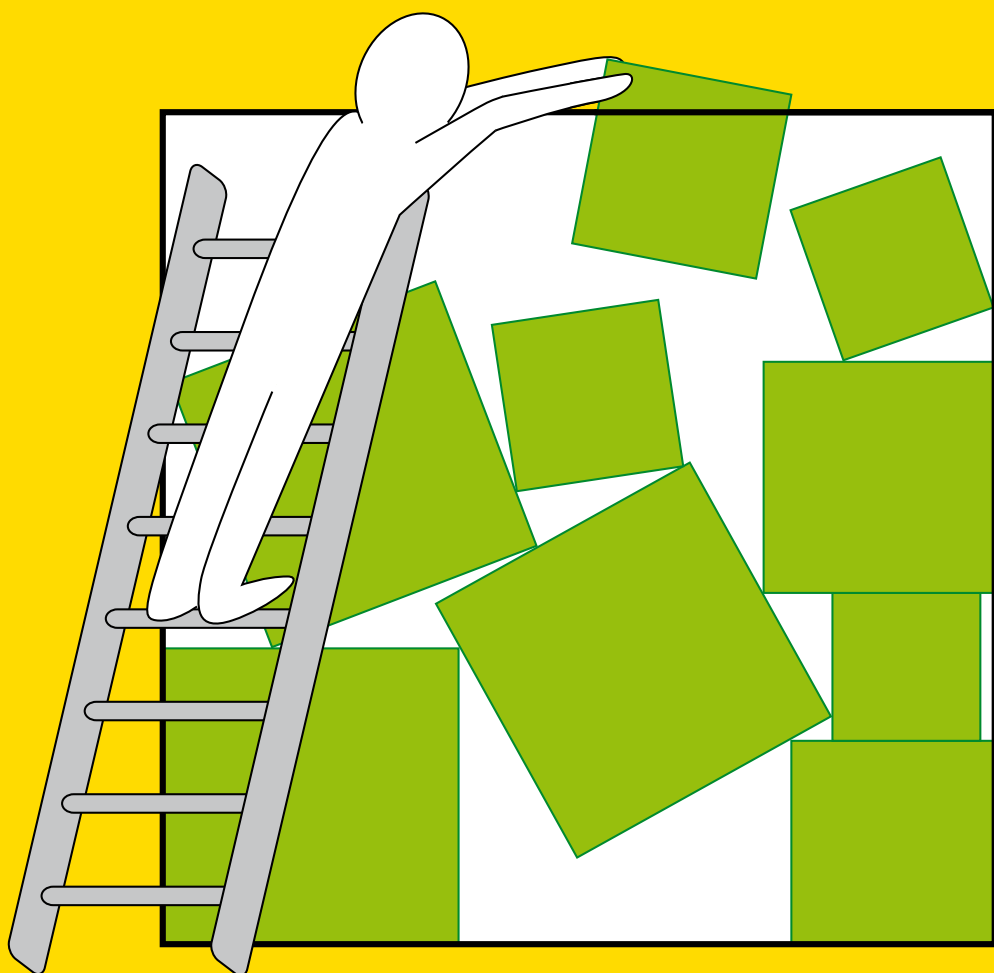


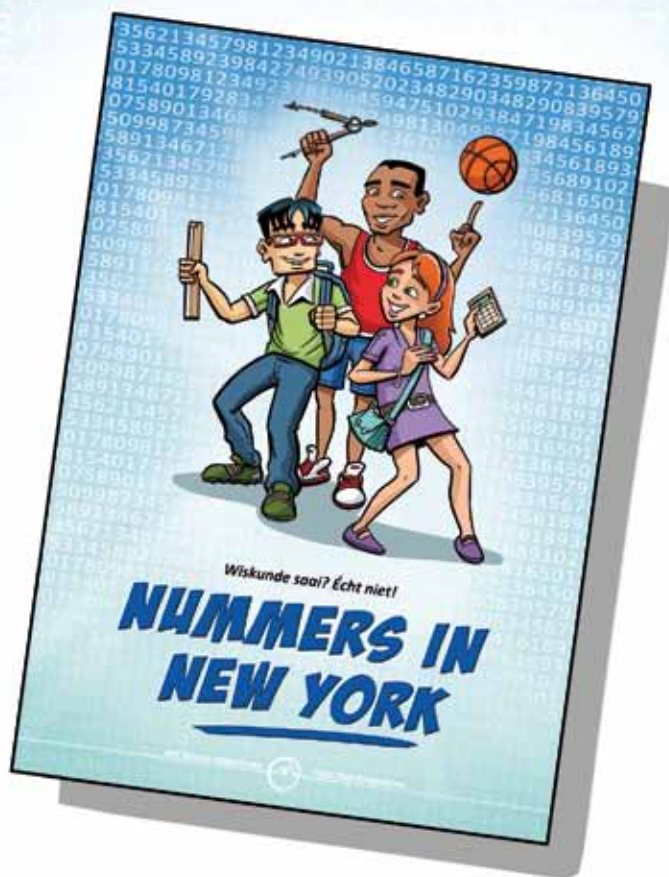
PYTHA GORAS

WISKUNDETIJDSCHRIFT VOOR JONGEREN



53ste JAARGANG - NUMMER 6 - JUNI 2014

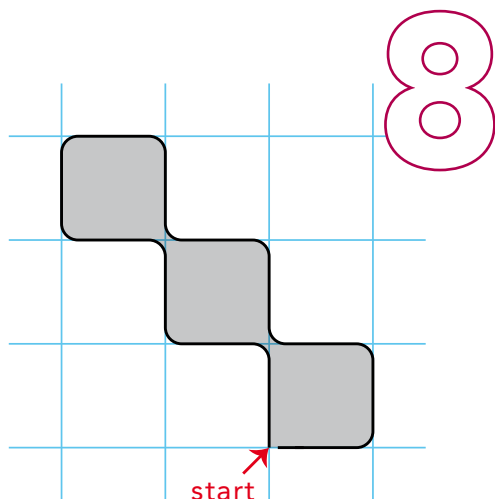
WISKUNDE SAAI? ECHT NIET!



In het wiskundestripboek 'Nummers in New York' beleven drie jongeren een spannend avontuur in de stad der steden. Rekenen, algebra en meetkunde helpen hen de vele raadsels die in Manhattan liggen op te lossen... Bestel het stripboek nu op www.totalshot.nl!



INHOUD



ZOMERPRIJSVRAAG: LINKS OF RECHTS?

In deze laatste *Pythagoras* van jaargang 53 presenteren we een puzzel die behoorlijk verslavend kan zijn. Echt iets voor de lange zomervakantie. En je kunt er nog een QAMA-rekenmachine mee winnen ook!

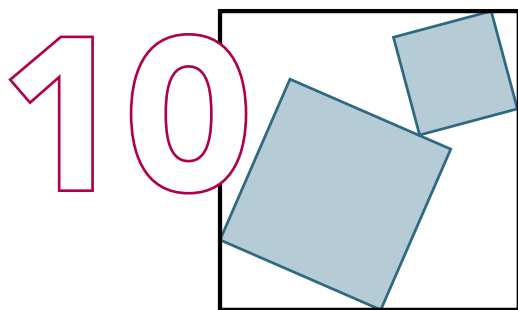


DE KORTSTE DAG GAAT SNEL VOORBIJ

Korte dagen in de winter, lange dagen in de zomer. Hoe kun je de daglengte van een willekeurige datum, op een willekeurige plaats ergens op aarde, berekenen?

EN VERDER

- 2 Kleine nootjes
- 4 Logaritmen
- 6 Uitslag prijsvraag: Bewegende wiskunst
- 7 Journaal
- 16 Doolhof door Stephan Timmers
- 23 Oneindig veel getallen optellen
- 26 Rode en blauwe knikkers
- 30 Pythagoras Olympiade



GEVANGEN VIERKANTEN

Plaats twee vierkanten in een eenheidsvierkant (zonder overlap) zó, dat de gezamenlijke omtrek van die twee vierkanten zo groot mogelijk is. Dit probleem bedacht Paul Erdős als student. Een generalisatie van dit probleem is nog altijd onopgelost.

Omslagillustratie: Alex van den Brandhof

■ **NIVEAUBALKJES** Sommige pagina's bevatten één of meer zwarte balkjes onder het paginanummer. Voor artikelen zonder balkje is geen specifieke voorkennis nodig. Artikelen met één balkje bevatten wiskunde uit de onderbouw. Artikelen met twee balkjes vereisen kennis uit de bovenbouw. Drie balkjes: net iets moeilijker.

KLEINE NOOTJES

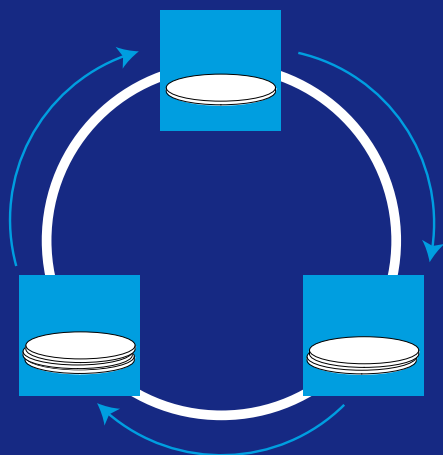
■ door Jan Guichelaar

DOBBELSTEEN EN MUNT

Je hebt een gewone dobbelsteen (met op de zijden 1, 2, 3, 4, 5 en 6) en een speciale munt: op de ene zijde staat een 1 en op de andere een 2.

Als je met de dobbelsteen en de munt tegelijkertijd gooit, wat is dan de kans dat je met de twee cijfers een getal groter dan 20 kunt vormen?

Als je ze na elkaar gooit, waarbij je de volgorde door het lot laat bepalen en waarbij de eerste worp het eerste cijfer bepaalt en de tweede worp het tweede cijfer, wat is dan de kans dat je een getal groter dan 20 hebt?

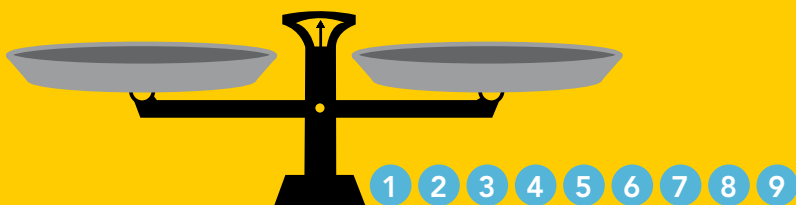


SPELEN MET FICHES

Op een cirkel liggen drie stapeltjes fiches zoals aangegeven in het plaatje: één, twee en drie fiches dik. Je mag 'zetten' doen. Bij een zet pak je een te kiezen stapeltje geheel op en legt dan met de klok mee op elk volgend veld steeds precies één fiche van het stapeltje. Bijvoorbeeld: als je een stapeltje van drie fiches oppakt, zet je op de volgende drie velden met de klok mee telkens één fiche, ook op een veld dat eventueel leeg is gekomen. Hoeveel zetten heb je ten minste nodig om uitgaande van de situatie '1-2-3 met de klok mee' (zoals getekend) de situatie '3-2-1 met de klok mee' te bereiken?

BALANCEREN

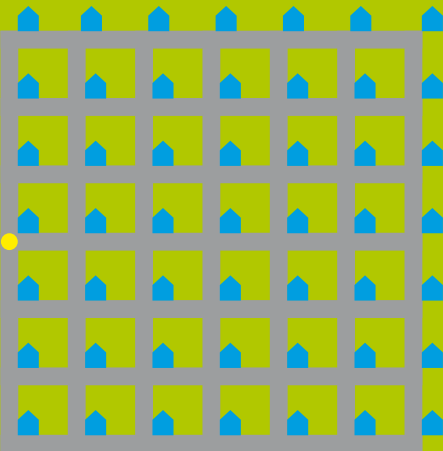
Je hebt een balans en 9 gewichtjes, waar de gewichten in grammen op staan: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Je weet dat acht het gewicht hebben dat erop staat, maar dat één van de negen 0,1 gram minder weegt dan wat erop staat. Kun je het gewichtje met het afwijkende gewicht er altijd uitvissen in twee wegingen?



ENEN EN TWEËN

Tel alle viercijferige getallen waarin twee enen en twee tweeën voorkomen bij elkaar op. Welke uitkomst krijg je?

Kleine nootjes zijn eenvoudige opgaven die weinig of geen wiskundige voorkennis vereisen om opgelost te kunnen worden. De antwoorden vind je in het volgende nummer van *Pythagoras*.



BEREIKBAARHEID

In het vierkante stratenpatroon hierboven is de afstand tussen twee naast elkaar gelegen kruispunten precies 100 meter (de breedte van de wegen mag je verwaarlozen). Bij elk kruispunt zit één winkel (met blauw aangegeven). Je staat bij de gele stip. Kun je driekwart van alle winkels bereiken, als je niet meer dan 600 meter wilt lopen?

1 1 2 2

OPLOSSINGEN KLEINE NOOTJES NR. 5

Steeds minder vierkanten.

1	2	3		aantal vierkanten	weg te halen lucifers
4	5	6	7	11	1
8	9	10		10	2
				9	5, 6
				8	5, 20
				7	2, 9
11	12	13	14	6	5, 6, 9
15	16	17		5	2, 9, 17
				4	2, 12, 20
				3	2, 12, 19, 20
18	19	20	21	2	2, 10, 12, 20
22	23	24		1	2, 10, 12, 19, 20
				0	1, 2, 10, 12, 19, 20

Som en product. Twee oplossingen zijn:

$1 + 1 + 1 + 3 + 3 = 1 \times 1 \times 1 \times 3 \times 3 = 9,$
 $1 + 1 + 1 + 2 + 5 = 1 \times 1 \times 1 \times 2 \times 5 = 10.$

Vier kaarten. De ♥ kan niet helemaal links liggen, want dan kan hij niet rechts van de 5 liggen.

Met de ♥ links van de ♠ en rechts van de 5 hebben we de volgende mogelijkheden:

5-♥-♠-x; 5-♥-x-♠; 5-x-♥-♠; x-5-♥-♠.

Met de ♣ rechts van de ♦ krijgen we:

♦5-♥-♠-♣; ♦5-♥-♣-♠;

♦5-♣-♥-♠; ♦-♣5-♥-♠.

Ten slotte de rode 10 niet direct naast een ♣ leidt tot de oplossing: ♦5-♥10-♠B-♣B.

Met de klok mee. Tussen 12 en 6 uur is de hoek langer kleiner dan 180° dan tussen 6 en 12 uur.

Een periode dat de hoek kleiner is dan 180° duurt 360/11 minuten. Er geldt dat $P = 6$ periodes en $Q = 5$ periodes. Dus $P > Q$.

De ruimte verdelen. Het grootste aantal stukken waarin je de ruimte kunt verdelen met vier vlakken is 15. Alle aantallen kleiner dan 15 zijn ook mogelijk, behalve 13.

Pythagoras geeft je de beste en leukste rekentips. Met onze trucs los je binnen *no-time* de ingewikkeldste sommen op. Deze keer gaat het over logaritmen, die vaak goed van pas komen bij moeilijke sommen en schattingen.

■ door Marc Seijlhouwer

LOGARITMEN

Berekeningen met logaritmen zijn erg lastig om uit je hoofd te doen. Toch is het hoofdrekenen en schatten van logaritmen te doen als je bereid bent om van tevoren behoorlijk wat uit het hoofd te leren. Dergelijke berekeningen zijn nuttig als je bijvoorbeeld een indruk wilt krijgen van een groeisnelheid.

GROND TAL 10 De uitdrukking $10^{\log a}$ betekent: de macht waartoe we 10 moeten verheffen om a te krijgen. Zo is $10^{\log 100} = 100$, omdat $10^2 = 100$. In plaats van $10^{\log}$ schrijven we meestal kortweg $\log$; dus $\log 100 = 2$, en $\log 1000 = 3$. Net als op je rekenmachine.

Het grondtal 10 is handig om de *grootte* van een getal te kunnen schatten. Als je bijvoorbeeld weet dat $\log x = 7,55$, dan kun je met behulp van logaritmen vrij makkelijk nagaan dat x een getal van 8 cijfers voor de komma is (in feite $3,5 \cdot 10^7$).

We beginnen met de logaritmen van de eerste tien natuurlijke getallen:

$\log 1 = 0$;
 $\log 2 \approx 0,301030 \approx 0,30$;
 $\log 3 \approx 0,477121 \approx 0,48$;
 $\log 4 \approx 0,602060 \approx 0,60$;
 $\log 5 \approx 0,698970 \approx 0,70$;
 $\log 6 \approx 0,778151 \approx 0,78$;
 $\log 7 \approx 0,845098 \approx 0,85$;
 $\log 8 \approx 0,903090 \approx 0,90$;
 $\log 9 \approx 0,954243 \approx 0,95$;
 $\log 10 = 1$.

In de praktijk is het meestal voldoende om twee cijfers achter de komma te onthouden. We leren daarom de volgende de rij uit het hoofd:

0; 0,30; 0,48; 0,60; 0,70; 0,78; 0,85; 0,90; 0,95; 1.

Wil je toch meer decimalen weten, leer dan de logaritmen van 2, 3 en 7 uit het hoofd. Dat is misschien vervelend, maar er zit niets anders op. De overige bovenstaande logaritmen kun je vervolgens afleiden met behulp van de volgende rekenregels:

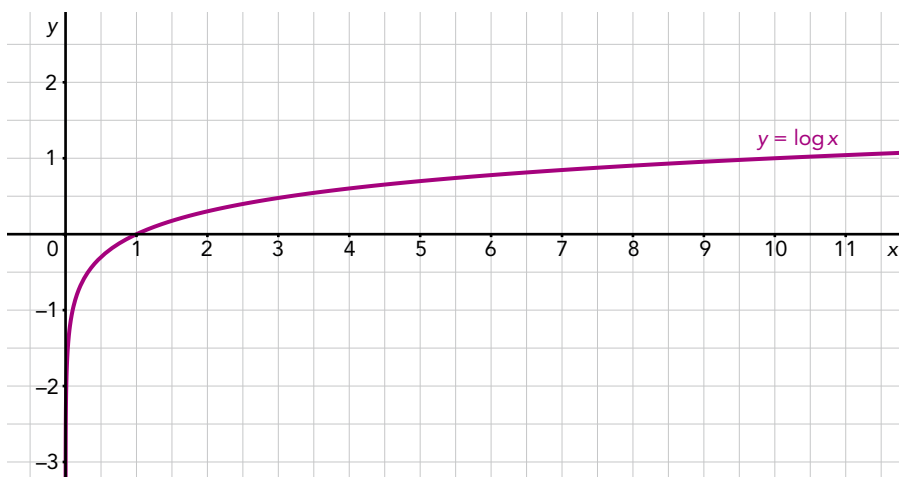
$$\begin{aligned}\log(a \cdot b) &= \log a + \log b; \\ \log(a/b) &= \log a - \log b. \\ \log(a^b) &= b \cdot \log a.\end{aligned}$$

Daarmee krijgen we:

$$\begin{aligned}\log 4 &= \log 2 + \log 2 = 0,602060; \\ \log 5 &= \log 10 - \log 2 = 0,698970; \\ \log 6 &= \log 2 + \log 3 = 0,778151; \\ \log 8 &= 3 \cdot \log 2 = 0,903090; \\ \log 9 &= 2 \cdot \log 3 = 0,954242.\end{aligned}$$

De laatste 2 in het getal 0,954242 is een gevolg van afronding: we hadden natuurlijk liever een 3 gehad.

TUSSENLIIGENDE WAARDEN EN GROTE MACHTEN Met behulp van het uit het hoofd geleerde rijtje afgeronde waarden (op twee decimalen) kunnen we tussenliggende logaritmen redelijk nauwkeurig schatten. Zo is $\log 2,5$ een getal tussen



0,30 en 0,48. Omdat de grafiek van de logaritme afnemend stijgend is, zal het getal dicht bij $\log 3$ dan bij $\log 2$ liggen. De schatting 0,4 is helemaal niet slecht. De echte waarde van $\log 2,5$ in vier decimalen nauwkeurig is 0,3979.

Met de eerste tien logaritmen op zak kan je een heleboel. In het bijzonder kan je allerlei grote machtsverheffingen schatten met behulp van logaritmen. Laten we eens een grote macht uitrekenen: 18^5 . Zoals je weet, is een logaritme het omgekeerde van een machtsverheffing. Dus 18^5 is hetzelfde als $10^{\log(18^5)} = 10^{5 \log 18}$. Deze omweg via logaritmen lijkt niet eenvoudiger, maar is het wel – mits je wat logaritmen uit je hoofd kent.

Allereerst rekenen we $\log 18$ uit:

$$\begin{aligned}\log 18 &= \log 2 + \log 9 \approx \\ &0,30 + 0,95 = 1,25.\end{aligned}$$

Dit antwoord vermenigvuldigen we met 5; we krijgen $1,25 \cdot 5 = 6,25$. Nu nemen we 10 tot de macht dit getal. Allereerst: 10^6 is een miljoen. Nu nog $10^{0,25}$; hoe komen we daar uit ons hoofd achter? Omdat 0,25 een beetje onder de 0,30 (het tweede getal in het uit het hoofd geleerde rijtje) ligt, zal de uitkomst $10^{0,25}$ iets onder de 2 liggen. We schatten 1,8. Als eindantwoord vinden we $18^5 \approx 1.800.000$. Dit ligt niet ver van de exacte waarde: $18^5 = 1.889.568$.

MOEILIJKE Het is leuk om uit te proberen hoe ver je met deze ruwe schattingsmethode kan ko-

men. Een beetje grof moet je wel durven zijn. Probeer eens de opgave 35^{37} . Eerst schatten we $\log 35$ met behulp van de uit het hoofd geleerde $\log 5$ en $\log 7$: $\log 35 = \log 5 + \log 7 = 0,70 + 0,85 = 1,55$. Dit vermenigvuldigen we met 37. We nemen eerst 1,55 maal 40, dat geeft 62 en we halen er 3 keer 1,55 vanaf. We krijgen 57,35. We vinden dus dat $35^{37} \approx 10^{57,35}$: meer dus dan een 1 met 57 nullen. Onze schatting $10^{57,35}$ is bij benadering gelijk aan $2,24 \cdot 10^{57}$. Dat is weliswaar veel meer dan het echte antwoord ($35^{37} \approx 1,35 \cdot 10^{57}$), maar de orde van grootte hadden we in elk geval goed!

Dit is echt een onderwerp dat vraagt om wedstrijdjes. Zoek een medeleerling en geef elkaar steeds een moeilijke som op, bijvoorbeeld met machten van ten hoogste twee cijfers. Wie er het dichtst bij zit, heeft een ronde gewonnen.

EEN QAMA UITGEREIKT! Ten slotte: we vroegen in de vorige afleveringen om zelf rekentrucs in te sturen. Huub Odijk stuurde ons een leuk artikel met allerlei deelbaarheidseigenschappen. We vonden de bijdrage zo leuk, dat hij er een QAMA-rekenmachine mee heeft gewonnen. De eigenschappen die hij beschrijft, overlappen deels met de dingen die we al hebben besproken in deze rubriek. Wellicht komen we er later toch nog eens op terug. Gefeliciteerd met de prijs! ■

BEWEGENDE

UITSLAG PRIJSVRAAG

WISKUNST

■ door Derk Pik



De inzending van Renée Evers. Haar spreekbeurt en de beweging van haar inzending zijn te zien op <http://goo.gl/VUC41c>.

In het novembernummer vroegen we onze lezers een bewegend kunstwerk te maken. Gedurende onze Geogebra-serie hebben allerlei lezers ons constructies opgestuurd. Dat gaf ons de valse hoop dat er heel wat (computer)kunstwerken voor de prijsvraag binnen zouden komen. De teller bleef echter steken bij drie, en deze inzendingen waren allemaal mechanisch. Niemand stuurde bewegend computerkunst in.

Friso Stienstra (14) en Tim Rijshouwer (13) van het Olympus College in Arnhem hebben een printer van Lego gebouwd die driehoeken kan tekenen. Ze vertellen dat het apparaat er ook kwadraten bij zet, alleen is dat in het YouTube-filmpje (zie <http://goo.gl/jCM6Sk>) niet goed te zien. Het zou leuk zijn geweest wanneer hun apparaat wat meer verschillende afbeeldingen kon tekenen. Hun apparaat lijkt daartoe mogelijkheden te hebben. Het is interessant om er mee door te gaan en het apparaat bijvoorbeeld zichzelf herhalende patronen te laten tekenen.

De tweede inzending kwam van Renée Evers (13), ook van het Olympus College. Zij is gefascineerd door de figuren die ontstaan als je een over een trechter gespannen ballon met je eigen stem in trilling brengt. De vreemde, symmetrische vormen die je dan krijgt, kan je variëren met de toonhoogte van je stem. Renée krijgt er prachtige figuren mee.

Op YouTube is ook nog een filmpje te zien waar ze er een spreekbeurt over houdt.

De derde inzending is van Lukas van de Vrande. Hij is wiskundeleraar op het WisMon-instituut en ook beeldend kunstenaar. Hij heeft een object gemaakt van horizontale en verticale banden waarbij elke band in een ander tempo heen en weer beweegt. De bewegingen worden veroorzaakt door een groot draaiend tandwiel met 199 tanden dat kleinere tandwielletjes aandrijft die elk een ander aantal tanden hebben. Hierdoor duurt het erg lang voordat het object weer in dezelfde stand staat. De aantallen tanden van de verschillende tandwielen zijn 17, 19, 23, 26, 29, 31, 33, 35, 37, 41 en 199. Deze getallen hebben geen gemeenschappelijke factoren. In één seconde komen er 4,8 tandjes voorbij, dus het duurt $17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 26 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 33 \cdot 35 \cdot 37 \cdot 41 / 4,8 \approx 6,3 \cdot 10^{13}$ seconden voordat het zichtbare deel van het kunstwerk weer in de originele stand is. Dit komt neer op ongeveer 2 miljoen jaar!

PRIJZEN Renée Evers en Lukas van de Vrande winnen elk een cadeaubon ter waarde van 50 euro. Friso Stienstra en Tim Rijshouwer krijgen elk een QAMA-rekenmachine. Ook krijgt het Olympus College in Arnhem een jaar lang een groepsabonnement op *Pythagoras* voor tien personen ter waarde van 170 euro. Gefeliciteerd! ■



De inzending van Lukas van de Vrande. De beweging is te zien op <http://goo.gl/sXXeAQ>.

Abelprijs 2014 voor entropie-wiskundige

Op 20 mei is in Oslo de Abelprijs, één van de belangrijkste prijzen die een wiskundige kan winnen, uitgereikt aan de 78-jarige Rus Yakov G. Sinai. Sinds 1993 is Sinai verbonden aan Princeton University in de VS. De commissie die de prijs toekende, noemde Sinai één van de invloedrijkste wiskundigen van dit moment.

In de jaren '50 werkte Sinai in Moskou samen met de beroemde wiskundige Kolmogorov. In die tijd bedacht hij een manier om *chaos*, een concept uit de natuurkunde, met formules te beschrijven. Dankzij Sinai's werk is bijvoorbeeld beter te begrijpen hoe gas beweegt. Hij beschreef de chaos als een *dynamisch systeem*: een model waarvan je de veranderingen in de tijd kunt beschrijven. Als de toestand voor latere tijd volledig bepaald is door de begintoestand, spreken we van een deterministisch systeem. Sinai hield zich bezig met dynamische systemen waarbij de toestand voor toekomstige tijd-

stippen op *toeval* berust. Er ontstaat dan chaos. Hoe onvoorspelbaarder de kansen, hoe chaotischer een dynamisch systeem. Sinai zorgde ervoor dat de onzekerheid een formele definitie kreeg. Hij noemde het *entropie*: de gemiddelde onzekerheid over de volgende stap in een dynamisch systeem, waarvan je alle voorgaande stappen kent.

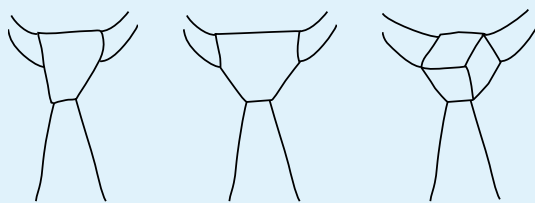
Sinai ontdekte wetmatigheden in chaotische systemen, zodat hij kon voorspellen wanneer en hoe chaos zou toeslaan. Zelfs als een systeem heel onvoorspelbaar was, zorgde Sinai ervoor dat er een paar zekerheden waren, zodat je niet helemaal in het duister hoeft te tasten. Daarmee hielp Sinai – die zichzelf mathematisch fysicus noemt – natuurkundigen de wereld beter te begrijpen.

De Abelprijs, een bedrag van 6 miljoen Noorse kronen (zo'n 750.000 euro), wordt sinds 2003 jaarlijks uitgereikt. De prijs is vernoemd naar de Noorse wiskundige Niels Henrik Abel (1802-1829).

Duizenden extra stropdasknopen

De meeste mensen kennen maar één manier om een stropdas te knopen. Maar er zijn er veel meer: wel 170.000. Dat ontdekte de Zweedse logicus Mikael Vejdemo-Johansson, verbonden aan het Royal Institute of Technology in Stockholm, samen met enkele collega's. De logici hebben dit enorme aantal berekend door de mogelijke bewegingen die je tijdens het maken van een knoop hebt in een logische taal te stoppen en vervolgens alle combinaties te berekenen.

Daarmee borduurden de stropdasonderzoekers voort op werk uit 1999: toen toonden wiskundigen aan dat er in die logische taal maximaal 85 stropdasknopen mogelijk zijn. Die 85 hielden echter enkel rekening met een beperkt aantal bewegingen. Dat het aantal nu zo groot is, komt door de *Matrix*-films; in het tweede deel van deze trilogie draagt een van de slechteriken een wel heel bijzondere stropdasknoop: de achterkant zit aan de voorkant! Dat effect krijg je door op een zeker moment tijdens het knopen je das te 'flippen', een beweging



Drie verschillende stropdasknopen. De stropdaskundigen noemen deze knopen een 4-in-hand (links), een *double windsor* (rechts) en een *trinity* (rechts). **Bron:** arxiv.org/abs/1401.8242

die het eerste onderzoek niet kende. Aangezien de Matrix-knoop steeds populairder wordt, vonden de Zweden dat ze de beweging erbij moesten doen. Dat zorgde ervoor dat het aantal mogelijke knopen explosief toenam.

Overigens bleek wel al snel dat een groot deel van de 170.000 knopen eigenlijk onbruikbaar is; ze zagen er meestal erg lelijk of raar uit.

Deze zomer kun je je uitleven op een probleem dat behoorlijk verslavend kan zijn. Bovendien kun je er ook nog een QAMA-rekenmachine mee winnen.

■ door Matthijs Coster

Zomerprijsvraag

LINKS OF RECHTS?

Je begint met een blad ruitjespapier. Schrijf een willekeurige reeks L-en en R-en op. Vervolgens plaats je je pen op één van de hoekpunten van een vierkantje en trek je in een of andere richting een lijntje. Je bekijkt de opeenvolgende symbolen in de reeks. Staat er een L dan sla je linksaf, kom je een R tegen dan sla je rechtsaf. Ben je op het einde van de reeks en ben je niet teruggekeerd bij het startpunt, dan begin je weer van voren af aan met de reeks symbolen. Zodra je bij het startpunt terugkomt, stop je.

Het kan voorkomen dat je op den duur buiten je blad ruitjespapier komt. In dat geval moet je ofwel een andere reeks bedenken, ofwel een ander startpunt kiezen, ofwel een groter blad nemen. Ook kan het voorkomen dat je een lijntje moet tekenen waar je al was geweest, nog voordat je bij het startpunt uitkomt (zoals in het laatste voorbeeld op de rechterpagina). Dat willen we niet, dus een reeks waarbij dat gebeurt, is niet toegestaan.

MAXIMALE OPPERVLAKTE Als je een toegestane figuur hebt gemaakt, tel je hoeveel blokjes je hebt omsloten. Op de rechterpagina staan enkele voorbeelden. Het is de kunst om met zo weinig mogelijk symbolen L en R een zo groot mogelijke oppervlakte te omsingelen. Het is aan jou om de volgende drie problemen te onderzoeken. Je mag daarbij steeds uitgaan van een blad ruitjespapier dat zo groot is als je maar wilt.

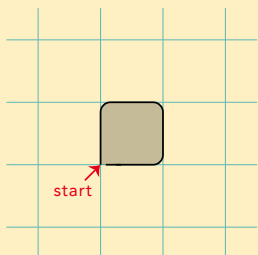
1. Wat is het kleinste aantal symbolen om een figuur met oppervlakte 6 te tekenen? Bepaal vervolgens het kleinste aantal symbolen voor de oppervlaktes 7 tot en met 20.
2. Bepaal het kleinste aantal symbolen om figuren te maken met oppervlakte 21, 25, 29, ..., 77, 81 (het verschil tussen twee opvolgende getallen is steeds 4).
3. Wat is het grootste gebied dat je kan omsingelen met een herhalend patroon van drie symbolen? Kan je met elk aantal symbolen een gebied omsingelen? Wat is het grootst mogelijke gebied met 4, 5, 6, 7, 8, 9, ... symbolen?

INZENDEN Iedereen mag inzenden; de prijzen (we geven vier QAMA-rekenmachines weg) zijn voor scholieren. Je hoeft natuurlijk niet alle vragen te beantwoorden; deelresultaten kun je ook inzenden. Je inzending ontvangen we bij voorkeur per e-mail: prijsvraag@pyth.eu, of eventueel op papier naar het volgende adres:

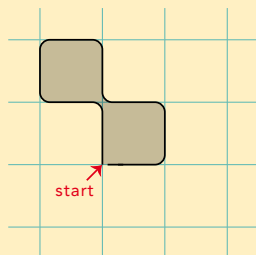
Pythagoras, PWN
p.a. Centrum Wiskunde & Informatica
Postbus 94079
1090 GB Amsterdam

Vermeld je naam, adres en e-mailadres. Als je scholier bent, vermeld je uiteraard ook de naam van je school en in welke klas (of groep) je zit. Inzenden kan tot 30 september 2014. Veel plezier! ■

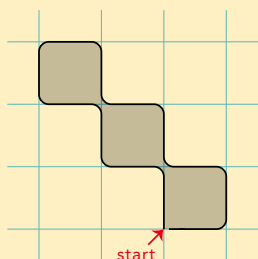
Hieronder staan zes reeksen L-en en R-en. Plaats je pen op een willekeurig roosterpunt en trek in een of andere richting een lijntje. In deze voorbeelden wordt dit eerste lijntje steeds naar boven getekend. Vervolgens trek je verder lijntjes volgens de opgeschreven reeks. Bij een L sla je linksaf, bij een R rechtsaf. Ben je op het einde van de reeks en ben je niet teruggekeerd bij het beginpunt, dan begin je weer van voren af aan met de reeks symbolen.



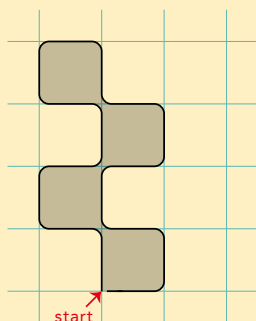
Reeks: R Je voert drie keer R uit. Dan ben je weer bij het beginpunt en stop je. Je hebt een gebied van oppervlakte 1 omsingeld.



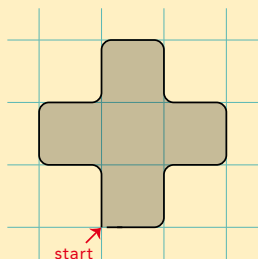
Reeks: LRRR Je voert twee keer LRRR uit. Bij de tweede keer kun je de laatste R niet meer uitvoeren. Je hebt een gebied van oppervlakte 2 omsingeld.



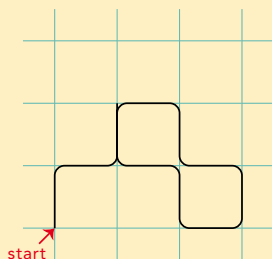
Reeks: LRLRRR Je voert twee keer LRLRRR uit. Bij de tweede keer kun je de laatste R niet meer uitvoeren. Je hebt een gebied van oppervlakte 3 omsingeld.



Reeks: LRLLRRR Je voert twee keer LRLLRRR uit. Bij de tweede keer kun je de laatste R niet meer uitvoeren. Je hebt een gebied van oppervlakte 4 omsingeld.



Reeks: LRR Je voert vier keer LRR uit. Bij de vierde keer kun je de laatste R niet meer uitvoeren. Je hebt een gebied van oppervlakte 5 omsingeld.



Reeks: RLRLRRRL Deze reeks is niet toegestaan. De reeks is hier één keer getekend en zoals je ziet, kom je tweemaal over eenzelfde lijntje.

Zoals zo veel van Erdős' vermoedens, is zijn probleem waarbij het erom draait om $k^2 + 1$ vierkanten optimaal binnen een eenheidsvierkant te plaatsen, eenvoudig te begrijpen, maar erg moeilijk om op te lossen. Met 'optimaal' wordt hier bedoeld: de gezamenlijke omtrek van de $k^2 + 1$ vierkanten moet maximaal zijn. Erdős noemde het probleem, dat nog altijd op een oplossing wacht, aan het eind van zijn leven 'onverdiend vergeten'.

■ door Alex van den Brandhof en Paul Levrie

GEVANGEN VIERKANTEN



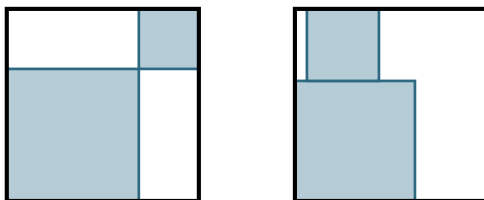
10 Reeds als wiskundestudent bedacht Paul Erdős (1913-1996) vele problemen. Deze bezigheid beviel hem zo, dat hij er zijn beroep van heeft gemaakt. Vanwege zijn uitstekende intuïtie had hij de gave om vermoedens op te stellen die een enorme aantrekkingskracht op wiskundigen uitoefenden. Maar als je talloze problemen verzint, raakt er ook wel eens één ondergesneeuwd. Dat gebeurde met het volgende probleem, dat Erdős bedacht rond 1932, de periode waarin hij wiskunde studeerde in Boedapest.

Plaats twee vierkanten in een eenheidsvierkant (een vierkant waarvan de zijden lengte 1 hebben) op zo'n manier, dat de gezamenlijke omtrek van die twee vierkanten zo groot mogelijk is. De twee vierkanten mogen niet overlappen.

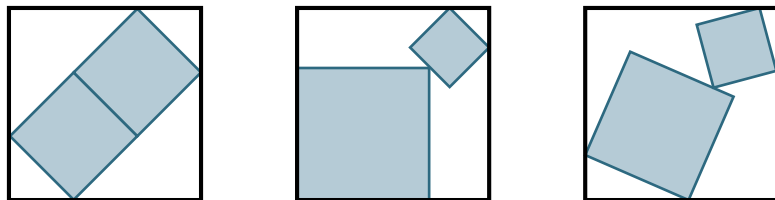
Je intuïtie zegt waarschijnlijk al gauw dat de configuraties in figuur 1 voorbeelden zijn van het best haalbare. De omtrek van de twee vierkanten samen is dan gelijk aan 4, precies gelijk aan de omtrek van

het eenheidsvierkant.

Hoe eenvoudig het probleem ook lijkt, hoe weten we zeker dat we geen grotere omtrek kunnen krijgen door de twee vierkanten anders te plaatsen? Figuur 2 toont drie configuraties van twee vierkanten binnen een eenheidsvierkant en de totale omtrek is – inderdaad – steeds net iets kleiner dan 4. Maar een paar van zulke plaatjes vormen natuurlijk nog geen bewijs.



Figuur 1 Twee voorbeelden van een optimale plaatsing van twee vierkanten in een eenheidsvierkant. De totale omtrek van de twee vierkanten binnen het eenheidsvierkant is in beide configuraties gelijk aan 4.



Figuur 2 Drie voorbeelden van een niet-optimale plaatsing van twee vierkanten in een eenheidsvierkant. De totale omtrek van de twee vierkanten in de meest linkse configuratie is $\frac{8}{3}\sqrt{2} \approx 3,77$.

HET BEWIJS We gaan bewijzen dat twee vierkanten (I en II) optimaal binnen het eenheidsvierkant E liggen, als ze elk met ten minste één hele zijde op E liggen en uiteraard ‘opgerekt’ zijn tot maximale grootte. Dit doen we uit het ongerijmde. Stel dat de gezamenlijke omtrek van I en II maximaal is, als ten minste één vierkant zo ligt, dat zijn zijden *niet* evenwijdig zijn met de zijden van E. We mogen aannemen dat de twee vierkanten ten minste één punt gemeenschappelijk hebben. Als dat namelijk niet het geval zou zijn (zoals in figuur 3, links), dan kun je een van de vierkanten (of allebei) vergroten, tot ze elkaar raken (figuur 3, rechts).

Er zijn nu drie gevallen mogelijk:

- de vierkanten raken elkaar in een hoekpunt van beide;
- een hoekpunt van een van beide vierkanten ligt op een zijde van het andere;
- een zijde van het ene vierkant ligt (gedeeltelijk) tegen een zijde van het andere.

Voor elk van deze mogelijkheden is in figuur 4 een voorbeeld gegeven. Je kunt in elk van de drie gevallen een lijn trekken, samenvallend met een van de zijden van een van de vierkanten, die E zodanig in twee delen verdeelt, dat I in het ene deel zit en II in het andere deel. Voor de vorm van die twee delen zijn er vijf mogelijkheden:

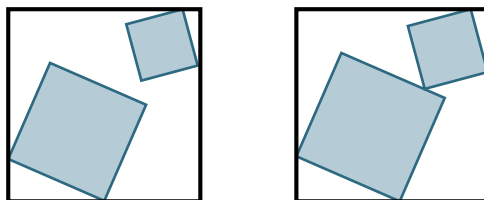
- twee rechthoeken;
- twee rechthoekige gelijkbenige driehoeken;
- twee rechthoekige trapezia;
- een rechthoekige driehoek en een rechthoekig trapezium;
- een rechthoekige driehoek en een vijfhoek met drie rechte hoeken.

Voor elk van deze mogelijkheden is in figuur 5 een voorbeeld gegeven.

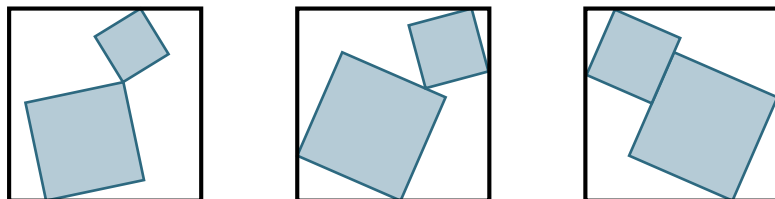
In het geval van twee rechthoeken is het niet moeilijk na te gaan dat een configuratie als in figuur 5a niet optimaal is. Je kunt zelf nagaan dat de optimale configuratie wordt bereikt als de vierkanten liggen als in figuur 1: een tegenspraak met onze aanname dat de beste situatie wordt bereikt als ten minste één vierkant zo ligt, dat zijn zijden niet evenwijdig zijn met de zijden van E.

We bekijken nu de andere gevallen. Bedenk dat je een rechthoekig trapezium (figuur 5c en d) en een vijfhoek met drie rechte hoeken (figuur 5e) kunt uitbreiden tot een rechthoekige driehoek op de manier zoals in figuur 6 is aangegeven (dit hebben we straks nodig).

Bekijk nu het deel waarin het vierkant zit dat een zijde heeft op de getrokken lijn (in figuur 5 is dit steeds vierkant II). Vanwege onze aanname dat



Figuur 3 De twee vierkanten (of één daarvan) in de configuratie links kun je vergroten, zodat de twee vierkanten elkaar raken zoals in de configuratie rechts.



Figuur 4 De drie verschillende manieren waarop de twee vierkanten elkaar kunnen raken.

we een optimale configuratie hebben, zouden we geen groter vierkant moeten kunnen plaatsen in dit deel.

Indien het deel geen rechthoekige driehoek is, breid het dan daartoe uit. We zitten nu met een situatie als in figuur 7. Het vierkant heeft een zijde die tegen de schuine zijde van de driehoek aanligt. Het grootste mogelijke vierkant waarbij dit zo is, is het vierkant dat in figuur 7 is getekend. Maar we zullen laten zien dat er een nog groter vierkant is dat volledig binnen de driehoek (en binnen ons eenheidsvierkant) ligt, namelijk het vierkant in figuur 8.

De schuine zijde van de driehoek is in werkelijkheid natuurlijk groter dan 1, maar voor de eenvoud van het bewijs verkleinen we de driehoek zo, dat de schuine zijde lengte 1 heeft. Verder noteren

we met b de lengte van de zijden van het vierkant in figuur 7. Er geldt:

$$\tan \alpha = \frac{x}{b}, \text{ dus } x = b \tan \alpha$$

en

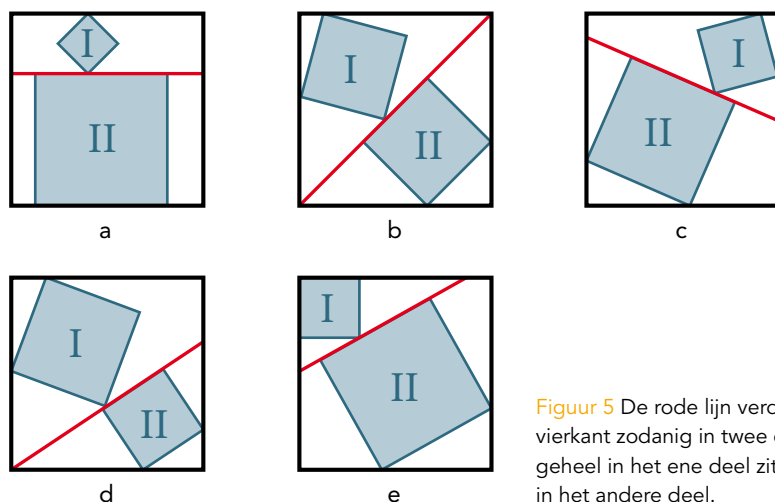
$$\tan \alpha = \frac{b}{y}, \text{ dus } y = \frac{b}{\tan \alpha}.$$

Dus

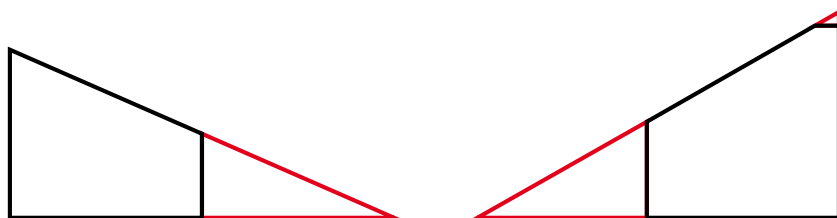
$$1 = b + x + y = b \left(1 + \tan \alpha + \frac{1}{\tan \alpha} \right),$$

ofwel

$$b = \frac{1}{1 + \tan \alpha + \frac{1}{\tan \alpha}} = \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{1 + \sin \alpha \cos \alpha}. \quad (*)$$



Figuur 5 De rode lijn verdeelt het eenheidsvierkant zodanig in twee delen, dat vierkant I geheel in het ene deel zit en vierkant II geheel in het andere deel.



Figuur 6 Uitbreiding tot rechthoekige driehoek.

De laatste gelijkheid kun je zelf met wat elementaire goniometrie nagaan.

In figuur 8 noteren we de lengte van de zijden van het vierkant met a . Hier geldt:

$$\cos \alpha = \frac{a}{x}, \text{ dus } x = \frac{a}{\cos \alpha}$$

en

$$\sin \alpha = \frac{a}{y}, \text{ dus } y = \frac{a}{\sin \alpha}.$$

Dus

$$1 = x + y = a \left(\frac{1}{\cos \alpha} + \frac{1}{\sin \alpha} \right),$$

ofwel

$$a = \frac{1}{\frac{1}{\cos \alpha} + \frac{1}{\sin \alpha}} = \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}. \quad (**)$$

De noemer in het rechterlid van (**) is kleiner dan de noemer in het rechterlid van (*):

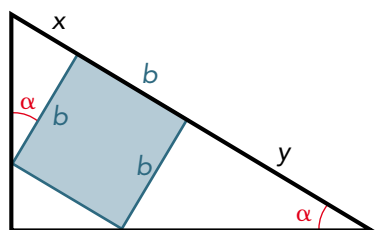
$$\sin \alpha + \cos \alpha < 1 + \sin \alpha \cos \alpha,$$

want

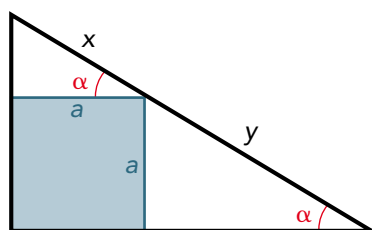
$$0 < (1 - \sin \alpha)(1 - \cos \alpha).$$

Het vierkant in de rechte hoek is dus *groter* dan het vierkant aanliggend aan de schuine zijde: een tegenspraak met onze aanname dat de configuratie waarbij ten minste één vierkant zo ligt, dat zijn zijden niet evenwijdig zijn met de zijden van E, optimaal is.

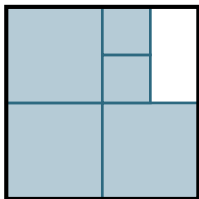
Met andere woorden: het vierkant in figuur 8 ligt optimaal. Rest nog de vraag: ligt dit vierkant ook geheel binnen het trapezium of de vijfhoek, als een van deze veelhoeken het uitgangspunt zou zijn?



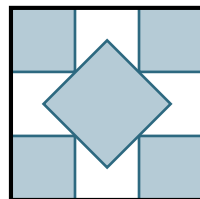
Figuur 7 De schuine zijde van de rechthoekige driehoek heeft lengte 1, dus $x + b + y = 1$.



Figuur 8 De schuine zijde van de rechthoekige driehoek heeft lengte 1, dus $x + y = 1$.



Figuur 9 De totale omtrek van de vijf vierkanten is gelijk aan 8. Deze configuratie is vermoedelijk optimaal.



Figuur 10 Een niet-optimale plaatsing van vijf vierkanten in een eenheidsvierkant. De totale omtrek van de vijf vierkanten is ongeveer 7,22.

Zo'n trapezium of vijfhoek is immers kleiner dan de driehoek die we ervan gemaakt hebben en het is natuurlijk niet de bedoeling, dat het vierkant daarbuiten steekt. Maar het zal je geen moeite kosten om in te zien dat aan deze voorwaarde wordt voldaan.

ALGEMENER Of Erdős dezelfde oplossing had als die die we hier hebben gegeven, weten we niet. Hij vond het namelijk niet de moeite waard om de oplossing te publiceren: te eenvoudig, volgens hem. Hij zette direct de stap naar een algemener vermoeden:

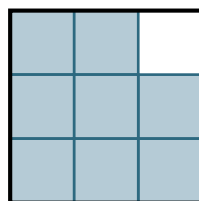
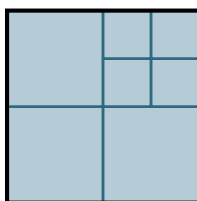
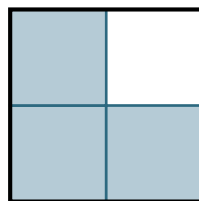
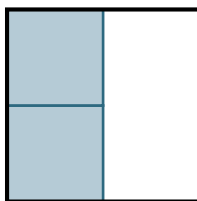
Als je $k^2 + 1$ vierkanten binnen het eenheidsvierkant plaatst, zonder dat ze overlappen, dan is de totale omtrek van die vierkanten ten hoogste $4k$.

Als je k^2 vierkanten binnen het eenheidsvierkant plaatst, zonder dat ze overlappen, dan krijg je een maximale totale omtrek van $4k$. Dit maximum wordt bereikt als je k^2 even grote vierkanten met zijden van $1/k$ neemt en er het eenheidsvierkant geheel mee opvult (zie het kader op pagina 15). Erdős vermoeden zegt dus dat je geen grotere omtrek kunt krijgen als je één vierkant méér mag plaatsen.

Voor $k = 1$ krijg je de situatie die we hebben besproken. Meteen al voor $k = 2$ wordt het probleem flink lastiger. Figuur 9 toont een (vermoedelijk) op-

timale oplossing: de omtrek van de vijf vierkanten samen is 8. De vijf vierkanten in figuur 10 zijn niet optimaal geplaatst. De vier vierkanten in de hoeken hebben zijden met een lengte van $\frac{1}{3}$ en het vierkant in het midden heeft zijden van lengte $\frac{1}{3}\sqrt{2}$. De totale omtrek is dus $4(4 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{2}) \approx 7,22$.

Er hangt een zweem van mysterie om dit geval. In 1974 schreef Erdős dat het geval $k = 2$ bewezen is door Donald J. Newman, refererend aan 'persoon-



lijke gesprekken' in plaats van een gepubliceerd artikel. Nu had Erdős honderden vrienden met wie hij over wiskunde praatte, dus erg vreemd hoeven we hier niet van op te kijken. Verwarring zaaide hij echter in 1994, twee jaar voor zijn dood. Erdős noemde het vierkanten-in-een-vierkant-vermoeden toen in een artikelje over enkele van zijn favoriete problemen in getaltheorie, combinatoriek en meetkunde. Hoewel Erdős' geheugen doorging voor onverwoestbaar, was hij Newman toch even vergeten, want hij schreef: 'Misschien is het geval $k = 2$ bewezen, maar voor zover ik weet, is het algemene geval een open probleem.'

Samen met Alexander Soifer keek Erdős ook naar het pakken van een willekeurig aantal, niet per se $k^2 + 1$, vierkanten in een eenheidsvierkant. Hun opzienbare resultaat: met $n + 1$ vierkanten binnen een eenheidsvierkant kun je altijd een grotere gezamenlijke omtrek krijgen dan met n vierkanten, mits n geen kwadraat is natuurlijk. Figuur 11 toont een serie configuraties voor $n = 2, 3, \dots, 10$. Inderdaad wordt de totale omtrek elke stap groter, behalve bij de overgang van $4 (= 2^2)$ naar 5 , en van $9 (= 3^2)$ naar 10 . ■

CAUCHY-SCHWARZ

Als je k^2 vierkanten binnen het eenheidsvierkant plaatst, zonder dat ze overlappen, dan is de grootst mogelijke totale omtrek $4k$. Dit maximum wordt bereikt als je k^2 even grote vierkanten met zijden van $1/k$ neemt en er het eenheidsvierkant geheel mee opvult. Dat een grotere totale omtrek niet haalbaar is, volgt uit het volgende speciale geval van de *ongelijkheid van Cauchy-Schwarz*:

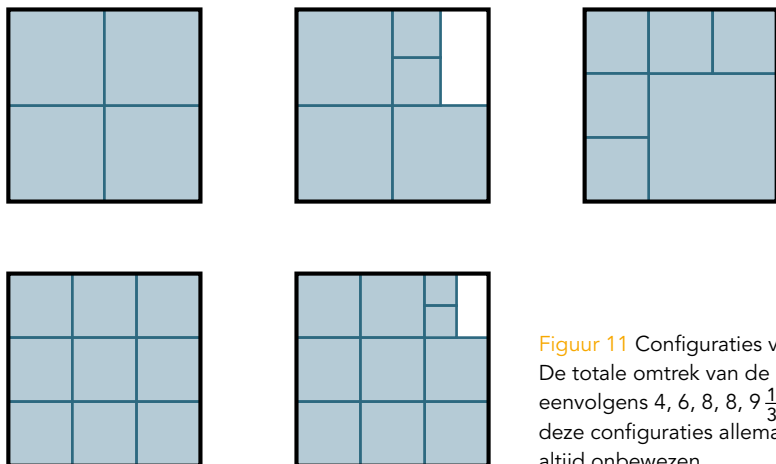
$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 \leq n(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)$$

waarbij de a_i 's willekeurige reële getallen zijn. (Je kunt de ongelijkheid afleiden door de linker- van de rechterkant af te trekken en het resultaat om te werken tot een som van kwadraten. Probeer het eerst voor $n = 3$ en $n = 4$.)

Noteer met a_1 tot en met a_{k^2} de lengtes van de zijden van de k^2 vierkanten die binnen het eenheidsvierkant zijn geplaatst. De kwadraten van die lengtes zijn de oppervlaktes, bij elkaar uiteraard ten hoogste 1, de oppervlakte van het eenheidsvierkant. In formulevorm: $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{k^2}^2 \leq 1$. Pas nu Cauchy-Schwarz toe:

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_{k^2})^2 \leq k^2.$$

De som van de zijden van de k^2 vierkanten is dus ten hoogste gelijk aan k , dus de som van de omtrekken is ten hoogste $4k$.



Figuur 11 Configuraties voor $n = 2, 3, \dots, 10$. De totale omtrek van de n vierkanten is achtereenvolgens $4, 6, 8, 8, 9\frac{1}{3}, 10, 10\frac{2}{3}, 12, 12$. Of deze configuraties allemaal optimaal zijn, is nog altijd onbewezen.

Hier zie je het hoofdkantoor
van Pythagoras in Amsterdam.
Links is de ingang. Weet jij
hoe je de uitgang bereikt?



De spelregels
Je mag over alle vloeren lopen en de (rol)trappen, de ladders en de lift gebruiken. Je mag niet over hekken klimmen en je mag natuurlijk ook niet jezelf tussen de planten doorwringen. De oplossing staat in het volgende nummer.

Je mag over alle vloeren lopen en de (rol)trappen, de ladders en de lift gebruiken. Je mag niet over hekken klimmen en je mag natuurlijk ook niet jezelf tussen de planten doorwringen. De oplossing staat in het volgende nummer.



Binnenkort dient de langste dag zich aan. Op 21 juni om precies te zijn. Een mooi moment om je af te vragen hoe het komt dat je in de winter juist in het donker naar school fietst en de dag dan aan het eind van de middag alweer is afgelopen. In dit artikel legt Aad Goddijn, auteur van het Zebraboekje *De Ster van de dag gaat op en onder*, uit hoe je daglengtes kunt berekenen.

■ door Aad Goddijn

DE KORTSTE DAG GAAT SNEL VOORBIJ

Daglicht komt van de zon. In Nederland komt de zon op vanuit het oosten en gaat via het zuiden naar het westen; de zon beweegt van links naar rechts. In Nieuw-Zeeland is dat gedeeltelijk andersom; de zon gaat daar ook van oost naar west, maar via het noorden, dus van rechts naar links. Op en dicht bij de evenaar tref je tijdens onze zomer de situatie van Nieuw-Zeeland, en tijdens onze winter die van Nederland.

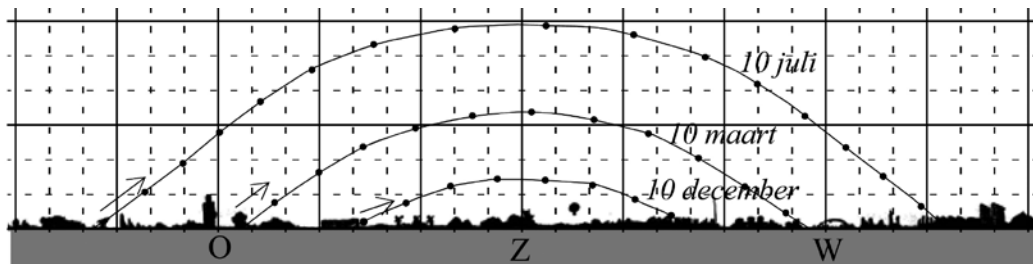
Om tot een nauwkeuriger beeld te komen, bekijken we hoe de zon langs de hemel beweegt, gezien zoals in Nederland. In figuur 1 zie je dagbanen van de zon, zoals je ze op 10 december, 1 maart en 30 augustus zou kunnen waarnemen. De stippen markeren de hele uren.

Het lijkt er op alsof de zon elk etmaal (24 uur) een cirkelvormige baan beschrijft rond een middelpunt dat onder de horizon in het zuiden ligt.

De zon is een van de vele sterren in het heelal.

Tegenwoordig schat men het aantal sterren in het zichtbare deel van het heelal op $5 \times 10^{20} = 500.000.000.000.000.000$. Met het blote oog zie je er overdag geen een, maar met een goede kijker kan dat wel en zou je zelfs kunnen vaststellen dat de sterren in de loop van de dag aan de zuidelijke hemel net zulke banen beschrijven als de zon doet.

De foto in figuur 2 is 's nachts gemaakt. De camera stond vast opgesteld, in noordelijke richting. De lens stond urenlang open. Je ziet dat deze sterren op de foto een stuk van een cirkel als spoor nalaten. De cirkels waarop die sporen liggen, hebben een gemeenschappelijk middelpunt, dat boven de noordelijke horizon ligt. De draaiing van het geheel is tegen de klok in. Dichtbij dat middelpunt staat een ster die bijna stil staat, de welbekende poolster.



Figuur 1



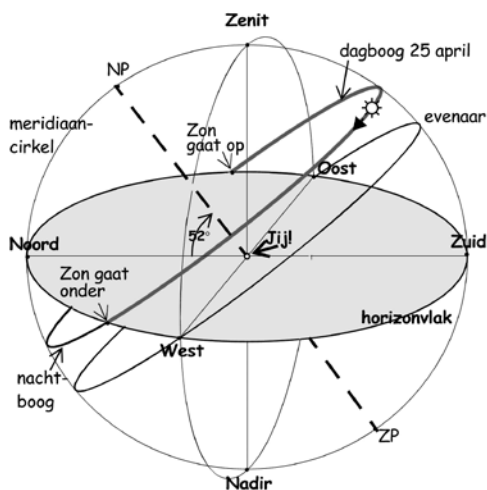
Figuur 2

AARDAS EN HEMELBOL Stel je nu voor dat je in zuidelijke richting kijkt. Je ziet voor je de rechts-draaiende bogen die de zon op één dag maakt om het vaste middelpunt dat onder de horizon ligt. Wees je bewust dat ook de sterren in het zuiden zulke bogen om datzelfde punt maken. Stel je nu tegelijkertijd voor hoe achter je de sterren – al zie je ze niet – ook een cirkelbeweging maken (met dezelfde draairichting), om een punt dat boven de noordelijke horizon ligt. De hele sterrenzwerm samen met de zon draait dagelijks om de as die de twee stilstaande punten zuid- en noordpool verbindt. De draaiing die je ziet, ontstaat in werkelijkheid doordat de piepkleine aarde met jou erop zelf om zijn eigen noordpool-zuidpoolas draait. Voor onze daglengteberekening denken we voor het gemak echter steeds vanuit het aardse standpunt. De as van onze draaiende hemelbol loopt dan door je eigen standpunt heen en is evenwijdig aan de draaias van de aarde.

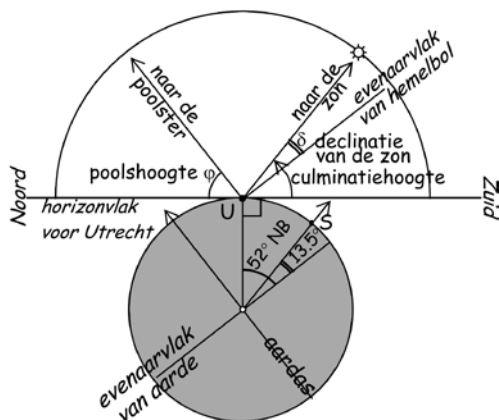
Ooit zullen we dit model nader moeten bijstellen, vooral wat betreft de langzame jaarlijkse beweging die de zon toch ook wel maakt ten opzichte van de sterren, maar voor het begrijpen van de beweging van de zon op één dag is het een goed beeld.

Dit model zie je in figuur 3. Het laat zien dat de dagelijkse baan van de zon gezien wordt als een regelmatige cirkelbeweging, waarbij de cirkel om de poolas loopt, en wel in een vlak loodrecht op die as. In het voorbeeld voor 25 april zie je dat dát vlak niet door het middelpunt van de bol gaat. De werkelijke afstandsverhoudingen zie je niet. Een *schaalmodel* ziet er bijvoorbeeld zo uit: maak de aarde zo groot als je duimnagel, dan staat de zon ongeveer op fietswielgrootte op zo'n 100 meter van je af en tref je de eerstvolgende ster ergens in China.

Het middelpunt van de bol in ons model is waar jij, de waarnemer, staat. Het grijze horizonvlak kun je opvatten als de grond onder je voeten. Denk je in dat je met je gezicht naar het zuiden staat. De zon zie je als bewegend punt langs de bol gaan. Stel vast dat de zon aan de oostkant opkomt, hoog voor je langs gaat van links naar rechts, in het zuiden op zijn hoogst is, en dan aan de westkant ondergaat. Op- en ondergangspunten zijn voor de dagboog van 25 april aangegeven. Het stuk boven het horizonvlak heet de dagboog. De hoofdvraag is: hoe lang doet de zon over het afleggen van die dagboog?



Figuur 3



Figuur 4

POOLSHOOGTE, DECLINATIE EN CULMINATIEHOOGTE

In figuur 4 zie je de bovenhelft (halve cirkel) van de hemelbol in zijaanzicht op het moment dat de zon door het zuiden gaat. Punt *U* is Utrecht; neem aan dat jij daar staat. Utrecht ligt op 52° noorderbreedte, dat is met een hoek midden in de aarde aangegeven. De lijn vanuit *U* die richting poolster loopt, is evenwijdig aan de aardas. Die lijn maakt een hoek ϕ met het horizonvlak; die hoek heet de *poolshoogte*.

Opgave 1. Toon aan dat de poolshoogte gelijk is aan de noorderbreedte. In je redenering heb je een evenwijdigheid en de hoek van 90° bij *U* nodig.

Vanuit het centrum van de aarde en vanuit *U* lopen evenwijdige pijlen richting zon. Op 25 april maken die een hoek van $13,5^\circ$ met het evenaarvlak van de aarde en het hemelevenaarvlak. Punt *S* is het plaatsje Sokoto in Nigeria. Dat ligt op $13,5^\circ$ noorderbreedte precies, ver ten zuiden van Utrecht. Op dit moment (zuiddoorgang van de zon in Utrecht en Sokoto op 25 april) staat de zon exact recht boven de hoofden van de bewoners van Sokoto!

De hoek tussen de lijn naar de zon en het evenaarvlak (van de aarde of van de hemelbol, dat is hetzelfde) heet de *declinatie* δ van de zon. De declinatie hangt af van de datum, maar niet van de plaats waar het om gaat. Over het jaarlijkse verloop van de declinatie vast dit: bij het begin van de vier seizoenen (rond 21 december, maart, juni en september) is de declinatie achtereenvolgens $-23,4^\circ$, 0° , $23,4^\circ$, 0° . De waarden bij winter- en zomerstart zijn de extreme waarden van de declinatie en daar-

tussen gaat de declinatie een keer op en neer. Hoe die op en neergang in elkaar zit, is niet eenvoudig, het is niet 'gewoon een sinus'. Voor dit moment: op 25 april is de declinatie $13,5^\circ$.

Als de zon precies in het zuiden staat, staat de zon ook het hoogst boven de horizon. De hoek tussen zonrichting en zuidelijke horizon op dat moment heet *culminatiehoogte*.

Opgave 2. Toon aan: $\text{culminatiehoogte} = 90^\circ - \text{noorderbreedte} + \text{declinatie}$.

Stel vast dat de formule goed werkt voor Sokoto op 25 april. Op het zuidelijk halfrond is de noorderbreedte een negatief getal. Ook dan levert de formule de hoek ten opzichte van de zuidelijke horizon, al kan die meer dan 90° zijn. Voor de culminatiehoogte kies je dan misschien liever de hoek aan de noordkant, de zonzijde.

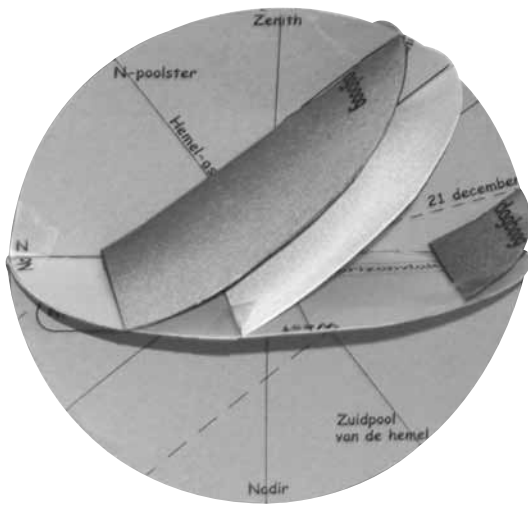
Opgave 3. Bepaal de extremen van de culminatiehoogte voor Utrecht, Sokoto en de Falklandeilanden (52° zuiderbreedte). Pas op met Sokoto...

FORMULE VOOR DE RUWE DAGLENGTE

Voor de bepaling van de daglengte moeten we nu de dagboog weer in het spel brengen. Daarmee wordt de daglengtevraag een ruimtemeetekundig probleem.

Voor je voorstellingsvermogen is het goed om de belangrijkste cirkels van figuur 3 uit stevig papier te knippen en met sleuven in elkaar te zetten: de horizoncirkel, de zogenaamde meridiaancirkel Zuid-Zenit-Noord-Nadir en de cirkel waar de dagboog een deel van is. Voorgedrukte bouwplaten met alle namen in figuur 3 staan op internet: www.epsilon-uitgaven.nl/Z34.php.

In figuur 5 zie je de voorgedrukte bouwplaten in elkaar gezet. Drie dagbogen (winter, late lente, zomer) als voorbeeld; ze liggen op evenwijdige vlakken, want die vlakken staan loodrecht op de hemelas. De middelpunten van de cirkels van die dagbogen liggen uiteraard ook op die as. Belangrijk: de snijlijn van de dagcirkel en het meridiaanvlak is een middellijn van de dagcirkel. Stel ook vast dat de straal van de dagcirkel meestal (wanneer niet?) kleiner is dan die van de meridiaancirkel.



Figuur 5

We concentreren ons nu op één dagcirkel als voorbeeld, die van 25 april, dus bij declinatie $\delta = 13,5^\circ$ en nog steeds poolhoogte $\phi = 52^\circ$, maar we rekenen met δ en ϕ omdat we een algemene formule willen hebben.

In figuur 6 ligt de dagcirkel naast de meridiaancirkel, maar zó dat de middellijn en de snijlijn van de meridiaancirkel en dagcirkel nog wel dezelfde richting in de figuur hebben. Ons doel is een for-

mule die de daglengte uitdrukt in δ en ϕ .

Op de meridiaancirkel zie je de dagcirkel van opzij als de lijn $LKMC$. Diezelfde lijn staat ook rechts in de tekening van de werkelijke vorm van de dagcirkel. Let nu op ψ (de hoek van de halve dag-boog), die heeft alles met de daglengte te maken.

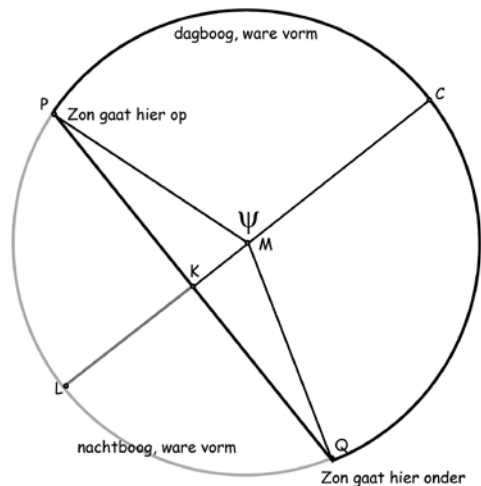
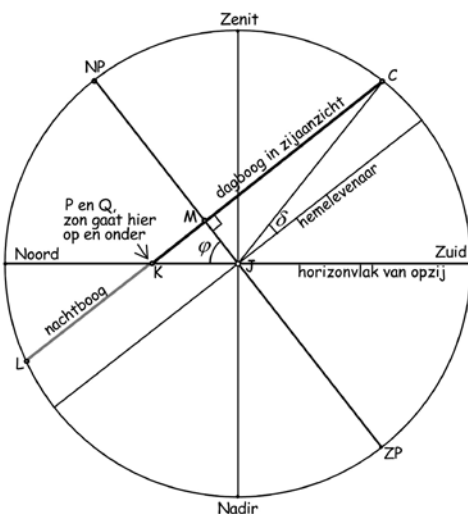
Omdat de zon met constante snelheid de dagcirkel doorloopt en de dagcirkel zelf in 24 uur wordt doorlopen, weten we:

$$\text{daglengte} = \frac{\text{lengte dagboog}}{\text{omtrek dagcirkel}} \cdot 24 \text{ uur} =$$

$$\frac{\text{hoek op boog } PCQ}{360^\circ} \cdot 24 \text{ uur} = \frac{2\psi}{360^\circ} \cdot 24 \text{ uur}.$$

Nu hoek ψ nog bepalen. Daar gaan we natuurlijk punt K bij gebruiken. KM/MP is de cosinus van $180^\circ - \psi$ en dus gelijk aan $-\cos \psi$. Omdat $MP = MC$ kunnen we nu overstappen naar de meridiaancirkel en daar KM/MC berekenen. KM en MC zijn daar zijden van twee rechthoekige driehoekjes met gemeenschappelijke zijde MJ . Een van de driehoekjes bevat de hoek ϕ . In het andere driehoekje ken je de hoek bij C , die is δ !

21



Figuur 6 Links: meridiaancirkel met dagcirkel in zijaanzicht. Rechts: dagbaan van de zon met dagboog en nachtboog.

Opgave 4. Voltooi nu zelf de berekening, zodat je uiteindelijk deze formule vindt:

$$\cos \psi = -\tan \phi \cdot \tan \delta.$$

Opgave 5. Bereken de daglengte van 25 april in uren en minuten. Bereken ook de daglengtes voor 21 december, 21 maart, 21 juni en 21 september in jouw woonplaats.

De berekeningen die je hebt gedaan, zouden heel nauwkeurig zijn als je voor zonsopgang en zonsondergang de doorgang van het midden van de zon door het horizonvlak neemt. Eigenlijk zou je de bovenkant van de zon moeten kiezen en dan is er ook nog de straalbreking door de atmosfeer waardoor de zon – schijnbaar – wordt opgetild. Daardoor is de werkelijke daglengte een paar minuten langer. Aan het eind van dit artikel geven we nog wat meer informatie hierover.

TABEL VAN GREENWICH In werkelijkheid draait de sterrenzwerm zeer constant rond, omdat de draaiing van de aarde om zijn as zeer constant is. Maar de zon beweegt jaarlijks ook nog, en niet met constante snelheid, ten opzichte van de sterren over een cirkel, die een hoek van $23,4^\circ$ met de hemelevenaars maakt. Dit veroorzaakt zowel de variatie van de declinatie als het feit dat de zon niet 's middags op een vaste tijd door het zuiden gaat.

Als je voor één plek op de wereld een jaaroverzicht zou hebben van de declinaties en de afwijkingen van de doorgangstijden van de zon door het zuiden, dan kun je voor elke andere plek nu daglengte én zonsopgangs- en zonsondergangstijden berekenen. Die tijden en de declinaties kunnen nauwkeurig gemeten worden met een zogenaamde *meridiaankijker*, die alleen in het meridiaanvlak kan draaien. Voor het Koninklijk Observatorium van Greenwich, gelegen op de nulmeridiaan bij Londen, is op pagina 33 een tabel met stappen van 10 dagen gegeven.

VOORBEELD ZONSOPGANG Neem 5 augustus in Helsinki; dat is $60,2^\circ$ noorderbreedte, $24,9^\circ$ oosterlengte. Eerst berekenen we de daglengte. De declinatie van de zon haal je uit de tabel op pagina

33, via interpolatie tussen 30 juli en 9 augustus; je vindt $16,7^\circ$. Er geldt:

$$\cos \psi = -\tan 60,2^\circ \times \tan 16,7^\circ = -0,5238,$$

dus $\psi = 121,59^\circ$. De ruwe daglengte is $2 \times 121,59^\circ/360^\circ \times 24$ uur = 16,2121 uur, dus 16 uur en 13 minuten.

Nu de zuiddoorgang van de zon. In de tabel vind je 12.05 voor Greenwich. Vanwege de oosterlengte van $24,9^\circ$ gaat de zon in Helsinki eerder door het zuiden dan in Greenwich, namelijk $24,9^\circ/360^\circ \times 24$ uur, dus 1 uur 40 minuten eerder. De zuiddoorgang in Helsinki heeft op de Universal Time (UT) klok van Greenwich dus plaats om $12.05 - 1.40 = 10.25$ uur. Helsinki heeft op 5 augustus middeneuropese zomertijd, dat is UT + 3. Volgens de klok in Helsinki gaat dus om 13.25 uur de zon door het zuiden.

Spread op op- en ondergangstijden te bepalen de daglengte in gelijke helften om de zuiddoorgang. Resultaat: zonsopgang is om 5.18 uur, zonsondergang om 21.32 uur.

Opgave 6. Toon ook aan dat de zon die nacht in Helsinki niet verder dan $12,5^\circ$ onder de horizon komt. (Je blijft dus 's nacht licht zien boven de noordelijke horizon.)

ZEBRABOEKJE In het boekje *De Ster van de dag gaat op en onder* vind je veel achterinformatie en methoden om tot een nauwkeuriger daglengtebepaling en op- en ondergangstijden te komen. Bijvoorbeeld hoe je met een formule om kunt gaan met atmosferische straalbreking (die maakt onze dagen vooral 's winters aanzienlijk langer), hoe de zon jaarlijks langs de dierenriem trekt, hoe je daarmee nauwkeuriger de declinatie kunt berekenen, en hoe het zit met de geheimzinnige achttvormige jaarlus van de zon die je zou zien als je gedurende een jaar om 12 uur exact in dezelfde richting een filmbeeldje schiet. Zie www.epsilon-uitgaven.nl/Z34.php; haal daar de voorgedrukte bouwplaten op. ■

Op YouTube staat een video van NumberPhile die heel wat discussie heeft losgemaakt (zie <http://goo.gl/WuYKW8>). In de video wordt 'uitgelegd' dat $1 + 2 + 3 + 4 + \dots = -\frac{1}{12}$. Is dit nu waar of niet? Paul Levrie schreef in de vorige *Pythagoras* over de betekenis en achtergronden van deze formule. In dit artikel zullen we proberen zo dicht mogelijk in de buurt te komen van een goede definitie om een dergelijke som een zinvolle interpretatie te geven.

■ door Klaas Pieter Hart

ONEINDIG VEEL GETALLEN OPTELLEN

Is het optellen van oneindig veel getallen onmogelijk? Dat hangt er maar vanaf wat je eronder verstaat. Het is niet moeilijk om te accepteren dat $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$ gelijk is aan 2. Het sommeren van rijen als $1 + 2 + 3 + \dots$ lijkt echter onzinnig.

Voor we bekijken hoe we *systematisch* oneindige sommen kunnen definiëren, maken we onderscheid tussen nuttige en niet-zo-nuttige definities. Stel, we hebben een manier bedacht om de som te bepalen van een oneindige rij getallen. Deze optelling moet dan op zijn minst aan de volgende drie eisen voldoen.

Voor twee rijen $a_0, a_1, a_2, \dots$ en $b_0, b_1, b_2, \dots$ waarvoor volgens de door ons bedachte definitie geldt:

$$a_0 + a_1 + a_2 + \dots = s,$$

en

$$b_0 + b_1 + b_2 + \dots = t,$$

willen we dat ook geldt:

1. $(a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \dots = s + t$;
2. $ka_0 + ka_1 + ka_2 + \dots = ks$, voor elke constante k ;
3. $a_1 + a_2 + a_3 + \dots = s - a_0$.

De derde eigenschap wordt in het filmpje van NumberPhile impliciet een aantal malen gebruikt.

Nu gaan we een aantal methoden bekijken die op een of andere manier betekenis geven aan oneindige sommen. Daarbij willen we dat elke methode op zijn minst aan bovenstaande drie eisen voldoet.

SOMMEERBARE RIJEN De eerste manier is onomstreden: dit is de methode die ook op de middelbare school wordt gebruikt. Het idee is dat je aan de sommen van de beginstukken van $a_0 + a_1 + a_2 + \dots$ moet kunnen zien wat de uitkomst is. De methode is als volgt.

- Maak een nieuwe rij getallen: voor elke n is s_n de som van het beginstuk van de rij tot en met a_n , dus $s_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n$.
- Bekijk of de limiet $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ van die nieuwe rij bestaat.

- Zo ja, dan is de waarde van $a_0 + a_1 + a_2 + \dots$ gelijk aan de limiet $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$.
- Zo nee, dan heeft $a_0 + a_1 + a_2 + \dots$ *geen* waarde.

Een rij waaraan op deze manier een som is toe te kennen heet *sommeerbaar*. Bijvoorbeeld, als $a_n = 2^{-n}$, dan is

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} = 2 - 2^{-n}.$$

Er geldt $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 2$, dus

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 2.$$

Bij de rij $1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots$ krijgen we als s_n telkens $1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots$. Deze rij heeft geen limiet, dus $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ is *niet* gedefinieerd.

Ga zelf na dat deze methode aan onze drie eisen voldoet.

GEMIDDELDEN De wiskunde is vol van rijen die ‘eigenlijk’ sommeerbaar zouden moeten zijn en waarvan de som ‘eigenlijk’ bekend is, maar waarvoor bovenstaande methode niet werkt. We krijgen een verfijning van de vorige methode als we naar de *gemiddelden* van de beginstukken s_n gaan kijken. Bepaal eerst voor elke n het gemiddelde

$$S_n = \frac{s_0 + s_1 + \dots + s_n}{n+1}.$$

Ga vervolgens na of $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ bestaat. Zo ja, dan is $a_0 + a_1 + a_2 + \dots$ *per definitie* gelijk aan S , en zo niet, dan is de som niet gedefinieerd. In dit geval noemen we rij $a_0, a_1, a_2, \dots$ *gemiddeld sommeerbaar*.

Wat je nu met wat puzzelen kunt nagaan, is dat deze methode voor de sommeerbare rijen dezelfde som oplevert. Anders gezegd: een sommeerbare rij is ook gemiddeld sommeerbaar en de ‘middelsom’ is gelijk aan de som. Het is belangrijk om na te gaan dat nog steeds aan onze eisen voldaan is.

Voor de rij $1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots$ ziet de rij S_n -en er als volgt uit: $1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \dots$ (bedenk zelf een formule). Deze rij heeft een limiet gelijk aan $\frac{1}{2}$. De ‘middelmethode’ kent aan deze rij dus de som $\frac{1}{2}$ toe. Dit komt in de video uit de lucht vallen.

Je kunt iets meer zeggen: elke methode die aan

de eisen uit het begin voldoet, *moet* aan $1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots$ de som $\frac{1}{2}$ toekennen. Als je a_0 weghaalt, houd je de oorspronkelijke rij over, maar met een minteken. De tweede en derde eis geven nu samen dat voor de som S moet gelden dat $-S = S - 1$. Hieruit volgt dat $S = \frac{1}{2}$.

In de video komt ook de som $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots$ voor. De s_n -en daarvan zijn: $1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, \dots$ en de gemiddelden S_n zijn $1, 0, \frac{2}{3}, 0, \frac{3}{5}, 0, \frac{4}{7}, 0, \dots$. Die rij heeft geen limiet, dus de middelmethode werkt niet voor deze som.

Overigens, voor elke methode die aan de drie eisen voldoet, ligt de som $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots$ wel vast. We noemen de som t , schrijven deze som twee keer onder elkaar op (de tweede keer met een extra beginterm 0) en tellen deze twee sommen bij elkaar op:

$$\begin{array}{r} t = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - \dots \\ t = 0 + 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots \\ \hline 2t = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots \end{array}$$

We hadden al gezien dat $S = \frac{1}{2}$, dus $2t = \frac{1}{2}$, ofwel $t = \frac{1}{4}$. Maar: dit mag alleen *als* we een sommatiemethode hebben die de som $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots$ aankan, en die hebben we nog niet. Op dit punt blijft de video volledig in gebreke: deze methode geven ze niet.

MACHTREEKSEN We introduceren nu een variabele x met $|x| < 1$ en vervangen de som $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ door de volgende:

$$1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \dots$$

De rij van partiële sommen $s_n(x)$ is gelijk aan:

$$s_n(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-x)^n = \frac{1 - (-x)^{n+1}}{1 + x}.$$

De limiet van de uitdrukking

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - (-x)^{n+1}}{1 + x} = \frac{1}{1 + x}$$

bestaat, omdat $|x| < 1$. Als we in de laatste formule $x = 1$ invullen, komt er $\frac{1}{2}$ uit.

Als we de linkerformule voor de partiële som-

men $s_n(x)$ differentiëren, krijgen we

$$t_n(x) = -1 + 2x - 3x^2 + 4x^3 + \dots + (-1)^n nx^{n-1}$$

en als we de rechterformule voor voor $s_n(x)$ differentiëren, vinden we

$$t_n(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} + (-1)^n \frac{(n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1+x)^2}.$$

Deze twee formules zijn aan elkaar gelijk. Als je voor $|x| < 1$ de limiet voor $n \rightarrow \infty$ neemt, dan volgt:

$$1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 - 6x^5 + \dots = \frac{1}{(1+x)^2}.$$

(We gaan er hier van uit dat het nemen van deze limiet geen problemen oplevert: er zit hier wiskundig nog heel wat achter verstopt!) Als we ten slotte $x = 1$ invullen, krijgen we

$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots = \frac{1}{4},$$

zoals we van een goede sommatiemethode willen.

Deze voorbeelden illustreren onze derde methode: bekijk of de rij $a_0, a_1x, a_2x^2, a_3x^3, \dots$ voor elke x met $|x| < 1$ sommeerbaar is; noem de resulterende somfunctie dan $s(x)$ en probeer $\lim_{x \uparrow 1} s(x)$ te bepalen. Als die limiet bestaat, dan wordt dat de definitie van de som $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots$, en anders blijft de som ongedefinieerd.

Ook deze methode voldoet aan onze eisen, dus als we met deze sommatiemethode werken, zijn de eerdere manipulaties legaal. Rijen waarop deze methode toepasbaar is, worden wel *Abel-sommeerbaar* genoemd, naar de Noorse wiskundige Niels Henrik Abel, die bewees dat deze methode in het bijzonder voor sommeerbare rijen werkt.

In de video wordt de gewenste som met een beroep op onze drie eisen uit de waarde van t afgeleid. Als we deze som even u noemen en er t van aftrekken, dan volgt

$$\begin{array}{r} u = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + \dots \\ t = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - \dots \\ \hline u - t = \quad 4 \quad + 8 \quad + 12 \quad + \dots \end{array}$$

We zien dat $u - t = 4u$, en daaruit volgt $u = -\frac{1}{12}$. Dit is voor ons nog niet legaal, omdat alle methoden

die we tot nu toe gebruikt hebben niet toepasbaar zijn op de som $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots$.

KLOPT HET DAN TOCH NIET? OF WEL?

Er bestaat een sommatiemethode die alle drie de sommen aankan en die ook nog aan onze eisen voldoet; die leidt dus onverbiddeijk tot $s = \frac{1}{2}$, $t = \frac{1}{4}$ en $u = -\frac{1}{12}$. Echter, die methode vergt kennis van Riemann's *zeta-functie*, dat is de functie waarover de Riemann-hypothese, het beroemde miljoendollar-probleem, gaat. Je kunt hier meer over lezen in het boek *De Riemann-hypothese – een miljoenenprobleem* van Roland van der Veen en Jan van de Craats (Epsilon-reeks 69). Ons probleem staat op bladzijde 51.

Op de website van *Scientific American* schreef Evelyn Lamb een lezenswaardig artikel over de oneindige som $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \dots$ (zie <http://goo.gl/jyR0r3>). ■

“Tot op heden is de theorie van oneindige reeksen erg slecht onderbouwd. Men past alle operaties toe op oneindige reeksen, alsof ze eindig zijn. Maar is dat wel toegestaan? Ik denk van niet. Waar is aangetoond dat je de afgeleide van een oneindige reeks verkrijgt door elke term afzonderlijk te differentiëren? Niets is makkelijker dan het geven van voorbeelden waarvoor dit niet geldt.”

Niels Henrik Abel (1802-1829)

Op 14 maart (pi-dag!) vond de tweede ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade (NWO) plaats, waaraan 941 leerlingen meededen op een universiteit bij hen in de buurt. De eerste opgave die middag was een telprobleem. Een opgave waar je pas wat mee kon zodra je een keuze had gemaakt volgens welke systematiek je ging tellen. Welke keuze dat nou precies was, maakte helemaal niet uit. Als je maar een keuze maakte!

■ door Quintijn Puite

RODE EN BLAUWE KNIKKERS



Opgave 1 (NWO, tweede ronde 2014).

Brenda vult knikkerzakjes vanuit een onuitputtelijke voorraad rode en blauwe knikkers. In elk zakje stopt ze meer rode dan blauwe knikkers en in elk zakje komen niet meer dan 25 knikkers. Zo kan ze bijvoorbeeld een zakje maken met 6 rode en 2 blauwe knikkers of een zakje met 1 rode knikker en 0 blauwe knikkers. Hoeveel verschillend gevulde zakjes kan ze in totaal maken?

mogelijkheden volgens een bepaalde systematiek te ordenen. We kunnen bijvoorbeeld kijken hoeveel zakjes er zijn met in totaal 8 knikkers. Behalve 6 rood en 2 blauw die we al hadden genoemd, is natuurlijk ook nog 7 rood en 1 blauw mogelijk, en zelfs ook 8 rood en 0 blauw. En we kunnen ook nog de andere kant op: 5 rood en 3 blauw, en dan komt... Nee, niet 4 rood en 4 blauw, want dan wordt niet meer voldaan aan de voorwaarde dat er meer rode dan blauwe knikkers moeten zijn in elk zakje. Al met al vinden we 4 verschillende zakjes met 8 knikkers.

NEGEN KNIKKERS Hoe zit dat als we naar zakjes kijken met in totaal 9 knikkers? We zetten de mogelijkheden even op een rij: 9 rood en 0 blauw; 8 rood en 1 blauw; 7 rood en 2 blauw; 6 rood en 3 blauw; 5 rood en 4 blauw. Dat zijn 5 mogelijke-

In de opgave worden al twee verschillend gevulde zakjes genoemd: één met 6 rode en 2 blauwe knikkers en één met 1 rode knikker en 0 blauwe knikkers. De vraag is hoeveel er in totaal zijn, rekening houdend met de twee eisen die worden genoemd. Om dit goed te kunnen tellen, is het handig om alle

totaal aantal knikkers	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
aantal mogelijkheden	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6

Tabel 1

aantal rode knikkers	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
aantal mogelijkheden	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Tabel 2

aantal blauwe knikkers	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
aantal mogelijkheden	25	23	21	19	17	15	13	11	9	7	5

Tabel 3



den. Zou je met 10 knikkers dan op 6 mogelijkheden uitkomen? Nee, dan zijn er nog steeds 5 mogelijkheden, namelijk 10 rood en 0 blauw; 9 rood en 1 blauw; 8 rood en 2 blauw; 7 rood en 3 blauw; 6 rood en 4 blauw. Op deze manier kunnen we alle mogelijke totalen langsgaan, zie tabel 1 onderaan deze pagina.

Nu moeten we de aantallen mogelijkheden nog bij elkaar op tellen. Dat kunnen we stap voor stap doen, maar het kan sneller. We zien namelijk twee maal de getallen 1 tot en met 12 (en daarnaast nog het getal 13). De som van twee maal de getallen 1 tot en met 12 vinden we door deze twee rijtjes handig onder elkaar op te schrijven en vervolgens bij elkaar op te tellen:

1	2	3	...	11	12
12	11	10	...	2	1 +
13	13	13	...	13	13

Onder de streep staat twaalf maal 13, dus samen met het losse aantal 13 van hierboven zien we dat het totaal aantal mogelijkheden gelijk is aan $12 \times 13 + 13 = 13 \times 13 = 169$. Daarmee hebben we het probleem opgelost.

TWEE ANDERE SYSTEMATIEKEN We hebben zojuist per totaal aantal knikkers (variërend van 1 tot en met 25) gekeken hoeveel zakjes er zijn met dat aantal knikkers en vervolgens al die deel-

antwoorden opgeteld. Dit is een voorbeeld van een telsystematiek. Maar er zijn nog meer voor de hand liggende telsystematieken bij deze opgave. Je zou het probleem bijvoorbeeld ook per aantal rode knikkers kunnen bekijken. Hoeveel zakjes met 6 rode knikkers zijn er? Het aantal blauwe knikkers moet dan variëren tussen de 0 en de 5; dat zijn 6 mogelijkheden. En met 13 rode knikkers kan het aantal blauwe knikkers variëren tussen de 0 en 12; dat zijn 13 mogelijkheden. Merk op dat dit maar net goed gaat: met 13 rode en 12 blauwe knikkers zit je al op het maximale aantal knikkers per zakje. Daarom zijn er met 14 rode knikkers wat minder mogelijkheden: nu kan het aantal blauwe knikkers nog maar variëren tussen de 0 en 11; dat zijn 12 mogelijkheden. Al met al vinden we tabel 2.

We zien dat in de rij van het aantal mogelijkheden nog steeds de getallen 1 tot en met 12 twee keer staan, naast nog eens het getal 13. Dat de volgorde anders is, maakt natuurlijk niet uit; net als bij de vorige systematiek vinden we als uitkomst 169.

Kunnen we het dan ook per aantal blauwe knikkers bekijken? Geen probleem. Met 0 blauwe knikkers kan het aantal rode variëren van 1 tot en met 25; met 1 blauwe knikker kan het aantal rode variëren van 2 tot en met 24; dat zijn 23 mogelijkheden. Zo kunnen we doorgaan en vinden we tabel 3.

We moeten nu dus uitrekenen hoeveel $25 + 23 + \dots + 3 + 1$ is. Dit zijn 13 termen. (Als je dat niet direct ziet, tel dan maar 1 bij elke term op, dan krijg

12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
6	7	7	8	8	9	9	10	10	11	11	12	12	13

12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
12	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

11	12	13	14	...
3	1	-	-	...



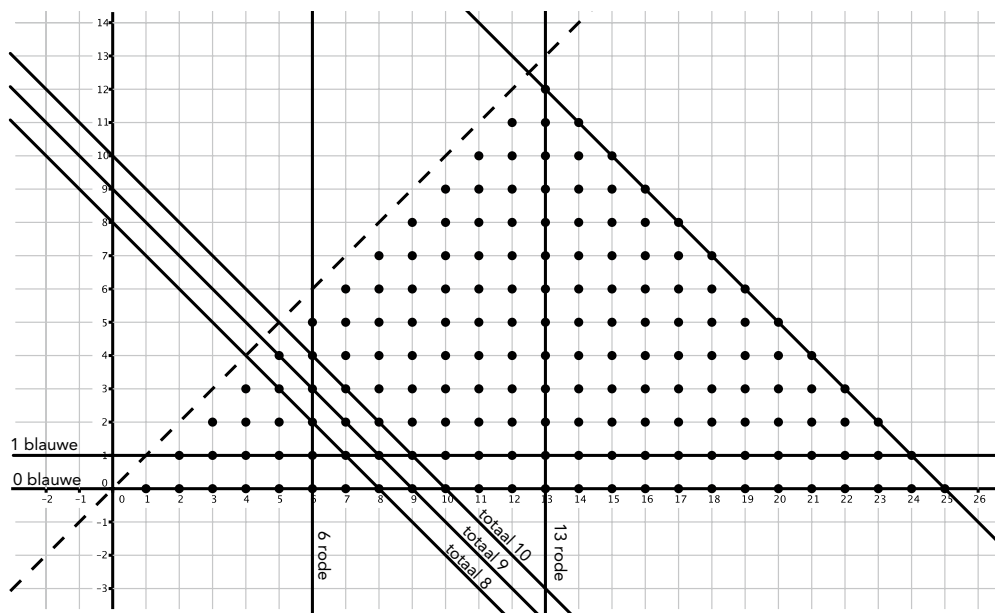


je $26 + 24 + \dots + 4 + 2$. En deel vervolgens elke term door 2, dan staat er $13 + 12 + \dots + 2 + 1$. Dat zijn overduidelijk 13 termen. Een andere manier om in te zien dat dit 13 termen zijn: je springt van 1 naar 25 in sprongen van 2; dat zijn 12 sprongen. En dus moet het om 13 termen gaan, één meer dan het aantal sprongen.) Deze 13 termen hebben een gemiddelde waarde van $(25 + 1)/2 = 13$. We vinden dan weer als totaal aantal mogelijkheden $13 \times 13 = 169$.

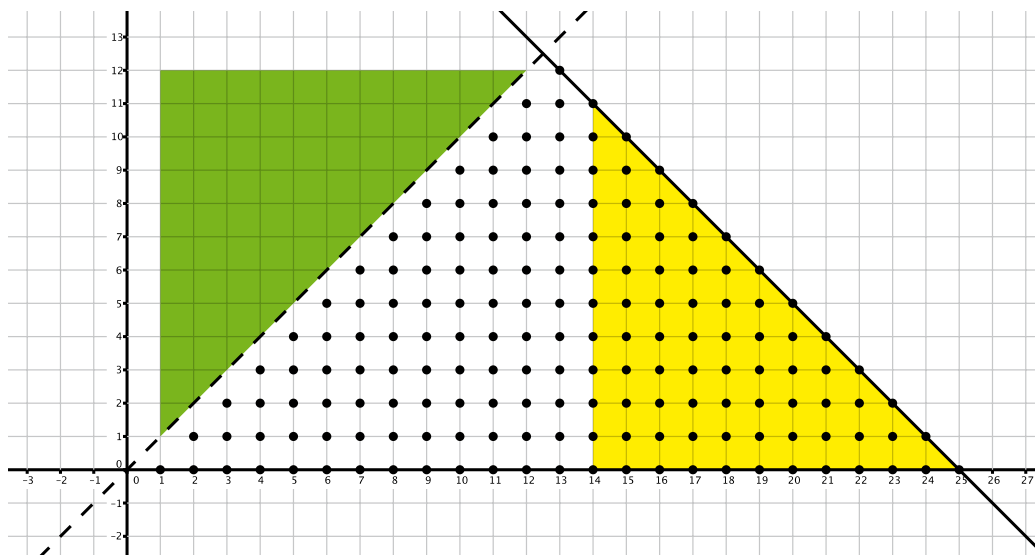
STIPPEN TELLEN We hadden het probleem ook eerst kunnen vertalen naar een stippendiagram. Bij elke combinatie van x rode en y blauwe knikkers kunnen we een stip (x, y) in het xy -vlak tekenen. De eisen stellen nu dat x en y niet-negatieve gehele getallen zijn waarvoor geldt dat $x + y \leq 25$ en $y < 8$. We kunnen deze stippen afbakenen door in een rooster de lijnen $x = 0$, $y = 0$, $y = 25 - x$ en $y = x$ te tekenen en goed te bedenken of er nog wel of niet stippen op die lijnen mogen liggen. In figuur 1 zie je het resultaat. De vraag is nu: hoeveel stippen staan hier in totaal?

Je zou de stippen natuurlijk één voor één kunnen gaan tellen. Maar dan ben je wel even bezig, en moet je ook goed bijhouden welke stippen je al hebt gehad. Je kunt ze beter systematisch tellen, bijvoorbeeld per rij. In de onderste rij zie je 25 stippen, in de rij daarboven 23, et cetera. Laat dat nou precies de berekening bij onze derde systematiek opleveren! Ah, maar dat is ook niet zo verwonderlijk; de onderste rij correspondeert immers met $y = 0$ blauwe knikkers, en de volgende met $y = 1$ blauwe knikkers, et cetera. Tellen we juist per verticale kolom, dan volgen we in feite letterlijk de tweede systematiek: met $x = 1$ rode knikker is er 1 stip, met $x = 2$ rode stippen 2, en zo verder tot en met $x = 13$ rode knikkers, waarna vanaf $x = 14$ rode knikkers het aantal stippen per verticale kolom weer afneemt. En ook onze eerste systematiek kunnen we in deze figuur herkennen: de stippen op de schuine lijn $x + y = 8$ (oftewel $y = 8 - x$) corresponderen precies met de vier mogelijkheden die je hebt bij een totaal van 8 knikkers.

Maar nu we het probleem hebben gereduceerd tot stippen tellen, kunnen we nog meer. Bekijk



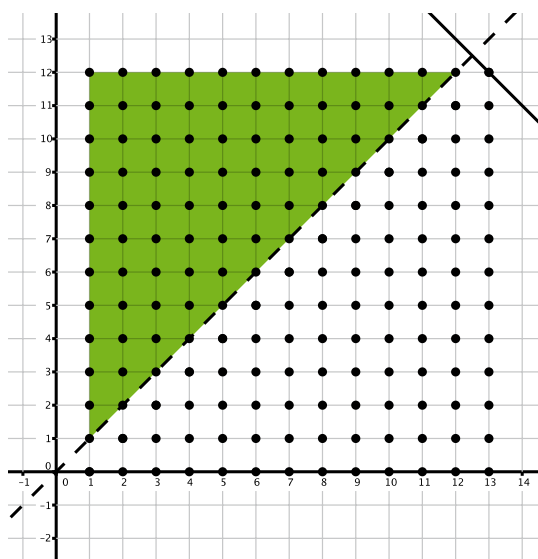
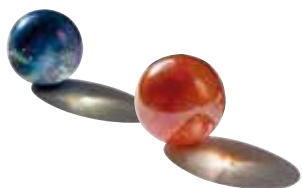
Figuur 1



Figuur 2

maar eens alle punten in de gele driehoek in figuur 2. Die kunnen we net zo goed allemaal in de groene driehoek neerleggen. Je krijgt dan een vierkant van 13 bij 13 stippen, zie figuur 3. Hoeveel stippen hebben we dus in totaal? Inderdaad: $13 \times 13 = 169$. ■

De complete opgavenset van de tweede ronde van de NWO, inclusief uitwerkingen, is te vinden op www.wiskundeolympiade.nl/wedstrijdarchief/2e-ronde.



Figuur 3

PYTHAGORAS OLYMPIADE

■ door Matthijs Coster, Eddie Nijholt en Harry Smit

Doe mee met de Pythagoras Olympiade! Elke aflevering bevat vier opgaven. De eerste twee zijn wat eenvoudiger; onder de goede inzendingen van leerlingen uit de klassen 1, 2 en 3 wordt een cadeaubon van Bol.com ter waarde van 20 euro verloot. De laatste twee zijn echte breinbrekers; onder de goede inzendingen van leerlingen (tot en met klas 6) wordt een bon van 20 euro verloot. Per aflevering wordt maximaal één bon per persoon vergeven.

Daarnaast krijgen leerlingen (tot en met klas 6) punten voor een *laddercompetitie*, waarmee eveneens een cadeaubon van Bol.com van 20 euro te verdienen valt. De opgaven van de onderbouw zijn 1 punt waard, de opgaven van de bovenbouw 2 punten. De leerling met de hoogste score in de laddercompetitie krijgt een bon. Zijn puntentotaal wordt weer op 0 gezet. Wie zes achtereenvolgende keren niets inzendt, verliest zijn punten in de laddercompetitie.

Met de bovenbouw-opgaven kun je ook een plaats in de finale van de Nederlandse Wiskunde Olympiade verdienen, mocht



het via de voorronden niet lukken: aan het eind van elke jaargang worden enkele goed scorende leerlingen uitgenodigd voor de NWO-finale. Niet-leerlingen kunnen met de Pythagoras Olympiade meedoen voor de eer.

HOE IN TE ZENDEN? Inzendingen ontvangen we bij voorkeur per e-mail (getypt of een scan van een handgeschreven oplossing):

pytholym@gmail.com

Je ontvangt een automatisch antwoord zodra we je bericht hebben ontvangen.

Eventueel kun je je oplossing sturen naar Pythagoras Olympiade, PWN

p.a. Centrum Wiskunde & Informatica

Postbus 94079

1090 GB Amsterdam

Voorzie het antwoord van een duidelijke toelichting (dat wil zeggen: een berekening of een bewijs). Vermeld je naam en adres; leerlingen moeten ook hun klas en de naam van hun school vermelden.

Je inzending moet bij ons binnen zijn vóór 30 september 2014.

DE GOEDE INZENDERS VAN FEBRUARI 2014

278: Wout Gevaert (klas 5), Pontes het Goese Lyceum, Goes; Arie Heikoop, Kampen; Elisabeth Kuijper (klas 4), Goois Lyceum, Bussum; Michelle Sweering (klas 6), Erasmiaans Gymnasium, Rotterdam; Michiel Versnel (klas 4), Goois Lyceum, Bussum; Marinda Westerveld (klas 5), Goois Lyceum, Bussum.

279: Max Bosman (klas 5), Goois Lyceum, Bussum; Sander Engelberts (klas 3), Goois Lyceum, Bussum; Tessa Engelberts (klas 5), Goois Lyceum, Bussum; Anton van Es (klas 4), Gymnasium Sorghvliet, Den Haag; Wout Gevaert (klas 5), Pontes het Goese Lyceum, Goes; Oscar Heijdra (klas 3), Goois Lyceum, Bussum; Arie Heikoop, Kampen; Laurens Hilbrands (klas 3), Goois Lyceum, Bussum; Nathan van 't Hof (klas 5), Hofstad Lyceum, Rijswijk; Arie van der Kraan, Nuth; Tjard Langhout (klas 3), Goois Lyceum, Bussum; Pieter-Jan Meuris (klas 4), Klein Seminarie, Roeselare; Niels van Mierlo (klas 2), Christelijk Gymnasium, Utrecht; Frenk Out (klas 5), Mummellius Gymnasium, Alkmaar; Beaudine Smeekes (klas 5), Goois Lyceum, Bussum; Michelle Sweering (klas 6), Erasmiaans Gymnasium, Rotterdam; Michiel Versnel (klas 4), Goois Lyceum, Bussum; Marinda Westerveld (klas 5), Goois Lyceum, Bussum.

280: Kees Boersma, Vlissingen; Max Bosman (klas 5), Goois Lyceum, Bussum; Anton van Es (klas 4), Gymnasium Sorghvliet, Den Haag; Wout Gevaert (klas 5), Pontes het Goese Lyceum, Goes; Arie Heikoop, Kampen; Arie van der Kraan, Nuth; Pascal Kwantes, Almere; Pieter-Jan Meuris (klas 4), Klein Seminarie, Roeselare; Frenk Out (klas 5), Mummellius Gymnasium, Alkmaar; Beaudine Smeekes (klas 5), Goois Lyceum, Bussum; Michelle Sweering (klas 6), Erasmiaans Gymnasium, Rotterdam; Michiel Versnel (klas 4), Goois Lyceum, Bussum.

281: Kees Boersma, Vlissingen; Max Bosman (klas 5), Goois Lyceum, Bussum; Ivo van Dijk (klas 5), Goois Lyceum, Bussum; Wout Gevaert (klas 5), Pontes het Goese Lyceum, Goes; Maud van de Graaf (klas 4), Mummellius Gymnasium,

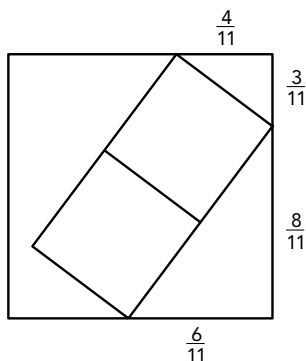
Alkmaar; Oscar Heijdra (klas 3), Goois Lyceum, Bussum; Arie Heikoop, Kampen; Nathan van 't Hof (klas 5), Hofstad Lyceum, Rijswijk; Arie van der Kraan, Nuth; Pieter-Jan Meuris (klas 4), Klein Seminarie, Roeselare; Frenk Out (klas 5), Mummellius Gymnasium, Alkmaar; Beaudine Smeekes (klas 5), Goois Lyceum, Bussum; Michelle Sweering (klas 6), Erasmiaans Gymnasium, Rotterdam; Michiel Versnel (klas 4), Goois Lyceum, Bussum; Sied Vrasdonk (klas 4), Mummellius Gymnasium, Alkmaar; Marinda Westerveld (klas 5), Goois Lyceum, Bussum.

Cadeaubonnen: Niels van Mierlo en Beaudine Smeekes.

Stand laddercompetitie: Jori Koolstra (18 p; cadeaubon), Jelmer Hinssen (18 p), Nathan van 't Hof (15 p), Wout Gevaert (12 p), Frenk Out (12 p), Michelle Sweering (12 p), Marinda Westerveld (10 p), Tara van Belkom (9 p), Pieter-Jan Meuris (9 p), Oscar Heijdra (7 p), Lennart Muijres (7 p), Wouter Andriessen (6 p), Tim Vermeulen (6 p), Michiel Versnel (6 p), Max Bosman (5 p), Eva Kapitein (5 p), Beaudine Smeekes (5 p), Art Waeterschoot (5 p), Bob Zwetsloot (5 p), Marijke Bot (3 p), Jildert Denneman (3 p), Ivo van Dijk (3 p), Anton van Es (3 p), Ritchie Keijsper (3 p), Jia-Jia ter Kuile (3 p), Timen Schenk (3 p), Pim Spelier (3 p), Sjoerd de Vries (3 p), Sietse Couperus (2 p), Maud van de Graaf (2 p), Phillip de Groot (2 p), Laurens Hilbrands (2 p), Maud Jonker (2 p), Yvette Keij (2 p), Alex Keizer (2 p), Tom Smeding (2 p), Jelle den Uil (2 p), Sied Vrasdonk (2 p), David Welling (2 p), Marc Zuurbier (2 p), Sterre ter Beek (1 p), Simon de Best (1 p), Johanna Bult (1 p), Lisa Clappers (1 p), Maarten Clercx (1 p), Sander Engelberts (1 p), Tessa Engelberts (1 p), Bram Honig (1 p), Elisabeth Kuijper (1 p), Tjard Langhout (1 p), Bram van der Linden (1 p), Rein Lukkes (1 p), Niels van Mierlo (1 p), Hannah Nijse (1 p), Anne Noom (1 p), Seb Waterreus (1 p).

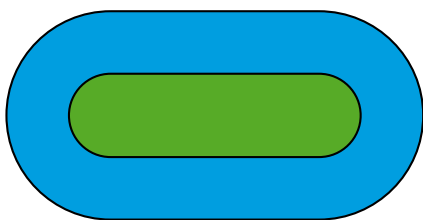
OPGAVE 286

Kees plaatst twee vierkanten in een eenheidsvierkant (dit is een vierkant met zijde 1), zoals aangegeven in de figuur. Hij wil nog een derde vierkant plaatsen zo, dat de som van de drie omtrekken maximaal is. Bepaal deze som.



OPGAVE 287

Erwin gaat zwemmen in een zwembad met een eiland in het midden. In 3 minuten zwemt Erwin één keer helemaal rond. Af en toe wordt de stroming aangezet. Als Erwin met de stroming mee zwemt, dan lukt het hem om in 2 minuten één keer rond te zwemmen. Hoe lang doet Erwin erover om tegen de stroming in één keer helemaal rond te zwemmen?



OPGAVE 288

In een land bestaan de kentekens van auto's uit zes cijfers (van 0 tot en met 9). Bovendien geldt dat twee kentekens minimaal op twee plaatsen verschillen. Dus als 142857 voorkomt als kenteken, dan komt 147857 niet voor (want alleen het derde cijfer verschilt). Hoeveel kentekens zijn er in dit land in totaal mogelijk?

OPGAVE 289

Gegeven is de vergelijking

$$\frac{x^2 - 1}{y} + y + 8 = 6x.$$

Toon aan dat er oneindig veel oplossingen (x, y) bestaan waarbij x en y gehele getallen zijn.

OPLOSSING 278

Sinds de 49ste jaargang van *Pythagoras* (2009-2010) staan er in elke aflevering vier opgaven in de *Pythagoras* Olympiade. Elke jaargang bestaat uit zes afleveringen (twee afleveringen voor Oud en Nieuw en vier afleveringen na Oud en Nieuw). Veronderstel dat de *Pythagoras* Olympiade nog blijft bestaan tot en met de aflevering van *Pythagoras* waarin de opgave staat die hetzelfde nummer heeft als het jaartal waarin die opgave verschijnt. In welke aflevering van *Pythagoras* (jaargang en nummer) staat dan die opgave?

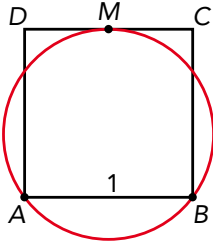
Oplossing. Opgave 278 is de eerste opgave van het vierde nummer van jaargang 53, die verscheen in 2013/2014. We beperken ons eerst tot opgavenummer in relatie tot jaar van verschijnen. In het jaar 2014 verschijnen de opgaven 274 t/m 297. Jaarlijks verschijnen er 24 opgaven. In het jaar $2014 + k$ verschijnen de opgaven $24k + 274$ t/m $24k + 297$.

Eén van deze opgaven is opgave $2014 + k$. We stellen $24k + 274 = 2014 + k$, en berekenen $k = \frac{1740}{23} \approx 75,65$. Voor $k = 75$ vinden we dat in het jaar 2089 de opgaven 2074 t/m 2097 verschijnen, waaronder ook opgave 2089. Dit is de laatste opgave van het zesde nummer van jaargang 128.

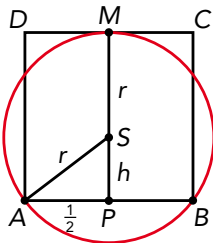
Opmerking. Meerdere lezers vonden het opmerkelijk dat de eerste opgave in elke aflevering een even opgavenummer heeft. Dat betekent dat er ooit een aflevering van *Pythagoras* was met een oneven aantal opgaven. Dat klopt. Dit kwam precies eenmaal voor, namelijk in jaargang 42, nummer 3 (februari 2003).

OPLOSSING 279

Gegeven is een vierkant $ABCD$ waarvan de zijden lengte 1 hebben. Een cirkel gaat door A , B en het midden M van zijde CD . Wat is de straal van deze cirkel?



Oplossing. AS en MS zijn beide stralen van de cirkel. Noem deze straal r . Geef PS aan met h . Er geldt dat $h + r = 1$, ofwel $h = 1 - r$. Volgens de stelling van Pythagoras is $h^2 + \frac{1}{4} = r^2$. Deze laatste twee vergelijkingen leiden tot $(1 - r)^2 + \frac{1}{4} = r^2$, waaruit volgt dat $r = \frac{5}{8}$.



32

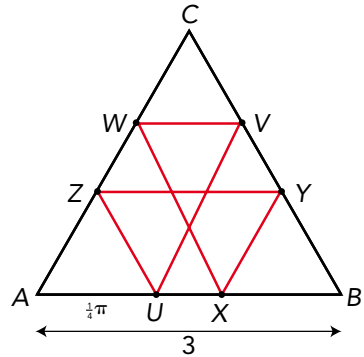
OPLOSSING 280

Gegeven is een rij getallen $a_0, a_1, a_2, \dots$. De *verschilrij* $v_0, v_1, v_2, \dots$ is als volgt gedefinieerd: $v_n = a_{n+1} - a_n$. De *tweede verschilrij* $w_0, w_1, w_2, \dots$ is de verschilrij van de verschilrij, dus: $w_n = v_{n+1} - v_n$. De rij $a_0, a_1, a_2, \dots$ is gelijk aan $w_0, w_1, w_2, \dots$. Bovendien is gegeven dat $a_3 = 60$. Bereken a_{12} .

Oplossing. Er geldt $w_n = v_{n+1} - v_n = (a_{n+2} - a_{n+1}) - (a_{n+1} - a_n) = a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n$. Omdat gegeven is dat $w_n = a_n$, geldt $a_n = a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n$. Dat betekent dat $a_{n+2} = 2a_{n+1}$, ofwel: elk getal in de rij is het dubbele van het getal dat daaraan vooraf gaat. Omdat $a_3 = 60$, is $a_{12} = 2^9 \cdot a_3 = 512 \cdot 60 = 30720$.

OPLOSSING 281

In een gelijkzijdige driehoek met zijde 3 zijn alle wanden spiegels. Op een van de zijden wordt op afstand $\frac{1}{4}\pi$ van een hoekpunt een laserstraal afgeschoten onder een hoek van 60° . Na vijf keer spiegelen komt de laserstraal weer terug waar hij was. Wat is de afstand die het licht aflegt voordat het weer terug is waar het begon?



Oplossing. De lichtstraal doorloopt in de figuur $UVWXYZU$. De totale lengte is $UV + VW + WX + XY + YZ + ZU$. Doordat de lichtstraal wordt afgeschoten onder een hoek van 60° , zal bij elke weerkaatsing de hoek opnieuw 60° zijn. Driehoek BUV is gelijkzijdig, dus $UV = BU = 3 - \frac{1}{4}\pi$. Driehoek CVW is eveneens gelijkzijdig en tevens congruent met driehoek AUZ . Dus $VW = AU = \frac{1}{4}\pi$. Eenvoudig vinden we ook voor WX en YZ dat $WX = YZ = 3 - \frac{1}{4}\pi$ en voor XY en ZU dat $XY = ZU = \frac{1}{4}\pi$. De totale lengte komt uit op $3 - \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{4}\pi + 3 - \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{4}\pi + 3 - \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{4}\pi = 3 + 3 + 3 = 9$.

DE KORTSTE DAG GAAT SNEL VOORBIJ

Bij het artikel op pagina 18-22 hoort onderstaande tabel voor de zuiddoorgang van de zon door de meridiaan van Greenwich, 2014. D = datum; Z = zuiddoorgang in UT; δ = declinatie van de zon.

D	Z	δ	D	Z	δ	D	Z	δ
1 jan	12.04	-22,9°	11 mei	11.56	18,1°	18 sep	11.54	1,5°
11 jan	12.08	-21,7°	21 mei	11.57	20,4°	28 sep	11.50	-2,4°
21 jan	12.12	-19,7°	31 mei	11.58	22,1°	8 okt	11.47	-6,2°
31 jan	12.14	-17,1°	10 jun	11.59	23,1°	18 okt	11.45	-10°
10 feb	12.14	-14°	20 jun	12.02	23,4°	28 okt	11.44	-13,4°
20 feb	12.14	-10,6°	30 jun	12.04	23,1°	7 nov	11.44	-16,5°
2 mrt	12.12	-6,8°	10 jul	12.05	22,1°	17 nov	11.45	-19,2°
12 mrt	12.10	-2,9°	20 jul	12.06	20,5°	27 nov	11.48	-21,3°
22 mrt	12.07	1°	30 jul	12.06	18,3°	7 dec	11.52	-22,7°
1 apr	12.04	4,9°	9 aug	12.05	15,6°	17 dec	11.56	-23,4°
11 apr	12.01	8,7°	19 aug	12.03	12,4°	27 dec	12.01	-23,3°
21 apr	11.59	12,2°	29 aug	12.01	9°			
1 mei	11.57	15,4°	8 sep	11.57	5,3°			



53ste jaargang nummer 6
juni 2014
ISSN 0033 4766

Pythagoras stelt zich ten doel jongeren kennis te laten maken met de leuke en uitdagende kanten van wiskunde. *Pythagoras* richt zich tot leerlingen van vwo en havo en alle anderen die jong van geest zijn.

Internet www.pyth.eu

Hoofredacteur Derk Pik

Eindredacteur Alex van den Brandhof

Redactie Matthijs Coster,
Jeanine Daems, Jan Guichelaar,
Klaas Pieter Hart, Paul Levrie,
Marc Seijlhouwer

Vormgeving Grafisch Team Digipage,
Leidschendam

Druk Drukkerij Ten Brink, Meppel

Uitgever Koninklijk Wiskundig
Genootschap (KWG)

Management Pythagoras Jan Turk,
Mark Veraar (KWG), Derk Pik

Lezersreacties en kopij

Bij voorkeur per e-mail; lezersreacties naar Jan Guichelaar, jan@pyth.eu en kopij naar Derk Pik, derk@pyth.eu. Eventueel per post naar Pythagoras, p.a. Centrum Wiskunde & Informatica, Postbus 94079, 1090 GB Amsterdam.

Abonnementen, bestellingen en mutaties

Abonneeservice Pythagoras
Postbus 2238
5600 CE Eindhoven
Telefoon 088 226 5258
E-mail: abonnementen@pyth.eu

Abonnementsprijs

(zes nummers per jaargang)
€ 26,00 (Nederland en België),
€ 29,00 (overige landen),
€ 17,00 (groepsabonnement NL/B),
€ 26,00 (geschenkabonnement NL/B),
€ 29,00 (geschenkabonnement overige landen).

Een geschenkabonnement stopt automatisch na één jaar. Overige abonnementen gelden tot wederopzegging. Zie www.pyth.eu voor verdere toelichtingen.

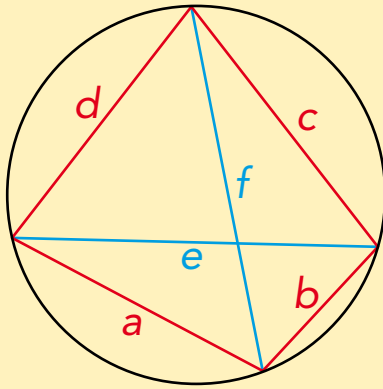
Aan dit nummer werkten mee

Alex van den Brandhof
(alex@pyth.eu),
Matthijs Coster
(matthijs@pyth.eu),
Jeanine Daems
(jeanine@pyth.eu),
Aad Goddijn
(a.goddijn@uu.nl),
Jan Guichelaar
(jan@pyth.eu),
Klaas Pieter Hart
(kp@pyth.eu),
Paul Levrie
(paul@pyth.eu),
Eddie Nijholt
(eddie@pyth.eu),
Derk Pik
(derk@pyth.eu),
Quintijn Puite
(quintijn@wiskundeolympiade.nl),
Frank Roos
(fd_r@yahoo.com),
Marc Seijlhouwer
(marc@pyth.eu),
Harry Smit
(h.j.smit@students.uu.nl),
Stephan Timmers
(stephantastic@hotmail.com).

Pythagoras wordt mede mogelijk gemaakt door de bijdragen van de onderstaande instituten en instellingen.



PTOLEMAEUS



$$ac + bd = ef$$

Bovenstaande formule wordt toegeschreven aan de Griek Claudius Ptolemaeus (ongeveer 90-160 na Chr.). De formule geldt in elke koordenvierhoek (een vierhoek waarvan de hoekpunten op een cirkel liggen) met zijden a , b , c en d , en diagonalen e en f . En ook de omkering is waar: als de formule geldt binnen een zekere vierhoek, dan is die vierhoek een koordenvierhoek.