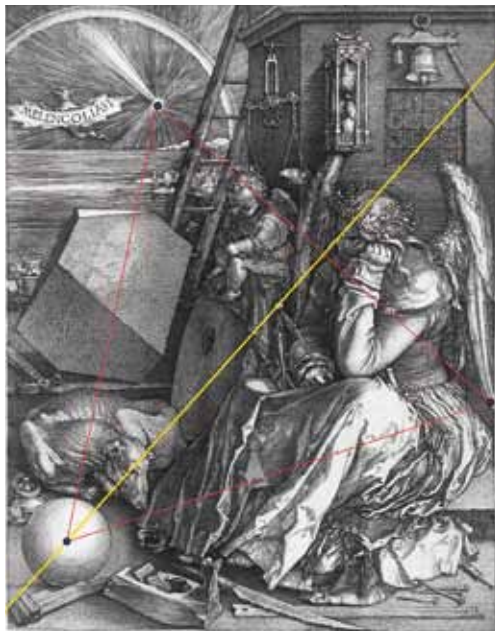
Het valt op dat de symmetrieas door de bol, het oog van de hond, de knop van de passer en een oog van de grote engel gaat. We construeren het punt M vanuit het middelpunt van de bol B en het oog O van de grote engel. De



Figuur 4



Figuur 5



Figuur 6

cirkel met middelpunt M gaat bovenlangs het oog van het dier op de grond. De rest van de constructie spreekt voor zich. We zien dat er erg veel lijnstukken in de gravure door dit beperkte aantal lijnen en loodlijnen worden overdekt. Het is interessant dat de meteoriet ook weer een rol speelt (zie figuur 7).

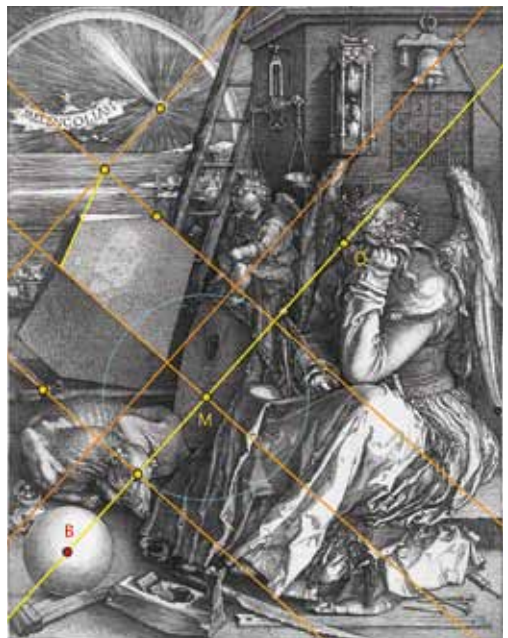
HET DÜRERVEELVLAK Het is erg leuk om de ribben van het Dürerveelvlak te construeren. Merk op dat er op het rechterzijvlak vaag een gezicht is getekend. Er zijn allerlei voorwerpen in perspectief getekend. We construeren eerst alleen de twee verdwijnpunten die aan de horizon liggen: L (van

links) en R (van rechts) (zie figuur 8).

De meeste deskundigen denken dat het Dürerveelvlak een afgeknotte romboëder is. Een romboëder is een veelvlak waarvan alle zijvlakken ruiten zijn. Aan de boven- en onderkant van het Dürerveelvlak bevindt zich een driehoek en tussen deze twee driehoeken bevinden zich drie viertallen van evenwijdige lijnstukken. Bij onze reconstructie (zie figuur 9) kleuren we deze viertallen blauw, groen en rood. De gele perspectieflijnen geven ons de mogelijkheid om onder, aan de achterkant één zijde van de driehoek te construeren.

Vanuit elk hoekpunt van beide driehoeken gaat van elke kleur één lijn. Aan de bovenkant kunnen we al construeren waar deze drie lijnen samenkomen. Drie van de vier blauwe lijnstukken komen perspectivisch gezien samen in een punt ergens ver boven de afbeelding. We trekken langs de drie blauwe lijnstukken paarse lijnen en vinden ongeveer dit snijpunt. Dit snijpunt stelt ons in staat om de vierde blauwe lijn te construeren, en daarmee het derde hoekpunt van de onderste driehoek. De rest van de constructie spreekt voor zich, maar is nog behoorlijk ingewikkeld als je het echt probeert. We veronderstellen de groene lijnen in parallelprojectie getekend, dus evenwijdig.

ZELF EXPERIMENTEREN De lijnen die wij in de gravure *Melancholia I* van Dürer hebben getrokken, laten ons zien hoe deze rijke afbeelding is opgebouwd uit enkele elementaire afstanden, lijnen



Figuur 7



Figuur 8

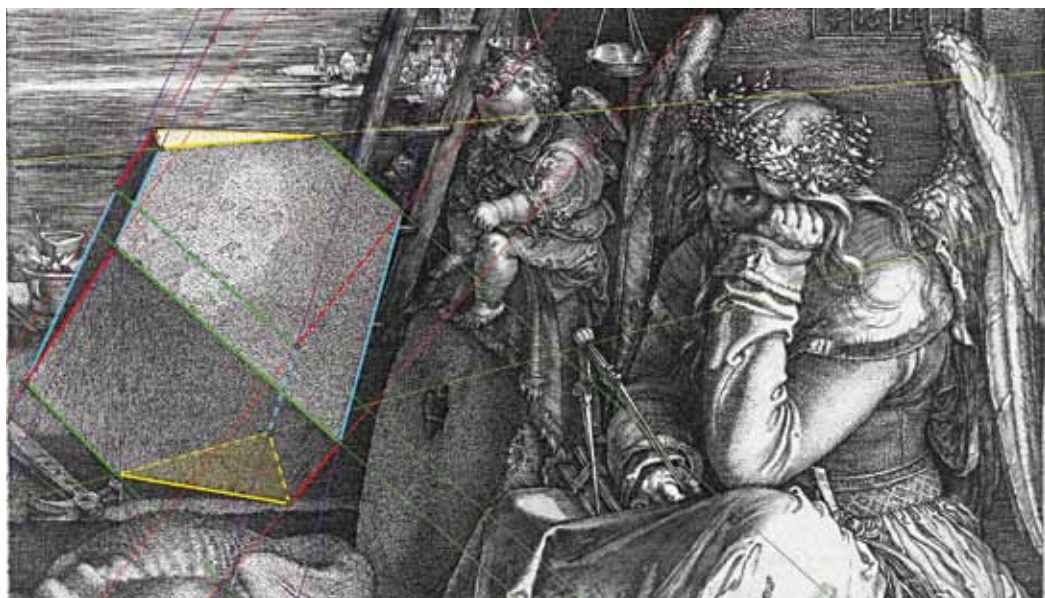
en driehoeken. We hebben alleen maar een begin gemaakt: we kunnen er nog veel verder mee experimenteren.

Bij dit soort experimenten is het erg belangrijk dat je niet in de verleiding komt om naar een resultaat toe te redeneren. Veel constructiepunten, zoals bij het perspectief, liggen erg ver weg en zijn dus erg gevoelig voor kleine veranderingen in de tekening. Het is leuk om dit soort analyses ook te doen met andere kunstwerken. Er is veel literatuur over, die wij nu zelf kunnen narekenen met GeoGebra.

Het kan natuurlijk best dat gevonden lijnen, cirkels en driehoeken toch gewoon voortkomen uit de intuïtie van de kunstenaar. De eenvoudige structuren die we in de afbeelding van dit artikel hebben gevonden, maken het in elk geval wel moeilijk te geloven dat het allemaal op toeval berust!

Tot slot: in *Pythagoras* 7-1 (september 1967) staat ook een grafische analyse van dezelfde prent (zie ons archief op www.pyth.eu). Het is leuk om die te vergelijken met de onze. We zijn ook benieuwd naar jullie experimenten! ■

19



Figuur 9

De tetraëder en de kubus, twee van de vijf platonische lichamen, zijn beroemde veelvlakken. Twee Amerikaanse neurowetenschappers hebben onlangs een nieuwe klasse van veelvlakken ontdekt, die ze Goldbergveelvlakken doopten. Stan Schein en James Gayed publiceerden hun vondst in februari in *Proceedings of the National Academy of Sciences*.

■ door Paul Levrie (Faculteit Toegepaste Ingenieurswetenschappen, Universiteit Antwerpen)

GOLDBERG-VEELVLAKKEN

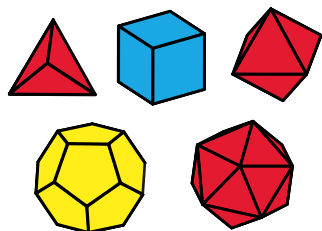
Veelvlakken – ruimtelijke objecten die aan alle kanten begrensd worden door delen van vlakken – worden al meer dan tweeduizend jaar bestudeerd. De bekendste veelvlakken zijn de *platonische lichamen*, ook regelmatige veelvlakken genoemd, die gekenmerkt zijn door het feit dat (1) al hun zijvlakken congruent zijn (dus dezelfde grootte en vorm hebben), (2) alle zijvlakken regelmatige veelhoeken zijn en (3) in elk hoekpunt hetzelfde aantal zijvlakken van dezelfde soort samenkomt. Ze werden (waarschijnlijk) voor het eerst beschreven door de Griekse wiskundige Theaetetus (ca. 417-369 v.C.) en komen uitgebreid aan bod in de werken van de Griekse filosoof Plato. Er zijn er maar vijf: viervlak of tetraëder, kubus of hexaëder, achthoek of octaëder, twaalfvlak of dodecaëder en twintigvlak of icosaeëder (zie figuur 1).

Indien we de eis weglaten dat alle zijvlakken congruent zijn, dan spreken we van uniforme veelvlakken. Dus enkel voorwaarden (2) en (3) blijven over. Een voorbeeld hiervan zijn de *archimedische lichamen*. Er zijn 13 of 15 verschillende archimedische lichamen, afhankelijk van de manier waarop je de zaken bekijkt (2 van de 13 hebben een ruim-

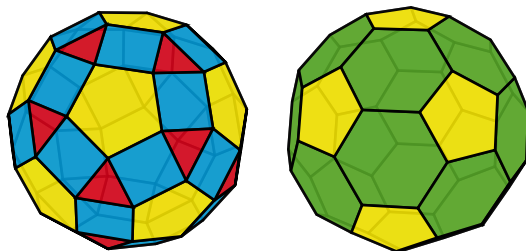
telijk spiegelbeeld dat verschilt van het origineel). In figuur 2 zie je er twee. Het veelvlak rechts is het bekendste, het wordt gebruikt als model voor het koolstofmolecuul Buckminsterfulleren, ook Buckybal genoemd. Dit afgeknutte twintigvlak is ook de basis van de vorm van een voetbal. Veelvlakken komen in de natuur niet alleen bij moleculen voor, ook virussen hebben soms de vorm van een regelmatig of niet-regelmatig veelvlak.

Zowel de platonische als de archimedische lichamen zijn *convex*, dat wil zeggen: als je de verbindingslijn trekt tussen twee punten op verschillende zijvlakken, dan zit die verbindingslijn geheel in het lichaam. Losjes geformuleerd: een lichaam is convex als er geen 'kuilen' in het lichaam zitten. Typisch is ook dat de platonische en de archimedische lichamen een aantal symmetrieën bezitten. De dodecaëder en icosaeëder bijvoorbeeld hebben wat men noemt *icosahedrale symmetrie*.

Er zijn nog andere types uniforme veelvlakken bekend, maar hun aantal is beperkt. Recent hebben twee Amerikaanse wetenschappers, Stan Schein en James Maurice Gayed van de University of California in Los Angeles (UCLA) een nieuw type veel-



Figuur 1 De platonische lichamen



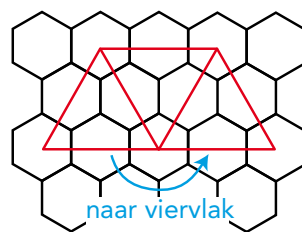
Figuur 2 Twee archimedische lichamen

vlakken ontdekt, die ze de naam *Goldbergveelvlakken* hebben gegeven. Volgens Stan Schein gaat het om het eerste nieuwe type convexe veelvlakken met gelijke ribben en icosahedrale symmetrie in vierhonderd jaar. Schein en Gayed gebruikten een methode die in 1937 is ontwikkeld door de wiskundige Michael Goldberg. Deze vond er de zogenaamde Goldbergkooien mee. Een Goldbergkooi met icosahedrale symmetrie bijvoorbeeld is opgebouwd uit vijfhoeken en zeshoeken, maar het is geen veelvlak omdat de zeshoeken niet vlak zijn (we laten hierbij even het regelmatige twaalfvlak en het afgeknotte twintigvlak buiten beschouwing: dit zijn ook Goldbergkooien). Schein en Gayed zijn er in geslaagd die zeshoeken plat te maken.

Het volgende voorbeeld geeft een idee van hun techniek, in het meest eenvoudige geval.

We vertrekken van een tetraëder waarvan we de zijvlakken overdekken met een net van zeshoeken (zie figuur 3). Daarop zie je de drie driehoekige zijvlakken die samenkomen in een punt. Merk op dat alle zeshoeken mooi aansluiten als je de twee onderste zijden samenbrengt zoals de pijl aangeeft. De hoekpunten van de zeshoeken die binnen een driehoek liggen, en de lijnstukken die deze hoekpunten verbinden, behouden we (zie figuur 4a). De losse uiteinden worden dan door het lichaam heen verbonden met behulp van lijnstukken (zie figuur 4b). Je ziet zo gelijkzijdige driehoeken en zeshoekige figuren ontstaan. Nu wordt het lichaam opgeblazen zodat de zeshoekige delen gelijke zijden krijgen (zie figuur 4c). Merk op dat deze zeshoeken niet vlak zijn. Schein en Gayed ontdekten dat je met het resultaat nog wat kan spelen zodat de resulterende zeshoeken wel vlak zijn, gelijke zijden hebben,

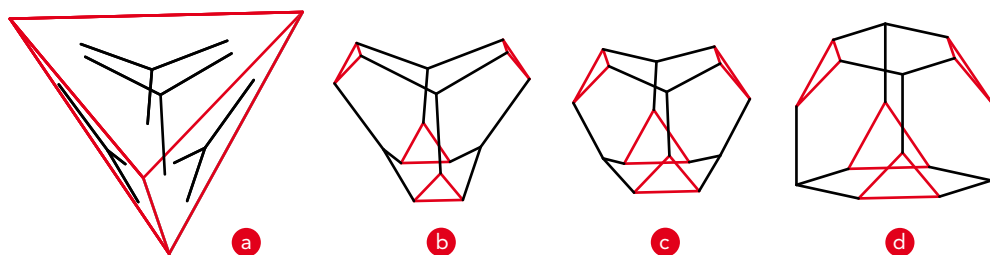
maar geen gelijke hoeken (zie figuur 4d, je ziet zeshoeken met twee hoeken van 90°). Dit laatste lukt zelden als we starten met een tetraëder of een octaëder, maar vreemd genoeg zijn er oneindig veel mogelijkheden indien we vertrekken van een icosae-der. Op het omslag zie je twee voorbeelden. Links zie je de Goldbergkooi, met niet-vlakke zeshoeken, rechts het overeenkomstige Goldbergveelvlak na de operatie van Schein en Gayed. Opvallend is dat de Goldbergveelvlakken veel meer de vorm hebben van een bol. ■



Figuur 3 Een regelmatig viervlak wordt overdekt met een net van zeshoeken.

Het artikel van Stan Schein en James Gayed, 'Fourth class of convex equilateral polyhedron with polyhedral symmetry related to fullerenes and viruses', verscheen in *PNAS*, February 25, 2014, vol. 111, no. 8, p. 2920-2925.

BOUWPLAAT In de binnenkant van het omslag staat een bouwplaat van het Goldbergveelvlak dat stapsgewijs in figuur 4 wordt gemaakt. Je kunt de bouwplaat ook downloaden van onze site: www.pyth.eu.



Figuur 4 De constructie van een Goldbergveelvlak, vertrekkend van een tetraëder.

Er zijn vijf Nederlanders met Erdősgetal 1. Een van hen is N.G. de Bruijn: tussen 1948 en 1953 schreef hij samen met Erdős zes artikelen. Dit artikel gaat over hun derde gemeenschappelijke artikel, 'A colour problem for infinite graphs and a problem in the theory of relations' uit 1951.

■ door Klaas Pieter Hart



GROEPSINDELINGEN

In het najaar van 1948 zette Paul Erdős – na een verblijf van tien jaar in de Verenigde Staten – weer voet op Europese bodem. Hij verbleef toen ook twee maanden in Nederland, waar hij werkte met Nicolaas de Bruijn en Jurjen Koksma. Met De Bruijn werkte hij aan een paar combinatorische problemen. Drie jaar later werkten ze opnieuw samen. Ze bewezen een stelling over het kleuren van grafen, die op veel manieren gebruikt kan worden. Bijvoorbeeld bij het verdelen van mensen in groepjes: als je niet wilt dat er ruzie ontstaat, moet je niet twee mensen in de groep hebben waarvan één de ander niet aardig vindt.

Stel eens dat jouw klas in groepen verdeeld moet worden en dat iedereen ten hoogste twee mensen niet bij zich in de groep wil hebben. In hoeveel groepen kun je de mensen dan verdelen en iedereen tevreden houden? Het antwoord van De Bruijn en Erdős was: je hebt nooit meer dan vijf groepen nodig – zelfs als je klas uit oneindig veel leerlingen zou bestaan!

Als iedereen niet meer dan één persoon niet aardig vindt, kun je met drie groepen toe. En in het algemeen: als iedereen ten hoogste k mensen niet wil zien, lukt het met $2k + 1$ groepen.

EEN KLAS VAN ZES PERSONEN We bewijzen de stelling eerst voor een simpel geval. We nemen een klas van zes personen en nemen $k = 2$: iedereen vindt ten hoogste twee personen niet aardig. We gaan bewijzen dat het altijd lukt om de klas in ten hoogste vijf groepen te verdelen. (Als de klas uit minder dan zes personen zou bestaan, is het natuurlijk flauw: dan zetten we iedereen apart en er is geen probleem!)

Maak een plaatje met voor iedere persoon een punt. Trek een pijl van persoon a naar persoon b als a niet bij b in een groep wil. Op pagina 23 zie je een voorbeeld. De personen 1 en 2 vinden elkaar kennelijk niet aardig.

Hoeveel pijlen hebben we? In ons voorbeeld zijn het er twaalf: iedereen vindt twee mensen niet aar-

dig. In het algemeen kan het aantal pijlen ook kleiner zijn. Meer dan twaalf pijlen is natuurlijk niet mogelijk: vanuit elk van de zes punten worden niet meer dan twee pijlen getrokken. In elk punt kunnen meer dan twee pijlen samenkomen: elke persoon die jou niet leuk vindt, levert een pijl naar jou toe. In het slechtste geval wijzen er vijf pijlen naar jou. In ons voorbeeld wordt persoon 2 het minst aardig gevonden: naar hem wijzen vier pijlen.

De bewering is nu dat er altijd een punt is waar ten hoogste vier pijlen samenkomen (in ons voorbeeld komen alleen bij 2 en 5 meer dan vier pijlen samen). Dat volgt uit een formule die voor elk van dit soort plaatjes geldig is. Noteer voor elk punt x met $d(x)$ het aantal pijlen dat in x samenkomt en met N het totaal aantal pijlen in het plaatje. Dan geldt:

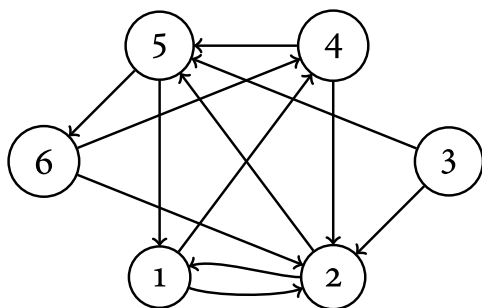
$$\sum_x d(x) = 2N.$$

Hierin staat links de som van alle $d(x)$ -en; die som telt elke pijl twee keer: één keer bij het vertrekpunt en één keer bij het eindpunt. Daarom staat rechts dus $2N$.

In ons voorbeeld is $d(1) + d(2) + d(3) + d(4) + d(5) + d(6) = 4 + 6 + 2 + 4 + 5 + 3 = 24$, en dit is inderdaad 2 keer het aantal pijlen. In het algemeen geldt dat $N \leq 12$, en dus $2N \leq 24$. Als voor elke x zou gelden dat $d(x) \geq 5$, dan zou de som ten minste 30 zijn en dat kan dus niet. Er is dus een x met $d(x) \leq 4$. Er is dus ten minste één persoon waar deze x bij geplaatst kan worden.

In ons voorbeeld voldoen 1, 3, 4 en 6. Neem bijvoorbeeld $x = 4$; dan kan 4 met 3 door één deur en we krijgen de volgende groepen: $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3, 4\}$, $\{5\}$ en $\{6\}$.

EEN GROTERE KLAS Hoe weten we zeker dat we de klas *altijd* in ten hoogste vijf groepen kunnen verdelen, ook als er meer dan zes personen zijn? (We nemen nog steeds $k = 2$: iedereen vindt ten hoogste twee personen niet aardig.) Dit kunnen we aantonen met behulp van het principe van vol-



ledige inductie. Stel je een oneindig lange rij dominostenen voor. Als je de eerste steen een zetje geeft, valt de tweede steen om, die er op zijn beurt voor zorgt dat de derde steen omvalt. Dit gaat zo eindeloos door, maar dat tikje tegen de eerste steen is wel noodzakelijk, anders wordt de *wave* niet in gang gezet. Het bewijsprincipe van volledige inductie gaat in feite net zo.

Stel dat de klas uit n personen bestaat en neem aan dat we al bewezen hebben dat we groepen van $n - 1$ (of minder) mensen veilig in vijf groepen kunnen verdelen. Teken (in gedachten) een plaatje, net als in het geval van zes personen. We weten dat daar ten hoogste $2n$ pijlen in voorkomen, en dus

$$\sum_x d(x) \leq 4n.$$

Net als hierboven kan het niet zo zijn dat $d(x) \geq 5$ voor *alle* x , want dan zouden we vinden dat

$$4n \geq \sum_x d(x) \geq 5n$$

en dat kan dus niet. Neem een persoon x met $d(x) \leq 4$. De rest van de mensen kunnen we, volgens de aanname, in vijf groepen verdelen zonder dat er problemen ontstaan. Dan is er een groep waar x niet door een pijl mee verbonden is en daar kunnen we die persoon dan veilig bij stoppen.

We kunnen nu concluderen dat een klas van n personen altijd in ten hoogste vijf groepen verdeeld kan worden, voor elke waarde van n . Waarom is deze conclusie gerechtvaardigd? We hebben onder het kopje ‘Een klas van zes personen’ bewezen dat de stelling geldt voor $n = 6$ (dit heet de *inductiebasis*; bij de dominostenen is dit de eerste steen, deze krijgt handmatig een zetje). Zojuist hebben we bewezen dat onder de aanname dat $n - 1$ mensen in vijf groepen verdeeld kunnen worden, dit ook bij n mensen mogelijk is (dit heet de *inductiestap*). Deze inductiestap garandeert dus dat de stelling ook geldt voor $n = 6 + 1 = 7$. Nog een keer de inductiestap toepassen levert op dat de stelling klopt voor

$n = 7 + 1 = 8$. Op dezelfde manier kunnen we voor elke vaste maar willekeurig gekozen n bewijzen dat de stelling geldt: we beginnen met de inductiebasis en dan voeren we de inductiestap net zo lang uit tot we bij de gewenste n zijn aangekomen.

Opgave. Bewijs de stelling van Erdős en De Bruijn voor algemene k : als iedereen ten hoogste k personen niet aardig vindt, kun je de mensen verdelen in ten hoogste $2k + 1$ groepen. Vervang daartoe in ons bewijs elke 2 door k , elke 4 door $2k$ en elke ‘vijf’ door $2k + 1$. Ga dit zelf zorgvuldig na.

ONEINDIG VEEL MENSEN Het bewijs voor oneindig veel mensen maakt gebruik van een bijzonder principe uit de logica: het *compactheidsprincipe*. Hoewel fraai is dat principe in het begin niet makkelijk te doorgronden, maar als je het eenmaal doorhebt, kun je er een heleboel dingen mee bewijzen.

Stel dat we oneindig veel mensen hebben, voor elk natuurlijk getal één. Iedereen vindt twee mensen zo onaardig dat ze daar niet mee in een groep willen zitten. We laten zien dat we de mensen in vijf groepen kunnen verdelen waarin niemand elkaar onaardig vindt. Dat gaat als volgt.

Omdat voor elk eindig aantal mensen zo’n verdeling bestaat, kunnen we in het bijzonder voor elke n de eerste n mensen op een goede manier in vijf groepen verdelen. Zo’n verdeling coderen we met een functie

$$f_n: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Hierbij betekent bijvoorbeeld $f_n(1) = 5$ dat bij de n -de verdeling persoon 1 in groep 5 komt. Het hoeft niet zo te zijn dat 1 altijd in de groep met hetzelfde nummer terecht komt. Denk aan de situatie met zes mensen. Bij vijf of minder kunnen we zonder nadenken iedereen in zijn/haar eigen groep stoppen, maar als persoon 6 door niemand van de eerste vijf aardig gevonden wordt, komt hij alleen in een groep terecht en moeten de andere vijf in vier groepjes worden verdeeld; hun oorspronkelijke verdeling wordt dus omgegooid.

Wat wel gebeurt is dat persoon 1 *oneindig vaak*

hetzelfde groepsnummer krijgt: als je oneindig vaak een getal uit $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ kiest, moet je zeker één van die getallen oneindig vaak kiezen. Neem zo'n waarde, 3 bijvoorbeeld, definieer $f(1) = 3$ en noteer $A_1 = \{n : f_n(1) = 3\}$.

Nu kijken we naar 2; om dezelfde reden als voor persoon 1 is er een getal, dat we met $f(2)$ noteren, zó dat $f_n(2) = f(2)$ voor oneindig veel n uit A_1 , noteer $A_2 = \{n : n \in A_1 \text{ en } f_n(2) = f(2)\}$.

Zo bouwen we stapje voor stapje een functie $f: \mathbb{N} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$ op: als we $f(i)$ weten voor $i \leq m$ en als $A_m = \{n : f_n(i) = f(i) \text{ voor } i \leq m\}$ oneindig is, dan kunnen we een waarde $f(m+1)$ vinden zó dat $A_{m+1} = \{n : n \in A_m \text{ en } f_n(m+1) = f(m+1)\}$ weer oneindig is.

De functie f die zo ontstaat is als gewenst: neem maar twee personen, i en j , waarvan i de pest heeft aan j . Neem $m = \max\{i, j\}$, dan geldt $f_n(i) = f(i)$ en $f_n(j) = f(j)$ voor elke $n \in A_m$ en omdat elke f_n een goede verdeling codeert, volgt nu $f(i) \neq f(j)$.

WAAROM ZO INGEWIKKELD? Je zou misschien denken dat we het bewijs voor het eindige geval kunnen gebruiken om f meteen te construeren, maar het voorbeeld in de vorige paragraaf laat zien dat dat niet altijd lukt: als de verdeling van $\{1, \dots, m\}$ zó is dat in elke groep iemand zit die persoon $m+1$ niet leuk vindt, dan moet die verdeling omgegooid worden omdat $m+1$ bij geen enkele groep kan aanschuiven.

EEN ALTERNATIEF In het bovenstaande bewijs zit nog een mooie stelling verstopt. Om dat duidelijk te maken, doen we het volgende. Noteer met T_n de verzameling van alle functies $f: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$ die een goede verdeling coderen. Merk op: als f tot T_n behoort en $m < n$, dan behoort de beperking van f tot $\{1, \dots, m\}$ tot T_m . We zeggen wel dat de vereniging T van alle T_n een boom vormt. Verder weten we dat geen enkele T_n leeg is.

Er is een beroemde stelling, bekend als het *Oneindigheidslemma van König*, die zegt dat in een oneindige boom waarin alle niveaus eindig zijn, een tak bestaat die elk niveau snijdt. In ons geval betekent dat, dat er een rij functies f_n is met $f_n \in T_n$ voor alle n en zo dat f_n een uitbreiding van f_m is als $m < n$. Dan bepalen de f_n samen een goede verde-

ling van $\mathbb{N}$.

Als je het bewijs goed leest, zul je zien dat onze f inderdaad een oneindige tak in de boom T bepaalt.

WAAROM LOGICA? Wat heeft dit probleem met logica te maken? Welnu, er is een manier om van 'eindig' naar 'oneindig' te springen die bijna op tovenarij lijkt, maar die achteraf heel voor de hand liggend is (net als zoveel goocheltrucs). Je kunt de eisen en wensen namelijk in formules uitdrukken. Hier hebben we een paar letters voor nodig (de vakterm is 'predikaten'). Voor elke groep die we willen maken hebben we G_j : we korten 'i zit in groep j' af met $G_j(i)$. Nu kunnen we 'iedereen komt in een groep' uitdrukken als

$$\forall x : G_1(x) \vee G_2(x) \vee G_3(x) \vee G_4(x) \vee G_5(x).$$

Hierin staat $\forall$ voor 'voor alle' en $\vee$ voor 'of'.

Verder hebben we tien formules die samen uitdrukken dat niemand in twee groepen tegelijk zit: als $1 \leq i < j \leq 5$, dan

$$\forall x : \neg(G_i(x) \wedge G_j(x))$$

($\neg$ betekent 'niet' en $\wedge$ betekent 'en'). Ook hebben we nog een predikaat H om uit te drukken dat mensen elkaar niet mogen: $H(i, j)$ kort af dat persoon i persoon j niet aardig vindt. Dit geeft ons nog vijf formules:

$$\forall x \forall y : \neg(G_i(x) \wedge G_j(y) \wedge H(x, y)).$$

Hiernaast krijgen we nog een heleboel formules om aan te geven wie wie niet mag: als persoon i niet bij persoon j wil, voegen we

$$H(i, j)$$

aan de lijst formules toe.

Een goede verdeling van de mensen creëert een situatie waarin aan alle formules is voldaan. Aan het begin van dit artikel hebben we in feite gezien dat we voor elk *eindig* aantal formules zo'n situatie kunnen maken. De zogeheten *Compactheidsstelling* uit de logica zegt dat dit voldoende is om het bestaan van zo'n situatie voor *alle* formules te garan-

deren. Het bewijs van die stelling is niet eenvoudig, maar wel heel mooi. Nog mooier zijn de vele toepassingen.

Deze stelling hebben we, bijvoorbeeld, ook nodig als we andere verzamelingen dan die van de natuurlijke getallen gebruiken om onze mensen te nummeren. Als we voor elk *reëel* getal een persoon hebben en een verdeling willen maken, dan zal ons bewijs niet meer werken. Met de Compactheidsstelling gaat het voor elke verzameling nog steeds.

DRIE VERZAMELINGEN We bekijken tot slot een speciaal geval, dat van een afbeelding $f: X \rightarrow X$ van een verzameling naar zichzelf met de eigenschap dat $f(x) \neq x$ voor alle x . De algemene versie van de stelling garandeert dus dat X te verdelen is in drie verzamelingen G_1, G_2 en G_3 met de eigenschap dat $f[G_i] \cap G_i = \emptyset$.

Dit geval wordt in de verzamelingenleer en in de topologie veel gebruikt en er zijn ook aparte bewijzen voor bedacht. Eén zo'n bewijs gaat als volgt. We definiëren voor elke n de afbeelding f^n als de n -de herhaling van f , dus $f^1(x) = f(x)$, $f^2(x) = f(f(x))$, $f^3(x) = f(f(f(x)))$, enzovoort. Ook spreken we af dat $f^0(x) = x$ voor alle x .

We zeggen dat x en y door f aan elkaar verbonden zijn als er een m en een n bestaan zó dat $f^m(x) = f^n(y)$. Voor elke x bekijken we de ver-

zameling V_x van alle y die met x verbonden zijn.

Nu geldt voor elke x en y dat $V_x = V_y$, of $V_x \cap V_y = \emptyset$. Dat bewijst je als volgt. Stel dat $z \in V_x \cap V_y$; dan zijn er getallen i en j met $f^i(x) = f^j(z)$ en ook k en l met $f^k(z) = f^l(y)$. Als, bijvoorbeeld, $j < k$ tel dan $k - j$ bij i op, dan volgt $f^{i+k-j}(x) = f^k(z) = f^l(y)$, dus y en x zijn ook verbonden. Op dezelfde manier kun je laten zien dat elk punt dat verbonden is met x ook met y verbonden is en omgekeerd; dus $V_x = V_y$.

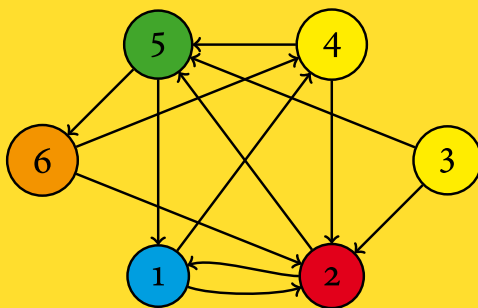
We hoeven nu alleen nog elke V_x in drie verzamelingen op te delen. Neem x vast en neem voor elke $y \in V_x$ de kleinste twee natuurlijke getallen n en m met de eigenschap dat $f^m(x) = f^n(y)$ ($m = 0$ en $n = 0$ zijn mogelijk). We gebruiken die getallen om V_x op te delen: $G_1 = \{y : m + n \text{ is oneven}\}$ en $G_2 = \{y : m + n \text{ is even}\}$. Dan geldt $V_x = G_1 \cup G_2$ en $G_1 \cap G_2 = \emptyset$, dus als $f[G_1] \subseteq G_2$ en $f[G_2] \subseteq G_1$ zijn we klaar.

Wat kan gebeuren, is dat er een $x \in G_1$ is met $f(x) \in G_1$ (of er is zo'n punt in G_2). Dat gebeurt alleen als er een punt y is met een *oneven* $n > 1$ zó dat $f^n(y) = y$ en $f^{n-1}(y), y \in G_1$. Dan is het nodig $G_3 = \{f^{n-1}(y)\}$ te zetten. In alle andere gevallen kunnen we met twee verzamelingen toe.

Een eenvoudig voorbeeld van een situatie waar drie verzamelingen nodig zijn, is $X = \{1, 2, 3\}$ met $f(1) = 2, f(2) = 3$ en $f(3) = 1$. ■

PUNTEN KLEUREN Het artikel van De Bruijn en Erdős ('A colour problem for infinite graphs and a problem in the theory of relations') is online te vinden in het Erdős-archief (www.renyi.hu/~p_erdos). Het is geschreven in de taal van de grafentheorie; in plaats van over groepsindelingen gaat het over het kleuren van punten in plaatjes zoals wij gebruikt hebben, waarbij men punten die met een pijl verbonden zijn verschillend wil kleuren. De stelling luidt in hun termen:

Als vanuit elk punt ten hoogste k pijlen vertrekken, dan kunnen we de punten met $2k + 1$ (of minder) kleuren kleuren en wel zó dat van elke pijl de kop en de staart verschillende kleuren krijgen.



De kleuring van onze graaf, met vijf kleuren.

In maart was de tweede ronde van de Wiskunde Olympiade. De 150 winnaars van deze wedstrijd krijgen niet alleen een uitnodiging voor de finale in september, ze worden ook nog eens vier middagen uitgenodigd op de universiteit om zich optimaal te kunnen voorbereiden op de wedstrijd. Een van de onderwerpen die daar aan bod komen, is 'bewijzen uit het ongerijmde'.

■ door Maarten Solleveld

DRIJVENDE STENEN EN VLIEGENDE NIJLPAARDEN

Een van de gemakkelijkste manieren om te argumenteren is *reductio ad absurdum*. Letterlijk betekent dat: terugvoeren tot het belachelijke. Bijvoorbeeld:

- Stenen zijn zwaarder dan water, want anders zouden ze blijven drijven.
- Nijlpaarden zijn geen vogels, want je ziet ze nooit vliegen.

Het typische hieraan is dat in beide gevallen een uitspraak onderbouwd wordt door te kijken naar zijn ontkenning. Er wordt opgemerkt dat die ontkenning leidt tot een absurde situatie, en daarmee klinkt de oorspronkelijke claim veel plausibeler.

Zo'n soort argument komt best vaak voor; waarschijnlijk gebruik je het zelf ook wel eens zonder er bij stil te staan. Maar waterdicht is deze methode natuurlijk niet, want struisvogels zijn wel vogels maar vliegen niet.

In de wiskunde kun je dit stramien ook gebruiken; daar heet het *bewijs uit het ongerijmde*. Je bewijst dan een uitspraak door aan te nemen dat hij niet waar is, en daaruit een tegenspraak af te leiden. Dus in plaats van een direct argument vóór een uitspraak te geven, laat je zien dat deze niet níét waar is. Dit komt bijvoorbeeld in het volgende geval van pas.

Claim. Er bestaat geen kleinste rationaal getal groter dan nul.

Het bewijs gaat in twee stappen.

1. We nemen de ontkenning van de uitspraak aan. Stel, er is een kleinste rationaal getal groter dan nul. Noem dat x .
2. Hieruit leiden we een tegenspraak af. Bekijk $x/2$. Dit is een rationaal getal, het is positief en kleiner dan x . Dus x was toch niet het kleinste. Tegenspraak! Dus de aanname in stap 1 is fout en dan moet de claim wel waar zijn.

Een bewijs uit het ongerijmde is wel vaker handig bij uitspraken van het type 'Laat zien dat er geen ding met eigenschappen xyz bestaat'. Het oudste bekende bewijs uit het ongerijmde komt van Euclides, een Griekse wiskundige die rond 300 voor Christus leefde.

Stelling. Er zijn oneindig veel priemgetallen.

Hoe kun je laten zien dat er oneindig veel exemplaren van iets zijn? Je kunt aan een lijstje beginnen: 2,





3, 5, 7, 11, 13, 17, ... en van elk natuurlijk getal nagaan of het priem is of niet. Maar dat kost oneindig veel papier, oneindig veel pennen en oneindig veel geduld. Dat schiet niet op. Het bewijs van Euclides is duidelijk sneller:

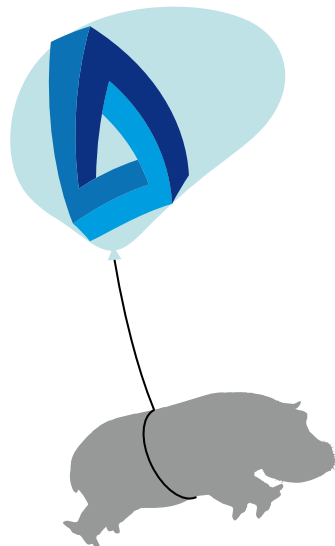
1. Neem aan dat er slechts eindig veel priemgetallen zijn, zeg $p_1, p_2, \dots, p_m$.
2. Definieer N als één plus het product van deze priemgetallen:

$$N = 1 + p_1 p_2 \cdots p_m.$$

Geen enkel al bekend priemgetal p_i is een deler van N , want de rest van N bij deling door p_i is 1. Maar dat is raar, want we kunnen laten zien dat elk geheel getal groter dan 1 deelbaar is door een priemgetal. En dan krijgen we de tegenspraak die nodig is voor een bewijs uit het ongerijmde.

Om de genoemde eigenschap te laten zien, bekijken we de kleinste deler d van N die groter dan 1 is. Misschien is d gelijk aan N , maar dat maakt voor het argument niet uit. In ieder geval is d priem, aangezien N anders een nog kleinere deler zou hebben. (Deze stap is eigenlijk een kort bewijsje uit het ongerijmde.) Omdat de priemgetallen p_i geen delers van N zijn, is d niet gelijk aan een p_i . Dus d is een priemgetal dat nog niet in onze lijst staat. Dit is in tegenspraak met de aanname in stap 1. Klaar!

BROUWER VERSUS HILBERT Er is een anekdote over een wiskundige die op de radio werd geïnterviewd. Hij vertelde dat Euclides al meer dan 2000 jaar geleden had bewezen dat er oneindig veel priemgetallen zijn. Daarop vroeg de interviewer prompt: 'Zijn er nog steeds oneindig veel?'



Dat klinkt stom, want een bewijs blijft altijd geldig – juist dat maakt het een bewijs. Maar toch, over bewijzen uit het ongerijmde is in het wat recentere verleden flink geruzied. L.E.J. Brouwer (1881-1966), de Nederlandse kampioen wiskunde aan het begin van de twintigste eeuw, had het er maar moeilijk mee. Bewijzen dat iets niet niet kan? Wat een zwaktebod, wat een gedoe! Laat liever zien dat je het echt wel kunt!

Zijn tegenstander was de Duitser Hilbert (1862-1943), die toentertijd werd beschouwd als de beste wiskundige ter wereld. Hij vond het prima, zo'n bewijs uit het ongerijmde. Heel handig voor sommige moeilijke resultaten. Bovendien had Hilbert het zelf al vaak gebruikt. Als Brouwer en Hilbert voetbalsupporters waren geweest, dan waren ze elkaar hierom te lijf gegaan. Maar ze waren wetenschappers, dus ze bestreden elkaar met veel boze brieven.

Na verloop van tijd bleek dat velen Hilbert volgden, en daarmee had Brouwer de strijd verloren. Later zagen wiskundigen de grote waarde van de bedenkingen van Brouwer. Bewijzen uit het ongerijmde zijn algemeen geaccepteerd. Dus wat Euclides 2300 jaar geleden al bewees, geldt echt: er zijn nog steeds oneindig veel priemgetallen.

TRAINING Meer over bewijzen uit het ongerijmde bij de olympiade is te vinden in het trainingsmateriaal op de website van de Nederlandse Wiskunde Olympiade: www.wiskundeolympiade.nl/ft. Natuurlijk worden daar ook andere bewijsmethoden besproken!

Op deze pagina staan drie opgaven uit finales van de Nederlandse Wiskunde Olympiade, één uit 1978, één uit 2007 en één van vorig jaar. Bij alle drie de opgaven bestaat de oplossing uit een bewijs uit het ongerijmde. ■

1 (finale 1978). Bewijs dat er geen gehele getallen x en y zijn, die voldoen aan de vergelijking $3x^2 = 9 + y^3$.

OPLOSSING Stel dat er wel gehele getallen x en y zijn die voldoen aan de vergelijking $3x^2 = 9 + y^3$. Dan moet y^3 wel deelbaar zijn door 3, dus y ook. We schrijven daarom $y = 3k$, zodat de vergelijking overgaat in $3x^2 = 9 + 3^3 \cdot k^3$, oftewel $x^2 = 3 + 9k^3$. Maar dan moet x^2 en dus ook x wel deelbaar zijn door 3. We schrijven $x = 3m$ en komen uit op $9m^2 = 3 + 9k^3$, oftewel $3m^2 = 1 + 3k^3$. Dit is echter onmogelijk, want $1 + 3k^3$ is geen drievoud. We concluderen dat er dus geen x en y kunnen zijn met $3x^2 = 9 + y^3$.

2 (finale 2007). Is het mogelijk om de verzameling $A = \{1, 2, 3, \dots, 32, 33\}$ op te delen in elf deelverzamelingen met elk drie getallen waarbij voor elk van de elf deelverzamelingen geldt dat één van de drie getallen gelijk is aan de som van de andere twee getallen? Zo ja, geef dan zo'n verdeling in drietallen; zo nee, bewijs dan dat het niet mogelijk is.

OPLOSSING Nee, zo'n verdeling is niet mogelijk. Stel dat er wel zo'n verdeling in elf deelverzamelingen bestaat. Elke deelverzameling bestaat uit drie getallen, zeg a , b en c , die voldoen aan $a + b = c$ en bijgevolg ook aan $a + b + c = 2c$. Dus voor elke deelverzameling is de som van de getallen even. Maar dan moet de som van alle getallen 1, 2, 3, ..., 33 ook even zijn. Echter, $1 + 2 + 3 + \dots + 33 = \frac{1}{2} \cdot 33 \cdot (33 + 1) = 33 \cdot 17$ en dat is een oneven getal. Tegenspraak. Dus er bestaat geen verdeling van A met de gewenste eigenschappen.

3 (finale 2013). Van een tabel bestaande uit n bij n vierkantjes zijn sommige vierkantjes zwart en zijn de overige vierkantjes wit. Voor ieder tweetal kolommen en ieder tweetal rijen geldt dat de vier vierkantjes op de kruisingen van die rijen en kolommen niet allemaal dezelfde kleur hebben. Wat is de grootst mogelijke waarde van n ?

OPLOSSING We zullen bewijzen dat $n = 4$ de grootst mogelijke n is waarvoor een $n \times n$ -tabel volgens de regels kan worden gekleurd. Dat $n = 4$ mogelijk is, zie je in de figuur. We bewijzen nu dat er geen kleuring van de vierkantjes in een 5×5 -tabel bestaat die aan de voorwaarde voldoet. Stel maar eens dat zo'n kleuring wel bestaat. Van de vierkantjes in elke rij is of de meerderheid zwart, of de meerderheid wit. We mogen wel aannemen dat er minstens drie rijen zijn met een meerderheid aan zwarte vierkantjes (het geval met minstens drie rijen met een meerderheid aan wit gaat op dezelfde manier). We bekijken nu de vierkantjes binnen drie van deze rijen. Van deze 15 vierkantjes zijn er dus minstens 9 zwart. Als er een kolom is waarin elk van de drie rijen een zwart vakje heeft, dan kan elke andere kolom in hoogstens één van deze drie rijen een zwart vakje hebben. Het totaal aantal zwarte vakjes in de drie rijen is dan hoogstens $3 + 1 + 1 + 1 + 1 = 7 < 9$, een tegenspraak. In elke kolom hebben dus hoogstens twee van de drie rijen een zwart vakje. We bekijken het aantal kolommen met twee zwarte vakjes in de drie rijen. Als dit er meer dan drie zijn, dan hebben twee kolommen in dezelfde twee rijen een zwart vakje, en dat kan niet. Het aantal zwarte vakjes in de drie rijen is dus hoogstens $2 + 2 + 2 + 1 + 1 = 8$, wederom een tegenspraak. Het is dus niet mogelijk om een 5×5 -tabel volgens de voorwaarden te kleuren. Duidelijk is, dat het dan ook onmogelijk is om een $n \times n$ -tabel volgens de eisen te kleuren wanneer $n > 5$.

HOE FOTOGRAFEER JE EEN

4D-KUBUS?

■ door Simon Biesheuvel



1
Een punt is 0-dimensionaal. Kopieer dit punt en schuif de kopie naar rechts.



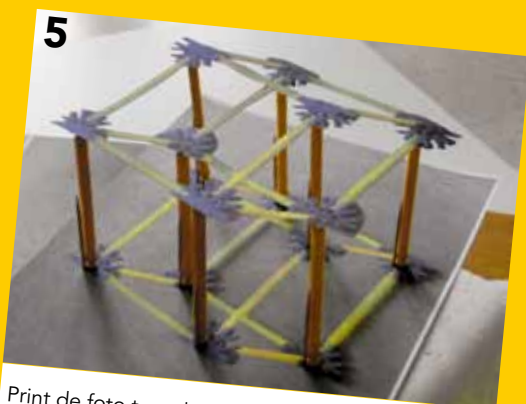
2
Een lijn is 1-dimensionaal. Kopieer deze lijn en verschuif hem loodrecht op de eerste richting.



3
Een vierkant is 2-dimensionaal. Kopieer dit vierkant en verschuif het loodrecht op de twee richtingen.



4
Een kubus is 3-dimensionaal. Maar de foto is 2-dimensionaal. Dus bestaat er een lijn loodrecht op de foto en dus loodrecht op de drie richtingen. Dit is de vierde dimensie.



5
Print de foto twee keer. Zet 8 staafjes op een print, knip van de andere print de kubus uit en leg die bovenop de staafjes. Gefotografeerd vanaf een hoger punt krijg je de grote foto hierboven.

PYTHAGORAS OLYMPIADE

■ door Matthijs Coster, Eddie Nijholt en Harry Smit

Doe mee met de Pythagoras Olympiade! Elke aflevering bevat vier opgaven. De eerste twee zijn wat eenvoudiger; onder de goede inzendingen van leerlingen uit de klassen 1, 2 en 3 wordt een cadeaubon van Bol.com ter waarde van 20 euro verloot. De laatste twee zijn echte breinbrekers; onder de goede inzendingen van leerlingen (tot en met klas 6) wordt een bon van 20 euro verloot. Per aflevering wordt maximaal één bon per persoon vergeven.

Daarnaast krijgen leerlingen (tot en met klas 6) punten voor een *laddercompetitie*, waarmee eveneens een cadeaubon van Bol.com van 20 euro te verdienen valt. De opgaven van de onderbouw zijn 1 punt waard, de opgaven van de bovenbouw 2 punten. De leerling met de hoogste score in de laddercompetitie krijgt een bon. Zijn puntentotaal wordt weer op 0 gezet. Wie zes achtereenvolgende keren niets inzendt, verliest zijn punten in de laddercompetitie.

Met de bovenbouw-opgaven kun je ook een plaats in de finale van de Nederlandse Wiskunde Olympiade verdienen, mocht



het via de voorronden niet lukken: aan het eind van elke jaargang worden enkele goed scorende leerlingen uitgenodigd voor de NWO-finale. Niet-leerlingen kunnen met de Pythagoras Olympiade meedoen voor de eer.

HOE IN TE ZENDEN? Inzendingen ontvangen we bij voorkeur per e-mail (getypt of een scan van een handgeschreven oplossing):

pytholym@gmail.com

Je ontvangt een automatisch antwoord zodra we je bericht hebben ontvangen.

Eventueel kun je je oplossing sturen naar Pythagoras Olympiade, PWN

p.a. Centrum Wiskunde & Informatica

Postbus 94079

1090 GB Amsterdam

Voorzie het antwoord van een duidelijke toelichting (dat wil zeggen: een berekening of een bewijs). Vermeld je naam en adres; leerlingen moeten ook hun klas en de naam van hun school vermelden.

Je inzending moet bij ons binnen zijn vóór 30 juni 2014.

DE GOEDE INZENDERS VAN JANUARI 2014

274: Wouter Andriessen (klas 4), Leielandscholen Campus Vlaanderen, Kortrijk; Tara van Belkom (klas 4), Gymnasium Felisenum, Velsen-Zuid; Simon de Best (klas 4), Mummellius Gymnasium, Alkmaar; Johanna Bult (klas 4), Mummellius Gymnasium, Alkmaar; Maarten Clercx (klas 1), Varendonck college, Asten; Sietse Couperus (klas 4), Goois Lyceum, Bussum; P. Dekker, Krimpen aan de Lek; Phillip de Groot (klas 4), Mummellius Gymnasium, Alkmaar; Oscar Heijdra (klas 3), Goois Lyceum, Bussum; Nathan van 't Hof (klas 5), Hofstad Lyceum, Rijsijk; Arie van der Kraan, Nuth; Bram van der Linden (klas 4), Mummellius Gymnasium, Alkmaar; Pieter-Jan Meuris (klas 4), Klein Seminarie, Roeselare; Hannah Nijse (klas 4), Driestar College, Gouda; Michelle Sweering (klas 6), Erasmiaans Gymnasium Rotterdam; Rob van der Waall, Huizen; Marinda Westerveld (klas 5), Goois Lyceum, Bussum; Marc Zuurbier (klas 4), Mummellius Gymnasium, Alkmaar.

275: Wouter Andriessen (klas 4), Leielandscholen Campus Vlaanderen, Kortrijk; Sietse Couperus (klas 4), Goois Lyceum, Bussum; P. Dekker, Krimpen aan de Lek; Phillip de Groot (klas 4), Mummellius Gymnasium, Alkmaar; Nathan van 't Hof (klas 5), Hofstad Lyceum, Rijsijk; Arie van der Kraan, Nuth; Pieter-Jan Meuris (klas 4), Klein Seminarie, Roeselare; Michelle Sweering (klas 6), Erasmiaans Gymnasium Rotterdam; Rob van der Waall, Huizen.

276: Wouter Andriessen (klas 4), Leielandscholen Campus Vlaanderen, Kortrijk; Kees Boersma, Vlissingen; Nathan van 't Hof (klas 5), Hofstad Lyceum, Rijsijk; Michelle Sweering (klas 6), Erasmiaans Gymnasium Rotterdam.

277: Wouter Andriessen (klas 4), Leielandscholen Campus Vlaanderen, Kortrijk; Kees Boersma, Vlissingen; Nathan van

't Hof (klas 5), Hofstad Lyceum, Rijsijk; Pieter-Jan Meuris (klas 4), Klein Seminarie, Roeselare; Frenk Out (klas 5), Mummellius Gymnasium, Alkmaar; Michelle Sweering (klas 6), Erasmiaans Gymnasium Rotterdam; Marinda Westerveld (klas 5), Goois Lyceum, Bussum.

Cadeaubonnen: Maarten Clercx en Wouter Andriessen.

Stand laddercompetitie: Bram Jonkheer (18 p; cadeaubon), Jelmier Hinssen (18 p), Jori Koolstra (18 p), Nathan van 't Hof (12 p), Tara van Belkom (9 p), Lennart Muijres (7 p), Frenk Out (7 p), Wouter Andriessen (6 p), Wout Gevaert (6 p), Michelle Sweering (6 p), Tim Vermeulen (6 p), Marinda Westerveld (6 p), Eva Kapitein (5 p), Art Waeterschoot (5 p), Bob Zwetsloot (5 p), Oscar Heijdra (4 p), Pieter-Jan Meuris (4 p), Marijke Bot (3 p), Jildert Dennenman (3 p), Ritchie Keijsper (3 p), Jia-Jia ter Kuile (3 p), Timen Schenk (3 p), Pim Spelier (3 p), Sjoerd de Vries (3 p), Sietse Couperus (2 p), Phillip de Groot (2 p), Maud Jonker (2 p), Yvette Keij (2 p), Alex Keizer (2 p), Tom Smeding (2 p), Jelle den Uil (2 p), David Welling (2 p), Marc Zuurbier (2 p), Sterre ter Beek (1 p), Simon de Best (1 p), Johanna Bult (1 p), Lisa Clappers (1 p), Maarten Clercx (1 p), Ivo van Dijk (1 p), Laurens Hilbrands (1 p), Bram Honig (1 p), Bram van der Linden (1 p), Rein Lukkes (1 p), Hannah Nijse (1 p), Anne Nroom (1 p), Seb Waterreus (1 p).

Noot van de redactie: drie leerlingen staan met 18 punten bovenaan in de laddercompetitie. De redactie heeft geloot: Bram Jonkheer wint de bon en zijn puntentotaal wordt weer op 0 gezet. Jelmier Hinssen en Jori Koolstra behouden hun punten uiteraard.

OPGAVE 282

Gegeven zijn vier getallen a , b , c en d die voldoen aan

$$\frac{b+c}{a+d} = \frac{b+d}{a+c}.$$

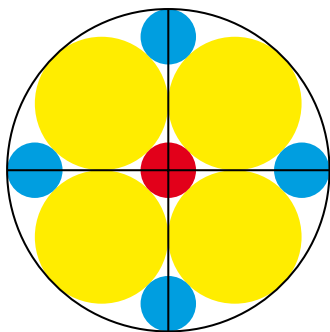
Verder is gegeven dat c ongelijk is aan d . Het volgende viertal voldoet bijvoorbeeld: $a = 1$, $b = -3$, $c = 6$ en $d = -4$, want

$$\frac{-3+6}{1-4} = \frac{-3-4}{1+6} = -1.$$

Laat zien dat $a + b + c + d = 0$.

OPGAVE 283

Kees tekent een cirkel en twee middellijnen die loodrecht op elkaar staan (zie plaatje). Vervolgens tekent hij in elk van de kwart cirkels die zijn ontstaan een nieuwe cirkel die raakt aan de oorspronkelijke cirkel en aan de twee middellijnen (de gele cirkels). Daarna tekent hij een cirkel die raakt aan deze vier gele cirkels (de rode cirkel). Ten slotte tekent hij vier cirkels die raken aan de oorspronkelijke cirkel en de gele cirkels (de blauwe cirkels). Kees vraagt zich af welke straal groter is: die van de rode cirkel of die van een blauwe cirkel? Los jij het probleem op voor Kees?



OPGAVE 284

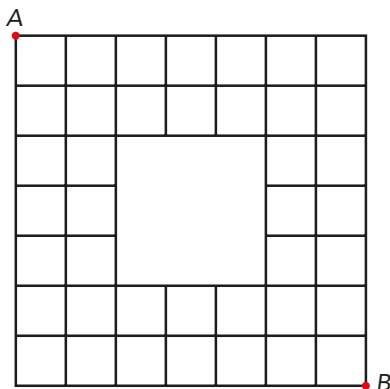
De functie $f(x, y)$ heeft de volgende vier eigenschappen:

- $f(x, y) + f(x, z) = f(x, y + z + 2)$
- $f(x, y) + f(z, y) = f(x + z - 1, y)$
- $f(3, 4) = 24$
- $f(4, 5) = 42$

Bereken $f(7, 17)$.

OPGAVE 285

Hoeveel kortste routes zijn er van punt A naar punt B in het volgende rooster, waarbij je alleen over de roosterlijnen mag lopen?



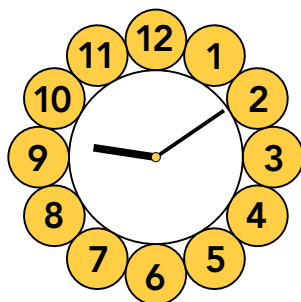
OPLOSSING 274

De som van de cijfers van het driecijferige getal 217 is gelijk aan 10. Hoeveel positieve, driecijferige getallen zijn er in totaal waarvoor geldt dat de som van de cijfers gelijk is aan 10?

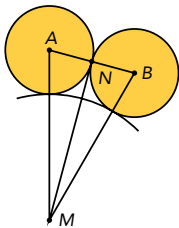
Oplossing. De driecijferige getallen zijn de getallen van 100 tot en met 999. We bekijken de getallen die beginnen met 9. Dan is de som van de resterende cijfers 1; we vinden 901 en 910. Vervolgens bekijken we de getallen die beginnen met 8; we vinden 802, 811 en 820. Met begincijfer 7 vinden we 4 oplossingen en zo doorgaand met begincijfer 1 vinden we 10 oplossingen. Het totaal aantal oplossingen is $2 + 3 + 4 + \dots + 9 + 10 = 54$.

OPLOSSING 275

De klok hiernaast bestaat uit twaalf cirkels met straal 1, waarin de getallen 1 tot en met 12 zijn geplaatst, en een grote cirkel, waarin zich de grote en kleine wijzer bevinden. Wat is de straal van de grote cirkel?



Oplossing. We bekijken een deel van de klok, namelijk de kleine cirkels met daarin de 12 en 1, en de grote cirkel (zie figuur). M is het middelpunt van de grote cirkel, A is het middelpunt van de cirkel waarin 12 staat en B is het middelpunt van de cirkel waarin 1 staat. Er geldt: $AB = 2$, tweemaal de straal van een kleine cirkel. Het punt precies in het midden van A en B noemen we N . Driehoek ABM is gelijkbenig met tophoek $\frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$, dus $\angle AMN = 15^\circ$. Uit $AN/AM = \sin 15^\circ$ volgt: $AM = 1/(\sin 15^\circ)$. De straal van de grote cirkel is $1/(\sin 15^\circ) - 1$. Door gebruik te maken van het feit dat $\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$, vinden we dat de straal van de grote cirkel gelijk is aan $\sqrt{6} + \sqrt{2} - 1 \approx 2,86$.



OPLOSSING 276

Op een schaakbord (van 8×8 velden) liggen 64 rijstkorrels. Geen enkele rijstkorrel ligt op een rand. Er mogen wel meerdere rijstkorrels op één veld liggen, en er mogen (dus) ook velden leeg zijn. Een muis loopt over het schaakbord en eet de rijstkorrels. Per rijstkorrel in zijn buik kan hij een vakje naar links, naar rechts, naar voren of naar achteren. Als hij bijvoorbeeld drie rijstkorrels heeft gegeten, kan hij eerst naar rechts en dan twee keer naar voren. Met n rijstkorrels in zijn buik kan hij zich n keer op deze manier verplaatsen. De muis eet onderweg alle rijstkorrels die hij tegenkomt op de velden die hij aandoet. Laat zien dat er altijd een veld is waar de muis kan beginnen en vanaf dat veld een route op het schaakbord kan vinden waarbij hij alle rijstkorrels opeet.

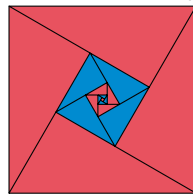
Oplossing. Kies een route waarbij het beginpunt grenst aan het eindpunt. In de figuur is een dergelijke route aangegeven. We houden voor deze specifieke route bij hoeveel rijstkorrels de muis nog in zijn maag heeft. Dit kan ook een negatief getal zijn, maar nooit kleiner dan -63 . Laat vervolgens de muis beginnen op het veld waar de muis het kleinste aantal rijstkorrels (dus meest negatieve) in zijn maag had. De muis eindigt nu op dit veld met 0 rijstkorrels. Gedurende de gehele rondgang is

het aantal rijstkorrels in zijn maag structureel verhoogd.

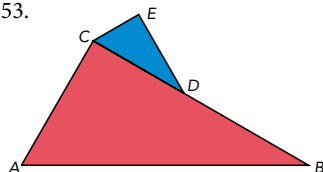
58	57	56	55	54	53	52	51
59	44	45	46	47	48	49	50
60	43	42	41	40	39	38	37
61	30	31	32	33	34	35	36
62	29	28	27	26	25	24	23
63	16	17	18	19	20	21	22
64	15	14	13	12	11	10	9
1	2	3	4	5	6	7	8

OPLOSSING 277

Gegeven is een vierkant met zijden van 2. Hierin leggen we vier rode driehoeken met hoeken van 30° , 60° en 90° , zoals in de figuur. Vervolgens leggen we op dezelfde manier vier blauwe driehoeken (eveneens met hoeken van 30° , 60° en 90°) in het aldus ontstane kleinere vierkant. In het vierkant dat nu ontstaat, leggen we weer vier rode driehoeken. Dit proces zetten we eindeloos voort. Wat zal na oneindig veel stappen de oppervlakte van het totale rode gebied zijn?



Oplossing. Noteer met R de oppervlakte van het rode gebied en met B de oppervlakte van het blauwe gebied. In onderstaande figuur zijn $AB = 2$, $AC = 1$ en $BC = \sqrt{3}$. De oppervlakte van $\triangle ABC$ is $\frac{1}{2}\sqrt{3}$. Ook geldt $BD = 1$. Dus $CD = \sqrt{3} - 1$. AB is de basis van het oorspronkelijke vierkant; dit vierkant heeft oppervlakte 4. CD is de basis van een vierkant met oppervlakte $(\sqrt{3} - 1)^2 = 4 - 2\sqrt{3}$. Dus: de oppervlakte van de vier grootste blauwe driehoeken is gelijk aan de oppervlakte van de vier grootste rode driehoeken maal de factor $(4 - 2\sqrt{3})/4$. Voor de volgende vier blauwe en vier rode is dat natuurlijk ook zo, etcetera. Dat betekent: $B = R \cdot (4 - 2\sqrt{3})/4$. Ook geldt: $R + B = 4$, ofwel $B = 4 - R$. Substitueer dit in de vorige uitdrukking: $4 - R = R \cdot (4 - 2\sqrt{3})/4$. Oplossen geeft $R = 8/(4 - \sqrt{3}) \approx 3,53$. Alternatief: De oppervlakte van het rode gebied vormt een meetkundige reeks met beginterm $b = 2\sqrt{3}$ en reden $q = ((4 - 2\sqrt{3})/4)^2$. Voor de som geldt: $R = b/(1 - q) \approx 3,53$.



OPLOSSING 'EEN PUZZEL IN EVENWICHT'

De foto toont de oplossing van de evenwichtspuzzel uit het vorige nummer (pagina 10-13).



PYTHAGORAS

53ste jaargang nummer 5
april 2014
ISSN 0033 4766

Pythagoras stelt zich ten doel jongeren kennis te laten maken met de leuke en uitdagende kanten van wiskunde. *Pythagoras* richt zich tot leerlingen van vwo en havo en alle anderen die jong van geest zijn.

Internet www.pyth.eu

Hoofredacteur Derk Pik

Eindredacteur Alex van den Brandhof

Redactie Matthijs Coster,
Jeanine Daems, Jan Guichelaar,
Klaas Pieter Hart, Paul Levrie,
Marc Seijlhouwer

Vormgeving Grafisch Team Digipage,
Leidschendam

Druk Drukkerij Ten Brink, Meppel

Uitgever Koninklijk Wiskundig
Genootschap (KWG)

Management Pythagoras Jan Turk,
Mark Veraar (KWG), Derk Pik

Lezersreacties en kopij

Bij voorkeur per e-mail; lezersreacties naar Jan Guichelaar, jan@pyth.eu en kopij naar Derk Pik, derk@pyth.eu. Eventueel per post naar Pythagoras, p.a. Centrum Wiskunde & Informatica, Postbus 94079, 1090 GB Amsterdam.

Abonnementen, bestellingen en mutaties

Abonneeservice Pythagoras
Postbus 2238
5600 CE Eindhoven
Telefoon 088 226 5258
E-mail: abonnementen@pyth.eu

Abonnementsprijs

(zes nummers per jaargang)
€ 26,00 (Nederland en België),
€ 29,00 (overige landen),
€ 17,00 (groepsabonnement NL/B),
€ 26,00 (geschenkabonnement NL/B),
€ 29,00 (geschenkabonnement overige landen).

Een geschenkabonnement stopt automatisch na één jaar. Overige abonnementen gelden tot wederopzegging. Zie www.pyth.eu voor verdere toelichtingen.

Aan dit nummer werkten mee

Simon Biesheuvel
(biesheuvel@zonnet.nl),
Alex van den Brandhof
(alex@pyth.eu),
Matthijs Coster
(matthijs@pyth.eu),
Jeanine Daems
(jeanine@pyth.eu),
Niels Dekker
(nielsdekker@mml.msa.nl),
Jan Guichelaar
(jan@pyth.eu),
Klaas Pieter Hart
(kp@pyth.eu),
Paul Levrie
(paul@pyth.eu),
Eddie Nijholt
(eddie@pyth.eu),
Derk Pik
(derk@pyth.eu),
Marc Seijlhouwer
(marc@pyth.eu),
Harry Smit
(h.j.smit@students.uu.nl),
Maarten Solleveld
(m.solleveld@science.ru.nl).

Pythagoras wordt mede mogelijk gemaakt door de bijdragen van de onderstaande instituten en instellingen.



VEELVLAKKENFORMULE

$$H - R + Z = 2$$

De Zwitserse wiskundige Leonhard Euler (1707-1783) heeft veel formules bedacht. Erg fraai is zijn formule voor convexe veelvlakken uit 1752. Hierin staat H voor het aantal hoekpunten, R voor het aantal ribben en Z voor het aantal zijvlakken. Ga maar na dat de formule klopt voor de veelvlakken die zijn afgebeeld op pagina 20. Bijvoorbeeld de kubus: die heeft 8 hoekpunten, 12 ribben en 6 zijvlakken. Inderdaad is $8 - 12 + 6 = 2$. Een bewijs van de veelvlakkenformule stond in *Pythagoras* 42-2 (december 2002), te vinden in het archief op www.pyth.eu. Overigens was de formule rond 1630 al ontdekt door René Descartes (1596-1650). Toch staat de formule bekend als de veelvlakkenformule van Euler.