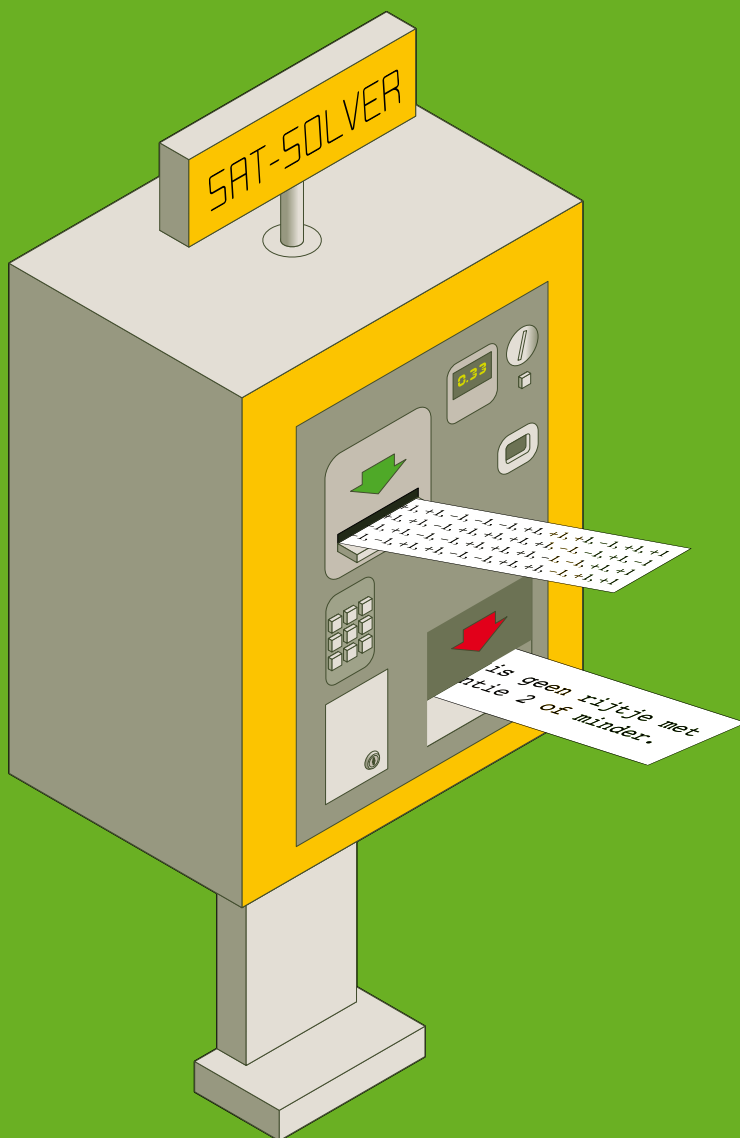


PYTHAGORAS

WISKUNDETIJDSCHRIFT VOOR JONGEREN



54ste JAARGANG - NUMMER 1 - SEPTEMBER 2014

3TU.AMI

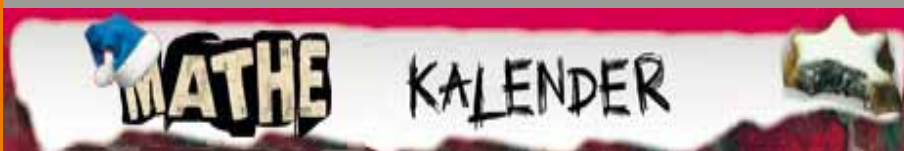


 **TU**Delft

TU/e

**UNIVERSITEIT
TWENTE.**

Het Applied Mathematics Institute 3TU.AMI, een samenwerkingsverband van de drie technische universiteiten Delft, Eindhoven en Twente, organiseert elk jaar samen met het Duitse wiskunde-instituut MATHEON een wiskundewedstrijd voor middelbare scholieren. Deze wedstrijd wordt via het internet gespeeld in de vorm van een digitale adventskalender, de zogenaamde Mathekalender.



Van 1 tot en met 24 december wordt dagelijks op de Mathekalender een vakje 'geopend' waarachter een wiskundeopgave verschijnt met tien mogelijke antwoorden. Deze opgaven zijn uitdagend, en soms van het niveau van de finale van de Nederlandse Wiskunde Olympiade. Omdat het meerkeuzevraagstukken zijn, worden er geen toelichtingen of bewijzen gevraagd. De opgaven zijn ontleend aan leuke praktische problemen.

Internationale Wiskundewedstrijd **01-24 december**

Registratie en spelregels

Het is een individuele wedstrijd. Je kunt je daarom **alleen** als persoon voor deelname registreren, maar het is natuurlijk leuk om met een groep of schoolklas te proberen het goede antwoord van een opgave te vinden. Op de website

www.3tu.nl/ami/en/mathekalender

staat hoe je je voor de wedstrijd kunt opgeven. Bovendien bevat deze website de spelregels en een archief van opgaven die in vorige versies van de Mathekalender zijn verschenen. Daarmee krijg je een indruk van het niveau van de opgaven.

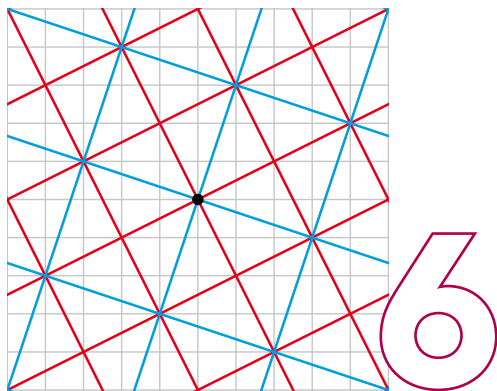
Prijzen

Er zijn elke dag prijzen te winnen. De Nederlandse scholier die voor de gehele wedstrijd de beste score behaalt, wint een laptop.

Meer informatie

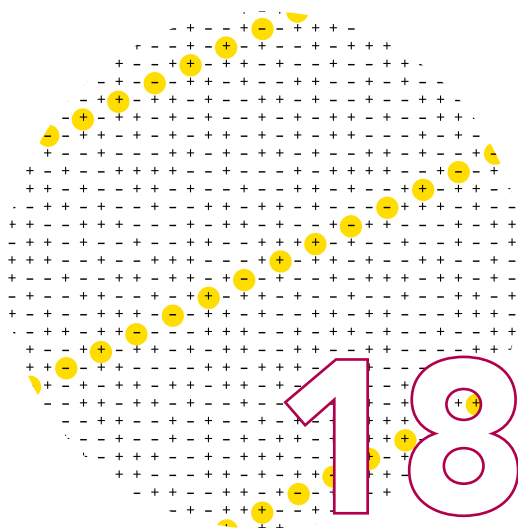
Als je verder nog vragen hebt, dan kun je deze stellen via e-mail:
3tuami-ewi@tudelft.nl.

INHOUD



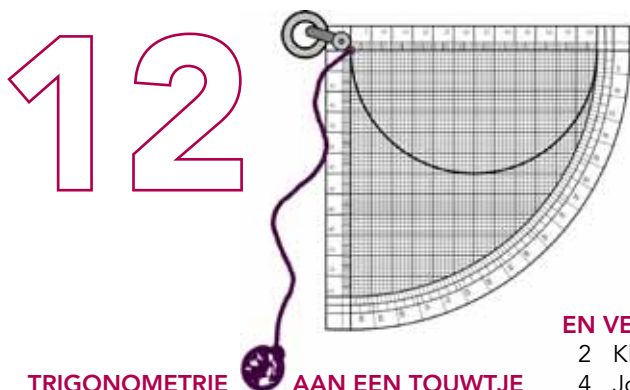
ROOSTERS EN SOMMEN VAN KWADRATEN

In dit eerste nummer van de 54ste jaargang van *Pythagoras* starten we met een serie over kwadraten. De eerste aflevering gaat over getallen die je kunt schrijven als som van twee kwadraten. Zo is 10 te schrijven als $1^2 + 3^2$.



HET DISCREPANTIEVERMOEDEN

In februari van dit jaar werd een speciaal geval van Erdős' discrepantie vermoeden bewezen. Het computerrekenwerk werd gedaan door een zogenaamde SAT-solver. Het resultaat: een file van 13 gigabyte.



TRIGONOMETRIE AAN EEN TOUWTJE

In het antieke Griekenland werd al bedacht dat je met kwadranten de hoogte van hemellichamen boven de horizon kunt meten. Maar in de Middeleeuwen gingen geleerden in de islamitische wereld nog veel verder met dit instrument. Ze maakten er een soort analoge rekenmachine van voor ingewikkelde berekeningen.

EN VERDER

- 2 Kleine nootjes
- 4 Journaal
- 10 Ren je rot
- 11 Möbiusbalk
- 16 Eén
- 24 Burensommen in polyomino's
- 28 Tellen, een kunst apart
- 30 Pythagoras Olympiade
- 33 *De Elementen* van Euclides

Omslagillustratie: Alex van den Brandhof

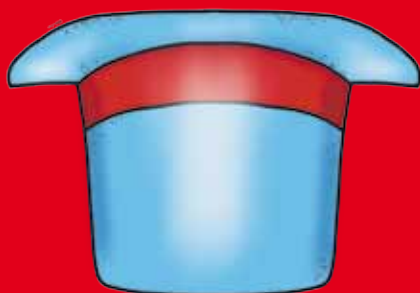
■ **NIVEAUBALKJES** Sommige pagina's bevatten één of meer zwarte balkjes onder het paginanummer. Voor artikelen zonder balkje is geen specifieke voorkennis nodig. Artikelen met één balkje bevatten wiskunde uit de onderbouw. Artikelen met twee balkjes vereisen kennis uit de bovenbouw. Drie balkjes: net iets moeilijker.

KLEINE NOOTJES

■ door Jan Guichelaar

HOED MET BALLE

In een hoge hoed zitten gekleurde ballen. Neem er twee uit, bekijk de kleuren en gooi ze terug. Als je dat vaak doet, krijg je een goede benadering van de kans op twee ballen van gelijke kleur. Trek vervolgens een bal uit de hoed en gooi die weg. Met het restant doe je hetzelfde: neem er twee uit, bekijk de kleuren, gooi ze terug en herhaal dit vaak genoeg zodat je de kans op twee ballen van gelijke kleur goed kunt schatten. Wat blijkt: de kans op twee ballen van gelijke kleur is even groot als vóórdat je een bal had weggegooid. Hoeveel ballen zaten er oorspronkelijk in de hoed en hoe waren ze gekleurd? Er is meer dan één oplossing.

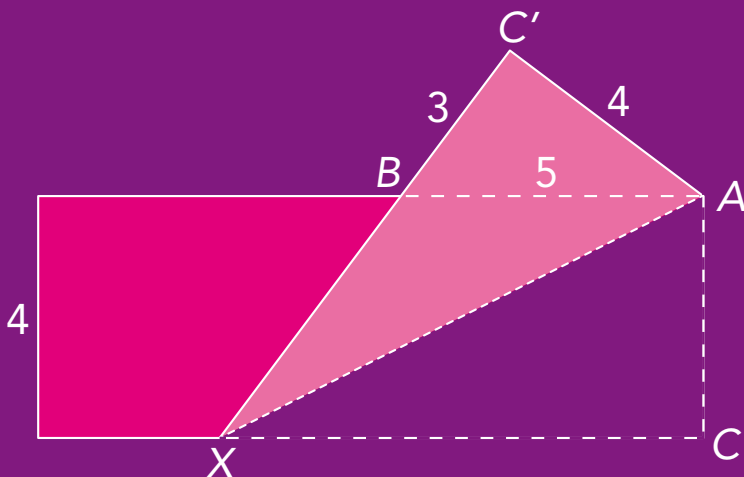


ZONNESCHIJN

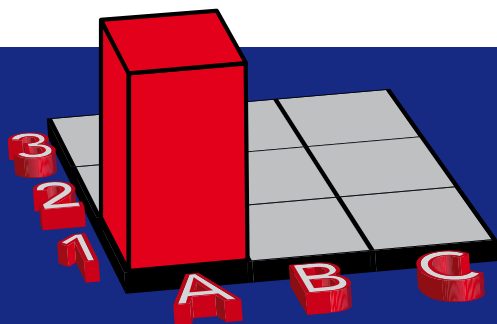
Tijdens Joeps laatste vakantieweek scheen de zon in totaal 49 uren. De maandag, dinsdag en woensdag hadden precies hetzelfde aantal uren zonneschijn. Op vrijdag was er evenveel zonneschijn als op donderdag en op zondag evenveel als op zaterdag. De gemiddelde zonneschijn per dag over de hele week bleek gelijk te zijn aan het gemiddelde over de vijf werkdagen. Op maandag scheen de zon twee uur meer dan op zondag. Op zondag scheen de zon drie uur meer dan op donderdag. Hoeveel uren scheen de zon op zondag?

VOUWEN

Je hebt een strook papier van 4 decimeter breed. Je pakt hoekpunt C op en vouwt de strook zó om over een lijn AX , dat de uitstekende driehoek ABC' zijden 3, 4 en 5 heeft. Hoe ver ligt X van C ?



Kleine nootjes zijn eenvoudige opgaven die weinig of geen wiskundige voorkennis vereisen om opgelost te kunnen worden. De antwoorden vind je in het volgende nummer van *Pythagoras*.



BLOKJE OM

Een vierkant bestaat uit negen velden van 1 bij 1. Op hoekveld A1 staat een blokje van $1 \times 1 \times 2$ ($l \times b \times h$). Je mag nu net zo vaak als je wilt het blokje omleggen (een kwartslag draaien), maar wel zo, dat het blokje nog geheel op het vierkant ligt (voor de eerste zet kun je dus naar B1C1 of naar A2A3). In hoeveel zetten kun je van A1 naar C3, dus weer rechtop op het schuin tegenover staande veld?

BREUKEN MAKEN

Maak van de cijfers 1 tot en met 9 drie breuken waarvan de tellers uit één cijfer bestaan en de noemers uit twee cijfers. Gebruik elk cijfer precies één keer. Als je de drie breuken nu bij elkaar optelt, welke uitkomst kun je dan maximaal krijgen? En minimaal?

$$\frac{1}{23} + \frac{4}{56} + \frac{7}{89} = \frac{5547}{28658} \approx 0,194$$

OPLOSSINGEN KLEINE NOOTJES NR. 6

Dobbelsteen en munt. Vraag 1. Alleen als je twee enen gooit, kun je geen getal groter dan 20 maken. De kans hierop is $\frac{1}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$. Dus de kans dat je wel een getal groter dan 20 kunt maken, is $1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$. Vraag 2. Als je eerst de munt gooit, moet je daarmee een 2 gooien. Als je als eerste de dobbelsteen gooit, moet je daarmee meer dan 1 gooien. De gevraagde kans is dus $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{5}{6} = \frac{2}{3}$.

Spelen met fiches. De beginsituatie is 1-2-3. Eerste zet: pak het fiche van de stapel met 1 fiche, dan ontstaat de situatie 0-3-3. Tweede zet: pak de fiches van het eerste stapeltje met 3 fiches, dan ontstaat de situatie 1-1-4. Derde zet: pak de fiches van de stapel met 4 fiches, dan ontstaat de situatie 3-2-1.

Balanceren. Eerste weg: links de gewichtjes 2, 5, 9, rechts de gewichtjes 1, 7, 8.

- Als de balans in evenwicht is, zit het afwijkende gewichtje bij 3, 4, 6. Tweede weg: links 1, 3, rechts 2, 4. Bij evenwicht is 6 afwijkend; als links zwaarder is, is 4 afwijkend; als rechts zwaarder is, is 3 afwijkend.

- Als links zwaarder is, zit het afwijkende gewichtje bij 1, 7, 8. Tweede weg: links 1, 9, rechts 3, 7. Bij evenwicht is 8 afwijkend; als links zwaarder is, is 7 afwijkend; als rechts zwaarder is, is 1 afwijkend.
- Als rechts zwaarder is, zit het afwijkende gewichtje bij 2, 5, 9. Tweede weg: links 1, 5, rechts 2, 4. Bij evenwicht is 9 afwijkend; als links zwaarder is, is 2 afwijkend; als rechts zwaarder is, is 5 afwijkend.

Enen en tweeën. $1122 + 1212 + 1221 + 2112 + 2121 + 2211 = 9999$.

Bereikbaarheid. Kies een assenstelsel met de oorsprong in het punt waar je begint (de gele stip). De winkel op (6, 0) is net bereikbaar, net als (5, -1), (5, 0), (5, 1), (4, -2), ..., (4, 2). De winkels op (3, y), (2, y), (1, y) en (0, y) zijn alle bereikbaar. In totaal zijn dus $1 + 3 + 5 + 7 + 7 + 7 + 7 = 37$ winkels van de 49 bereikbaar. Dat is 75,5%.

Opmerking: het is uiteraard niet mogelijk om in één wandeling van maximaal 600 meter in totaal driekwart van alle winkels te bereiken.

JOURNAAL

■ door Alex van den Brandhof en Marc Seijlhouwer

Drie maal goud voor Nederland bij IMO

Michelle Sweering (17 jaar, 6 vwo, Erasmiaans Gymnasium Rotterdam) is deze zomer op de Internationale Wiskunde Olympiade in Kaapstad (Zuid-Afrika) als beste meisje van de wereld geëindigd. Ze haalde als enige meisje een van de in totaal 49 gouden medailles. Ook Jeroen Winkel (17 jaar, 6 vwo, Stedelijk Gymnasium Nijmegen) en Peter Gerlagh (18 jaar, 6 vwo, Theresia Lyceum Tilburg) legden beslag op goud, iets wat tot nu toe voor slechts vier Nederlanders weggelegd was. Bas Verseveldt (17 jaar, 6 vwo, Theresia Lyceum Tilburg) en Matthew Maat (14 jaar, 4 vwo, Bonhoeffer College Enschede) haalden zilver, en Tysger Boelens (18 jaar, 6 vwo, RSG Ter Apel) brons. Hiermee werd Nederland dertiende in het landenklassement en versloeg het alle andere West-Europese landen.

Nooit eerder haalde Nederland zo'n goed resultaat. Weliswaar werd Nederland ooit vijfde (in 1977), maar toen deden er slechts 21 landen mee. Dit jaar waren dat er 101. Het officieuze landenklassement werd aangevoerd door China, de Ver-

enigde Staten en Taiwan. Met Japan (vijfde) erbij zijn dit de enige landen die meer gouden medailles wisten te bemachtigen dan Nederland.

Bondscoach Quintijn Puite: 'We wisten dat we dit jaar een gouden team hadden, maar deze resultaten overtreffen al onze verwachtingen. We zijn ongelooflijk trots op alle zes de teamleden.' (AvdB)

Top-60 landenklassement: 1. China; 2. Verenigde Staten; 3. Taiwan; 4. Rusland; 5. Japan; 6. Oekraïne; 7. Zuid-Korea; 8. Singapore; 9. Canada; 10. Vietnam; 11. Australië; 11. Roemenië; **13. Nederland**; 14. Noord-Korea; 15. Hongarije; 16. Duitsland; 17. Turkije; 18. Hong Kong; 18. Israël; 20. Verenigd Koninkrijk; 21. Iran; 21. Thailand; 23. Kazachstan; 23. Maleisië; 23. Servië; 26. Italië; 26. Mexico; 26. Polen; 29. Kroatië; 29. Indonesië; 29. Peru; 32. Tsjechië; 33. Portugal; 34. Wit-Rusland; 34. Brazilië; 34. Slowakije; 37. Bulgarije; 38. Zwitserland; 39. Armenië; 39. India; 41. Griekenland; 42. Litouwen; 43. Saoedi-Arabië; 44. Mongolië; 45. Frankrijk; 45. Filippijnen; 47. Georgië; 48. Moldavië; 48. Spanje; 50. Tadzjikistan; 51. Oostenrijk; 51. Bosnië en Herzegovina; 53. Bangladesh; 54. Colombia; 54. Sri Lanka; 56. Argentinië; 57. Zweden; 58. Slovenië; 59. België; 60. Nieuw-Zeeland.

Suboptimaal inpakken

Meloenen in een doos stoppen is niet makkelijk. Zie er maar eens zoveel mogelijk in te krijgen, zonder te veel loze ruimte tussen het fruit. Het lukte wiskundigen van de Amerikaanse Michigan University en Harvard University om de beste inpakmanieren van 50.000 verschillende vormen te berekenen.

Inpakproblemen zijn al heel oud; mensen proberen al eeuwenlang een wiskundige manier te vinden om dingen zo efficiënt mogelijk in te pakken. Het bewijs dat iets optimaal ingepakt is, is moeilijk en vaak heel lang. Met de computer is het makkelijker om een schatting te maken van de beste inpakmanier. Dat is precies wat de Amerikanen deden: ze lieten een algoritme berekenen hoe allerlei vreemde vormen in een doos gestopt moesten worden. Het programma was succesvol: van 50.000 verschillende vormen vestigden ze het virtuele inpakrecord. Ze vonden voor al deze vormen

een betere manier van inpakken dan tot nu toe bekend was.

Helaas voor de onderzoekers en de wiskunde betekent dat niet dat daarmee ook bewezen is dat het de allerbeste methoden zijn. Sterker nog, het is voor alle vormen aan te tonen dat het níét de beste manier is. Wat dan wel de perfecte inpaktechniek is, is echter veel moeilijker te bepalen. Voor het simpelste voorbeeld – het stapelen van bollen – duurde het 400 jaar voordat Thomas Hales eindelijk de juistheid van het door Johannes Kepler (1571-1630) opgestelde vermoeden over optimale bolstapelingen wist te bewijzen.

De onderzoekers hopen in ieder geval dat hun programma hints kan geven voor de ideale methode. De inpakmethoden geven suggesties van hoe de perfecte manier eruit kan zien. Wiskundigen kunnen daarmee verder om – wie weet – in de toekomst de beste inpakmethode te vinden. (MS)

Eindelijk: een vrouw wint de Fieldsmedaille

De 37-jarige Iraanse Maryam Mirzakhani is doorgebroken tot de door mannen gedomineerde wiskundige elite. Mirzakhani is de eerste vrouw in de 78-jarige geschiedenis van de Fieldsmedaille die met deze prijs wordt geëerd. Samen met de Abel-prijs is de Fieldsmedaille de belangrijkste onderscheiding die een wiskundige ten deel kan vallen. Mirzakhani groeide op in Teheran, studeerde daar in 1999 af aan de Sharif University of Technology, promoveerde in 2004 aan de Harvard University en is sinds 2008 professor aan de Stanford University. Naast Mirzakhani werden drie mannen gelauwerd met de Fieldsmedaille: de Braziliaan-Fransman Artur Avila (35), de Canadees-Amerikaan Manjul Bhargava (40) en de Oostenrijker Martin Hairer (38). De vier laureaten ontvingen hun prijs in augustus, tijdens het Internationaal Congres van Wiskundigen, dat in Seoul (Zuid-Korea) plaatsvond.

Mirzakhani werd onderscheiden voor haar bijdragen in de theorie van Riemannoppervlakken. Dit zijn abstracte structuren in hogerdimensionale ruimten; ze kunnen gezien worden als een vervormde versie van het complexe vlak. Mirzakhani's recentste doorbraak is een bewijs van een lang openstaand vermoeden over geodetische lijnen op dergelijke oppervlakken. Deze lijnen zijn de kortste verbinding tussen twee punten op een gekromd oppervlak. Bijvoorbeeld op de aardbol in onze gewone driedimensionale wereld is zo'n verbindingslijn altijd een deel van een grootcirkel.

Avila's werk heeft geleid tot een goed begrip van de fractaalmeetkunde van de zogeheten Feigen-

baum-Juliaverzamelingen, die beroemd zijn vanwege de fraaie kleurrijke plaatjes die deze verzamelingen voortbrengen.

Getaltheoreticus Bhargava bewees een deel van het vermoeden van Birch en Swinnerton-Dyer, een van de moeilijkste onopgeloste vraagstukken uit de wiskunde. Het gaat over rationale punten op elliptische krommen. Bhargava's Fieldsmedaille is ook Nederlandse trots: naast hoogleraar in Princeton heeft Bhargava een zogeheten 'nulaanstelling' aan de Universiteit Leiden.

Hairer gaf een stevige impuls aan de theorie van stochastische partiële differentiaalvergelijkingen. Deze vergelijkingen, die hun toepassingen hebben in onder meer de luchtstroom rond vliegtuigvleugels, bevatten een ruisterm, die men nu met geavanceerde kansrekening beter kan begrijpen.

De Fieldsmedaille, genoemd naar de Canadese wiskundige John Fields (1863-1932) die na de Eerste Wereldoorlog met het idee kwam voor de prijs als symbool van 'internationale eenheid', werd voor het eerst uitgereikt in 1936. Sinds 1950 wordt de prijs elke vier jaar uitgereikt aan ten hoogste vier wiskundigen. Fields stelde dat de prijs een erkenning is voor gedane arbeid, en bovendien een stimulant is voor nieuw onderzoek. Een oeuvreprijs is de Fieldsmedaille dus allerminst. Om dit idee van Fields te verankeren, nam de International Mathematical Union in het reglement op dat prijswinnaars nog geen veertig jaar mogen zijn op 1 januari van het jaar waarin de medailles worden toegekend. (AvdB)

Jetlag beperken dankzij app

Na een lange vliegtocht hebben veel mensen last van een jetlag: een brak gevoel door het tijdsverschil, waardoor je vaak een nacht of dag overslaat en je biologische klok van slag raakt. Nu kan iedereen met behulp van de app *Entrain* van zijn jetlag afkomen. Je vult in wanneer je vliegt en wat het tijdsverschil is, en de app rekent uit hoe je moet slapen om zo snel mogelijk van de jetlag af te komen.

Die berekening komt van twee wiskundige modellen die al eerder waren ontdekt: ze beschrijven in formules de werking van de biologische klok en het waak-slaapritme. Samen met de kennis over het tijdszoneverschil rekenen ze uit hoe je de klap van het missen van een nacht kan opvangen. Gebruikers moeten een dutje doen, maar vooral hun ogen

laten denken dat het nacht, of juist dag is. Dat kan met een roze of blauwe lamp, waarmee de hersenen gefopt worden. Volgens Kirill Serkh en Daniel Forger, die de app ontwikkelden, zorgt het volgen van de app ervoor dat je bij een tijdsverschil van vijf uur binnen drie dagen van de jetlag af bent. Normaal gesproken zou dat volgens hen vijf dagen duren.

In de praktijk blijkt *Entrain* echter niet zo goed te werken. De recensies in de app-store vinden dat de app op onhandige momenten dutjes voorschrijft. Als mensen wakker blijven, duurt het vervelende gevoel wel langer, maar je kan tenminste iets doen. Dat is beter dan slapen, lijken de meeste mensen te denken. (MS)

Kun je elk positief, geheel getal schrijven als een som van twee kwadraten? Het antwoord is nee: bij 3 en 7 bijvoorbeeld lukt dat niet. Maar bij 5 en 13 dan weer wel. In dit artikel gaan we onderzoeken wat de relatie is tussen roosters en getallen die wel als som van twee kwadraten te schrijven zijn.

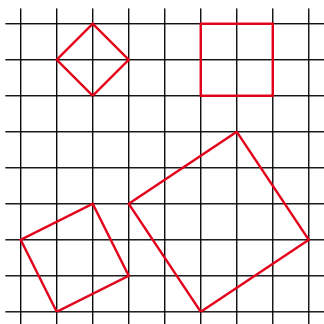
■ door Hugo de Blank en Jeanine Daems

ROOSTERS EN SOMMEN VAN KWADRATEN

Het zal je niet veel moeite kosten om de getallen 5 en 13 te schrijven als een som van twee kwadraten: $1^2 + 2^2$ en $2^2 + 3^2$. Er bestaat een verband tussen roosters en getallen die als som van twee kwadraten te schrijven zijn. Dat had je misschien niet verwacht, maar je bent sommen van kwadraten al heel vaak tegengekomen bij de stelling van Pythagoras. En in roosters kom je al snel rechthoekige driehoeken tegen.

Opgave 1. In figuur 1 zie je een rooster van vierkanten met afmetingen van 1×1 . Geef voor elk van de rode vierkanten de lengte van een zijde en de oppervlakte.

Opgave 2. Kun je ook een vierkant met oppervlakte 10 tekenen in zo'n rooster? En met oppervlakte 17? En met oppervlakte 23? Zo ja: hoe doe je dat? Zo nee: waarom niet?

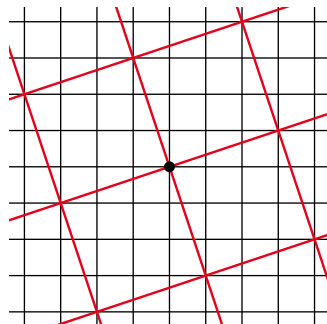


Figuur 1

ROOSTERS OP ROOSTERS We gaan nu zo'n eenvoudig vierkantrooster gebruiken om daarop weer een grover vierkantrooster te maken. Dat kun je op verschillende manieren doen. Je kunt bijvoorbeeld simpelweg een rooster van vierkantjes van 2×2 op het rooster met vierkantjes van 1×1 tekenen, dan krijg je een rooster van vierkanten met oppervlakte 4.

Kunnen we ook een rooster tekenen met vierkanten van oppervlakte 10? Ja, dat kan als je je oplossing van opgave 2 gebruikt. Dat komt doordat $10 = 1^2 + 3^2$, dus een driehoekje met rechthoekszijden 1 en 3 in het rooster levert een schuine zijde van lengte $\sqrt{10}$. Je ziet dat je een rooster van vierkanten met oppervlakte n kunt tekenen als het getal n een som van twee kwadraten is.

Het rooster in figuur 2 kun je maken door vanaf



Figuur 2

een beginpunt (de stip) een vierkantszijde te tekenen met het recept '3 hokjes naar rechts en 1 hokje omhoog'. Daarom noemen we dit rooster een $(3, 1)$ -rooster.

Opgave 3. Teken op een ruitjesblaadje in vier verschillende plaatjes de volgende roosters: een $(1, 1)$ -rooster, een $(2, 0)$ -rooster, een $(1, 2)$ -rooster en een $(4, 1)$ -rooster.

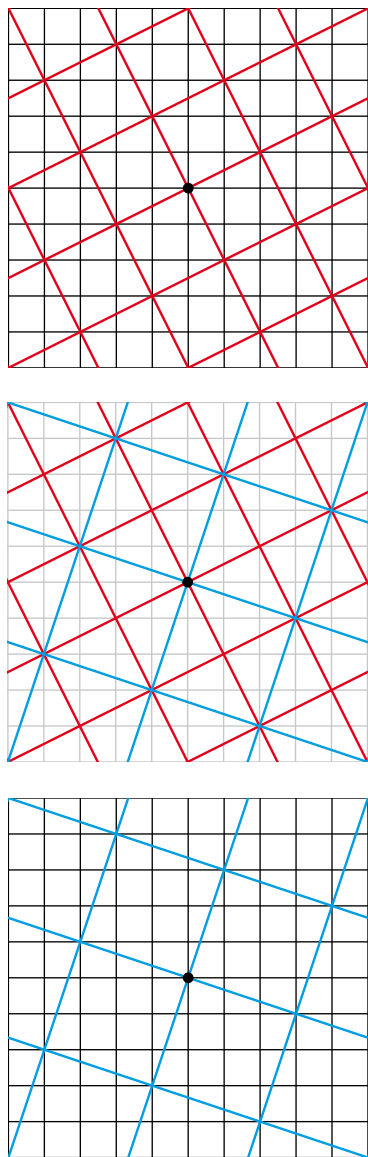
Opgave 4. Bij de volgende paren roosters is steeds de vraag: is er verschil tussen deze twee roosters? Zo ja, wat?

- een $(1, 1)$ -rooster en een $(1, -1)$ -rooster;
- een $(2, 1)$ -rooster en een $(2, -1)$ -rooster;
- een $(2, 1)$ -rooster en een $(1, 2)$ -rooster;
- een $(2, 1)$ -rooster en een $(1, -2)$ -rooster.

Nu gaan we nog een stapje verder. Als je op een beginrooster een grover rooster kunt tekenen, kun je op dat grovere rooster weer een nóg grover rooster tekenen. Figuur 3 toont een voorbeeld. We beginnen met een $(1, 0)$ -rooster (het gewone rooster van vierkantjes met oppervlakte 1) en tekenen daarop een $(2, 1)$ -rooster (rood). Vervolgens doen we alsof alleen het rode rooster bestaat (in het middelste plaatje is het $(1, 0)$ -rooster nog licht zichtbaar) en tekenen we daarop een $(1, 1)$ -rooster (blauw). Als je het $(2, 1)$ -rooster nu negeert, zie je dat het resultaat een $(1, 3)$ -rooster op het oorspronkelijke rooster is (het onderste plaatje).

Opgave 5. Nu andersom: teken op ruitjespapier eerst een $(1, 1)$ -rooster en daarop in een andere kleur een $(2, 1)$ -rooster. (Begin weer netjes bij de stip in het midden.) Krijg je nu hetzelfde rooster als in het voorbeeld?

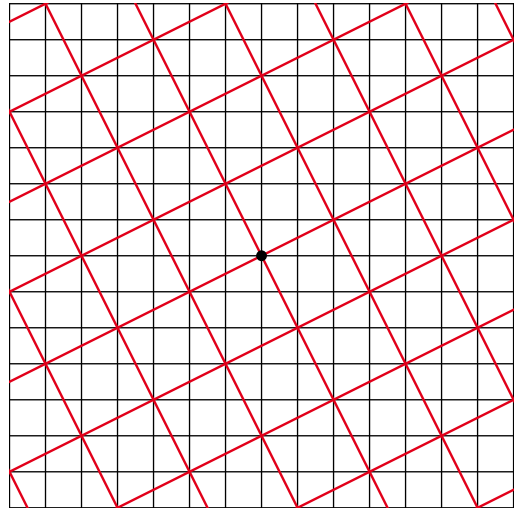
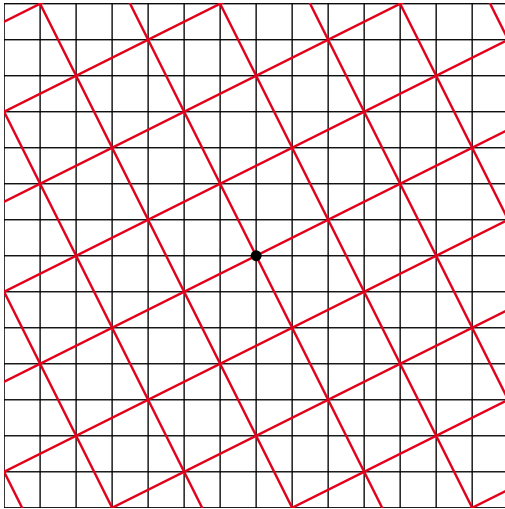
Laten we eens kijken of we kunnen voorspellen wat de oppervlakte van de vierkanten in het grofste rooster wordt als je een rooster op een rooster tekenet. In het voorbeeld begonnen we met vierkantjes van oppervlakte 1. In het $(2, 1)$ -rooster hebben de vierkanten oppervlakte $2^2 + 1^2 = 5$. In een normaal $(1, 1)$ -rooster hebben de vierkanten oppervlakte 2. En het uiteindelijke resultaat was een $(1, 3)$ -rooster op het oorspronkelijke rooster, met vierkanten van



Figuur 3

oppervlakte 10.

Dit suggereert dat bij het tekenen van een rooster op een rooster de oppervlaktes van de vierkantjes vermenigvuldigd worden. En dat is ook wel logisch. Als je een grover rooster op een $(2, 1)$ -rooster tekent, heeft elk stapje naar rechts of naar boven niet lengte 1, maar de zijde van de vierkantjes, dus lengte $\sqrt{5}$. Alle zijden worden dus $\sqrt{5}$ keer zo groot, en de oppervlakte wordt dus 5 keer zo groot.



Figuur 4

Opgave 6. In figuur 4 zie je twee plaatjes van een $(1, 0)$ -rooster waar al een $(2, 1)$ -rooster op getekend is. Teken op het linker $(2, 1)$ -rooster opnieuw een $(2, 1)$ -rooster en teken op het rechter $(2, 1)$ -rooster een $(1, 2)$ -rooster. Wat voor roosters krijg je in deze twee gevallen en wat zijn de oppervlaktes van de vierkanten?

In dit voorbeeld kun je zien dat je vierkanten met bepaalde oppervlaktes (in ons geval 25) in verschillende standen op een vierkantrooster kunt tekenen. Dat komt doordat de oppervlakte in zo'n geval op meer dan één manier te schrijven is als een som van twee kwadraten: 25 is te schrijven als $3^2 + 4^2$, maar ook als $0^2 + 5^2$.

PRODUCTEN VAN SOMMEN VAN KWADRATEN Een som van twee kwadraten kan dus getekend worden als de oppervlakte van de vierkanten in een vierkantrooster. Het tekenen van een vierkantrooster op een ander vierkantrooster komt neer op het vermenigvuldigen van twee sommen van twee kwadraten. Het resultaat is weer een nieuw vierkantrooster op het oorspronkelijke rooster, dus de nieuwe oppervlakte is ook weer te schrijven als een som van twee kwadraten.

In de getaltheorie staat dit resultaat bekend als de stelling van Brahmagupta-Fibonacci:

Stelling van Brahmagupta-Fibonacci. Als x en y sommen van twee kwadraten zijn, dan is xy ook een som van twee kwadraten.

We gaan uitzoeken welk rooster precies het resultaat is als je een rooster op een ander rooster tekent. Eerst bekijken we een niet zo ingewikkeld geval. Wat voor rooster krijgen we als we een $(c, 0)$ -rooster op een (a, b) -rooster tekenen?

Eén stap zetten in het (a, b) -rooster betekent a hokjes naar rechts en b omhoog in het oorspronkelijke rooster. Een $(c, 0)$ -rooster betekent: je vindt een nieuw roosterpunt door c stapjes naar rechts te zetten en 0 stapjes omhoog (om te bepalen wat 'rechts' betekent, moet je soms het rooster een beetje draaien). Als we c stappen opzij zetten in het (a, b) -rooster, zetten we dus effectief ac stappen naar rechts en bc stappen omhoog. Het uiteindelijke rooster is dan dus een (ac, bc) -rooster.

En nu het algemene geval: wat wordt het rooster als we een (c, d) -rooster tekenen op een (a, b) -rooster? De c stappen naar rechts op het (a, b) -rooster leveren ac stappen naar rechts en bc stappen omhoog op, zoals we al zagen. Maar nu moeten we ook nog d stappen zetten in de richting van de andere vierkantszijde. De vierkantszijde loodrecht op a hokjes naar rechts en b hokjes omhoog is: b hokjes naar links en a hokjes omhoog. (Tekenen maar eens een voorbeeld als je dat niet meteen gelooft.) Voor d stappen in die richting is het recept dus: bd hokjes naar links en ad hokjes omhoog. Als we alles bij elkaar optellen, blijkt dus dat we $ac - bd$ hokjes naar rechts moeten en $bc + ad$ hokjes omhoog. Conclusie: Als je een (c, d) -rooster op een (a, b) -rooster tekent, krijg je een $(ac - bd, ad + bc)$ -rooster.

Opgave 7. In opgave 5 heb je het vermoeden gekregen dat een (a, b) -rooster op een (c, d) -rooster te

kenen hetzelfde rooster oplevert als een (c, d) -rooster op een (a, b) -rooster. Laat met behulp van de conclusie zien dat dat inderdaad zo is.

We hadden ook beredeneerd dat de oppervlaktes van de vierkanten in de roosters vermenigvuldigd moeten worden om de oppervlakte van de vierkanten in het uiteindelijke rooster te krijgen. In een (a, b) -rooster hebben de vierkanten oppervlakte $a^2 + b^2$ en in een (c, d) -rooster $c^2 + d^2$. De oppervlakte van de vierkanten in het uiteindelijke rooster is volgens de conclusie $(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$. Als ons vermoeden klopt, dan moet dit gelijk zijn aan $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$.

Opgave 8. Laat door haakjes uitwerken zien dat dat inderdaad zo is.

Je had ook al gezien dat sommige getallen, bijvoorbeeld 25, op twee verschillende manieren als som van twee kwadraten geschreven kunnen worden en dat dat overeenkwam met twee verschillende standen van het rooster.

Opgave 9. Wat voor rooster krijg je als je een (d, c) -rooster op een (a, b) -rooster tekent?

Het rooster dat je in opgave 9 hebt beschreven, heeft vierkanten met dezelfde oppervlakte als het $(ac - bd, ad + bc)$ -rooster. Ga maar na: de vierkanten in een (d, c) -rooster hebben oppervlakte $d^2 + c^2$, dezelfde oppervlakte als die in een (c, d) -rooster.

Hieruit volgt dat als x en y sommen van twee kwadraten zijn, xy dan soms op twee manieren als som van twee kwadraten geschreven kan worden. Want als $x = a^2 + b^2$ en $y = c^2 + d^2$ (we kiezen a, b, c en d allemaal positief), dan is xy blijkbaar gelijk aan

zowel $(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$ als $(ad - bc)^2 + (ac + bd)^2$, en dat zijn twee schrijfwijzen als som van twee kwadraten!

Tenminste... als deze kwadraten verschillend zijn! Wanneer zijn de kwadraten hetzelfde? In ieder geval als één van de variabelen a, b, c, d gelijk aan nul is. Maar ook als $a = b$ of als $c = d$, zijn de kwadraten hetzelfde. (Dat kun je eenvoudig zelf controleren door deze gevallen in te vullen in de twee sommen van kwadraten.)

Dat zijn meteen de enige gevallen. Dit levert de volgende stelling op (het bewijs staat in het kader onderaan de pagina).

Stelling. Als $x = a^2 + b^2$ en $y = c^2 + d^2$ met $a > b > 0$ en $c > d > 0$, dan is xy op twee verschillende manieren te schrijven als een som van twee kwadraten, namelijk $xy = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 = (ad - bc)^2 + (ac + bd)^2$.

Denk nog even terug aan ons voorbeeld van 25. We hadden dat rooster gemaakt door een $(2, 1)$ -rooster op een $(2, 1)$ -rooster te tekenen en door een $(1, 2)$ -rooster op een $(2, 1)$ -rooster te tekenen. In dit voorbeeld geldt dus $x = 5, a = 2$ en $b = 1$ en $y = 5, c = 2$ en $d = 1$. Controleer zelf dat de formules hierboven dan inderdaad de twee sommen van kwadraten geven die we al gevonden hadden. ■

Dit artikel is gebaseerd op een deel van het werkboekje 'Sommen van kwadraten' dat onderdeel was van een wiskundekamp van stichting Vierkant voor Wiskunde, geschreven door Hugo de Blank en Johannes Steenstra.

SOM VAN KWADRATEN OP TWEE MANIEREN

We bewijzen de stelling in de rechterkolom hierboven. We gaan aantonen dat $(ac + bd)^2$ verschilt van de beide kwadraten $(ac - bd)^2$ en $(ad + bc)^2$ in de linker uitdrukking. Dit is voldoende om aan te tonen dat de beide schrijfwijzen verschillend zijn.

We berekenen eerst het verschil $(ac + bd)^2 - (ac - bd)^2 = 4abcd$. Omdat a, b, c en d volgens de aanname allemaal groter dan 0 zijn, is $4abcd$ groter dan 0. Daaruit volgt dat $(ac + bd)^2$ in ieder geval niet gelijk is aan $(ac - bd)^2$. Ook kan $(ac + bd)^2$ niet gelijk zijn aan $(ad + bc)^2$, immers: $(ac + bd)^2 - (ad + bc)^2 = a^2c^2 + 2abcd + b^2d^2 - a^2d^2 - 2abcd - b^2c^2 = a^2c^2 - a^2d^2 - b^2c^2 + b^2d^2$. Dit kunnen we schrijven als $(a^2 - b^2)(c^2 - d^2)$. Omdat $a > b$ en $c > d$, zijn beide factoren positief, dus het product is ongelijk aan 0. Het verschil tussen $(ac + bd)^2$ en $(ad + bc)^2$ is dus ongelijk aan 0, dus deze kwadraten zijn ook niet gelijk.

REN JE ROT

■ door Jan Willem Polderman

Er bestaat precies één getal van vier cijfers waarvan het eerste en tweede cijfer gelijk zijn alsook het derde en vierde en dat bovendien het kwadraat is van een geheel getal. Welk getal is dat? Laten we dat getal y noemen en het getal waarvan het een kwadraat is x . Dus $x^2 = y$. Hoe kom je er achter wat y is?

Dit probleem komt uit de Twentse Wiskunde Estafette; het is een van de vele opgaven die je zo snel mogelijk met je team moet oplossen. Hoe pak je dit aan? Eerst merk je op dat x ten hoogste 99 kan zijn, want vanaf $x = 100$ bestaat y uit minstens vijf cijfers. Om een soortgelijke reden is x minstens 32. Daarmee heb je het aantal mogelijkheden al behoorlijk ingeperkt. Door wat dieper na te denken, kun je de keuze verder reduceren. Uiteindelijk houd je zo weinig mogelijkheden over dat je ze snel een voor een kunt proberen.

Als je dit met een paar medeleerlingen doet, dan kun je het uitproberen verdelen zodat je sneller bij de oplossing bent. Als er ook nog een behulpzame wiskundestudent toekijkt die zo nu en dan wat zettes in de goede richting geeft, dan is het probleem snel gekraakt.

VOLGENDE VRAAG Het kan gebeuren dat er daarna een getal wordt gevraagd dat eindigt op een 4 en dat, na verplaatsing van die 4 van de laatste positie in het getal helemaal naar voren (524 wordt 452), een getal oplevert dat vier keer zo groot is. Ook hier geldt weer dat je met je medeleerlingen een afweging moet maken tussen nadenken (dat tijd kost) en de mogelijkheden aflopen (dat ook veel tijd kost als het aantal mogelijkheden groot is). Het devies is weer dat je gaat nadenken, de wiskun-

destudent wellicht vragend aankijkt en de taken handig verdeelt.

Met deze situatieschets krijg je misschien een indruk van de Twentse Wiskunde Estafette, een jaarlijkse wiskundewedstrijd met een knipoog. Er is voor elk wat wils. Er zijn heel lastige problemen, maar even zo vele die je met je teamgenoten kunt oplossen als je eigenlijk beter bent in Frans.

Elk najaar stromen de scholieren, meestal vanaf klas 4, van heinde en verre toe om op de Universiteit Twente een leuke, gezellige en uitdagende dag te hebben. De leerlingen opereren in teams onder begeleiding van een student Technische Wiskunde.

Het startschot klinkt en de eerste opgave wordt aan de teams voorgelegd. Zodra een team de oplossing denkt te hebben, rent de student met die oplossing naar de jurytafel waar een nieuwe opgave klaar ligt die hij dan weer zo snel mogelijk aan het aan hem toevertrouwde team voorlegt. Er wordt geconcentreerd gewerkt, de emoties lopen soms op. In het heetst van de strijd botsen er wel eens met oplossingen wapperende studenten tegen elkaar op en als het eindsignaal nabij is, worden er nog gauw zo veel mogelijk problemen opgelost.

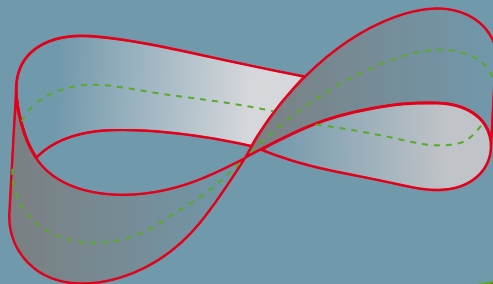
Lijkt het je leuk om hier ook eens aan mee te doen? Overtuig dan enkele medeleerlingen en je wiskundeleraar van de lol van de Twentse Wiskunde Estafette. De precieze datum van de eerstvolgende editie was bij het ter perse gaan van deze *Pythagoras* nog niet bekend, maar zeker is dat het evenement eind oktober zal zijn. Actuele informatie en de aanmeldingsprocedure vind je op de website www.twenteacademy.nl/leerlingen/wedstrijden/twentse-wiskunde-estafette (kort: goo.gl/UOgifC). ■

VIER LAMPJES

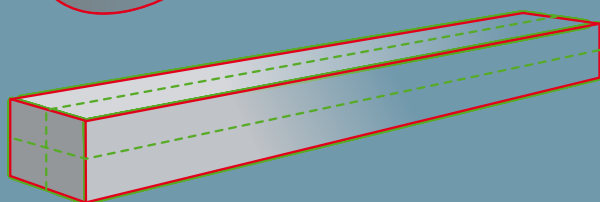
Je hebt een draaischijf met daarop vier lampjes. Elk van de lampjes is aan of uit, alleen dat kun je in het algemeen niet zien. Je ziet alleen de posities van de lampjes. Pas als alle lampjes in dezelfde toestand zijn, worden ze zichtbaar. We spelen het volgende spel. Jij wijst steeds één of twee lampjes aan die dan van toestand veranderen (uit wordt aan en andersom). Vervolgens geef ik een flinke draai aan de draaischijf zodat je niet meer weet welke lampjes je aangewezen hebt. En dan mag je er weer één of twee aanwijzen. De eerste vraag is nu of er een strategie bestaat die met zekerheid resulteert in vier lampjes in dezelfde toestand en zo ja, wat die strategie dan is. De tweede vraag is of deze vraag ooit bij een aflevering van de Twentse Wiskunde Estafette gesteld is.

MÖBIUSBALK

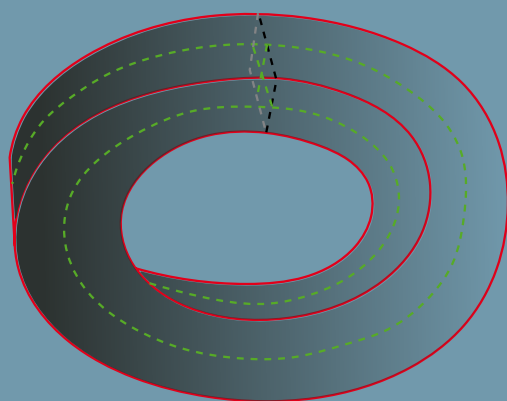
■ door Frank Roos



Figuur 1



Figuur 2



Figuur 3

Neem een strook papier, breng de uiteinden bij elkaar en draai een van de uiteinden een halve slag. Plak de uiteinden vervolgens aan elkaar. Het resultaat is een zogeheten *Möbiusband*. De Möbiusband heeft maar één kant en maar één rand: als je met je vinger langs de rand een kant op beweegt, kom je langs elk punt van de rand, zonder dat je de band hoeft 'over te steken'.

In figuur 1 is een groene stippellijn op een Möbiusband getekend. Knip de Möbiusband langs deze stippellijn in tweeën. Hoewel, in tweeën? Als je het daadwerkelijk uitvoert, zal je zien dat er weer één band ontstaat. Hoeveel randen heeft deze strook? Heeft de nieuwe band nu wel een binnen- en buitenkant? Onderzoek ook eens wat gebeurt

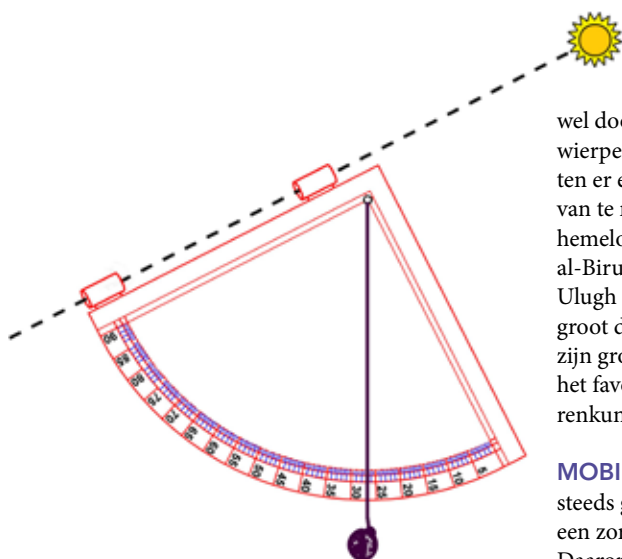
als je de Möbiusband niet in het midden doorknipt, maar op een derde van de breedte van de band.

DE MÖBIUSBALK We gaan hetzelfde doen met een stuk schuimrubber. Zorg dat je een lang stuk hebt met vierkante uiteinden (zie figuur 2). We draaien de uiteinden een kwartslag ten opzichte van elkaar en plakken ze met geschikte en stevige lijm aan elkaar vast (zie figuur 3). Merk op dat het ruimtelijk object weer één rand heeft, en ook één zijde. Wat gebeurt er als we de Möbiusbalk nu met een mes 'doormidden' snijden langs de groene stippellijn? Valt de figuur in delen uit elkaar? Hoeveel randen zijn er en hoeveel zijden? De antwoorden geven we in het volgende nummer. ■

In het antieke Griekenland werd al bedacht dat je met kwadranten de hoogte van hemellichamen boven de horizon kunt meten. Maar in de middeleeuwen gingen geleerden in de islamitische wereld nog veel verder met dit instrument. Ze maakten er een soort analoge rekenmachine van voor ingewikkelde berekeningen.

■ door Eric Kirchner

TRIGONOMETRIE AAN EEN TOUWTJE



Figuur 1 Draagbaar kwadrant om bijvoorbeeld de hoogte van de zon boven de horizon mee te meten.

Griekse sterrenkundigen probeerden zo nauwkeurig mogelijk de positie van zon, maan en planeten aan de hemel te meten. Daarvoor gebruikten zij een *armillarium*, een ingewikkelde mechanische constructie van ringen. Elke ring stelde een belangrijke cirkel aan de hemel voor, zoals de horizon, de die-renriem en de nulmeridiaan. Maar in de tweede eeuw van onze jaartelling schreef Claudius Ptolemaeus in Alexandrië al dat je helemaal geen complete ring nodig hebt om de hoek te meten van een hemellichaam boven de horizon. Een kwartcirkel oftewel kwadrant is voldoende.

Ptolemaeus kwam echter niet verder dan deze vrijblijvende opmerkingen. Er is geen enkele aanwijzing dat hij ooit echt een kwadrant heeft gebouwd. Zijn opmerking werd in de middeleeuwen

wel door islamitische geleerden opgepikt. Zij ontwierpen en bouwden enorme kwadranten, en wisten er een bijzonder nauwkeurig meetinstrument van te maken. Zo weten we dat de nauwkeurige hemelobservaties van al-Battani (853-929, Syrië), al-Biruni (973-1048), al-Tusi (1201-1274, Iran) en Ulugh Beg (1394-1449, Azerbajdzjan) voor een groot deel te danken zijn aan kwadranten. Vanwege zijn grote nauwkeurigheid was het kwadrant ook het favoriete instrument van de latere Deense sterrenkundige Tycho Brahe (1546-1601).

MOBIELE KWADRANTEN Omdat het kwadrant steeds groter werd uitgevoerd, werd het meestal aan een zorgvuldig gepositioneerde muur verankerd. Daarom wordt dit instrument ook wel een *muurkwadrant* genoemd. Maar de islamitische astronomen ontwikkelden ook een handzamere, draagbare versie van het kwadrant (zie figuur 1). En behalve het draagbare kwadrant om de zonnehoogte te meten, werden er geavanceerdere types ontwikkeld, zoals uurkwadranten, sinuskwadranten en dasturkwadranten. Al die verschillende types werden al vroeg in de islamitische wereld ontwikkeld, want ze worden allemaal al beschreven in het werk van al-Khwarizmi (780-850, Bagdad). Archeologen hebben in het Midden-Oosten veel verschillende soorten kwadranten teruggevonden die dateren tot aan de twaalfde eeuw. Vaak zijn ze geïntegreerd met een ander populair instrument, de *astrolabe*.

UURKWADRANT EN SINUSKWADRANT

Over het uurkwadrant hebben we vorig jaar al iets geschreven ('Het Zutphense kwadrant: een middel-eeuws horloge', *Pythagoras* 53-1, september 2013).



Figuur 2 Twee uurkwadranten. Het linker dateert uit de tiende eeuw en is afkomstig uit Nishapur (Iran). Het rechter is een Italiaans exemplaar uit 1575.

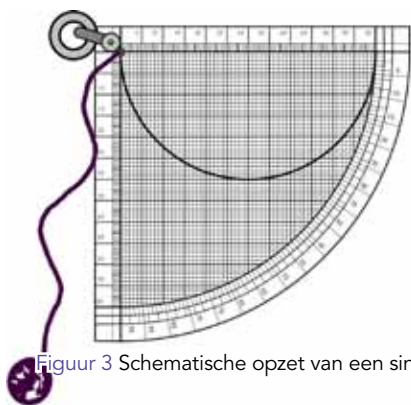
© linkerfoto Metropolitan Museum of Art, New York, www.metmuseum.org, artikelnummer 36.20.54.

© rechterfoto Europeana en Museo Galileo – Istituto e Museo di Storia della Scienza, Florence.

Eigenlijk is het een simpele vorm van een astrolabe. Je richtte het uurkwadrant op de zon met behulp van de kokertjes of markeringen langs een van de zijden (zie figuur 1 en 2a). In het middelpunt van de kwartcirkel was een koord bevestigd. Een gewicht zorgde ervoor dat het koord goed verticaal hing. Figuur 2b laat zien dat er op het kwadrant verschillende curves zijn aangebracht. De tijd kan direct worden afgelezen uit het snijpunt van het koord met de curves!

We hebben in september 2013 al laten zien dat de curves zo zijn berekend, dat je met deze constructie in feite oplossingen construeert van een oude Indiase vergelijking. Als T de tijd voorstelt in (ongelijke) uren na zonsopkomst, of uren voor zonsondergang, en als je dan op een bepaald moment de hoogtehoek h meet van de zon boven de horizon, en als H de maximale hoogtehoek is van de zon boven de lokale horizon, dan geldt namelijk bij benadering:

$$T = \frac{1}{15} \arcsin\left(\frac{\sin h}{\sin H}\right).$$



Figuur 3 Schematische opzet van een sinuskwadrant.

Wat ons nu vooral interesseert, is dat het kwadrant het blijkbaar mogelijk maakt numerieke oplossingen te vinden van wiskundige vergelijkingen. Islamitische wiskundigen vonden dat ook bijzonder, want al snel verschenen er andere types kwadranten om andere vergelijkingen mee op te lossen. Om te zien hoe het rekenen met een kwadrant in zijn werk gaat, bekijken we het *sinuskwadrant* (zie figuur 3), dat populair werd vanaf de negende eeuw. Er konden allerlei trigonometrische berekeningen mee worden uitgevoerd.

Het is eenvoudig om met zo'n sinuskwadrant de sinus of de cosinus van een hoek te bepalen. Als je bijvoorbeeld wil weten wat de sinus is van 55° , dan zoek je eerst op de gradenboog het punt op met de 55° aanduiding. Vanaf dat punt lees je de verticale coördinaat af op de schaal helemaal links in de figuur; dat is ongeveer 49,2. Dit is het antwoord. Voor ons is dat nog onhandig, want het antwoord wordt gegeven in het zestigtallige getallenstelsel: het decimale stelsel werd in de middeleeuwen nog maar weinig gebruikt. In ons decimale stelsel is het antwoord dus $49,2/60 = 0,82$. Het correcte antwoord in drie decimalen nauwkeurig is 0,819; onze berekening met een kwadrant zit daar niet ver naast.

Met iets meer moeite kun je het kwadrant ook gebruiken om te vermenigvuldigen. Laten we bijvoorbeeld eens zien hoe je $q = 19 \cot 35^\circ$ ('cot' staat voor 'cotangens'; de cotangens van een hoek is het omgekeerde van de tangens van die hoek, dus $\cot \alpha = 1/\tan \alpha$) uitrekent. Daarvoor zoek je eerst op de gradenboog het punt met de 35° aanduiding. Nu span je het touwtje waar het gewicht aan hangt zo, dat het langs die 35° aanduiding valt. Als we de getallen langs de horizontale as in figuur 3 nu even x noemen, en de getallen langs de verticale as y , dan zal het duidelijk zijn dat het touwtje nu over alle punten (x, y) ligt waarvoor $\tan 35^\circ = y/x$, oftewel $x = y \cot 35^\circ$. Om $q = 19 \cot 35^\circ$ uit te rekenen, zoek je het punt onder het touwtje waarvoor $y = 19$. Zo vind je $q = x = 27$ als antwoord. Dat is best een redelijke benadering van het exacte antwoord: $q = 27,14...$ Je ziet aan dit voorbeeld ook meteen dat het koord met het gewicht, dat oorspronkelijk was bedoeld als afleesmiddel bij het bepalen van de hoogte van een hemellichaam boven de horizon, nu een heel andere functie heeft gekregen.

Met het sinuskwadrant kun je ook veel ingewikkeldere berekeningen doen. De Egyptische sterrenkundige Ibn Yunus bijvoorbeeld besprak rond het jaar 1000 hoe je met een sinuskwadrant de kompasrichting Q van Mekka kan berekenen, wanneer je alleen maar de geografische coördinaten kent van jezelf (breedtegraad ϕ en lengtegraad λ) en van

Mekka (φ_{Mekka} en λ_{Mekka}). De exacte vergelijking hiervoor is:

$$\tan Q = \frac{\sin(\lambda - \lambda_{\text{Mekka}})}{\cos \varphi \tan \varphi_{\text{Mekka}} - \sin \varphi \cos(\lambda - \lambda_{\text{Mekka}})}.$$

Zoals deze voorbeelden laten zien, is het kwadrant een soort analoge computer, net als de latere rekenliniaal. Om een serie rekenstappen uit te voeren, moet je een reeks mechanische handelingen uitvoeren. En zonder zelf te hoeven kunnen rekenen, kun je aan het eind van de procedure het antwoord van het instrument aflezen.

Om verder te laten zien hoe kwadranten werkelijk gebruikt werden, maken we nog een paar sommen. Dit keer gebruiken we het zogenaamde *dasturkwadrant*.

DELEN MET EEN DASTURKWADRANT Het dasturkwadrant heeft weer een ander ontwerp. In figuur 4 zie je dat er nu cirkelsegmenten zijn verschenen op het kwadrant. Een ander kenmerk is dat de horizontale en de verticale as nu zowel een lineaire als een niet-lineaire schaalverdeling hebben gekregen. Om te zien hoe het dasturkwadrant werkt, beginnen we met een eenvoudige deling: hoeveel is 0,4 gedeeld door 0,75?

We moeten weer het zestigtallige stelsel gebruiken. Daarom schrijven we $0,4 = 24/60$ en noteren dat als $0'24$. Op dezelfde manier is $0,75 = 0'45$. Figuur 4 laat zien hoe de deling wordt uitgevoerd met het dasturkwadrant. Eerst zoek je langs de verticale as totdat je de noemer tegenkomt; in dit voorbeeld dus $0,75 = 0'45$. Daar vandaan loop je dan langs een horizontale lijn tot je bij de grote boog aankomt. Daar leg je het koord neer (zie figuur 4b). Vervolgens zoek je op de verticale as de teller op, $0,4 = 0'24$, en loop je weer langs een horizontale lijn. Maar dit keer stop je zodra je het koord tegenkomt (zie figuur 4c). Vanuit dat snijpunt volg je daarna parallel aan de gekromde lijnen de weg omhoog tot aan de horizontale as. Dit doe je door een nagel tegen het snijpunt op het koord te drukken, en daar-

na het koord te verschuiven naar de horizontale as zonder de nagel van het koord af te halen. Zo lees je dan direct onder je nagel op de horizontale lineaire schaal het antwoord af: $0'32 = 0,53$ (zie figuur 4d). Dit eindantwoord is heel nauwkeurig, want $0,4/0,75 = 0,5333...$

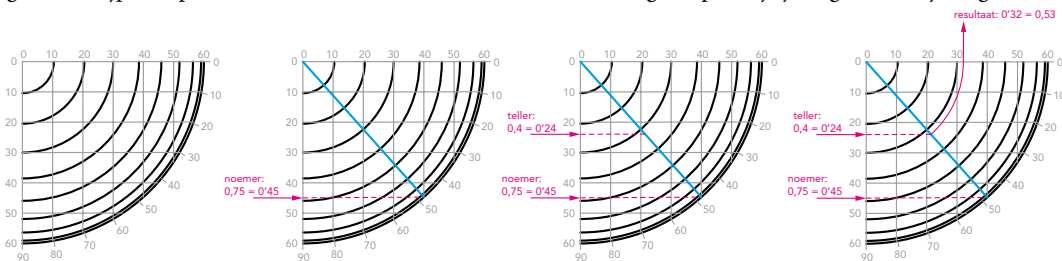
Opgave 1. Laat zien dat de deling met het dasturkwadrant er eigenlijk op neerkomt dat een breuk wordt omgezet in een standaardbreuk, met noemer 60.

Opgave 2. Waarom levert precies dezelfde mechanische berekening die we zonet gedaan hebben, ook het antwoord op de vraag hoeveel $1440/0,0125$ is? Hint: zet 1440 en 0,0125 om in het zestigtallige stelsel.

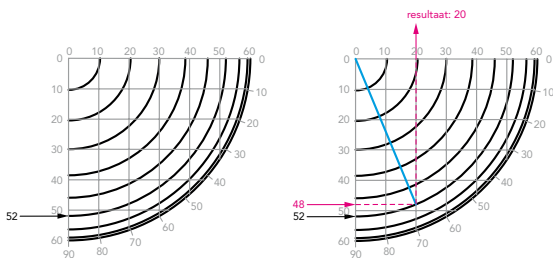
WORTELTREKKEN Met het dasturkwadrant kun je ook de wortel trekken uit een getal. Neem bijvoorbeeld 400. Natuurlijk weten we uit ons hoofd dat $\sqrt{400} = 20$, maar laten we eens kijken of we deze uitkomst ook kunnen vinden met het dasturkwadrant. De verrassende procedure is geïllustreerd in figuur 5. Kies eerst een klein, willekeurig geheel getal. Stel dat je 4 hebt gekozen. Deel dan 400 door deze 4 en tel daar weer die 4 bij op. Daarna halveer je het resultaat. In ons voorbeeld kom je uit op 52. Nu leg je het koord langs de verticale as en vervolgens plaats je je nagel op het koord bij dat getal 52 (zie figuur 5a). Houd dan je vinger op het koord, maar verleg het koord totdat je nagel terecht komt bij de horizontale lijn met waarde $52 - 4 = 48$. Als je daarna vanaf de plek van je nagel verticaal naar boven gaat, lees je op de horizontale lineaire as het getal 20 af (zie figuur 5b): dit is het antwoord.

Met name de eerste stap in deze procedure is verrassend: je kiest een *willekeurig* geheel getal. Het blijkt dat het resultaat van de procedure helemaal niet afhangt van welk getal je hier kiest. Omdat we hier $\sqrt{400}$ moesten berekenen, was het handig om het getal 4 te kiezen, want 400 laat zich daar eenvoudig door delen.

Om $\sqrt{225}$ te berekenen, is het slim om 5 te kiezen. In dat geval plaats je je nagel eerst bij het ge-



Figuur 4 Rekenen met het dasturkwadrant. Zowel horizontaal als verticaal gebruiken we de lineaire schaal. Zo berekenen we dat $0,4/0,75 = 0,533...$



Figuur 5 Bepaling van $\sqrt{400}$. Alleen de lineaire schaalverdelingen worden gebruikt.

tal $((225/5) + 5)/2 = 25$. Daarna verleg je het koord totdat je nagel bij de verticale waarde $25 - 5 = 20$ uitkomt. Als je dan vanaf die plek verticaal naar boven gaat, dan lees je het getal 15 af. En dat is inderdaad de wortel uit 225.

Opgave 3. Laat zien waarom deze procedure inderdaad de wortel van het begingetal oplevert, en dat dit niet afhangt van de waarde van het willekeurige getal dat wordt gekozen. Hint: gebruik in figuur 5b de stelling van Pythagoras voor de driehoek die het koord als hypotenusa heeft.

TRIGONOMETRIE De trigonometrische functies sinus, cosinus en tangens werden binnen de islamitische beschaving populair onder astronomen en wiskundigen. De sinusfunctie was overgenomen uit India, terwijl bijvoorbeeld de cosinus, tangens en cotangens door islamitische wiskundigen werden ingevoerd. Veel berekeningen in de sterrenkunde bleken met deze trigonometrische functies veel handiger te kunnen worden uitgevoerd dan met de rekenmethodes die in het antieke Griekenland waren gebruikt.

We zagen hierboven al dat je met een kwadrant de waarde van de sinus of de cosinus kunt aflezen voor elke willekeurige hoek. En omdat we ook al hebben gezien hoe je met een kwadrant getallen op elkaar kunt delen, is het daarmee ook mogelijk om de tangens te bepalen. Maar ook ingewikkeldere trigonometrische sommen kun je met een dasturkwadrant berekenen. We laten dat zien met de volgende som: als gegeven is dat $\lambda = 30^\circ$ en $\epsilon = 23^\circ 15'$, voor welke waarde van δ geldt dan dat $\sin \delta = \sin \lambda \cdot \sin \epsilon$?

Dit keer moeten we de niet-lineaire horizontale schaalverdeling gebruiken, die je in figuur 6a ziet. Het koord leg je eerst over de grote boog, bij een booghoek gelijk aan λ (zie figuur 6a). Hierna zoek je de zogenaamde hoogtecirkel die hoort bij de waarde ϵ (zie figuur 6b). Deze hoogtecirkels vormen een niet-lineaire schaal langs de horizontale en verticale as. Vanaf het snijpunt van het koord met

de gezochte hoogtecirkel lopen we vervolgens horizontaal naar de niet-lineaire verticale as of naar de gradenboog, en lezen daar onmiddellijk de waarde van δ af. We zien in dit voorbeeld dat $\delta = 11,5^\circ$, en dat is het eindantwoord volgens het dasturkwadrant.

Opgave 4. Kun je bedenken hoe de niet-lineaire horizontale schaal is gedefinieerd, die je in dit voorbeeld hebt gebruikt? Hint: in Figuur 6b kun je een rechthoekige driehoek aanwijzen waarvan een van de hoeken precies λ° is. Wat kun je zeggen over de sinus van die hoek? Hoe lang is de hypotenusa van die driehoek?

Probeer voor de aardigheid eens om dit sommetje met een rekenmachine op te lossen. Dan zul je zien dat het antwoord van het dasturkwadrant niet helemaal correct is, maar wel een goede benadering geeft. Je zult ook merken dat het met de rekenmachine langer duurt om tot de oplossing te komen. Natuurlijk wint je rekenmachine het als het gaat om nauwkeurige antwoorden tot op acht cijfers achter de komma. Maar in de middeleeuwen zat niemand te wachten op de positie van een hemellichaam in zoveel decimalen. Het dasturkwadrant was voor vrijwel alle toepassingen voldoende nauwkeurig. En zeker voor de geleerden die uitgebreide tabellenboeken publiceerden, kwam de ongelooflijke rekensnelheid van dit instrument goed van pas! ■

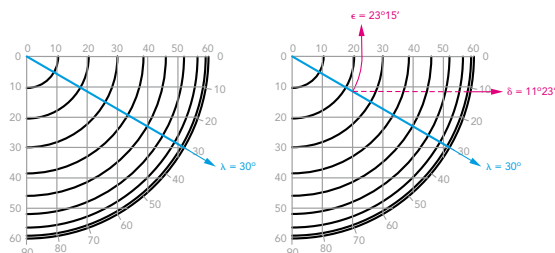
LITERATUUR

D.A. King, *In Synchrony with the Heavens, Volume 1: The Call of the Muezzin* (Brill, Leiden, 2004).

F. Charette en M. Misri, *Mathematical Instrumentation in Fourteenth-Century Egypt and Syria* (Brill, Leiden, 2005), hoofdstuk 5.

Eric Kirchner, 'Hoe werkt een astrolabium?', *Ned. Tijdschrift voor Natuurkunde*, mei 2013, 140-144.

De figuren bij dit artikel zijn in groter formaat te downloaden via www.pyth.eu.



Figuur 6 Astronomische berekening: wat is de waarde van δ waarvoor geldt: $\sin \delta = \sin \lambda \cdot \sin \epsilon$, als $\lambda = 30^\circ$ en $\epsilon = 23^\circ 15'$? Hierbij wordt voor de horizontale as de niet-lineaire schaalverdeling gebruikt.



$$\begin{aligned} 1 \times x &= \\ x \times 1 &= \\ x \end{aligned}$$

$$\frac{x}{1} = x$$

$$x^1 = x$$

$$1^x = 1$$

$$\begin{aligned} 0,999999\dots \\ = 1 \end{aligned}$$

$$^g\log 1 = 0$$

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha + \\ \cos^2 \alpha &= \\ 1 \end{aligned}$$

$$\frac{35}{70} + \frac{148}{296} = 1$$

$$0! = 1$$

$$1! = 1$$

$$\begin{aligned} \binom{n}{0} &= \binom{n}{n} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x^5 - 5x^4 + \\ 4x^2 - 11x + 9 \\ = 0 \end{aligned}$$

TRUE

—

$$\begin{aligned} 1, 4, 9, \\ 16, 25, \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1, 1, 2, 3, \\ 5, 8, \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 &= \mu(1) = \\ \mu(6) &= \mu(10) = \\ \mu(14) &= \mu(15) = \\ \mu(21) &= \mu(22) = \\ &\dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1, 4, 10, 20, \\ 35, 56, \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1, 6, 15, \\ 28, \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1, \\ 5 \end{aligned}$$

$$e^{i\pi} = 1$$

$$P(\text{totaal}) = 1$$

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = 1$$

$$1, \cap, \mathbb{R}, \frac{\pi}{2}, \mathbb{I}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \dots$$

$$5, 14, 30, 59, 91, \dots$$

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \dots$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 2 + 3 + \dots + n)^{1/n} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

3^2 en 2^3 zijn de enige twee 'echte' machten met verschil 1.

Vermoeden van Catalan/
Stelling van Mihailescu

Van een verzameling getallen uit het dagelijkse leven beginnen de meeste van die getallen met een 1.

Wet van Benford

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

Kleine stelling van Fermat

1 is het enige natuurlijke getal dat door geen enkel priemgetal deelbaar is.

$$1: \alpha \neq 1 \cdot \dots \cdot n! \alpha:$$

$$\alpha, \beta \in \mathcal{D}_{\mathcal{H}}, \alpha \cdot \beta = \gamma$$

Definitie van het getal 1 uit
Principia Mathematica

In februari van dit jaar werd een speciaal geval van Erdős' discrepantievermoeden bewezen. Voor het immense rekenwerk werd een computer ingezet. Het computerbewijs is zó lang, dat het onmogelijk door een mens geverifieerd kan worden. Het bewijs is nog niet officieel gepubliceerd, maar is al voor iedereen beschikbaar op de databank van arXiv.org.

■ door Alex van den Brandhof en Klaas Pieter Hart

HET DISCREPANTIE-VERMOEDEN



18

Een van de bezigheden van wiskundigen is het bedenken van mooie vermoedens, om die vervolgens te bewijzen. Omdat de internationale contacten tussen wiskundigen vroeger niet zo goed waren als tegenwoordig – niet in de laatste plaats door het ontbreken van internet vroeger – gebeurde het nogal eens dat meerdere wiskundigen onafhankelijk van elkaar met hetzelfde bezig waren. Neem bijvoorbeeld Nikolai Chudakov: in 1956 poneerde deze Russische getaltheoreticus een vermoeden over zogenaamde ± 1 -rijtjes. Wat hij echter niet wist, was dat exact hetzelfde vermoeden al ruim twintig jaar eerder was geformuleerd door Paul Erdős.

Toch was het niet zo dat er voor Chudakov geen eer meer te behalen viel. Het vermoeden was in al die jaren namelijk nog niet bewezen. En het leveren van een bewijs is, veel meer nog dan het opstellen van een mooi vermoeden, de meest eervolle zaak voor een wiskundige. Het is Chudakov echter niet gelukt en ook voor anderen is het probleem kennelijk te hardnekkig, want, afgezien van enkele deelresultaten, is niemand erin geslaagd om met Erdős' vermoeden af te rekenen.

DISCREPANTIETHEORIE Het vermoeden van Erdős (en Chudakov) over ± 1 -rijtjes heeft zijn wortels in de *discrepantietheorie*. Het woord *discrepantie* is afgeleid van het Latijnse *discrepare* ('niet overeenstemmen') en betekent 'afwijking' of 'tegenstrijdigheid'.

Erdős' discrepantieprobleem gaat over patronen in een oneindige rij bestaande uit niets anders dan de getallen $+1$ en -1 , bijvoorbeeld

$$\begin{aligned} &-1, +1, +1, -1, +1, +1, -1, +1, +1, \\ &-1, +1, -1, -1, +1, +1, -1, \dots \end{aligned} \quad (*)$$

Erdős deed nu het volgende. Kap de oneindige rij op een zeker moment af (zodat je een eindig beginstuk overhoudt) en bekijk binnen deze rij een aantal termen op gelijke afstand van elkaar. Bijvoorbeeld de tweede, vierde en zesde term, of de vijfde, tiende, vijftiende en twintigste term. Algemeen: als de eerste term van je deelrij de d -de term (x_d) van de originele rij is, dan gaat je deelrij zo verder: x_{2d} , x_{3d} , x_{4d} , en zo verder, tot je niet verder wilt of niet verder kunt. Je mag dus niet x_4 , x_6 , x_8 als deelrij ne-

l	d	$S_{l,d}$
2	1	$ x_1 + x_2 = 0$
2	2	$ x_2 + x_4 = 0$
2	3	$ x_3 + x_6 = 2$
2	4	$ x_4 + x_8 = 0$
2	5	$ x_5 + x_{10} = 0$
2	6	$ x_6 + x_{12} = 0$
3	1	$ x_1 + x_2 + x_3 = 1$
3	2	$ x_2 + x_4 + x_6 = 1$
3	3	$ x_3 + x_6 + x_9 = 3$
3	4	$ x_4 + x_8 + x_{12} = 1$
4	1	$ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$
4	2	$ x_2 + x_4 + x_6 + x_8 = 2$
4	3	$ x_3 + x_6 + x_9 + x_{12} = 2$
5	1	$ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1$
5	2	$ x_2 + x_4 + x_6 + x_8 + x_{10} = 1$
6	1	$ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 2$
6	2	$ x_2 + x_4 + x_6 + x_8 + x_{10} + x_{12} = 0$
7	1	$ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 1$
8	1	$ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = 2$
9	1	$ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 = 3$
10	1	$ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} = 2$
11	1	$ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} = 3$
12	1	$ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} = 2$

men: de termen liggen weliswaar op gelijke afstand (namelijk 2) van elkaar, maar de eerste term had in dit geval x_2 moeten zijn. Tel nu alle termen van je deelrij bij elkaar op en neem de absolute waarde. Van de deelrij ter lengte l waarbij de termen afstand d van elkaar hebben, noemen we deze som $S_{l,d}$. De maximale waarde van $S_{l,d}$ heet de *discrepantie* van de oorspronkelijke (afgekapte) rij.

Neem bijvoorbeeld rij (*) en kap hem af na de twaalfde term. Je houdt over:

$$-1, +1, +1, -1, +1, +1, -1, +1, +1, -1, +1, -1. \quad (**)$$

Voor deelrijen van lengte 1 geldt uiteraard:

$S_{1,d} = 1$ voor elke $d \in \{1, \dots, 12\}$. Voor $l > 1$ zetten we de sommen $S_{l,d}$ in een tabel (zie hierboven).

De discrepantie van rij (**) is de maximale waarde van $S_{l,d}$, 3 dus.

Erdős vermoedde dat het voor elke oneindige ± 1 -rij mogelijk is om een eindig beginstuk te kiezen met een discrepantie groter dan welk getal ook. De exacte formulering van het discrepantievermoeden luidt:

Discrepantievermoeden. Gegeven is een oneindige rij $x_1, x_2, x_3, \dots$ waarvan de termen uit de verzameling $\{-1, +1\}$ komen. Dan geldt: voor elke C bestaan er natuurlijke getallen n en d zodanig dat $|x_d + x_{2d} + x_{3d} + \dots + x_{nd}| > C$.

ELKE RIJ VAN LENGTE 12 HEEFT DISCREPANTIE GROTER DAN 1

We gaan aantonen dat elke ± 1 -rij van twaalf termen discrepantie 2 of meer heeft. Om te beginnen: als er een $i \in \{1, \dots, 6\}$ is met $x_i = x_{2i}$, dan geldt $|x_i + x_{2i}| = 2$ en zijn we klaar. We hoeven dus alleen maar rijen te bekijken waarvoor geldt dat $x_i = -x_{2i}$ voor elke i .

Neem aan dat de eerste term gelijk is aan +1 (als $x_1 = -1$ is, verloopt het bewijs op dezelfde manier). Dan volgt meteen dat $x_2 = -1$, $x_4 = +1$ en $x_8 = -1$. Onze rij ziet er dus zo uit:

$$+1, -1, _, +1, _, _, _, -1, _, _, _, _.$$

Bekijk nu de derde term: als $x_3 = +1$, dan volgt

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 - 1 + 1 + 1 = 2,$$

waarmee we weer klaar zijn.

We gaan dus verder met het ongunstige geval dat $x_3 = -1$, en dus $x_6 = +1$ en $x_{12} = -1$. Onze rij wordt dus:

$$+1, -1, -1, +1, _, +1, _, -1, _, _, _, -1.$$

Als de vijfde term +1 is, dan volgt

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 1 - 1 - 1 + 1 + 1 + 1 = 2,$$

en zijn we dus weer klaar.

We nemen weer het vervelende geval $x_5 = -1$ en dus $x_{10} = +1$:

$$+1, -1, -1, +1, -1, +1, _, -1, _, +1, _, -1.$$

Als de zevende term -1 is, is

$$|x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8| = |1 - 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 - 1| = |-2| = 2,$$

waarmee we opnieuw klaar zijn.

Het ongunstige geval $x_7 = +1$ moeten we nog bekijken:

$$+1, -1, -1, +1, -1, +1, +1, -1, _, +1, _, -1.$$

Als de negende term +1 is, is

$$x_1 + \dots + x_{10} = 2.$$

Het geval $x_9 = -1$ blijft dus over:

$$+1, -1, -1, +1, -1, +1, +1, -1, -1, +1, _, -1.$$

We zijn nu echter klaar, ongeacht welke waarde x_{11} heeft, want

$$|x_3 + x_6 + x_9 + x_{12}| = |-1 + 1 - 1 - 1| = |-2| = 2.$$

We kunnen dus concluderen dat de discrepantie ten minste 2 is.

Erdős reserveerde een bedrag van 500 dollar voor de eerste die het probleem kon oplossen.

Overigens had de Nederlander Bartel van der Waerden in 1927 al bewezen dat elke oneindige ± 1 -rij een eindige deelrij heeft met $|x_k + x_{k+d} + x_{k+2d} + \dots + x_{k+nd}| > C$ (voor zekere natuurlijke getallen k , d en n). Bij Van der Waerden liggen de termen van de deelrij op gelijke afstand (d) van elkaar, net als bij Erdős. Het verschil is dat de eerste term bij

Van der Waerden vrij gekozen mag worden. Erdős eist dat de eerste term x_d is (met d de afstand tussen twee opeenvolgende termen).

HET GEVAL C = 1 Het is relatief eenvoudig om het discrepantie vermoeden voor het speciale geval $C = 1$ te bewijzen. Als je een oneindige ± 1 -rij afkapt na elf termen, hoeft de discrepantie *niet* groter dan 1 te zijn. Dat blijkt uit het volgende voorbeeld:

minnetjes aangegeven). De som van alle termen is 2, ofwel: $S_{1160, 1} = 2$. Dus als de volgende term +1 is, is $S_{1161, 1}$ gelijk aan 3. Met andere woorden: de discrepantie van de rij van lengte 1161 gaat dan 1 omhoog. Verder geldt dat de som van elke 27^{ste} term (dat zijn de 42 met geel aangegeven termen) gelijk is aan -2, ofwel: $S_{42, 27} = 2$. Omdat 1161 deelbaar is door 27 (er geldt: $1161/27 = 43$), geldt dat als de 1161^{ste} term -1 is, de waarde van $S_{1161, 1}$ gelijk is aan 3. Dus ook in dit geval gaat de discrepantie van de rij van lengte 1161 met 1 omhoog. We kunnen nu concluderen dat de discrepantie niet 2 blijft, maar 3 wordt, ongeacht hoe de rij verder gaat. Om aan te tonen dat alle ± 1 -rijen van lengte 1161 een discrepantie van meer dan 2 hebben, is het ondoenlijk om alle 2^{1161} (dat is ongeveer $3,13 \times 10^{349}$) mogelijkheden na te gaan, zelfs met de hulp van een computer. Zou een computer een miljard rijtjes per seconde kunnen checken, dan zou hij hier bijna 10^{333} jaar mee bezig zijn, veel langer dan de leeftijd van het heelal!

Konev en Lisitsa zetten weliswaar de computer in, maar gebruikten een slimme truc. Ze vertaalden het probleem in zogeheten *Boolese operatoren* en gebruikten een *SAT-solver* om het probleem te kraken (zie het kader hiernaast). Het resultaat was een file van 13 gigabyte. Ter vergelijking: de hele Wikipedia beslaat zo'n 10 gigabyte. Het computerbewijs is daarmee veel te lang om door een mens gecontroleerd te kunnen worden.

Maakt dat uit? Dat is een filosofische vraag waarop wiskundigen geen eensluidend antwoord hebben. Gowers zegt erover: 'Persoonlijk ben ik relaxed over een enorm computerbewijs als dit. Het is denkbaar dat de auteurs ergens een fout maakten, maar dat geldt ook voor conventionele bewijzen.'

ALGEMEEN BEWIJS Gezien de moeilijkheid van het discrepantievermoeden is de prestatie van Konev en Lisitsa groots. Maar toch: in het licht van het oorspronkelijke vermoeden is het een druppel op een gloeiende plaat. Erdős vroeg immers naar een bewijs voor elke waarde van C ; Konev en Lisitsa hebben 'slechts' een (voor sommigen omstreden) bewijs voor het geval $C = 2$ gegeven.

Het is niet ondenkbaar dat in de toekomst soortgelijke computerbewijzen worden gevonden voor grotere waarden van C . Maar voor hoeveel speciale gevallen er ook een bewijs wordt gevonden, er blijven altijd oneindig veel gevallen over. Een algemeen bewijs zal, naar alle waarschijnlijkheid, toch op menselijk vernuft aankomen. ■

WAT DOET EEN SAT-SOLVER?

In februari van dit jaar losten Boris Konev en Alexei Lisitsa het discrepantievermoeden op voor het speciale geval $C = 2$ met behulp van een *SAT-solver*. 'SAT' staat voor *satisfiable* (vervulbaar), een begrip uit de complexiteitstheorie. Hoe gingen zij te werk bij het zoeken van rijtjes met discrepantie 3 of meer? Het klinkt wat raar, maar dat deden ze juist niet! Ze gingen op zoek naar rijtjes met discrepantie 2 of minder. Die zoektocht leverde resultaat op bij lengte 1160 en leverde niets op bij lengte 1161.

Bij het zoeken maakten ze gebruik van *propositielogica*. In *Pythagoras* 43-3 (december 2003) en 43-4 (februari 2004) stonden twee artikelen over propositielogica: 'Logisch denken of rekenen' en 'Rekenen modulo 2 en goochelen met logica'. Beide Pythagorassen zijn als pdf te vinden in het archief op www.pyth.eu. Nuttig om te bekijken alvorens verder te lezen!

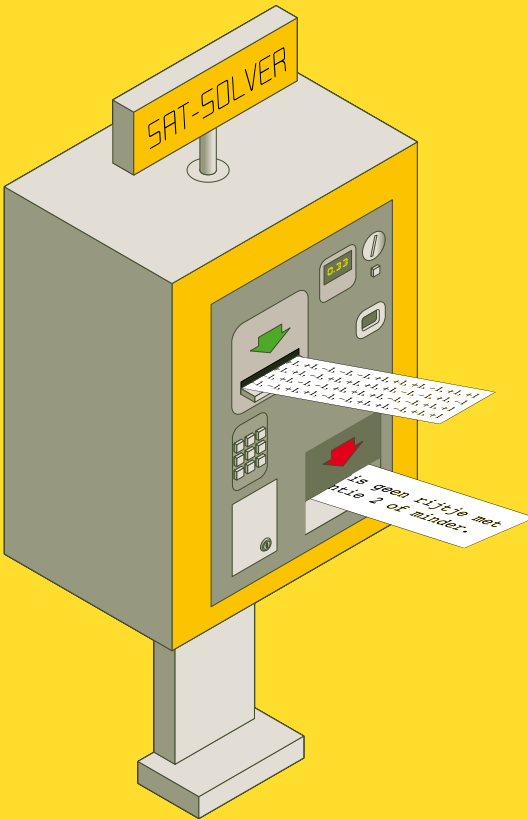
In plaats van, zoals je misschien zou denken, een heleboel optellingen te doen, lieten Konev en Lisitsa de computer een heleboel beweringen van het type 'als ... dan ...' nalopen. De reden is dat je een computer veel sneller met waarheidswaarden ('true' en 'false') kunt laten werken dan hem met getallen te laten rekenen. Zelfs zoiets eenvoudigs als $15 + 1$ is binair nogal een gedoe: in het tweetallig stelsel schrijf je 15 als 1111 en als je daar 1 bij optelt wordt dat 10000. Daar worden dus vier bits omgezet van 1 naar 0 en verder moet er een nieuw bit vrijgemaakt worden om de nieuwe 1 op te slaan. Dat klinkt als weinig werk, maar als dit soort berekeningen 2^{1161} keer gedaan moet worden, is elke besparing op werken met bits welkom.

Om het idee van Konev en Lisitsa duidelijk te maken, kijken we naar rijtjes ter lengte 11 en 12. We weten immers dat tussen 11 en 12 de discrepantie omhoog gaat van 1 naar 2.

Zoals we gezien hebben, moeten we bij een rijtje van lengte 12 ($x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}$) 23 deelrijtjes nalopen:

- zes van lengte twee: x_d, x_{2d} voor $d = 1, \dots, 6$;
- vier van lengte drie: x_d, x_{2d}, x_{3d} voor $d = 1, \dots, 4$;
- drie van lengte vier: $x_d, x_{2d}, x_{3d}, x_{4d}$ voor $d = 1, 2, 3$;
- twee van lengte vijf: $x_d, x_{2d}, x_{3d}, x_{4d}, x_{5d}$ voor $d = 1, 2$;
- twee van lengte zes: $x_d, x_{2d}, x_{3d}, x_{4d}, x_{5d}, x_{6d}$ voor $d = 1, 2$;
- voor de lengtes $l = 7, \dots, 12$ elk één: $x_1, x_2, \dots, x_l$.

Bij een rijtje van lengte 11 vallen er een paar af en sommige worden korter, maar we krijgen een bijna even grote hoeveelheid om langs te lopen. Bij 11 en



12 hebben we tegengestelde doelen: we willen laten zien dat er *wel* een rijtje ter lengte 11 met discrepantie 1 is, en we willen laten zien dat er *geen* rijtje ter lengte 12 met discrepantie 1 is.

In beide gevallen gaan we systematisch op zoek naar een rijtje met discrepantie 1 en aan het eind willen we dat de computer ons meldt 'hier is zo'n rijtje' (bij lengte 11), of 'er is niet zo'n rijtje' (bij lengte 12).

We bekijken hoe je een rijtje y_1, y_2, y_3, y_4 ter lengte 4 naloopt. Je voert *Boolese variabelen* in die alles gaan boekhouden. Om te beginnen introduceren we vier variabelen p_1, p_2, p_3 en p_4 , waarin we de waarden van de y_i 's opslaan: p_i is 'true' als $y_i = +1$ en p_i is 'false' als $y_i = -1$. Verder voeren we voor elke i de drie variabelen $s(i, -1)$, $s(i, 0)$ en $s(i, 1)$ in. Hiermee leggen we vast hoe groot $y_1 + \dots + y_i$ is: $s(i, j)$ is 'true' dan en slechts dan als $y_1 + \dots + y_i = j$.

Met behulp hiervan maken we logische formules en wel zó dat we die allemaal tegelijk 'true' kunnen maken precies dan als er een rij is met alle tussensommen gelijk aan $-1, 0$ of 1 .

Voor elke i nemen we de volgende drie formules:

- $\varphi(i, -1)$ is $s(i, -1) \wedge \neg s(i, 0) \wedge \neg s(i, 1)$;
- $\varphi(i, 0)$ is $\neg s(i, -1) \wedge s(i, 0) \wedge \neg s(i, 1)$;
- $\varphi(i, 1)$ is $\neg s(i, -1) \wedge \neg s(i, 0) \wedge s(i, 1)$.

Die voegen we samen in één formule:

$$\Phi(i) = \varphi(i, -1) \vee \varphi(i, 0) \vee \varphi(i, 1).$$

Dan is $\Phi(i)$ 'true' precies dan als een van de drie variabelen $s(i, -1)$, $s(i, 0)$ en $s(i, 1)$ 'true' is. Hieruit volgt dat

$$\Phi(1) \wedge \Phi(2) \wedge \Phi(3) \wedge \Phi(4)$$

'true' is, precies dan als elke tussensom $-1, 0$ of 1 is.

Voor $i = 1$ moeten de volgende drie formules zeker 'true' zijn: $\neg s(1, 0)$ (want $y_1 \neq 0$), $s(1, 1) \Leftrightarrow p_1$ en $s(1, -1) \Leftrightarrow \neg p_1$.

Voor $i \geq 2$ maken we betrekkingen $\xi(i, j)$ en $\psi(i, j)$ tussen $s(i, j)$ en eerdere s -en en p_i :

- $\xi(i, j)$ is $s(i, j) \Leftrightarrow (s(i-1, j-1) \wedge p_i)$ voor $j \geq 0$;

- $\psi(i, j)$ is $s(i, j) \Leftrightarrow (s(i-1, j+1) \wedge \neg p_i)$ voor $j \leq 0$.

Wat je met wat vasthoudendheid kunt nagaan is het volgende: alle tussensommen zijn gelijk aan $-1, 0$ of 1 dan en slechts dan als de volgende formules allemaal waarheidswaarde 'true' hebben:

- $\Phi(1) \wedge \Phi(2) \wedge \Phi(3) \wedge \Phi(4)$;

- $\neg s(1, 0) \wedge (s(1, 1) \Leftrightarrow p_1) \wedge (s(1, -1) \Leftrightarrow \neg p_1)$;

- $\xi(i, j), i \geq 2, j \geq 0$;

- $\psi(i, j), i \geq 2, j \leq 0$.

Voor elk van de 23 deelrijtjes maken we zo'n verzameling formules, met voor elke deelrij telkens andere variabelen van de vorm $s(i, j)$, maar met één vaste rij variabelen p_i . Zo wordt p_2 bij elke rij ingezet waar x_2 in voorkomt.

Als we nu aan al die variabelen een waarde 'true' of 'false' kunnen geven zó dat alle formules voor alle rijtjes de waarde 'true' krijgen, dan geven de waarden van de p_i 's ons een rij met discrepantie 1.

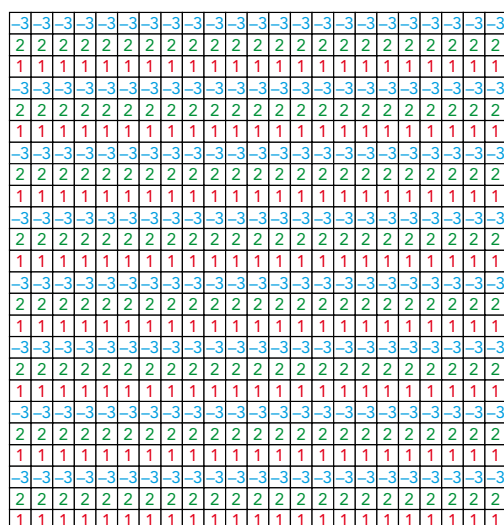
Je kunt de strategie van de SAT-solver terugzien in het bewijs op pagina 20: in feite probeert de SAT-solver het bewijs te laten mislukken. Wat wij ongunstig noemden, is voor de solver juist gunstig, omdat dan zoveel mogelijk formules 'true' worden gemaakt. De SAT-solver zal aan het eind, zodra x_3, x_6, x_9 en x_{12} vastliggen, moeten concluderen dat het niet lukt de discrepantie onder de 2 te houden.

Konev en Lisitsa hebben de formules uitgeschreven die bij zoektochten onder rijen van lengte 1160 en 1161 horen. Daar mag de som $-2, -1, 0, 1$ of 2 zijn, dus daar komen we telkens vijf s -en tegen: $s(i, -2), s(i, -1), s(i, 0), s(i, 1)$ en $s(i, 2)$. De formules $\xi(i, j)$ en $\psi(i, j)$ blijven hetzelfde. Het resultaat was: bij 1160 is er een toekenning die alles 'true' maakt en die drukte de SAT-solver netjes af; bij 1161 is er niet zo'n toekenning en dus heeft elke rij van die lengte discrepantie 3.

Een polyomino is een tweedimensionale figuur die bestaat uit een aantal aan elkaar geplakte vierkantjes. In dit artikel gaat het erom elk vierkantje volgens een bepaalde spelregel van een getal te voorzien. We eindigen met twee open vragen: leuk voor eigen onderzoek.

■ door Jaap Kluwen

BURENSOMMEN IN POLYOMINO'S



Figuur 1

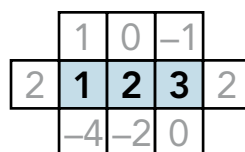
In figuur 1 zie je een representatie van wat ik noem de 'oneindige burensom'. Elke cel is de optelling van de vier burenen van die cel. Neem bijvoorbeeld een cel met daarin het getal -3 : de vier burenen hebben de waarden -3 (links), 1 (boven), -3 (rechts) en 2 (onder), en inderdaad is -3 gelijk aan de som van die vier getallen. De vier buurcellen van een cel heten de *4-buurt* of de *Von Neumannbuurt* van deze centrale cel, naar de Hongaars-Amerikaanse wiskundige John von Neumann. (De andere variant is de *8-buurt* of *Moorebuurt*, naar de Amerikaan Edward Moore, die acht cellen als buurcel ziet. Dit zijn ook bekende begrippen van pixels in computergraphics.)

Op zich is de figuur niet zo spannend: hij bestaat enkel uit aaneengeplakte strips van enen, tweeën en

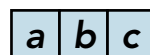
drieën. Bijzonder is de figuur ook niet echt: er zijn oneindig veel van dit soort roosters te maken.

EINDIGE ROOSTERS In dit artikel bekijken we daarom burensommen van eindige roosters, beter gezegd: *polyomino's*. Een polyomino is een tweedimensionale figuur die bestaat uit een aantal vierkantjes; elk vierkantje ligt met ten minste één zijde tegen een ander vierkantje. Polyomino's met één tot en met vijf vierkantjes heten respectievelijk *monomino's*, *domino's*, *triomino's*, *tetromino's* en *pentomino's*.

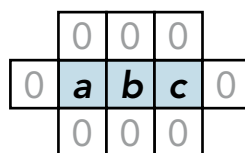
In elk vierkantje van zo'n polyomino plaatsen we een getal. Figuur 2 toont een voorbeeld van een triomino met de getallen 1 , 2 en 3 , waarbij elke zijde die *niet* aan een vierkantje raakt, grenst aan een buurcel met een zeker getal. Hier is aan de drie ei-



Figuur 2



Figuur 3



Figuur 4

sen $1 = 1 + 2 - 4 + 2$, $2 = 0 + 3 - 2 + 1$ en $3 = -1 + 2 + 0 + 2$ voldaan. De vraag is nu: welke getallen kunnen a , b en c (in figuur 3) zijn, bij vooraf gegeven burenen? We moeten dus telkens eerst afspreken welke waarden de omliggende buurcellen van a , b en c hebben. Eerst bekijken we de situatie waarbij alle buurcellen de waarde 0 hebben (zie figuur 4).

Opgave 1. Laat zien dat er in figuur 4 precies één mogelijke oplossing is voor de getallen a , b en c .

Nu geven we de buurcellen allemaal de waarde -1 (zie figuur 5). Er moet dan gelden:

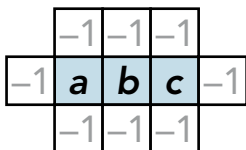
$$\begin{cases} a = b - 3 \\ b = a + c - 2 \\ c = b - 3 \end{cases} \quad (*)$$

De oplossing is $a = 5$, $b = 8$ en $c = 5$ (zie figuur 6). Nu is het natuurlijk leuk om uit te zoeken of elke polyomino een oplossing heeft.

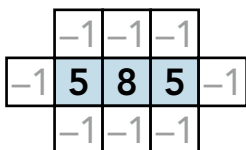
Opgave 2. Bepaal bij willekeurig gegeven burenen de oplossing van de monomino.

Opgave 3. Laat zien dat er geen oplossing is voor een domino als alle buurcellen de waarde -1 hebben.

Opgave 4. Stel, een domino is omringd door de burenen u , v , w , x , y , z . Aan welke voorwaarde moeten deze getallen voldoen zodat er een domino is met deze burensom?



Figuur 5



Figuur 6

STELSELS LINEAIRE VERGELIJKINGEN De drie vergelijkingen (*) vormen een zogeheten *stelsel van lineaire vergelijkingen*. We kunnen dit stelsel omwerken tot

$$\begin{cases} a - b = -3 \\ -a + b - c = -2 \\ -b + c = -3 \end{cases}$$

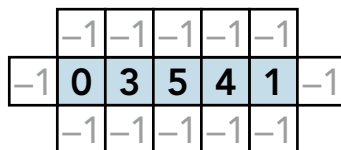
In matrixnotatie wordt dit stelsel:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

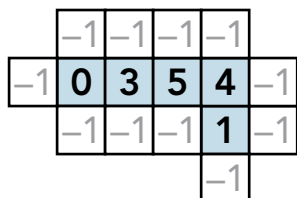
De 3×3 -matrix wordt de *coëfficiëntenmatrix* genoemd. Deze coëfficiënten corresponderen met de factoren van de drie variabelen in het stelsel. Het stelsel kun je natuurlijk met de hand oplossen, maar het kan ook met een grafische rekenmachine (bij de TI-84 kun je met 2nd[MATRIX] een matrix invoeren) of met Excel (zie het kader op pagina 27).

NIET ALTIJD ÉÉN OPLOSSING In de rest van dit artikel geven we de buurcellen steeds de waarde -1 . Zijn er polyomino's met meerdere oplossingen? Het antwoord is ja; een voorbeeld is de 'gestrekte' pentomino in figuur 7. Het bijbehorende stelsel is 'afhankelijk', dat wil zeggen: er zijn meerdere oplossingen. Laten we de eerste van de vijf variabelen vrij, dan volgt de oplossing $(a, a + 3, 5, 4 - a, 1 - a)$; dus is bijvoorbeeld $(0, 3, 5, 4, 1)$ een oplossing, maar ook het symmetrische $(\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}, 5, 3\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ is een oplossing.

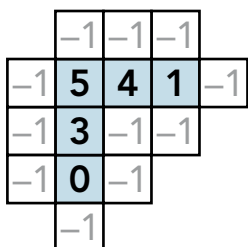
In figuur 8 en 9 zie je nog twee andere pentomino's met dezelfde oplossing.



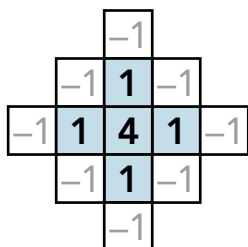
Figuur 7



Figuur 8



Figuur 9



Figuur 10

$n = 6$	-1 2 5 5 2 -1
$n = 7$	-4 -1 5 8 5 -1 -4
$n = 9$	5 8 5 -1 -4 -1 5 8 5
$n = 10$	2 5 5 2 -1 -1 2 5 5 2
$n = 11$	1 4 5 3 0 -1 1 3 5 4 1
$n = 12$	-1 2 5 5 2 -1 -1 2 5 5 2 -1
$n = 13$	-4 -1 5 8 5 -1 -4 -1 5 8 5 -1 -4
$n = 15$	5 8 5 -1 -4 -1 5 8 5 -1 -4 -1 5 8 5

Figuur 11

Opgave 5. Bepaal alle pentomino's die bovengenoemde oplossing hebben. (Oplossing op pagina 32.)

Een stap verder is het karakteriseren van de oplossingen van alle twaalf pentomino's. De 'plus' zie je in figuur 10.

Opgave 6. Bepaal de oplossingen van de burensommen van alle twaalf pentomino's. (Oplossing op pagina 32.)

In figuur 11 staan nog een aantal 'gestrekte' n -polyomino's voor hogere waarden van n met hun oplossing (de buurcellen met waarden -1 zijn wegge laten). Merk op dat bijvoorbeeld de oplossing voor $n = 6$ te zien is als de oplossing voor $n = 4$ (2, 5, 5, 2) met aan de randen de waarde -1 . Deze 'plakconstructie' geldt voor meer oplossingen.

Opgave 7. Voor $n = 8$ en $n = 14$ is er geen oplossing mogelijk. Waarom?

Ook oplossingen met alleen breuken komen voor, bijvoorbeeld in de oplossing voor de nonomino (polyomino met negen vierkanten) in figuur 12.

EEN LINEAIR STELSEL OPlossen MET EXCEL

	A	B	C	D	E	F
1	Matrix:				Uitkomst:	
2	1	-1	0		-3	
3	-1	1	-1		-2	
4	0	-1	1		-3	
5	Determinant:					
6	-1					
7	Inverse:				Oplossing:	
8	5	-1	-1		5	
9	-1	-1	-1		8	
10	-1	-1	0		5	

Hoe los je het stelsel van lineaire vergelijkingen

$$\begin{cases} a - b = -3 \\ -a + b - c = -2 \\ -b + c = -3 \end{cases}$$

op met Excel?

1. Zet de coëfficiëntenmatrix in een 3×3 -blok; in de figuur zijn cellen A2 tot en met C4 genomen. Zet de drie uitkomsten in bijvoorbeeld E2, E3, E4.

2. Roep in een nieuwe cel de functie DETERMINANTMAT op (bij de 'functiewizard' f_x of bij Formules; Engelse versie: MDETERM) en pas hem toe op de matrix, bijvoorbeeld =DETERMINANTMAT(A2:C4). Als deze determinant ongelijk is aan nul, heeft het bijbehorende stelsel precies één oplossing. Hier is de determinant gelijk aan -1 .

3. Zo ja bij 2: roep in een nieuwe cel (hier A8) de functie INVERSEMAT (Engels: MINVERS) op en pas deze toe op de matrix met INVERSEMAT(A2:C4). Om de gehele inverse matrix te zien, is het in Excel nodig om de volgende stappen uit te voeren:

- selecteer de cellen A8 t/m C10 met de rechtermuisknop ingedrukt;
 - ga met de cursor in de functiebalk, dus bij INVERSEMAT(A2:C4), staan;
 - druk tegelijkertijd op Ctrl, Shift én Enter (de uitdrukking komt nu tussen accolades te staan).
4. Vermenigvuldig deze inverse matrix met de vector $(-3, -2, -3)$ in E2:E4 met PRODUCTMAT (A6:C8;E2:E4) (Engels: MMULT). De oplossing is $(5, 8, 5)$.
5. Zo nee bij 2: het stelsel is 'afhankelijk' (er zijn meerdere oplossingen) of 'strijdig' (er is geen oplossing).

	-1	-1	-1	
-1	$-\frac{4}{7}$	$\frac{5}{7}$	$-\frac{4}{7}$	-1
-1	$\frac{5}{7}$	$\frac{20}{7}$	$\frac{5}{7}$	-1
-1	$-\frac{4}{7}$	$\frac{5}{7}$	$-\frac{4}{7}$	-1
	-1	-1	-1	

Figuur 12

OPEN VRAGEN Er valt nog veel te ontdekken. Op de volgende twee vragen weten wij zelf het antwoord niet. Stuur je bevindingen naar post@pyth.eu.

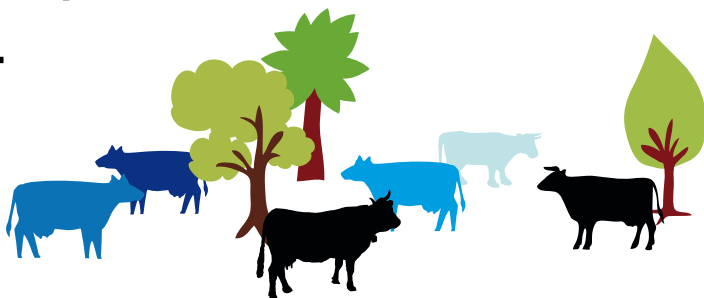
Opgave 8. Zijn er nog meer polyomino's zonder oplossing, of met meerdere oplossingen?

Opgave 9. Zijn er nog meer polyomino's behalve die in figuur 10 met een oplossing van alleen positieve getallen? ■

Sinds 2008 is er ook een juniorvariant van de Wiskunde Olympiade. Voor deze wedstrijd worden 200 scholieren uit de tweede en derde klas uitgenodigd die het jaar ervoor uitzonderlijk goed gepresteerd hebben bij de W4Kangoeroewedstrijd. Deze scholieren krijgen zestien vragen voorgeschoteld. Pittige vragen, waar wiskundig over nagedacht moet worden, maar waar toch enkel voorkennis van de basisschool voor nodig is. We bekijken nu een paar opgaven van vorig jaar waarbij geteld moet worden.

■ door Peter Ypma

TELLEN, EEN KUNST APART



Tijdens een wandeling kwam ik afgelopen week een opa met twee kleinzonen tegen. Ze waren aan het tellen hoeveel koeien er in een weide stonden. Dat was niet zo makkelijk: de koeien liepen door elkaar en als hindernis had de boer ook nog een paar bomen geplant. Een van de jongens kwam echter op het idee om een foto te maken: 'Dan lopen ze niet meer door elkaar.' Met behulp van de foto kwamen ze erachter dat er 26 koeien waren. Daarop kwam de boer nog een praatje maken. Die zei: 'Ik tel ze ook regelmatig, maar dan in de stal. Daar staan ze op een rijtje. Dat telt wel zo makkelijk.'

De jongens vonden de strategie van de boer maar valsspelen. Deze strategie passen wiskundigen echter ook vaak toe wanneer ze iets lastigs proberen te tellen. Ze proberen hetgene wat ze moeten tellen zó te manipuleren dat het makkelijk telt. Laten we eens bekijken hoe dat in zijn werk gaat bij de volgende opgave, afkomstig uit de Junior Wiskunde Olympiade van vorig jaar.

Opgave 4 (JWO 2013, deel 2)

Hoeveel getallen tussen 1 en 1000 zijn niet deelbaar door 2, wel deelbaar door 3, niet deelbaar door 5 en wel deelbaar door 7?

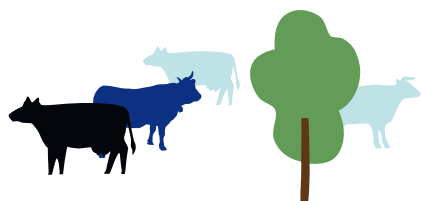
Het lastige is dat we met veel verschillende eigenschappen rekening moeten houden. Zo voldoet het getal 9 (een van de 1000 getallen waar de opgave over gaat) wel aan de eerste drie eisen – 9 is niet deelbaar door 2, wel deelbaar door 3 en niet deelbaar door 5 – maar moeten we het toch niet meetellen, omdat 9 niet deelbaar is door 7 en dus niet aan de vierde eis voldoet.

MINDER KANDIDATEN We zitten dus opgescheept met veel kandidaten (de getallen 1 tot en met 1000) en veel eisen. Het is daarom logisch om

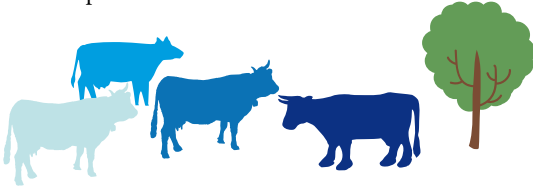


op zoek te gaan naar een manier om het aantal kandidaten en eisen te verkleinen. Dit is mogelijk door twee stukjes kennis te combineren. We weten namelijk dat de getallen veelvouden van 3 én 7 moeten zijn. Dan moet het ook een veelvoud van 21 zijn. Onder de getallen tussen 1 en 1000 houden we dan nog maar 47 kandidaten over: $1 \cdot 21, 2 \cdot 21, 3 \cdot 21, \dots, 47 \cdot 21$.

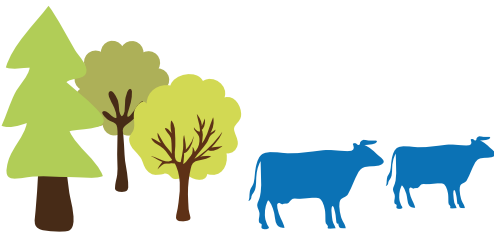
We hoeven deze 47 getallen nog maar op twee eigenschappen te checken. Alleen de getallen die zowel niet deelbaar door 2 als niet deelbaar door 5 zijn, moeten we meetellen. We beginnen met te kijken welke niet deelbaar zijn door 2. Hiervoor merken we op dat een oneven getal keer een oneven



getal weer een oneven getal als uitkomst geeft. Dus kandidaten van de vorm 'oneven $\cdot 21$ ' voldoen aan de eis dat ze niet deelbaar zijn door 2. De andere kandidaten (dus van de vorm 'even $\cdot 21$ ') voldoen juist niet aan deze eis, want een even getal keer 21 geeft juist een even uitkomst. Eenzelfde soort principe werkt voor het getal 5. Het product van twee getallen is alleen deelbaar door 5 als een van de getallen zelf deelbaar is door 5. Aangezien 21 zelf niet deelbaar is door 5, moeten we alleen de getallen van de vorm 'vijfvoud $\cdot 21$ ' van onze lijst wegstrepen.



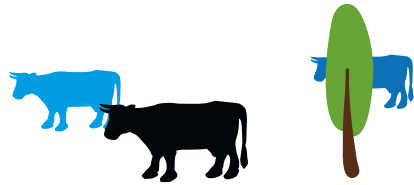
We weten nu dus dat het gaat om de getallen van de vorm 'oneven maar geen vijfvoud $\cdot 21$ ', dus dat we alleen maar hoeven te bedenken hoeveel getallen er kleiner dan 48 zijn die oneven en geen vijfvoud zijn. We kunnen deze getallen direct tellen of nog een keer gaan ordenen. Het ordenen kan bijvoorbeeld door in te zien dat de oneven getallen die geen vijfvoud zijn, precies die getallen zijn die



op een 1, 3, 7 of 9 eindigen. Daarvan zijn er vier bij de eerste tien getallen, vier bij de getallen 11 tot en met 20, vier bij de getallen 21 tot en met 30, vier bij de getallen 31 tot en met 40 en ten slotte drie bij 41 tot en met 47. We hebben in totaal dus $4 \cdot 4 + 3 = 19$ getallen die aan onze eigenschap voldoen.

MEER PROBLEMEN Telproblemen zoals deze opgave kom je veel tegen bij de Wiskunde Olympiade. Op de Junior Wiskunde Olympiade waren het er vorig jaar maar liefst vier. Twee daarvan staan

hieronder. Bij deze problemen is de moeilijkheid niet om uit een berg mogelijkheden de juiste te selecteren, maar om de mogelijke opties op te sporen en deze niet dubbel te tellen. Veel puzzelplezier! ■

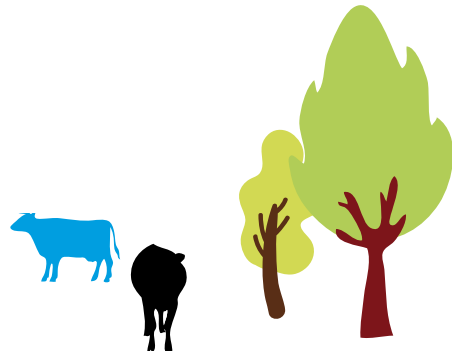


Opgave 7 (JWO 2013, deel 1)

We willen de getallen 1 tot en met 9 in een groep van vier en een groep van vijf getallen verdelen. In elk van die groepen vermenigvuldigen we de getallen. We delen de grootste van de twee uitkomsten door de kleinste. De uitkomst van die deling moet een geheel getal zijn. Hoeveel opsplitsingen in een groep van vier en een groep van vijf getallen zijn er mogelijk?

Opgave 8 (JWO 2013, deel 1)

Jan heeft zes even grote vierkanten: twee rode, twee grijze en twee blauwe. Door die aan elkaar te plakken maakt hij een kubus. Hoeveel verschillende kubussen kan Jan maken? Twee kubussen zijn verschillend als ze niet door draaien in de ruimte in elkaar kunnen worden overgevoerd.



29

PYTHAGORAS OLYMPIADE

■ door Matthijs Coster, Eddie Nijholt en Harry Smit

Doe mee met de Pythagoras Olympiade! Elke aflevering bevat vier opgaven. De eerste twee zijn wat eenvoudiger; onder de goede inzendingen van leerlingen uit de klassen 1, 2 en 3 wordt een cadeaubon van Bol.com ter waarde van 20 euro verloot. De laatste twee zijn echte breinbrekers; onder de goede inzendingen van leerlingen (tot en met klas 6) wordt een bon van 20 euro verloot. Per aflevering wordt maximaal één bon per persoon vergeven.

Daarnaast krijgen leerlingen (tot en met klas 6) punten voor een *laddercompetitie*, waarmee eveneens een cadeaubon van Bol.com van 20 euro te verdienen valt. De opgaven van de onderbouw zijn 1 punt waard, de opgaven van de bovenbouw 2 punten. De leerling met de hoogste score in de laddercompetitie krijgt een bon. Zijn puntentotaal wordt weer op 0 gezet. Wie zes achtereenvolgende keren niets inzendt, verliest zijn punten in de laddercompetitie.

Met de bovenbouw-opgaven kun je ook een plaats in de finale van de Nederlandse Wiskunde Olympiade verdienen, mocht



het via de voorronden niet lukken: aan het eind van elke jaargang worden enkele goed scorende leerlingen uitgenodigd voor de NWO-finale. Niet-leerlingen kunnen met de Pythagoras Olympiade meedoen voor de eer.

HOE IN TE ZENDEN? Inzendingen ontvangen we bij voorkeur per e-mail (getypt of een scan van een handgeschreven oplossing):

pytholym@gmail.com

Je ontvangt een automatisch antwoord zodra we je bericht hebben ontvangen.

Eventueel kun je je oplossing sturen naar Pythagoras Olympiade, PWN

p.a. Centrum Wiskunde & Informatica

Postbus 94079

1090 GB Amsterdam

Voorzie het antwoord van een duidelijke toelichting (dat wil zeggen: een berekening of een bewijs). Vermeld je naam en adres; leerlingen moeten ook hun klas en de naam van hun school vermelden.

Je inzending moet bij ons binnen zijn vóór 31 oktober 2014.

DE GOEDE INZENDERS VAN APRIL 2014

282: Wouter Andriessen (klas 4), Leilandscholen Campus Vlaanderen, Kortrijk; Pieter Dekker, Krimpen a/d Lek; Arie Heikoop, Kampen; Jelmer Hinssen (klas 3), Stedelijk Gymnasium Nijmegen; Nathan van 't Hof (klas 5), Hofstad Lyceum Rijsijk; Arie van der Kraan, Nuth; Pascal Kwantes, Almere; Tjard Langhout (klas 3), Goois Lyceum Bussum; Pieter-Jan Meuris (klas 4), Klein Seminarie Roeselare; Simon Roelandt (klas 5), Omze-Lieve-Vrouwecollege Antwerpen; Reinier Schmiermann (klas 3), Stedelijk Gymnasium 's-Hertogenbosch; Pim Spelier (klas 3), Christelijk Gymnasium Sorghvliet, Den Haag; Michelle Sweering (klas 6), Erasmiaans Gymnasium Rotterdam; Paul van de Veen, Enschede; Rob van der Waall, Huizen.

283: Wouter Andriessen (klas 4), Leilandscholen Campus Vlaanderen, Kortrijk; Kees Boersma, Vlissingen; Arie Heikoop, Kampen; Arie van der Kraan, Nuth; Tjard Langhout (klas 3), Goois Lyceum Bussum; Pieter-Jan Meuris (klas 4), Klein Seminarie Roeselare; Niels van Mierlo (klas 2), Christelijk Gymnasium Utrecht; Simon Roelandt (klas 5), Omze-Lieve-Vrouwecollege Antwerpen; Reinier Schmiermann (klas 3), Stedelijk Gymnasium 's-Hertogenbosch; Pim Spelier (klas 3), Christelijk Gymnasium Sorghvliet, Den Haag; Michelle Sweering (klas 6), Erasmiaans Gymnasium Rotterdam; Paul van de Veen, Enschede; Rob van der Waall, Huizen.

284: Wouter Andriessen (klas 4), Leilandscholen Campus Vlaanderen, Kortrijk; Kees Boersma, Vlissingen; Arie Heikoop, Kampen; Nathan van 't Hof (klas 5), Hofstad Lyceum Rijsijk; Pascal Kwantes, Almere; Pieter-Jan Meuris (klas 4), Klein Seminarie Roeselare; Simon Roelandt (klas 5), Omze-Lieve-Vrouwecollege Antwerpen; Reinier Schmiermann (klas 3), Stedelijk Gymnasium 's-Hertogenbosch; Pim Spelier (klas 3), Christelijk Gymnasium Sorghvliet, Den Haag; Michelle Sweering (klas 6), Erasmiaans Gymnasium Rotterdam; Paul van de Veen, Enschede.

285: Wouter Andriessen (klas 4), Leilandscholen Campus Vlaanderen, Kortrijk; Kees Boersma, Vlissingen; Pieter Dekker,

Krimpen a/d Lek; Arie Heikoop, Kampen; Laurens Hilbrands (klas 3), Goois Lyceum Bussum; Jelmer Hinssen (klas 3), Stedelijk Gymnasium Nijmegen; Tjard Langhout (klas 3), Goois Lyceum Bussum; Pieter-Jan Meuris (klas 4), Klein Seminarie Roeselare; Simon Roelandt (klas 5), Omze-Lieve-Vrouwecollege Antwerpen; Reinier Schmiermann (klas 3), Stedelijk Gymnasium 's-Hertogenbosch; Pim Spelier (klas 3), Christelijk Gymnasium Sorghvliet, Den Haag; Michelle Sweering (klas 6), Erasmiaans Gymnasium Rotterdam; Paul van de Veen, Enschede.

Cadeaubonnen: Pim Spelier en Simon Roelandt.

Stand laddercompetitie: Jelmer Hinssen (21 p; cadeaubon), Michelle Sweering (18 p), Nathan van 't Hof (16 p), Pieter-Jan Meuris (15 p), Wouter Andriessen (12 p), Wout Gevaert (12 p), Frenk Out (12 p), Marinda Westerveld (10 p), Tara van Belkom (9 p), Pim Spelier (9 p), Oscar Heijdra (7 p), Lennart Muijres (7 p), Simon Roelandt (6 p), Reinier Schmiermann (6 p), Tim Vermeulen (6 p), Michiel Versnel (6 p), Max Bosman (5 p), Eva Kapitein (5 p), Tjard Langhout (5 p), Beaudine Smeekes (5 p), Art Waeterschoot (5 p), Bob Zwetsloot (5 p), Laurens Hilbrands (4 p), Marijke Bot (3 p), Jildert Denneman (3 p), Ivo van Dijk (3 p), Anton van Es (3 p), Ritchie Keijsper (3 p), Jia-Jia ter Kuile (3 p), Timen Schenk (3 p), Sjoerd de Vries (3 p), Sietse Couperus (2 p), Maud van de Graaf (2 p), Phillip de Groot (2 p), Maud Jonker (2 p), Yvette Keij (2 p), Alex Keizer (2 p), Niels van Mierlo (2 p), Tom Smeding (2 p), Jelle den Uil (2 p), Sied Vrasdonk (2 p), David Welling (2 p), Marc Zuurbier (2 p), Sterre ter Beek (1 p), Simon de Best (1 p), Johanna Bult (1 p), Lisa Clappers (1 p), Maarten Clercx (1 p), Sander Engelberts (1 p), Tessa Engelberts (1 p), Bram Honig (1 p), Elisabeth Kuijper (1 p), Bram van der Linden (1 p), Hannah Nijse (1 p), Anne Noom (1 p), Seb Waterreus (1 p).
Noot van de redactie: P. Dekker was per abuis niet vermeld bij de goed opgeloste opgaven 270-273. Onze excuses.

OPGAVE 290

Bij een groepje van zes jongens zijn er twee die appels stelen. Maar wie van de zes?

Jan zei: 'Piet en Dirk.'

Wim zei: 'Donald en Tom.'

Donald zei: 'Tom en Piet.'

Dirk zei: 'Jan en Piet.'

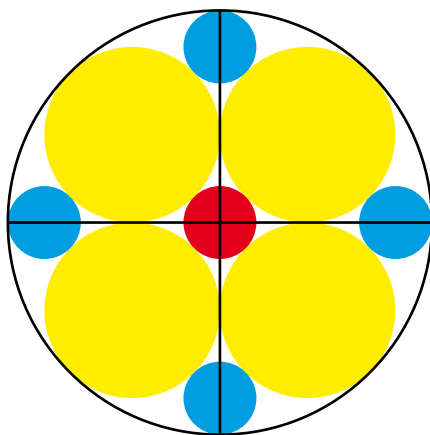
Piet zei: 'Donald en Wim.'

Tom was niet te vinden.

Vier van de vijf ondervraagde jongens hadden een van de dieven goed en hadden gelogen over de andere. De vijfde had geen van beide dieven correct genoemd. Wie waren de dieven?

OPLOSSING 283

Kees tekent een cirkel en twee middellijnen die loodrecht op elkaar staan (zie plaatje). Vervolgens tekent hij in elk van de kwart cirkels die zijn ontstaan een nieuwe cirkel die raakt aan de oorspronkelijke cirkel en aan de twee middellijnen (de gele cirkels). Daarna tekent hij een cirkel die raakt aan deze vier gele cirkels (de rode cirkel). Ten slotte tekent hij vier cirkels die raken aan de oorspronkelijke cirkel en de gele cirkels (de blauwe cirkels). Kees vraagt zich af welke straal groter is: die van de rode cirkel of die van een blauwe cirkel? Los jij het probleem op voor Kees?



OPGAVE 291

Schrijf het getal 5,02 0142 0142 0142 ... als een breuk.

OPGAVE 292

Zoals je weet, is de grootste gemene deler van 5 en 20 gelijk aan 5. De getallen 5, 20 en 4 hebben de eigenschap dat $\frac{1}{5} + \frac{1}{20} = \frac{1}{4}$. Laat zien dat de volgende algemene stelling juist is.

Gegeven zijn drie natuurlijke getallen a , b en c zodanig dat $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$. Dan geldt altijd dat de grootste gemene deler van a en b groter is dan 1.

Met andere woorden: laat zien dat er een getal groter dan 1 bestaat dat zowel a als b deelt.

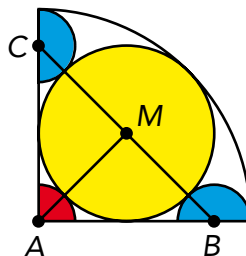
OPGAVE 293

Vind alle getallenrijtjes $u_0, u_1, u_2, \dots$ die voldoen aan

$$u_n \cdot (u_{n+1})^2 - u_n - u_{n+1} + 1 = 0$$

met $u_0 = 1$.

Oplossing. Zie onderstaande figuur, die een kwart van de gegeven tekening toont. Driehoek ABC is rechthoekig en gelijkbenig. Er geldt dat de zwaartelij (hoogtelijn) vanuit A even lang is als de helft van zijde BC , ofwel $AM = CM$. Omdat A , B , C en M de middelpunten zijn van de verschillende cirkels, volgt dat de straal van de cirkel met middelpunt A en de straal van de cirkel met middelpunt C gelijk moeten zijn.



OPLOSSING 282

Gegeven zijn vier getallen a, b, c en d die voldoen aan

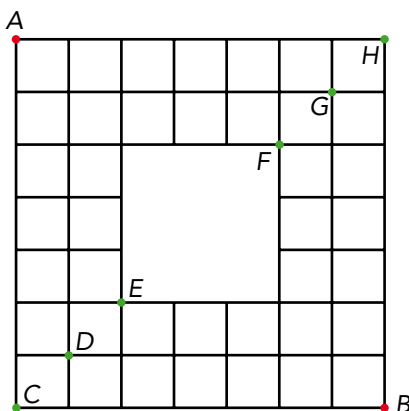
$$\frac{b+c}{a+d} = \frac{b+d}{a+c}.$$

Verder is gegeven dat c ongelijk is aan d . Laat zien dat $a + b + c + d = 0$.

Oplossing. Vermenigvuldig beide zijden van de vergelijking met $(a+c)(a+d)$. De vergelijking wordt dan $(b+c)(a+c) = (b+d)(a+d)$. Haakjes uitwerken geeft de vergelijking $ab + ac + bc + c^2 = ab + ad + bd + d^2$. Vervolgens herschrijven we de vergelijking als volgt: $ac + bc + c^2 - ad - bd - d^2 = (c-d)(a+b+c+d) = 0$. Omdat c en d ongelijk zijn (gegeven), is $c-d \neq 0$. Dan moet dus gelden dat $a + b + c + d = 0$.

OPLOSSING 285

Hoeveel kortste routes zijn er van punt A naar punt B in het volgende rooster, waarbij je alleen over de roosterlijnen mag lopen?



Oplossing. Om van A naar B te reizen, moet een van de punten C, D, E, F, G, H worden gepasseerd. In 7 stappen kunnen deze punten worden bereikt. Het kost daarna opnieuw 7 stappen om B te bereiken. Vanuit A kun je op $\binom{7}{2} = 21$ manieren naar E reizen (van de 7 stappen moet je 2 keer naar rechts). Dit is eveneens het aantal mogelijkheden om vanuit E in B uit te komen. Het aantal manieren om van A naar B te reizen via E is dus $21^2 = 441$. Het aantal manieren om van A naar B te reizen via C, D, F, G of H kan op eenzelfde manier berekend worden. Het totaal aantal manieren is dus

$$\binom{7}{0}^2 + \binom{7}{1}^2 + \binom{7}{2}^2 + \binom{7}{2}^2 + \binom{7}{1}^2 + \binom{7}{0}^2 = 982.$$

OPLOSSING 284

De functie $f(x, y)$ heeft de volgende vier eigenschappen:

- $f(x, y) + f(x, z) = f(x, y + z + 2)$
- $f(x, y) + f(z, y) = f(x + z - 1, y)$
- $f(3, 4) = 24$
- $f(4, 5) = 42$

Bereken $f(7, 17)$.

Oplossing.

$$84 = f(4, 5) + f(4, 5) = f(7, 5).$$

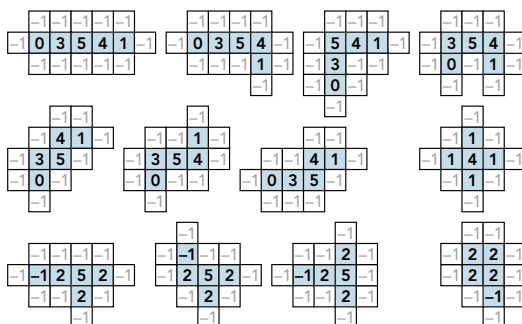
$$48 = f(3, 4) + f(3, 4) = f(5, 4).$$

$$72 = f(3, 4) + f(5, 4) = f(7, 4).$$

$$156 = f(7, 5) + f(7, 4) = f(7, 11).$$

$$228 = f(7, 11) + f(7, 4) = f(7, 17).$$

OPLOSSING OPGAVEN 5 EN 6 VAN 'BURENSOMMEN IN POLYOMINO'S' (PAGINA 27)



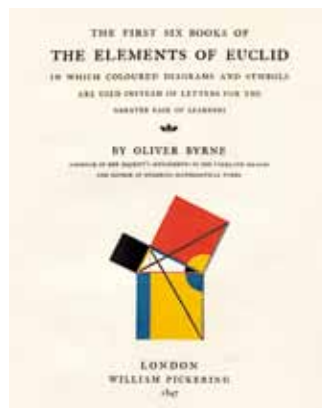
DE ELEMENTEN VAN EUCLIDES

De Elementen is een dertiendelige wiskundige tekst van Euclides – circa 300 jaar voor Christus verschenen – waarin de tot dan toe bekende meetkunde en getaltheorie voor het eerst uit een klein aantal axioma's is opgebouwd. Het werk heeft door de eeuwen heen een enorme invloed gehad op wiskundigen en filosofen.

In 1847 verscheen een wel heel merkwaardige editie van *De Elementen*. De Engelsman Oliver Byrne heeft de eerste zes boeken toen met mooie afbeeldingen helder in beeld gebracht. Qua kleurgebruik heeft hij zich, naast zwart, beperkt tot de drie primaire kleuren. Verder gaf hij om didactische redenen zeer veel aandacht aan het grafisch in beeld brengen van de stellingen, aan de opmaak en aan de gebruikte lettertypes. Zijn meer dan anderhalve eeuw oude boek doet daardoor modern aan.

Oliver Byrne was lange tijd beheerder van de Falklanddomeinen voor de Engelse kroon.

De Elementen, zoals die in beeld zijn gebracht door Oliver Byrne, zijn opnieuw uitgebracht door uitgeverij Taschen. Deze uitgeverij heeft ons toegestaan om zes prenten uit het boek te gebruiken als illustratie op de achterkant van *Pythagoras*. Daarom tref je deze jaargang op elke achterkant een fraaie Byrne-prent aan.



PYTHAGORAS

54ste jaargang nummer 1
september 2014
ISSN 0033 4766

Pythagoras stelt zich ten doel jongeren kennis te laten maken met de leuke en uitdagende kanten van wiskunde. *Pythagoras* richt zich tot leerlingen van vwo en havo en alle anderen die jong van geest zijn.

Internet www.pyth.eu

Hoofredacteur Derk Pik

Eindredacteur Alex van den Brandhof

Redactie Matthijs Coster,
Jeanine Daems, Jan Guichelaar,
Klaas Pieter Hart, Paul Levrie,
Marc Seijlhouwer

Vormgeving Grafisch Team Digipage,
Leidschendam

Druk Drukkerij Ten Brink, Meppel

Uitgever Koninklijk Wiskundig
Genootschap (KWG)

Management *Pythagoras* Jan Turk,
Mark Veraar (KWG), Derk Pik

Lezersreacties en kopij

Bij voorkeur per e-mail; lezersreacties naar Jan Guichelaar, jan@pyth.eu en kopij naar Derk Pik, derk@pyth.eu. Eventueel per post naar *Pythagoras*, p.a. Centrum Wiskunde & Informatica, Postbus 94079, 1090 GB Amsterdam.

Abonnementen, bestellingen en mutaties

Abonneeservice *Pythagoras*
Postbus 2238
5600 CE Eindhoven
Telefoon 088 226 5258
E-mail: abonnementen@pyth.eu

Abonnementsprijs

(zes nummers per jaargang)
€ 28,00 (Nederland en België),
€ 30,00 (overige landen),
€ 18,00 (groepsabonnement NL/B),
€ 28,00 (geschenkabonnement NL/B),
€ 30,00 (geschenkabonnement overige landen).

Een geschenkabonnement stopt automatisch na één jaar. Overige abonnementen gelden tot wederopzegging. Zie www.pyth.eu voor verdere toelichtingen.

Aan dit nummer werkten mee

Hugo de Blank
(hugo@vierkantvoorwiskunde.nl),
Alex van den Brandhof
(alex@pyth.eu),
Matthijs Coster
(matthijs@pyth.eu),
Jeanine Daems
(jeanine@pyth.eu),
Jan Guichelaar
(jan@pyth.eu),
Klaas Pieter Hart
(kp@pyth.eu),
Eric Kirchner
(herihor@yahoo.com),
Jaap Klouwen
(j.klouwen@hva.nl),
Paul Levrie
(paul@pyth.eu),
Eddie Nijholt
(eddie@pyth.eu),
Derk Pik (derk@pyth.eu),
Jan Willem Polderman
(j.w.polderman@utwente.nl),
Frank Roos (fd_r@yahoo.com),
Marc Seijlhouwer
(marc@pyth.eu),
Harry Smit
(h.j.smit@students.uu.nl),
Peter Ypma
(p.ypma@students.uu.nl).

Pythagoras wordt mede mogelijk gemaakt door de bijdragen van de onderstaande instituten en instellingen.

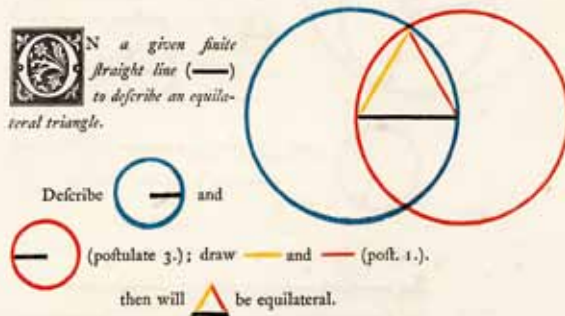


Euclid.

BOOK I.

PROPOSITION I. PROBLEM.

IN a given finite straight line (—) to describe an equilateral triangle.



Describe (—) and
(postulate 3.); draw (—) and (—) (post. 1.).
then will  be equilateral.

For — = — (def. 15.);

and — = — (def. 15.);

∴ — = — (axiom. 1.);

and therefore  is the equilateral triangle required.

Q. E. D.

B



Bron: Oliver Byrne, *The First Six Books of The Elements of Euclid*, Taschen.