

PYTHA GORAS

WISKUNDETIJDSCHRIFT VOOR JONGEREN



54ste JAARGANG - NUMMER 2 - NOVEMBER 2014

Leidse ketting

Je vindt het antwoord op
www.math.leidenuniv.nl/puzzels



Een Leidse ketting bestaat uit drie bolvormige kralen aan een gesloten ketting die elk wit, blauw of oranje zijn. De kralen kunnen vrij bewegen langs de ketting.

Bepaal het aantal verschillende Leidse kettingen. Twee Leidse kettingen zijn hetzelfde als je zonder de ketting te breken dezelfde configuratie kan krijgen.

Uitdaging: wat als er vier kralen zijn in plaats van drie? Of vijf?

Kom naar het Proefstuderen

Wiskunde kun je doen om de schoonheid en abstractie van de wiskunde zelf. Maar ook de praktische problemen en toepassingen vormen vaak een grote uitdaging. Een combinatie van beide leidt vaak tot spectaculaire resultaten. Wil je meer weten over Wiskunde studeren aan de Universiteit Leiden? Kom dan op **vrijdag 28 november** naar het Proefstuderen van de faculteit Wiskunde en Natuurwetenschappen.

Kijk voor meer informatie op www.studereninleiden.nl/studies/info/wiskunde/



**Universiteit
Leiden**

Wiskunde en Natuurwetenschappen



INHOUD

8

DE 1-TOT-9-PRIJSVRAAG

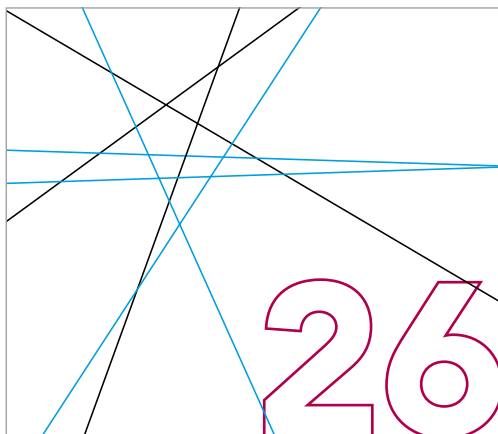
De prijsgang die we in deze jaargang uitschrijven, gaat over rekenen. Zet tussen de getallen 1 tot en met 9 (in een door jou gekozen volgorde) de bewerkingen +, -, × en : en probeer op die manier zoveel mogelijk getallen te maken.

volgorde: 7 3 8 9 4 5 6 2 1

$$1 = ((7 - 3 + 8 - 9) \times 4 - 5 - 6) \times 2 - 1$$

$$2000 = 7 \times ((-3 + 8 + 9) \times 4 \times 5 + 6) - 2 : 1$$

$$2015 = 7 \times 3 \times 8 \times (9 + 4 + 5 - 6) - 2 + 1$$



BLAUWE LIJNEN

Afgelopen zomer had Nederland een droomteam bij de Internationale Wiskunde Olympiade. Nederland was het best scorende land van West-Europa. Nooit eerder deed Nederland het zo goed als dit jaar. Een van de opgaven bespreken we in dit nummer.

25



2048

De app 2048 is de afgelopen maanden een enorme rage geworden. Dit verslavende spel is gemaakt door Gabriele Cirulli. Deze Italiaan is nog maar 20 jaar. *Pythagoras* informeert je over diverse varianten: sommige erg leuk, andere kun je maar beter niet spelen.

EN VERDER

- 2 Kleine nootjes
- 4 Links of rechts: oplossing zomerprijsvraag
- 7 Journaal
- 10 Bonte mutsen
- 11 Euclides' Elementen
- 14 Een Boekbewijs
- 16 Twee
- 18 Financiële hebzucht
- 20 Priemgetallen: veel vragen, weinig antwoorden
- 24 Dwaze vragen
- 30 Pythagoras Olympiade
- 33 Oplossing Möbiusbalk

Omslagillustratie: de 1-tot-9-prijsvraag

■ **NIVEAUBALKJES** Sommige pagina's bevatten één of meer zwarte balkjes onder het paginanummer. Voor artikelen zonder balkje is geen specifieke voorkennis nodig. Artikelen met één balkje bevatten wiskunde uit de onderbouw. Artikelen met twee balkjes vereisen kennis uit de bovenbouw. Drie balkjes: net iets moeilijker.

KLEINE NOOTJES

■ door Jan Guichelaar

HOE LANG GELEDEN?

Elke datum met een jaartal van vier cijfers kun je op de volgende manier schrijven: ...-...-....
Bijvoorbeeld 10 maart 1798 wordt 10-03-1798,
24 november 2008 is te schrijven als 24-11-2008
en 9 december 3784 als 09-12-3784.
Wat is de laatste datum geweest waarbij alle cijfers verschillend zijn?



CHOCOLADEREEP

Anna en Joep hebben een grote reep chocolade. Anna breekt $\frac{1}{3}$ af en eet het op. Het restant geeft ze aan Joep. Die eet er een stuk van. Daarna breekt hij $\frac{1}{3}$ deel van de rest af, eet ook dat stuk op, en geeft het restant aan Anna. Als Anna dat heeft opgegeten, blijkt dat beiden evenveel hebben gegeten. Hoeveel heeft Joep van zijn eerste stuk gegeten?



STEEDS EEN ÉÉN

Neem de getallen 1 tot en met n en zet die in een volgorde die je wilt. Zet er plussen en minnen tussen zoals je wilt. De uitkomst moet 1 zijn. Lukt dit voor ieder (positief, geheel) getal n ? Zo niet, wanneer wel en wanneer niet?

$$1 + 2 - 3 - 4 + 5 = 1$$

AAS-HEER OF HEER-VROUW

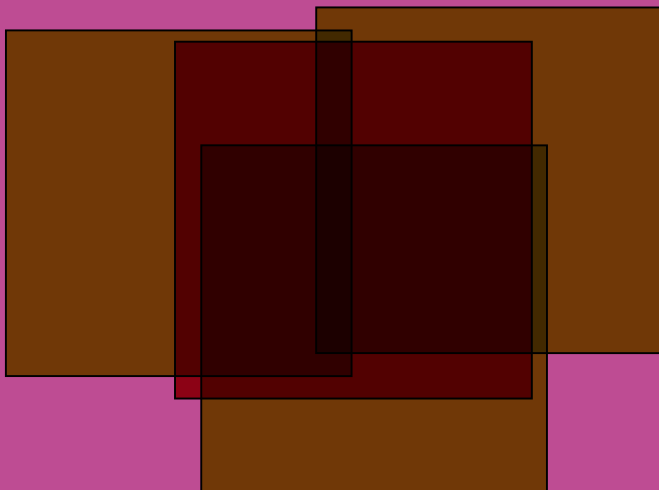
Neem een kaartspel met alleen schoppen Aas, Heer en Vrouw, en harten Aas, Heer en Vrouw. Pak willekeurig twee kaarten uit dit spel. Hoe groot is de kans dat je twee opeenvolgende kaarten (Aas-Heer of Heer-Vrouw) van dezelfde kleur hebt getrokken?



Kleine nootjes zijn eenvoudige opgaven die weinig of geen wiskundige voorkennis vereisen om opgelost te kunnen worden. De antwoorden vind je in het volgende nummer van *Pythagoras*.

VIERKANT BEDEKKEN

Je hebt een vierkant van 1 bij 1 en drie vierkanten die een fractie kleiner zijn, bijvoorbeeld 0,99 bij 0,99. Kun je het grote vierkant geheel bedekken met de drie kleinere?



OPLOSSINGEN KLEINE NOOTJES NR. 1

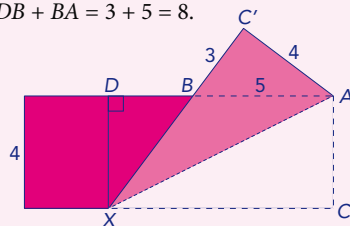
Hoed met ballen. We geven een aantal mogelijkheden (de eerste twee zijn flauw):

- Er zaten meerdere ballen in die allemaal verschillend gekleurd zijn; de kans op twee gelijkgekleurde ballen is dan 0.
- Er zaten meerdere ballen in die allemaal dezelfde kleur hebben; de kans op twee gelijkgekleurde ballen is dan 1.
- Er zaten twee rode en twee witte ballen in; de kans op twee gelijkgekleurde ballen is dan $1/3$, ook na het weggooien van één bal.
- Er zaten twee rode, twee witte en twee blauwe ballen in; de kans op twee gelijkgekleurde ballen is dan $1/5$, ook na het weggooien van één bal.
- Er zaten twee ballen van elk van n kleuren in. De kans op twee gelijkgekleurde ballen is dan $1/(2n - 1)$, ook na het weggooien van één bal.
- Er zaten k rode en k witte ballen in. De kans op twee gelijkgekleurde ballen is dan $(k - 1)/(2k - 1)$, ook na het weggooien van één bal.

Blokje om. In acht zetten: $A1 \rightarrow B1C1 \rightarrow B2C2 \rightarrow B3C3 \rightarrow A3 \rightarrow A1A2 \rightarrow B1B2 \rightarrow C1C2 \rightarrow C3$.

Zonneschijn. Op maandag, dinsdag en woensdag scheen de zon elke dag m uren, op donderdag en vrijdag elk d uren, en op zaterdag en zondag elk z uren. Er geldt: $(3m + 2d + 2z)/7 = (3m + 2d)/5$, $m = z + 2$, $z = d + 3$. Een oplossing is: $m = 9$, $d = 4$, $z = 7$. Op zondag scheen de zon dan 7 uren. Er zijn zelfs meer oplossingen in hele uren. De gekste zijn: $m = 5$, $d = 0$, $z = 3$ en $m = 24$, $d = 19$, $z = 22$. De laatste kan alleen boven de poolcirkel in de zomer.

Vouwen. Driehoek ABC' is rechthoekig (dit volgt uit de omgekeerde stelling van Pythagoras). Laat een loodlijn neer van X op het verlengde van AB , noem het voetpunt D . Dan zie je snel dat driehoek XDB congruent is met driehoek $AC'B$. Dan heb je $XC = DA = DB + BA = 3 + 5 = 8$.



Breuken maken.

Max: $\frac{9}{12} + \frac{8}{34} + \frac{7}{56} \approx 1,110$. Min: $\frac{3}{98} + \frac{2}{76} + \frac{1}{54} \approx 0,075$.

■ door Matthijs Coster

**PYTHAGORAS** NOVEMBER 2014

INZENDINGEN Nathan van 't Hof constateerde dat als er één LR-reeks is afgelopen, er vier mogelijkheden zijn (zie figuur 5):

- (1) de richting waarin wordt gelopen na de reeks correspondeert met de richting vooraf;
- (2) de richting waarin wordt gelopen na de reeks is het tegengestelde van de richting vooraf;
- (3) de richting waarin wordt gelopen na de reeks is een kwart naar rechts gedraaid vergeleken met de richting vooraf;
- (4) de richting waarin wordt gelopen na de reeks is een kwart naar links gedraaid vergeleken met de richting vooraf.



Figuur 5 Voorbeelden van de vier bovenstaande gevallen (1) tot en met (4): LR, LRL, LRR, RLL.

In de eerste situatie zijn er nog weer drie gevallen te onderscheiden. Als het begin- en eindpunt samenvallen, en onderweg heb je jezelf niet gekruist, dan omsluit je een oppervlak. Zo niet, dan schuif je steeds op of kruis je een eerder deel van de route. Als je steeds opschuift, loop je ooit van het papier af. Het derde geval is vrij lastig te construeren. In de tweede situatie zal, nadat je de reeks herhaalt, het eindpunt samenvallen met het beginpunt, of je loopt van het papier af. In de derde en vierde situatie zullen na vier maal herhalen het begin- en eindpunt samenvallen.

Nathan heeft in het bijzonder gekeken naar opgave 3, waarbij voor een gegeven lengte van een LR-reeks een zo groot mogelijke oppervlakte moet worden gevonden die met die LR-reeks kan worden geconstrueerd. Hij probeerde gebruik te maken van het feit dat voor een cirkel geldt dat een vaste omtrek de grootste oppervlakte kan omspannen. Hij vertaalt dit naar de grootste oppervlakte die kan worden gevonden door de reeks LRLR...LRLRR (uiteindelijk een extra R). Hij berekende ook deze oppervlakten en kwam tot de conclusie dat de oppervlakte steeds de som is van twee opeenvolgende kwadraten.

Ook Wouter Zijlstra keek met name naar opgave 3. Naast de oneven LR-reeksen bestudeerde hij de even LR-reeksen. Hij vond het grootste gebied dat je kan omsingelen met een herhalend patroon van n symbolen voor $n \leq 9$.

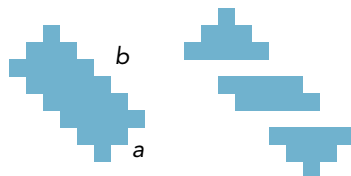
DE WISKUNDE VAN LR-REEKSEN Wiskundig valt er heel wat te zeggen. Allereerst valt de *draaisymmetrie* op. Als er gedraaid wordt over 180° ,

heeft deze draaisymmetrie nog een speciale naam: *puntsymmetrie*. Door deze symmetrie kun je een aanzienlijk korter LR-rijtje gebruiken.

Bij opgave 1 richten we ons voornamelijk op symmetrie waarbij een halve slag gedraaid moet worden om de oorspronkelijke figuur terug te vinden (dus puntsymmetrie). Als zo'n LR-rijtje met succes wordt afgelopen, eindigen we in situatie (2) zoals hierboven beschreven (direct onder het kopje 'Inzendingen').

Bij opgave 2 herhaalt het linksaf- en rechtsafslaan zich viermaal, en dus hebben we hier met draaisymmetrie te maken met een een hoek van 90° . We zitten in situatie (3) of (4).

Zoals al door Nathan werd opgemerkt, is het handig om het oppervlak zoveel mogelijk te laten lijken op een cirkel. De 'rechthoek' in figuur 6 (links) voldoet redelijk. We gaan voor dergelijke rechthoeken de oppervlakte uitrekenen. We veronderstellen dat de zijden lengte a en b hebben.



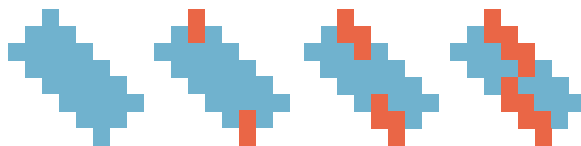
Figuur 6 Links: een 'rechthoek' met zijden a en b . Rechts: de rechthoek opgesplitst in drie delen: een topdriehoek, een middendeel en een onderdriehoek.

Laten we even veronderstellen dat $a \leq b$. Later zal blijken dat deze eis niet van belang is. In het rechter plaatje hebben we de rechthoek opgesplitst in drie delen: een topdriehoek, een middendeel en een onderdriehoek. We gaan voor deze drie delen de oppervlakte bepalen. De topdriehoek heeft oppervlakte a^2 . Ga maar na: de toprij heeft oppervlakte 1, dan volgt oppervlakte 3, dan 5, enzovoort. We krijgen $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \dots + 2a - 1 = a^2$ (probeer zelf te bewijzen dat de som van de eerste a oneven getallen gelijk is aan a^2). Dat geldt eveneens voor de onderdriehoek. Voor het middendeel geldt dat elke regel breedte $2a - 1$ heeft. Het lastigste is om te bepalen hoeveel regels van breedte $2a - 1$ er zijn: dit aantal is $b - a - 1$. De oppervlakte van het middendeel is dus $(2a - 1)(b - a - 1)$. De totale oppervlakte wordt dus $a^2 + (2a - 1)(b - a - 1) + a^2 = 2a^2 + 2ab - 2a^2 - 2a - b + a + 1 = 2ab - a - b + 1$.

Figuur 7 toont een deel van de tabel van de oppervlakte van rechthoeken met zijden a en b . We constateren dat elk getal in de tabel terugkeert, na-

a \ b	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	5	8	11	14	17
3	3	8	13	18	23	28
4	4	11	18	25	32	39
5	5	14	23	32	41	50
6	6	17	28	39	50	61

Figuur 7 Tabel met de eerste waarden van $2ab - a - b + 1$.



Figuur 8 Het maken van een oppervlakte die niet in de tabel (figuur 7) voorkomt.

melijk in de eerste kolom en eerste rij. Komt het elders nog terug? Bijvoorbeeld 99? Dan moet je 99 met 2 vermenigvuldigen en er vervolgens 1 van aftrekken. We vinden 197. Dat is een priemgetal. Dus 99 komt alleen voor in de eerste kolom en eerste rij. En 124? We vermenigvuldigen met 2 en trekken er 1 vanaf. We vinden 247. Nu geldt $247 = 13 \cdot 19$. Dus de oppervlakte van een rechthoek van 7 ($13 = 2 \cdot 7 - 1$) bij 10 is 124.

De omtrek van een rechthoek van a bij b is $4(a + b - 1)$. Immers, aan een zijde van lengte a moeten a punten langsgelopen worden, dat zijn $2a$ wijzigingen van richting. Dat geldt ook voor de andere zijde van lengte a en ook voor de twee zijden met lengte b . We hebben de hoekpunten dubbel geteld, dus in totaal komen we op $4(a + b - 1)$.

Om de minimale omtrek te bepalen, onderscheiden we twee gevallen, namelijk $a = b$ en $a < b$. In het eerste geval is er een viervoudige draaisymmetrie en volstaat slechts een kwart van de omtrek, dus $a + b - 1$. In de andere gevallen geldt de helft van de omtrek, dus $2(a + b - 1)$.

Stel, je wilt een oppervlakte maken die niet voorkomt in de tabel (afgezien van de eerste kolom en eerste rij). Moet je dan gebruikmaken van deze oplossing (dus $a = 1$)? Niet altijd! Kijk maar naar de

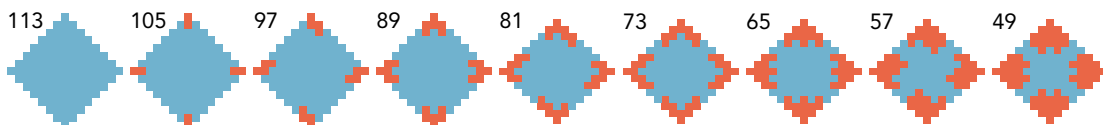
oplossingen. Je kunt uitgaan van een grotere rechthoek en vervolgens hoekjes wegsnoepen. In figuur 8 wordt dit principe uitgelegd. Met rood is aangegeven welke blokjes kunnen worden verwijderd door een L en R te verwisselen. Vanwege de puntsymmetrie verdwijnen er aan weerszijden 2 blokjes, dus in totaal 4 blokjes (terwijl de omtrek gelijk blijft). Dit procédé kan in principe diverse malen worden herhaald. Het kan dus voordelig zijn om in de tabel te kijken naar een getal dat 4 of zelfs 8 groter is.

Voor de draaisymmetrie (90°) geldt een vergelijkbaar verhaal. We gaan in dit geval dus uit van een vierkant. Deze oppervlakte is $2a^2 - 2a + 1 = a^2 + (a - 1)^2$, zoals al was opgemerkt door Nathan. Figuur 9 toont de tabel van de oppervlakte van ingeknipte vierkanten. Echter, nu verdwijnen steeds 8 blokjes (2 blokjes aan iedere zijde). Daarnaast is in de tabel opgenomen welke oppervlakten worden verkregen door veelvouden van 8 blokjes te verwijderen. Met **vet** is weergegeven dat op die manier de betreffende oppervlakte moet worden geconstrueerd. Een vraag aan jou: kun je nagaan hoe vaak 53 in de tabel voorkomt?

In figuur 10 tot slot zie je hoe je onder andere van oppervlakte 113 kunt komen op oppervlakte 49. (Er zijn ook andere oplossingen!) ■

a	aantal tekens L en R	opp(a) = $2a^2 - 2a + 1$	opp(a) - 8	opp(a) - 16	opp(a) - 24	opp(a) - 32	opp(a) - 40	opp(a) - 48	opp(a) - 56	opp(a) - 64
1	1	1								
2	3	5								
3	5	13	5							
4	7	25	17	9						
5	9	41	33	25	17					
6	11	61	53	45	37	29	21	13		
7	13	85	77	69	61	53	45	37	29	21
8	15	113	105	97	89	81	73	65	57	49

Figuur 9 Tabel van de oppervlakte van ingeknipte vierkanten.

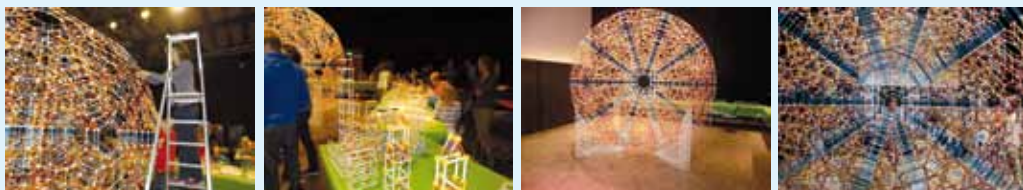


Figuur 10 De blauwe vakjes vormen het te maken oppervlak, de rode het oppervlak dat wordt weggesneden.

JOURNAAL

■ door Alex van den Brandhof en Derk Pik

Gigantische bouwconstructie in NEMO



Zaterdag 4 en zondag 5 oktober is overal in Nederland het weekend van de wetenschap gevierd. Op honderden plaatsen hebben bedrijven en universiteiten open dag gehouden en hebben belangstellenden, waaronder veel kinderen en middelbare scholieren, kennis kunnen maken met wetenschap. Vaak waren ook middelbare scholieren betrokken bij de manifestaties.

In het technologiemuseum NEMO in Amsterdam hebben leerlingen van het Stedelijk Lyceum Kottenpark te Enschede onder leiding van hun wiskundedocent Paul van de Veen een gigantisch symmetrisch bouwwerk gemaakt. Het geheel is gemaakt met Zometool, een constructiesysteem voor wiskundige vormen, gebaseerd op een idee uit de jaren zestig van de vorige eeuw. Een Zometoolballetje heeft 62 gaten in drie verschillende vormen:

driehoekig, rechthoekig en vijfhoekig. De verdeeling van de gaten over het balletje is zo gekozen dat driehoeken, vierhoeken, vijfhoeken, zeshoeken en tienhoeken makkelijk gemaakt kunnen worden. Er zijn drie kleuren staafjes, driehoekig, rechthoekig en vijfhoekig, in verschillende lengtes. Deze lengtes zijn heel slim gekozen, namelijk volgens de gulden snede. Op deze manier kunnen heel veel regelmatige en onregelmatige vormen gemaakt worden.

Het bouwwerk in NEMO bestond uit niet minder dan 22.000 onderdelen. Het grootste probleem bij het bouwen van dit ingewikkelde bouwwerk is het gewicht van de constructie. Zonder speciale voorzieningen zoals vier steunmuren en een aantal koolstofstaven stort het in. Op de foto's zijn enkele stadia van het bouwwerk te volgen. Let vooral op de vele mooie doorkijkjes van het bouwwerk! (DP)

Een wedstrijdanalyse in één oogopslag

Een van de aardigheden van voetbal is dat de uitslag van een wedstrijd volstrekt niet te voorspellen is. Afgelopen WK: Nederland-Spanje werd 5-1, Duitsland-Brazilië 7-1. En onlangs bij de EK-kwalificatiewedstrijden: de wedstrijden Nederland-IJsland en Duitsland-Polen eindigden beide in 0-2.

Student Marijn Grootjans heeft een methode bedacht om wedstrijdstatistieken te visualiseren in een zogenoemde *wave*. Hij studeerde hierop vorige maand af aan de TU/e. Wat blijkt? Een gelijkspel bij Nederland-Spanje afgelopen zomer was meer op zijn plaats geweest. Spanje was op basis van het aantal kansen gelijkwaardig aan Nederland, maar Oranje was simpelweg veel effectiever. Van de verloren wedstrijd tegen IJsland maakte Grootjans ook een *wave*. IJsland golfde in drie aanvalspieken over de Nederlanders heen en scoorde daarbij twee keer. Nederland had eigenlijk maar één kans, maar een

doelpunt werd het niet. Een terechte 2-0 overwinning voor IJsland dus. De *waves* zijn o.a. te zien op www.infostradasports.com/news/wave-the-full-story-at-a-glance.

Grootjans maakte gebruik van data die het bedrijf Infostrada Sports verzamelt. Het gaat daarbij o.a. om gegevens van doelpunten, overtredingen, schoten en hoekschoppen. Grootjans ontwikkelde een model waarmee deze gegevens weergegeven kunnen worden in plaatjes. Zo kan voor elke speler een zogeheten 'heat map' worden berekend, waarin een wolk de posities weergeeft van waaruit een speler ooit op doel heeft geschoten, waarbij de kleur staat voor hoe vaak een schot vanaf deze positie een doelpunt opleverde van deze speler. Daarnaast kan voor elke wedstrijd dus een *wave*-diagram worden gemaakt waarin gekleurde golven een indruk geven van de schoten, overtredingen en doelpogingen. (AvdB)

Doe mee met de nieuwe prijsvraag van *Pythagoras*. De regels zijn simpel; we gebruiken alleen maar de basisbewerkingen optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen. Maar vergis je niet: er zijn heel erg veel mogelijkheden!

■ door Matthijs Coster

DE 1-TOT-9-



8

DEEL 1: 1-TOT-9-KLEIN Kies een volgorde waarin je de getallen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 en 9 plaatst. Plaats vervolgens hiertussen de bewerkingen +, -, × en :, zó dat de expressie die er nu staat precies het getal 1 oplevert. Haakjes mogen onbeperkt worden gebruikt, evenals extra mintekens (van de 4 mag je dus desgewenst -4 maken).

We geven een voorbeeld. Schrijf de getallen als volgt achter elkaar:

7 3 8 9 4 5 6 2 1.

Nu is

$$1 = ((7 - 3 + 8 - 9) \times 4 - 5 - 6) \times 2 - 1.$$

Laat de getallen in dezelfde volgorde staan en probeer nu zoveel mogelijk andere getallen te maken.

Kies zelf je eigen, vaste volgorde van de negen getallen, probeer met jouw volgorde 1 te maken en

daarna zoveel mogelijk andere getallen. Voor onderbouwleerlingen tellen we hoeveel van de getallen tot en met 100 gemaakt zijn, voor bovenbouwleerlingen tot en met 200. Hoe meer getallen je kunt maken, hoe beter! Let op: de volgorde van de negen getallen moet steeds hetzelfde zijn.

DEEL 2: 1-TOT-9-GROOT Het moeilijkere vervolg van de opgave gaat als volgt. Kies opnieuw een volgorde waarin je de getallen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 en 9 plaatst. De volgorde mag anders zijn dan bij deel 1. Probeer nu op dezelfde manier, dus door de bewerkingen +, -, × en : ertussen te zetten, het getal 2000 te maken. Als dat is gelukt, probeer je 2001 te maken, zonder de volgorde van de negen getallen te wijzigen. Daarna ga je verder met 2002, 2003 enzovoort. Probeer zo ver mogelijk te komen. Als je een getal niet kunt maken, heeft het ook geen zin om hogere getallen in te sturen.



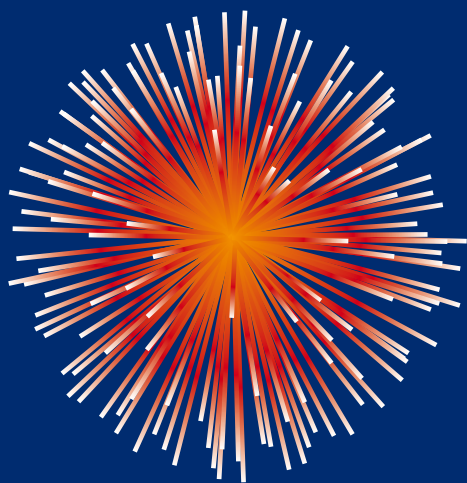
PRIJSVRAAG

volgorde: 7 3 8 9 4 5 6 2 1

$$1 = ((7 - 3 + 8 - 9) \times 4 - 5 - 6) \times 2 - 1$$

$$2000 = 7 \times ((-3 + 8 + 9) \times 4 \times 5 + 6) - 2 : 1$$

$$2015 = 7 \times 3 \times 8 \times (9 + 4 + 5 - 6) - 2 + 1$$



NIUWJAARSOPGAVE Wie bij deel 2 tot 2015 weet te komen vóór 1 januari 2015, kan zijn oplossing vóór nieuwjaarsdag naar ons opsturen. De eerste drie leerlingen met een goede oplossing krijgen een QAMA-rekenmachine. Na 1 januari mag je natuurlijk nog een keer inzenden voor deel 1 en/of 2.

INZENDEN Uiteraard is het van belang dat alle berekeningen correct zijn. Er wordt streng gelet op rekenfouten! Het is toegestaan om te programmeren. Als je dat doet, moet je natuurlijk je program-

ma inzenden. Dit wordt dan ook beoordeeld op correctheid.

Er wordt maximaal 200 euro aan prijzengeld verdeeld onder de correcte inzenders. Verder zijn er enkele kleinere prijzen. In eerste instantie wordt er gelet op het *aantal* gevonden getallen: hoe meer, hoe beter. Maar de jury heeft ook een oog voor originaliteit. Bij een originele oplossing wordt bijvoorbeeld veel gebruik gemaakt van :, of zo weinig mogelijk van haakjes. Ook is het leuk om te proberen zo weinig mogelijk negatieve getallen te gebruiken (zie bijvoorbeeld -3 in het voorbeeld van 2000). Meld de eventuele bijzonderheden van je oplossingen, anders valt het de jury misschien niet op!

Stuur je inzending naar prijsvraag@pyth.eu. Vermeld daarbij je naam, leeftijd, klas en school. Bij een klasseninzing moet ook de naam van de wiskundedocent worden vermeld. Je inzending moet bij ons binnen zijn vóór 15 april 2015. Veel succes! ■

BONTE MUTSEN

■ door Alex van den Brandhof

De kerstman heeft 126 slimme kabouters uitgenodigd voor een gezellige middag met koffie en gebak. Als de kabouters de zaal inkomen, krijgt ieder van hen een nieuwe muts op het hoofd gezet. Dat gaat razendsnel, zodat geen van hen de kleur van de eigen muts kan zien. De kerstman opent de bijeenkomst met een korte toespraak. 'Mijn beste slimmeriken! We beginnen met een kleine puzzel. Geen van jullie kent de kleur van zijn eigen muts, en elk van jullie kan de muts van alle andere 125 kabouters wel zien. Doel van het spel is, de kleur van de eigen muts zo snel mogelijk, en puur door na te denken, te bepalen. Om de vijf minuten zal ik op mijn grote kerstklok slaan. Zo gauw iemand de kleur van zijn eigen muts bepaald heeft, dan moet hij bij de volgende slag van de klok de zaal verlaten. In de kamer hiernaast krijgt hij dan een kop koffie en een groot stuk taart.'

Net toen de kerstman naar de klok wilde gaan, stelde kabouter Atto een belangrijke vraag: 'Is het echt voor ieder van ons mogelijk, de kleur van zijn muts puur door logisch nadenken te bepalen? Als bijvoorbeeld ieder van ons een andere kleur muts zou hebben, dan zou niemand van ons door nadenken de kleur van zijn muts kunnen bepalen en koffie en taart krijgen!'

De kerstman antwoordt een beetje nors: 'Zou hebben, zou kunnen! Natuurlijk kan elk van jullie dit spel tot een goed einde brengen! Ik heb de kleuren heel zorgvuldig uitgezocht, zodat elk van jullie de kleur van zijn muts in de loop van het spel kan bepalen.' En dan beginnen de slimme kabouters na te denken. En de kerstman begint de klok te luiden.

Bij de eerste slag van de klok verlaten Atto en

negen andere kabouters de zaal.

Bij de tweede slag van de klok verlaten alle kabouters met boterbloemgele, dotterbloemgele, sleutelbloemgele en zonnebloemgele mutsen de zaal.

Bij de derde slag gaan alle kabouters met een karmozijnrode muts weg, bij de vierde slag alle kabouters met een kactusgroene muts, bij de vijfde slag alle kabouters met een aquamarijnblauwe muts, bij de zesde slag alle kabouters met een oranje muts, bij de zevende slag alle kabouters met een bruine muts en bij de achtste slag alle kabouters met een grijze muts.

Bij de negende, tiende, elfde en twaalfde slag verlaat niemand de zaal.

Bij de dertiende slag gaan alle kabouters met een witte muts en alle kabouters met een zwarte muts weg.

En zo gaat het verder. Bij de N -de slag van de klok tot slot verlaat de laatste groep kabouters de zaal. In totaal heeft de klok zeven keer geslagen zonder dat iemand de zaal verliet (hierbij zijn de negende, tiende, elfde en twaalfde slag al inbegrepen). De vraag is nu: hoe groot is N ?

MATHEKALENDER In december organiseren de drie Nederlandse technische universiteiten (Delft, Eindhoven en Twente, verenigd in 3TU.AMI) samen met het Duitse wiskunde-instituut Matheon voor de vijfde keer een wiskundewedstrijd voor scholieren in de vorm van een digitale adventskalender: de *Mathekalender* (zie ook de binnenkant van de kaft van de vorige *Pythagoras*). Van 1 tot en met 24 december zal er dagelijks een wiskundeprobleem zijn. Doe mee via www.3tu.nl/ami/en/mathekalender.

De puzzel over de 126 kabouters komt uit de Mathekalender van vorig jaar en werd bedacht door Gerhard Woeginger van de TU Eindhoven. De oplossing geven we in het volgende nummer. We verklappen alvast dat N een getal is tussen 15 en 25. ■



Deze jaargang staan op de achterkant van *Pythagoras* zes prenten uit een bijzondere uitgave van *De Elementen* van Euclides: een oud Grieks werk in een negentiende-eeuws jasje. Oliver Byrne voorzag de beroemde stellingen uit het oorspronkelijke werk van kleurige afbeeldingen, die ook voor het begrip zeker voordelen hebben. In dit artikel bekijken we de opbouw van Euclides' werk en we leggen de gewone vertaling van Euclides naast de kleurige bewerking van Byrne uit 1847.

■ door Jeanine Daems

EUCLIDES' ELEMENTEN

Euclides leefde rond 300 voor Christus en gaf les in Alexandrië, in het huidige Egypte. Verder weten we eigenlijk niets over hem, behalve natuurlijk het feit waardoor hij nog steeds beroemd is: hij schreef *De Elementen*, een uitgebreid werk in dertien boeken waarin de bekende wiskunde van zijn tijd samengebracht werd. *De Elementen* gaat over vlakke meetkunde, verhoudingen, getallen en ruimtemeetkunde. In dit artikel gaan we vooral in op de vlakke meetkunde, omdat dat het deel is dat Oliver Byrne bewerkt heeft.

Het samenbrengen van alle bekende wiskunde was echter niet het belangrijkste. Euclides' werk is eigenlijk het eerste waarin de wiskunde wordt opgebouwd door middel van stellingen met bewijzen. In de hedendaagse wiskunde hebben bewijzen een belangrijke rol: met een bewijs toon je aan dat een wiskundige bewering onomstotelijk vaststaat. Er is niets meer tegenin te brengen. Een wiskundige is niet tevreden met een vermoeden of een regel-tje: pas als je het bewijs gevonden of begrepen hebt, weet je het zeker.

Maar je kunt niet vanuit het niets beginnen met bewijzen, je moet ergens van uit gaan. En je moet het met elkaar eens zijn over hoe de logica werkt: wanneer mag je uit een bewering iets anders concluderen?

DEFINITIES, POSTULATEN EN ALGEMEENHEDEN Euclides begint zijn werk daarom met een aantal verschillende soorten uitgangspunten: definitie, postulaten en algemeenheden. De *definitie*s vertellen wat de begrippen waar de wiskunde over gaat precies betekenen. Hieronder staan enkele voorbeel-

den van definitie uit boek I; achter op dit nummer vind je nog een aantal definitie uit boek III.

1. Een punt is wat geen deel heeft.
2. Een lijn is breedteloze lengte.
15. Een cirkel is een vlakke figuur omvat door een lijn zodat alle rechte lijnen die erop vallen vanuit een punt binnen de figuur aan elkaar gelijk zijn.
16. En dat punt heet het middelpunt van de cirkel.
17. Een diameter van de cirkel is een rechte lijn getekend door het middelpunt die aan beide kanten beëindigd wordt door de omtrek van de cirkel, en zo'n rechte lijn deelt de cirkel in twee gelijke delen.
23. Parallele rechte lijnen zijn rechte lijnen die, in hetzelfde vlak liggend en willekeurig ver doorgetrokken in beide richtingen, elkaar in beide richtingen niet ontmoeten.

Postulaten stellen eigenschappen vast van de objecten in kwestie. De vijf postulaten over de vlakke meetkunde zijn:

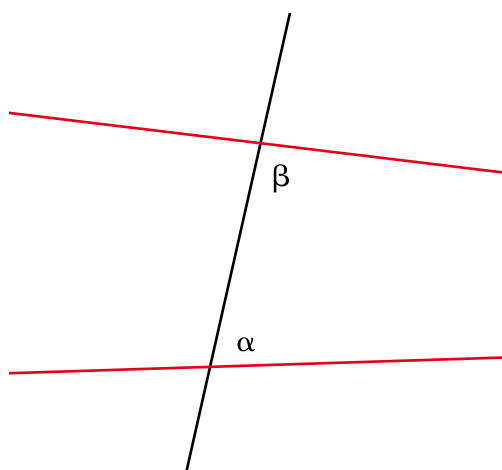
- I. Twee punten kunnen verbonden worden door een rechte lijn.
- II. Een lijnstuk kan oneindig ver doorgetrokken worden tot een rechte lijn.
- III. Om elk middelpunt en met elke afstand als straal kan een cirkel getekend worden.
- IV. Alle rechte hoeken zijn gelijk.
- V. Als een rechte lijn over twee andere rechte lijnen loopt waarbij de hoeken die aan één kant gemaakt worden samen minder dan twee rechte hoeken zijn, dan snijden die twee rechte lijnen elkaar aan de kant waar de hoeken samen minder dan twee rechte hoeken zijn.

Postulaat IV klinkt voor ons een beetje gek. Maar hierbij moet je bedenken dat de oude Grieken hoeken nog niet maten in graden of een andere eenheid. Hoeken konden alleen vergeleken worden met andere hoeken. De rechte hoek werd op deze manier een standaardhoek waarmee andere hoeken vergeleken konden worden.

Postulaat V is wat lastiger te begrijpen dan de andere vier, maar figuur 1 werkt verhelderend. De vraag wat er zou gebeuren als het vijfde postulaat níet geldt, leidde in de negentiende eeuw tot de ontwikkeling van de *niet-euclidische meetkunde*. In het artikel 'Euclides van Alexandrië (325 vC - 265 vC): grondlegger van de axiomatic' (*Pythagoras* 48-5, april 2009) kun je daar meer over lezen.

De *algemeenheden* hebben een iets ander karakter: die gelden ook voor andere gebieden in de wiskunde, het zijn algemene uitgangspunten.

- A. Dingen die gelijk zijn aan hetzelfde, zijn ook gelijk aan elkaar.
- B. Als gelijke dingen bij gelijke dingen gevoegd worden, zijn de gehelen ook gelijk.
- C. Als gelijke dingen van gelijke dingen afgehaald worden, zijn de resten ook gelijk.
- D. Dingen die samenvallen, zijn gelijk aan elkaar.
- E. Het geheel is groter dan een deel.



Figuur 1 Het vijfde postulaat zegt: als $\alpha + \beta < 180^\circ$, dan snijden de twee rode lijnen elkaar aan de rechterkant van de zwarte lijn.

Vanuit die definities, postulaten en algemeenheden bouwt Euclides de wiskunde stap voor stap op. Want zodra je een stelling bewezen hebt, mag je die natuurlijk ook gebruiken in een volgend bewijs.

In figuur 2 zie je hoe de stellingen in boek I van elkaar afhangen. Er zijn 48 stellingen en die hangen af van elkaar, van de postulaten en algemeenheden. Je kunt in het schema bijvoorbeeld zien dat het bewijs van stelling 1 de postulaten I en III en algemeenheid A gebruikt. Stelling 48 hangt bijvoorbeeld alleen maar af van de stellingen 8 en 47. Stelling 47 en 48 zijn de stelling van Pythagoras en haar omkering.

DRIEHOEKCONSTRUCTIE De allereerste stelling uit het eerste boek stond op de achterkant van de vorige *Pythagoras* (zie ook figuur 3); daarin bewijst Euclides dat je op een gegeven lijnstuk een gelijkzijdige driehoek kunt construeren. Die constructie heb je in de brugklas al geleerd. Het bewijs gaat als volgt (zie figuur 4).

Zij AB het gegeven lijnstuk. We moeten dus een gelijkzijdige driehoek construeren op lijnstuk AB.

Teken de cirkel *BCD* met middelpunt *A* en afstand *AB*; [postulaat III]

teken de cirkel *ACE* met middelpunt *B* en afstand *BA*; [postulaat III]

en teken vanuit het punt *C*, waar de cirkels elkaar snijden, verbindingen met de punten *A* en *B*, de lijnstukken *CA* en *CB*. [postulaat I]

Nu geldt, omdat het punt *A* het middelpunt is van cirkel *CDB*, dat *AC* gelijk is aan *AB*. [definitie 15]

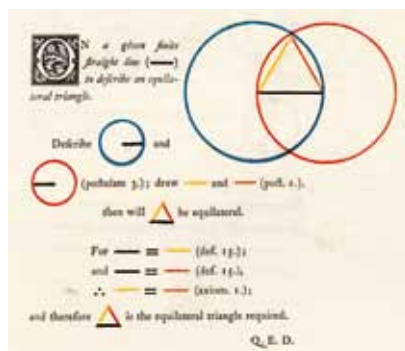
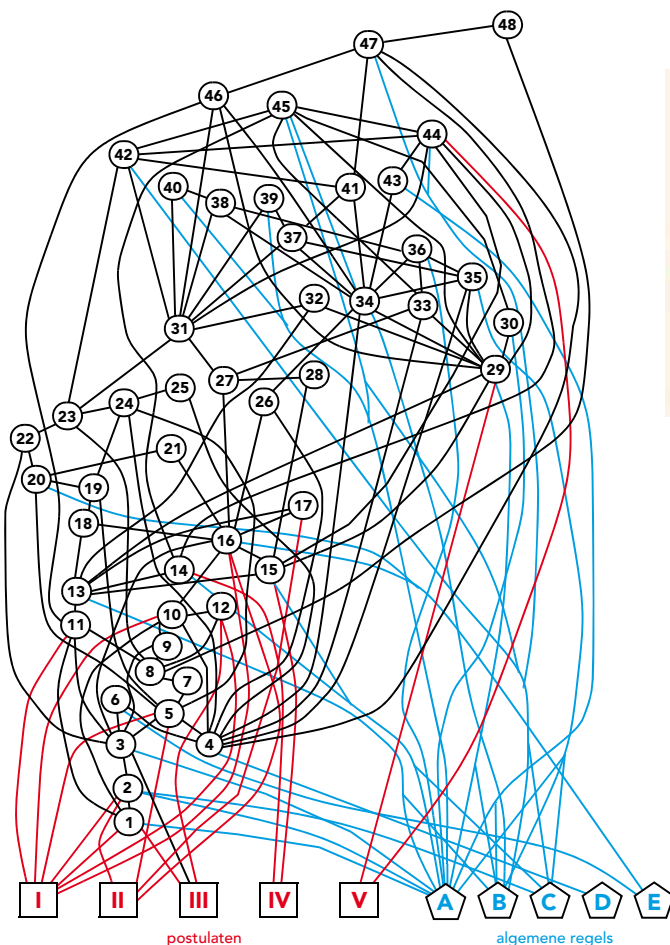
En ook, omdat het punt *B* het middelpunt van cirkel *CAE* is, dat *BC* gelijk is aan *BA*. [definitie 15]

Maar *CA* was ook gelijk aan *AB*; daarom zijn beide rechte lijnen *CA* en *CB* gelijk aan *AB*.

En dingen die gelijk zijn aan hetzelfde zijn ook gelijk aan elkaar [algemeenheid A]; dus *CA* is gelijk aan *CB*.

Dus de drie rechte lijnen *CA*, *AB* en *BC* zijn gelijk aan elkaar.

Dus de driehoek *ABC* is gelijkzijdig, en hij is geconstrueerd op het gegeven lijnstuk *AB*. Hetgeen vereist was.



Links: **figuur 2** Dit schema laat zien hoe de stellingen in boek I van *De Elementen* van elkaar afhangen. Er zijn 48 stellingen en die hangen af van elkaar, van de postulaten (I-V) en algemeenheden (A-E).

Illustratie door Aad Goddijn, op grond van *The Elements* in de bewerking van Thomas Heath (Dover Science Books).

Boven: **figuur 3** Het bewijs van de eerste stelling uit boek I, in beeld gebracht door Oliver Byrne.

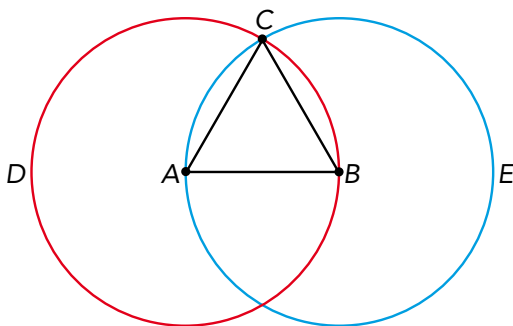
Je ziet dat de stapjes heel precies en klein zijn: ook dingen die je misschien wel direct duidelijk vindt, worden toch genoemd met een verwijzing naar de bijbehorende postulaten of algemeenheden.

Het argument is duidelijk hetzelfde als het argu-

ment zoals Byrne dat opschrijft, maar het verschil is ook goed te zien: Byrne hoeft nergens te verwijzen naar punten en lijnstukken door middel van letters. Hij doet dat met kleuren, en kan daarmee veel korter de link tussen de uitleg en het plaatje aangeven. Ook Byrnes symbolen zijn mooi: met een eenvoudig cirkeltje en een straal erin maakt hij duidelijk wat er mag volgens postulaat 3, en omdat de kleur en vorm van het symbooltje precies corresponderen met wat er in het volledige plaatje gebeurt, zie je heel direct welk stukje op dat moment getekend wordt.

En dat maakt het leren van de wiskunde volgens Byrne eenvoudiger, getuige de ondertitel van zijn prachtige werk: 'The first six books of The Elements of Euclid – in which coloured diagrams and symbols are used instead of letters for the greater ease of learners'.

Het hele boek van Byrne is online te bekijken: <http://publicdomainreview.org/collections/the-first-six-books-of-the-elements-of-euclid-1847> (kort: <http://goo.gl/WX3mtf>). ■



Figuur 4 Hoe construeer je op een gegeven lijnstuk een gelijkzijdige driehoek?

De Erdős-Mordell-stelling is een twintigste-eeuwse stelling uit de euclidische meetkunde. In de laatste decennia zijn er diverse bewijzen gevonden, die vrijwel allemaal met middelbare-schoolwiskunde te begrijpen zijn. In dit artikel presenteren we één zo'n bewijs.

■ door Alex van den Brandhof



EEN BOEKBEBEWIJS

Gedurende het grootste deel van zijn leven reisde Paul Erdős (1913-1996) de hele wereld rond. Zijn eerste standplaats buiten zijn vaderland was Manchester: vanaf 1934 werkte hij daar vier jaar als 'post-doc'. In deze tijd bedacht hij mooie puzzels voor de rubriek 'Advanced Problems' van *The American Mathematical Monthly*. In 1935 stonden in het juni-nummer van dit tijdschrift twee door Erdős ingezonden problemen. Een daarvan was het volgende meetkundige vraagstuk:

Vanuit een punt O binnen een gegeven driehoek ABC worden de hoogtelijnen OP , OQ en OR getekend. Bewijs dat $OA + OB + OC \geq 2(OP + OQ + OR)$.

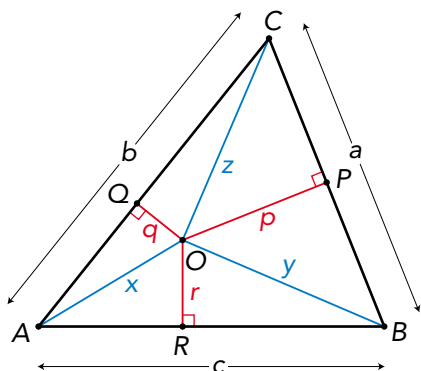
14

Lezers die het probleem niet zelf konden oplossen, moesten wachten tot april 1937. Toen publiceerde het tijdschrift twee verschillende oplossingen: één van Louis Mordell, die net als Erdős in Manchester werkte, en één van David Barrow van de universiteit van Georgia (VS). Beide bewijzen verdienen

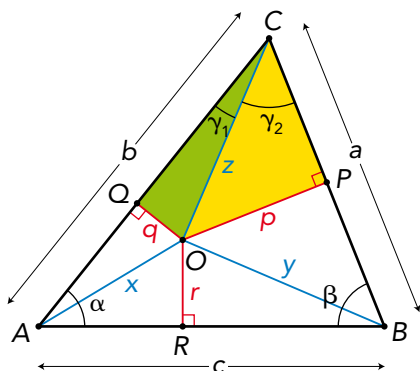
geen schoonheidsprijs: ze maken gebruik van nogal lastige trigonometrie en het bewijs van Barrow is bovendien tamelijk lang. Erdős was vast blij dat er mensen waren geweest die het probleem hadden gekraakt, maar voor Erdős was, zoals voor zoveel wiskundigen overigens, een 'mooi' bewijs het ultieme doel. Hij had het altijd over 'Het Boek': een denkbeeldige bijbel die de kortste, mooiste bewijzen bevat voor elk denkbaar wiskundig probleem. Het hoogste compliment dat hij aan het werk van een collega kon geven, was de mededeling 'Dat is direct uit Het Boek.'

Tot 1956 kwam er geen nieuw bewijs bij van wat bekend ging staan als de Erdős-Mordell-stelling. Maar daarna zijn er geregeld nieuwe bewijzen gevonden. Elementaire bewijzen, veel eleganter dan die van Mordell en Barrow.

In dit artikel geven we een bewijs uit 2007, bedacht door Claudi Alsina en Roger Nelsen. Het is een goede kandidaat voor het 'Boekbewijs': het is kort en gebruikt niet veel meer dan onderbouwmeetkunde en het stellingke in het kader onderaan pagina 15, waarvoor niet meer nodig is dan een paar eenvoudige algebraïsche vaardigheden.



Figuur 1



Figuur 2

HET BEWIJS Figuur 1 toont een driehoek ABC met daarin een punt O , de hoogtelijnen OP , OQ en OR (rood) en de lijnstukken OA , OB en OC (blauw). Met kleine letters zijn de lengtes van de lijnstukken aangegeven. De ongelijkheid die Erdős vroeg om te bewijzen, is

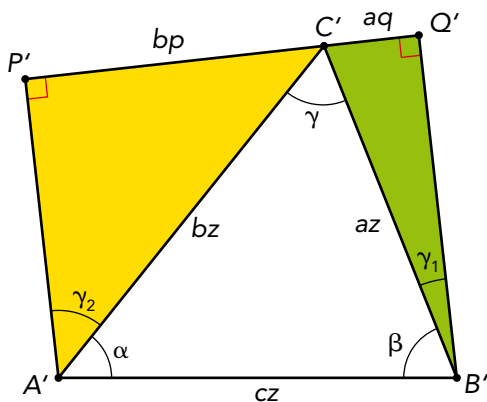
$$x + y + z \geq 2(p + q + r).$$

Eerst tonen we aan dat de volgende drie ongelijkheden gelden:

$$ax \geq br + cq, \quad by \geq ar + cp \quad \text{en} \quad cz \geq aq + bp. \quad (*)$$

We bewijzen alleen de laatste ongelijkheid; de eerste twee gaan op dezelfde manier.

In figuur 2 is de driehoek van figuur 1 nogmaals getekend. De hoeken bij A , B en C noemen we α , β en γ ; de laatste hoek wordt zoals in de figuur aangegeven onderverdeeld in γ_1 en γ_2 . Vergroot driehoek ABC met een factor z ; zo krijgen we driehoek $A'B'C'$ in figuur 3. Vergroot driehoek OCQ (groen in figuur 2) met een factor a en plak deze vergroting tegen driehoek $A'B'C'$ zoals aangegeven. Vergroot driehoek OPC (geel in figuur 2) met een factor b en plak ook deze vergroting tegen driehoek $A'B'C'$ zoals aangegeven.



Figuur 3

Er geldt dat $\angle P'C'A' = 90^\circ - \gamma_2$, $\angle Q'C'B' = 90^\circ - \gamma_1$ en $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$, dus $\angle P'C'Q' = 90^\circ - \gamma_2 + 90^\circ - \gamma_1 + \gamma_1 + \gamma_2 = 180^\circ$: een gestrekte hoek. Verder zijn $A'P'$ en $B'Q'$ evenwijdig. We kunnen dus concluderen dat figuur 3 een trapezium is. Omdat $P'Q'$ loodrecht op $A'P'$ en op $B'Q'$ staat, is $cz \geq aq + bp$, waarmee de laatste ongelijkheid in $(*)$ is aangetoond.

De drie ongelijkheden in $(*)$ kunnen we ook zo schrijven:

$$x \geq \left(\frac{b}{a}\right)r + \left(\frac{c}{a}\right)q, \quad y \geq \left(\frac{a}{b}\right)r + \left(\frac{c}{b}\right)p \quad \text{en} \quad z \geq \left(\frac{a}{c}\right)q + \left(\frac{b}{c}\right)p.$$

Sommeren we deze drie ongelijkheden, dan krijgen we:

$$\begin{aligned} x + y + z &\geq \\ &\left(\frac{b}{a}\right)r + \left(\frac{c}{a}\right)q + \left(\frac{a}{b}\right)r + \left(\frac{c}{b}\right)p + \left(\frac{a}{c}\right)q + \left(\frac{b}{c}\right)p = \\ &\left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right)p + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right)q + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)r. \end{aligned}$$

Uit de ongelijkheid die in het onderstaande kader staat vermeld, volgt dat de coëfficiënten van p , q en r ten minste 2 zijn. We hebben dus:

$$x + y + z \geq 2p + 2q + 2r = 2(p + q + r),$$

waarmee de ongelijkheid van Erdős-Mordell bewezen is.

Opgave. Het $\geq$ -teken in de ongelijkheid van Erdős-Mordell kan worden vervangen door een $=$ -teken indien driehoek ABC gelijkzijdig is, en punt O het zwaartepunt is van de driehoek. Kun je dat bewijzen? ■

Stelling. Als a en b positieve getallen zijn, dan geldt: $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.

Bewijs. Uiteraard is $(a - b)^2 \geq 0$. Haakjes uitwerken levert $a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$, ofwel $a^2 + b^2 \geq 2ab$. Deel nu links en rechts door ab , dan volgt het gestelde.

2 is de opvolger van 1

2 is het enige even priemgetal

2 is het eerste onaanraakbare getal

$$1 + 1 = 2$$

$$2 + 2 =$$
$$2 \times 2 =$$
$$2^2$$

$$(\sqrt{2})^2 = 2$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} :$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots = 2$$

$$2 = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}}}}$$

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}$$

$$\frac{1}{\pi} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \dots$$

Productformule van Wallis

$2 = \sqrt{2} \sqrt{2} \sqrt{2} \sqrt{2} \sqrt{2} \sqrt{2} \dots$

Toren van machten

$$n = -^2 \log^2 \log \underbrace{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\dots \sqrt{\sqrt{2}}}}}}_{n \text{ worteltekens}}$$

Diracs manier om elk geheel getal te schrijven met drie tweeën.

$$n = -^2 \log^2 \log \underbrace{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\dots \sqrt{\sqrt{2}}}}}}_{n \text{ worteltekens}}$$

Diracs manier om elk geheel getal te schrijven met drie tweeën.

1, 4, 9, 16, 25,
36, 49, 64, ...

Rij van kwadraten

1, 4, 9, 16, 25,
36, 49, 64, ...

Rij van kwadraten

1, 2, 4, 8, 16,
32, 64, 128, ...

Rij van **twee**demachten

1, 2, 4, 8, 16,
32, 64, 128, ...

Rij van **twee**demachten

1, 1, 2, 3, 5,
8, 13, 21, ...

Rij van Fibonacci

1, 1, 2, 3, 5,
8, 13, 21, ...

Rij van Fibonacci

1, 2, 5, 12, 29,
70, 169, 408, ...

1, 2, 5, 12, 29,
70, 169, 408, ...

1, 1, 1, 2, 2,
3, 4, 5, 7, 9,
12, 16, 21, 28,
37, 49, 65, 86, ...

Rij van Padovan

1, 1, 1, 2, 2,
3, 4, 5, 7, 9,
12, 16, 21, 28,
37, 49, 65, 86, ...

Rij van Padovan

(3, 5), (5, 7),
(11, 13), (17, 19),
(29, 31), (41, 43),
(59, 61), (71, 73),
(101, 103), ...

Primtweelingen

(3, 5), (5, 7),
(11, 13), (17, 19),
(29, 31), (41, 43),
(59, 61), (71, 73),
(101, 103), ...

Primtweelingen

A right-angled triangle with legs of length 1 and 1, and a hypotenuse of length $\sqrt{2}$.

$$H - R + V = 2$$

Veelvlakkenformule van Euler



$a^2 + b^2 = c^2$

Stelling van Pythagoras

$$x^2 + 1 = 2y^2$$

Geval $n = 2$ vergelijking van Pell

$$x^2 + 1 = 2y^2$$

Geval $n = 2$ vergelijking van Pell

Als (x, y) een positieve oplossing is van de vergelijking van Pell (geval $n = 2$), is x/y een benadering van $\sqrt{2}$

$$2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$$

$$= 2$$

$$\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2 = 1$$

$$\left(\frac{1}{\cos 45^\circ}\right)^2 = 2 = \frac{1}{\cos 60^\circ}$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$



$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$$

$$\sqrt{2}\sqrt{2} ; (\sqrt{2}\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$$

Een van bovenstaande uitdrukkingen bewijst dat een irrationaal getal tot de macht een irrationaal getal een rationaal getal kan zijn.

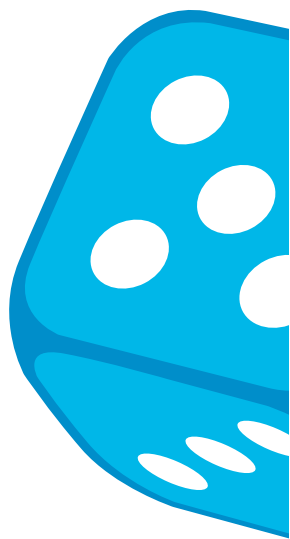
$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \dots$$

0, 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, 1001, 1010, 1011, 1100, 1101, ...

Er zijn 10 soorten mensen: mensen die binaire getallen begrijpen en de rest.

FINANCIËLE HEBZUCHT

■ door Robbert Fokkink



18 Andrew Wiles, de man die twintig jaar geleden op slag beroemd werd omdat hij de Laatste Stelling van Fermat had bewezen, maakt zich zorgen. Vorig jaar waarschuwde hij in een interview met *The Times* dat wiskunde zijn morele zuiverheid heeft verloren. Vroeger was wiskunde een abstracte wetenschap die ver af stond van de dagelijkse praktijk, maar tegenwoordig is wiskunde steeds relevanter. Wiles noemt met name het toenemend gebruik, of misschien ook wel het misbruik, van wiskunde door grote banken en financiële instellingen. De kwantitatieve wereld is geschreven in wiskundige taal en onze wereld wordt nu eenmaal steeds kwantitatiever, voegt Wiles eraan toe. Het klinkt alsof hij het niet echt leuk vindt. *Financiële hebzucht* 'bedreigt de goede naam van wiskunde' staat erboven in de krant.

BANKIERSTEST Hopelijk gaan onze bankiers met de tijd mee en leren ze een beetje wiskunde. Ze lijken in ieder geval hun best te doen. Marcus du Sautoy, net als Andrew Wiles hoogleraar in Oxford, schrijft in zijn bestseller *The Music of the Primes* dat hij overal rond de wereld bankiers

bijschoolt. Hij test hun kennis met een puzzeltje: vind twee priemgetallen met product 126.619. In Azië wordt zoiets opgelost door een bankier met pen en papier. In Amerika door een bankier die snel een programma van het internet plukt. Maar Europese bankiers blijven het antwoord schuldig. Dat is een beetje verontrustend. London-City zit vol met wiskundigen die in dienst zijn van deze bankiers. Kunnen Europese bankiers niet sms'en?

Marcus du Sautoy schoolt bankiers bij over internetbeveiliging en daar heb je priemgetallen voor nodig. Daarom geeft hij een puzzeltje met priemgetallen. Bankiers moeten niet alleen hun priemgetallen kennen, ze moeten ook kansrekening in huis hebben om de risico's van financiële producten in te schatten. Een kansrekeningpuzzeltje zou ook op zijn plaats zijn. Ik geef er maar vast eentje. Welke kans is groter: minstens één keer zes gooien bij zes dobbelsteenworpen, of minstens twee keer zes gooien bij twaalf dobbelsteenworpen?

Dit vroeg Samuel Pepys (1633-1703), een lid van de Royal Society, in 1693 aan Isaac Newton. Pepys was een hoge ambtenaar die pas lang na zijn



Je hebt twee dobbelstenen: één gewone en één die nooit met de kant 'zes ogen' naar boven zal vallen. Je weet niet welke de normale is en welke de abnormale. Je moet zo snel mogelijk een zes gooien: je krijgt dan 1.000.000 euro. Voor elke worp moet je 50.000 euro betalen. Bovendien moet je een boete van 500.000 euro betalen voor elke keer dat je wisselt van dobbelsteen. Welke strategie levert je naar verwachting het meeste op?

dood beroemd zou worden vanwege zijn onthutsend openhartige dagboeken, die hij voor de zekerheid had geschreven in een geheime code. Hij was als verwoed gokker (en drinkebroer en rokenjager, verslavingen waar hij tot zijn verdriet maar niet vanaf kon komen, maar die de leesbaarheid van zijn dagboeken zeer ten goede kwamen) altijd op zoek naar een gunstige weddenschap. Veel mensen zouden hun geld zetten op minimaal twee zessen uit twaalf worpen, maar de kans op minimaal één zes uit zes worpen is groter.

NORMALE EN BEHEKSTE DOBBELSTEEN

In 1693 was zo'n vraag nog een punt van discussie op de Royal Society, tegenwoordig kan iedere middelbare scholier het uitrekenen. Bankiers moeten wel wat meer aankunnen en daarom verzin ik een veel moeilijker puzzeltje. Stel ik heb twee op het oog identieke dobbelstenen in mijn zak. De ene is een doodnormale dobbelsteen, maar de andere is behekst, waardoor je er nooit zes mee gooit. Met de behekste dobbelsteen gooi je een van de ogentallen één, twee, drie, vier, vijf; al deze uitkomsten zijn even waarschijnlijk. Nu

krijgt de bankier de taak om zo snel mogelijk zes te gooien. Zodra hij dat doet ligt er een mooie bonus van een **miljoen euro** voor hem klaar (kleinere bedragen boeien een bankier niet). Voor elke worp moet de bankier wel een luttel bedrag betalen van vijftigduizend euro, bovendien moet de bankier een extra bedrag van vijfhonderdduizend euro betalen voor elke keer dat hij wisselt van dobbelsteen. Dit laatste staat in kleine lettertjes, in de hoop dat de bankier het niet ziet. Wat is de beste tactiek voor de bankier en hoeveel levert dit naar verwachting op?

Antwoorden op puzzeltjes moet je niet verknappen. Stuur jouw tactiek vóór 1 december naar r.j.fokkink@tudelft.nl. Voor de inzender met de beste tactiek ligt het boek van Marcus du Sautoy klaar. Andrew Wiles mag dan waarschuwen tegen hebzucht, een klein prijsje kan nooit kwaad. Bovendien wordt de soep nooit zo heet gegeten als die wordt opgediend. Wiles gaf zijn interview in het zojuist geopende naar hem vernoemde wiskundegebouw, dat is gefinancierd door het Clay Mathematics Institute. Deze liefdadige instelling is opgezet met geld van een hedgefonds. Zelfs verkeerd geld komt uiteindelijk altijd goed terecht! ■

Pythagoras-redacteur Paul Levrie schreef samen met zijn collega Rudi Penne het boek *De pracht van priemgetallen*, dat in het begin van dit jaar verscheen en waarover we al schreven in het aprilnummer. Ondertussen is het boek bekroond met een prijs van de Koninklijke Vlaamse Academie van België voor Wetenschappen en Kunsten. In dit artikel bespreken de twee auteurs een paar priemfeiten en priemvragen. Over Mersennepriemgetallen, Fermatpriemgetallen, priemtweelingen, priempaarden en meer.

■ door Paul Levrie en Rudi Penne (Faculteit Toegepaste Ingenieurswetenschappen, Universiteit Antwerpen)

PRIEMGETALLEN: VEEL VRAGEN, WEINIG ANTWOORDEN

Is 1234567 een priemgetal? Stel je voor dat je in een tijd leeft dat er geen computers zijn (en ook geen rekentoestellen), dan is dit een knap lastig probleem. Met computers gaat het natuurlijk iets vlotter, maar ook dan blijft de vraag: hoe begin je er aan, en waarom is dit zoveel moeilijker dan bijvoorbeeld de vraag: is 1234567 deelbaar door 2?

Priemgetallen zijn getallen die enkel deelbaar zijn door 1 en door zichzelf. Uitgezonderd 1. De rij van de priemgetallen begint dus zo: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ... We kennen ze al meer dan 2000 jaar, maar ze blijven raadselachtig en geven hun geheimen slechts met mondjesmaat prijs. Wat we wel weten, is dat er oneindig veel van zijn, en dat kunnen we dankzij Euclides (rond 300 v.C.) eenvoudig bewijzen (zie het kader op pagina 22). Daarnaast zijn er heel wat onopgeloste problemen.

OPEN PROBLEMEN De wereld van de priemgetallen zit vol vragen (en vermoedens), en vaak beginnen die zo: zijn er oneindig veel ...

• *Zijn er oneindig veel Mersennepriemgetallen?*

Een Mersennepriemgetal is een priemgetal van de vorm $2^n - 1$. Het is een eenvoudige oefening om te bewijzen dat n noodzakelijk een priemgetal moet zijn opdat $2^n - 1$ kans heeft om zelf priem te zijn (maar het is geen voldoende voorwaarde, getuige $2^{11} - 1 = 23 \times 89$). De vijf kleinste Mersennepriemgetallen zijn 3, 7, 31, 127 en 8191. Er is niemand die weet of er oneindig veel van zijn. Tot nog toe kennen we achtenveertig Mersennepriemgetallen, waarvan het grootste in januari 2013 ontdekt is, na-

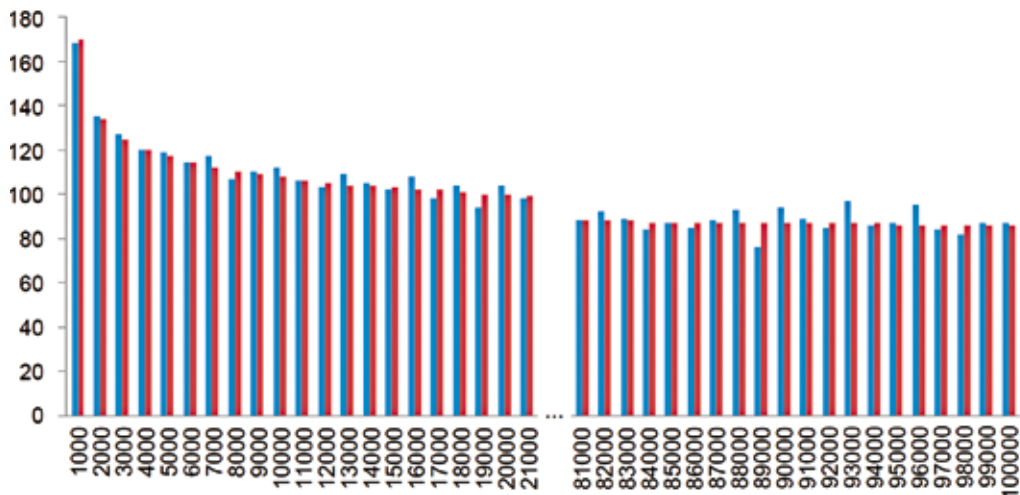
melijk $2^{57.885.161} - 1$. Dit is meteen ook het grootste bekende priemgetal bij het verschijnen van dit nummer van *Pythagoras*. Dat is geen toeval, want voor Mersennegetallen – getallen van de vorm $2^p - 1$ (met p priem) – is het eenvoudiger om te testen of ze inderdaad priem zijn dan voor willekeurige kandidaten. Dat komt doordat we bij Mersennegetallen gebruik kunnen maken van de *Lucas-Lehmertest*, maar de details hiervan laten we weg.

• *Zijn er oneindig veel perfecte getallen?*

Een perfect of volmaakt getal is gelijk aan de som van zijn delers (zichzelf niet maar 1 wel meegerekend). Zo is 6 perfect, want $6 = 1 + 2 + 3$. Euclides wist al dat je perfecte getallen kon fabriceren via de formule $2^{p-1} \cdot (2^p - 1)$ met $2^p - 1$ een Mersennepriemgetal. Bijvoorbeeld, met $7 = 2^3 - 1$ maken we het volmaakte getal 28. Euler toonde aan dat bovendien ieder *even* perfect getal van deze vorm is. We vermoeden dat er geen oneven perfecte getallen bestaan, maar dit is nog niet bewezen. In dit geval is de vraag of er oneindig veel perfecte getallen bestaan een equivalente herformulering van de vraag of er oneindig veel Mersennepriemgetallen bestaan.

• *Zijn er oneindig veel Fermatpriemgetallen?*

Een Fermatpriemgetal is een priemgetal van de vorm $2^{2^n} + 1$. Er zijn er vijf bekend: 3, 5, 17, 257 en 65.537. Er is niemand die weet of er meer van dit soort getallen bestaan, maar men vermoedt dat er geen andere zijn dan deze vijf. Dit zou spijtig zijn, want voor ieder Fermatpriemgetal N bestaat er een meetkundige constructie met passer en liniaal om exact een regelmatige N -hoek te construeren. Zul-



Figuur 1 Blauw: het aantal priemgetallen tussen $i \cdot 1000$ en $(i + 1) \cdot 1000$.
Rood: een benadering van dit aantal, gebruikmakend van de zogeheten *priemgetallen-telfunctie*.

ke constructies bestaan ook als N een product van Fermatpriemgetallen is, eventueel vermenigvuldigd met een macht van 2, maar andere regelmatige veelhoeken kan je niet construeren met passer en liniaal.

• Zijn er oneindig veel priemtwelingen?

Een priemtweling is een paar priemgetallen die 2 van elkaar verschillen, dus twee getallen p en $p + 2$, beide priem. Voorbeelden hiervan vind je bij kleine getallen bij de vleet, want voor kleine getallen is het niet moeilijk priem te zijn: 3 en 5, 11 en 13, 17 en 19, ... Er zijn er ook grote; de grootst bekende priemtweling bij het verschijnen van deze *Pythagoras* is het paar $3.756.801.695.685 \cdot 2^{666.669} \pm 1$. Maar zijn er oneindig veel van?

Het is bekend dat hoe verder je gaat, hoe minder priemgetallen je tegenkomt. In figuur 1 geeft de hoogte van de blauwe staafjes het aantal priemgetallen tussen $i \cdot 1000$ en $(i + 1) \cdot 1000$. De hoogte van de rode staafjes geeft een benadering ervan met een formule die een logaritmische functie bevat en die al bekend was in het begin van de negentiende eeuw. Zoiets kom je wel vaker tegen bij de priemgetallen: er zijn formules waarmee je kan schatten met hoeveel ze zijn, maar je hebt geen formules waarmee je ze dan ook effectief kan vinden.

Met andere woorden, het exacte patroon van de priemgetallen blijft een mysterie, maar we hebben wel een redelijk goed idee van hun statistische spreiding. Hierdoor weten we dat voor grotere getallen het gemiddeld langer duurt alvorens een volgend priemgetal opduikt. Maar ze blijven wel ver-

schijnen, al worden ze steeds zeldzamer en dus ook moeilijker te vinden, want – zoals we in het begin al opmerkten – er zijn oneindig veel priemgetallen.

De gemiddelde afstand tussen opeenvolgende priemgetallen mag dan wel groter worden, dit sluit niet uit dat we ook bij de grote getallen plots een dekselse priemtweling tegenkomen. Maar uiteraard: naarmate je verder oprukt worden ook de priemtwelingen zeldzamer. En misschien sterven ze vanaf een bepaald moment uit, wie weet?

PRIEMPAARDEN Het priemtwelingenvermoeden zegt:

er zijn oneindig veel priemtwelingen.

Het is voor de eerste keer geformuleerd in 1849 door Alphonse de Polignac. Wat deze Franse wiskundige zei was een stuk ruimer:

elk even getal is op oneindig veel manieren te schrijven als verschil van twee (opeenvolgende) priemgetallen.

Als we voor het even getal het getal 2 kiezen, dan hebben we het priemtwelingenvermoeden.

Sinds de formulering van dit vermoeden proberen wiskundigen ijverig te bewijzen dat het inderdaad zo is. Op dit ogenblik is het priemtwelingenvermoeden echt een hot topic. Vorig jaar kwam er een doorbraak, we komen dichterbij de bevestiging, maar we zijn er nog (net) niet.

HET BEWIJS VAN EUCLIDES Euclides toonde al aan dat er oneindig veel priemgetallen zijn. Wij presenteren het bewijs op een net even andere manier, maar het komt in feite neer op Euclides' redenering. Stel dat er maar eindig veel priemgetallen zijn, we geven ze elk een kleur. En de veelvouden ervan krijgen dezelfde kleur. We doen het even voor de kleinste priemgetallen apart, maar je moet je voorstellen dat alles tegelijk gebeurt op één lijn, de lijn van de getallen 1, 2, 3, 4, ...:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32

We merken op dat

(1) alle getallen (behalve het getal 1) één of meerdere kleuren hebben, want ofwel zijn ze priem, en dan hebben ze precies één kleur, ofwel zijn ze niet priem, en dan hebben ze de kleuren van al hun priemfactoren (neem bijvoorbeeld 30: het heeft de kleuren van 2, 3 en 5). Let op: Euclides steunde hierbij op de eigenschap dat ieder *samengesteld getal* (een niet-priemgetal groter dan 1) een priemgetal als deler heeft (dit had hij eerder aangetoond met een inductieve redenering).

(2) twee opeenvolgende getallen nooit dezelfde kleur kunnen hebben. Dat wordt snel duidelijk als je naar de figuur kijkt.

We veronderstelden dat er maar eindig veel priemgetallen zijn. Dit betekent dat we aan eindig veel kleuren genoeg hebben. Neem nu het product van alle priemgetallen en noem dat N . Dit getal krijgt dus ook alle kleuren mee:



En dan zijn we er. Want neem nu het getal $N + 1$: voor dit getal is er geen kleur meer over! Dit volgt uit (2), omdat N alle mogelijke kleuren heeft. Maar volgens (1) moet ook $N + 1$ een kleur hebben. We komen zo tot een tegenspraak. En onze veronderstelling dat er maar eindig veel priemgetallen zijn, is dus fout: ze zijn met oneindig veel.

Hoe dicht zijn we precies genaderd? Om dat duidelijk te maken spreken we af dat we twee priemgetallen die een verschil van d hebben, een priempaars- d of kortweg priempaard zullen noemen. Voor bepaalde waarden van d zijn er ook andere benamingen: voor $d = 2$ hebben we de priemtweelingen, voor $d = 4$ spreken we over priemneven, voor $d = 6$ over sexy priemgetallen. Het priemtweelingenvermoeden kunnen we nu zo schrijven:

er zijn oneindig veel priempaarden met $d = 2$.

De onbekende wiskundige Yitang Zhang bewees in 2013 het volgende: er zijn oneindig veel koppels priemgetallen die minder dan 70 miljoen uit elkaar liggen. Anders gezegd: er zijn oneindig veel intervallen met lengte 70 miljoen waarin (minstens)

twee priemgetallen liggen. Je weet niet hoever die priemgetallen in die intervallen uit elkaar liggen, en toch kan je hieruit het volgende besluiten:

er is een $d \leq 70.000.000$ waarvoor geldt dat er oneindig veel priempaarden zijn.

Dat zie je als volgt. Als je al die intervallen van lengte 70 miljoen bekijkt, en je neemt er steeds twee priemgetallen uit, waarvan je de afstand opschrijft, dan krijg je een oneindig lange lijst met afstanden die allemaal kleiner zijn dan 70 miljoen. Omdat het om gehele getallen gaat, en omdat er maar eindig veel gehele getallen zijn kleiner dan 70 miljoen, zal er zeker een afstand tussen zitten die oneindig vaak voorkomt. Dat is onze d ! (Als dat namelijk niet zo was, en elke afstand in de lijst maar

een eindig aantal keer voorkomt, dan kom je nooit aan een oneindig lange lijst.)

Sinds Zhang zijn bewijs voorstelde, is er nog enorme vooruitgang geboekt, via het Polymath8-project, een samenwerkingsverband tussen wiskundigen uit de hele wereld die samen (gebruikmakend van het internet als communicatiemiddel) zoeken naar verbeteringen van de bestaande methodes. In april 2014 hadden ze dit bereikt:

er is een $d \leq 246$ waarvoor geldt dat er oneindig veel priempaarden zijn.

Ondertussen is dit deel van het Polymath8-project stopgezet, dus het lijkt twijfelachtig dat de gebruikte methodes nog verder verfijnd kunnen worden om van de 246 een 2 te maken, waarmee het priem-tweelingenvermoeden bewezen zou zijn.

TOCH NOG EEN ANTWOORD We willen dit artikel vol vraagtekens dan toch eindigen zoals we het gestart zijn: met een positieve noot! In het begin hebben we verteld (en bewezen) dat er oneindig veel priemgetallen zijn. Maar we weten meer, we weten zelfs dat er oneindig veel priemgetallen bestaan die niet tot een priemtweeling behoren. Als de priemtweelingen ooit eindig in aantal blijken te zijn, dan onthult deze bewering niets nieuws, maar voorlopig gaan we er van uit dat dit niet het geval is.

De oneindigheid van priemeeenlingen wordt gegarandeerd door een aparte studie van de *harmonische reeks*:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots,$$

de reeks (d.w.z. oneindige som) van alle omgekeerde natuurlijke getallen. Je weet misschien dat deze oneindige som als uitkomst ∞ heeft. In 1737 bewees Leonhard Euler dat dit resultaat ook geldt als we ons in deze som beperken tot de omgekeerde priemgetallen:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \dots = \infty.$$

(Hiermee vond Euler overigens een alternatief bewijs voor de stelling van Euclides dat er van de

priemgetallen oneindig veel zijn, maar daar gaat het nu niet om.) Stel nu dat er slechts eindig veel priemeeenlingen zijn. Dan zou je de termen met een priemeeenling in de noemer kunnen schrappen in de bovenstaande reeks van Euler. Je houdt dan de volgende reeks over:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \frac{1}{29} + \frac{1}{31} + \dots,$$

die nog altijd ∞ als uitkomst zou hebben, omdat je slechts een eindig aantal termen zou hebben geschrapt. Maar dit is in tegenspraak met het kippenvelresultaat van Viggo Brun uit 1919: *de (al dan niet oneindige) som van alle omgekeerde priemtweelingen is eindig!*

De uitkomst van deze som van omgekeerde priemtweelingen wordt de *constante van Brun* genoemd. Deze constante is iets meer dan 1,9, maar de exacte waarde ervan is onbekend. Welke verrassingen hebben de mysterieuze priemtweelingen nog voor ons in petto? ■

ZOEKEN NAAR PRIEMTWEELINGEN

Het vinden van (grote) priemtweelingen is geen eenvoudige zaak, en dat lijkt vreemd want er is het volgende criterium waarmee je het priemtweelingzijn van een koppel getallen kan nagaan:

het koppel $(m, m + 2)$ is een priemtweeling dan en slechts dan als $m + 4 + 4 \cdot (m - 1)!$ deelbaar is door $m(m + 2)$.

Deze stelling is eenvoudig te bewijzen, maar helemaal niet handig om te gebruiken. De term $4 \cdot (m - 1)!$ wordt namelijk zo snel onnoemelijk groot, dat zelfs de beste computers aan deze stelling niets hebben bij het zoeken naar priemtweelingen. Je krijgt al een goed idee van het probleem indien je voor m de (kleine) waarde 17 kiest: dan moet je nagaan of $17 + 4 + 4 \cdot 16! = 83.691.159.552.021$ deelbaar is door 323 (en dat is inderdaad zo).

■ door Marc Seijlhouwer



De vragen en antwoorden zijn voornamelijk erg grappig. Regelmatig lijkt een vraag volkomen ab-

Randall Munroe, *Wat Als?* Vertaald uit het Engels (*What if?*) door Albert Witteveen. Uitgeverij Unieboek | Het Spectrum bv, Houten – Antwerpen.

2048

■ door Matthijs Coster



Figuur 1 Doorspelen tot 4096



Figuur 2 De variant 2048-4d

Het spel 2048 is een enorme rage. Je kunt het spelen op 2048-game.com. Ook is er een app voor mobiele telefoons en tablets. Voor wie 2048 niet kent, een korte uitleg. Je hebt een speelveld van 4×4 . Op twee willekeurige plaatsen verschijnen tegels met daarin een 2 of 4. Hierna beweeg je alle tegels in één richting (omhoog, omlaag, naar rechts of naar links). Op een computer maak je gewoon gebruik van de vier pijltoetsen. Op een smartphone of tablet veeg je met je vinger in de gewenste richting.

Na een beweging komen de tegels netjes tegen elkaar aan te liggen. Als je twee gelijke tegels uit eenzelfde rij of kolom (tegen elkaar aan of met één of twee lege velden ertussen) tegen elkaar duwt, versmelten ze tot één tegel met de som van die twee getallen. Door de startgetallen 2 en 4 krijg je alleen maar machten van 2. Na elke beweging verschijnt er een nieuwe tegel met een 2 of een 4.

De bedoeling is om op het speelveld een tegel met daarin 2048 te krijgen. Het spel stopt als er een tegel is geplaatst en alle 16 velden van het bord bezet zijn (er kan dan niets meer worden bewogen) of als zich nergens gelijke machten van 2 in aangrenzende velden bevinden.

RUIM 10 MINUTEN SPELEN Het is niet moeilijk om op 8, 16, 32 en 64 uit te komen. Maar gaandeweg wordt het lastiger. Als je 512 wilt maken, moet je twee tegels van 256 hebben. Om dat te bereiken, moet je behoorlijk wat zetten doen. Ervan uitgaande dat je één seconde doet over een zet (dat is erg snel!) en dat er even veel tweeën als viëren verschijnen, kun je uitrekenen hoe lang het gemiddeld duurt voordat je een nieuwe macht op het scherm ziet verschijnen. Het bereiken van 1024 duurt ongeveer 341 seconden, dat is ruim 5 minuten. Maar dan ben je er nog niet, want 2048 is het dubbele, en dat kost dus ruim 10 minuten.

Diverse apps geven de mogelijkheid om door te spelen. Je kunt proberen om 4096 te bereiken (zie figuur 1) of zelfs 8192. Ook zijn er talloze varianten op het spel, zie bijvoorbeeld get2048.com en allthe2048.com. Enkele varianten zullen we bespreken.

TWEE SPELERS Verschijnt een nieuwe tegel altijd op een willekeurige plaats? Dat is helemaal niet vanzelfsprekend. Sterker, bij een aantal apps weet ik

zeker dat dit niet het geval is. Dat brengt me op de variant 2x2048: hierbij speel je 2048 met zijn tweeën. Eén neemt dan de rol van de computer over. Natuurlijk probeer je het je tegenspeler zo lastig mogelijk te maken. Een tip: ga hiermee pas actief aan de slag als je tegenstander bijna 1024 heeft. Zodra hij de verschillende machten van 2 in een fraaie volgorde heeft staan, probeer je deze regelmaat lekker in de war te schoppen. Behaalt je tegenstander de 1024? Geen probleem. Laat hem weer een tijdje ongemoeid, en sla toe vlak voor de 2048.

FIBONACCI Bij 2048: *Fibonacci Edition* krijg je in plaats van machten van 2 de rij van Fibonacci: 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ... De 3 kan worden gebruikt met een 2 om een 5 te krijgen, maar ook met een 5 om een 8 te krijgen. Deze variant is om die reden makkelijker, maar lastiger is dat je een overvloed aan vijven kunt krijgen, die alleen met drieën weg te werken is.

HOGERE DIMENSIE Bij 2048-3d speel je in een kubus van $3 \times 3 \times 3$. Je hebt 27 speelvelden. Om het spel lastiger te maken, worden er af en toe nepblokken rondgestrooid, waar je alleen maar van af kunt komen door ze naast elkaar te brengen. Bij 2048-4d speel je op een bord van $2 \times 2 \times 2 \times 2$ (zie figuur 2).

144 Bij de versie 144 speel je op een bord van 5×5 . Je krijgt uitsluitend tegels met het getal 1. Je kunt nu ook drie (of meer) gelijke tegels laten samenvloeien tot de som. Het doel is om tot 144 te komen. Het is mij nooit gelukt. Wel kreeg ik het voor elkaar om 48 en 72 te bereiken.

NIET LEUK Niet alle varianten zijn leuk. Neem bijvoorbeeld *Super 2048*, met een bord van 8×8 . Om 1.048.576 (2^{20}) in een tegel te krijgen, ben je twee weken verder (non-stop spelen). Daarom zitten er allerlei instellingen op, zodat je apparaat de bewegingen automatisch verricht. Na een nachtje kijk je eens wat er op het scherm staat. De app heeft een undo-mogelijkheid. Maar op het moment dat het scherm 'game over' geeft, werkt de undo-mogelijkheid niet. Deze nogal gezochte variant op 2048, dat juist zo mooi is door zijn eenvoud, kan de prullenbak in. ■

Begin juli vond in Zuid-Afrika de Internationale Wiskunde Olympiade (IMO) plaats. Nederland behaalde de dertiende plek in het landenklassement en presteerde hiermee beter dan ooit tevoren. Van de zes teamleden had Jeroen Winkel de hoogste score: 32 van de 42 punten. Hij bespreekt in dit artikel de allermoeilijkste opgave van deze IMO.

■ door Jeroen Winkel

BLAUWE LIJNEN

Opgave 6 van deze IMO ging over n lijnen in 'algemene ligging'. Dit wil zeggen dat er geen twee lijnen evenwijdig zijn aan elkaar, en dat er geen drie lijnen door één punt gaan. Deze lijnen verdelen het vlak in een aantal gebieden, waarvan sommige een eindige oppervlakte hebben. Deze noemen we de eindige gebieden. De bedoeling is om $\sqrt{n}$ of meer van de lijnen blauw te kleuren, zó dat geen enkel eindig gebied een volledig blauwe rand krijgt.

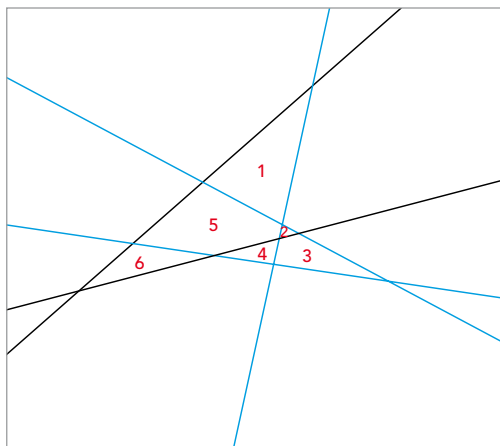
In figuur 1 zie je een voorbeeld met 5 lijnen. Er zijn 6 eindige gebieden: 4 driehoeken, een vierhoek en een vijfhoek. In het plaatje zijn 3 lijnen blauw gekleurd terwijl geen van de eindige gebieden een volledig blauwe rand heeft. Het werkt dus in dit voorbeeld, want $3 \geq \sqrt{5}$. Merk op dat als een van de andere twee lijnen ook nog blauw zou worden gekleurd, dan ofwel gebied 1 danwel gebied 2 (en in dat geval ook de gebieden 3 en 4) een volledig blauwe rand zou krijgen.

AANTAL PUNTEN Om wat meer gevoel voor de opgave te krijgen, bekijken we eerst maar eens wat een algemene ligging precies inhoudt. Elke twee lij-

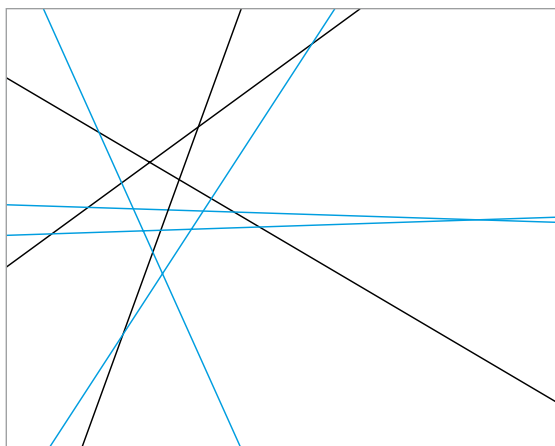
nen zijn niet evenwijdig, dus snijden elkaar. Ook zijn er geen drie lijnen die door één punt gaan, dus voor elk paar lijnen is er precies één snijpunt. Het aantal snijpunten is dus gelijk aan het aantal tweetallen lijnen. Het aantal tweetallen lijnen is $n(n-1)/2$: er zijn n mogelijkheden voor de ene lijn, $n-1$ mogelijkheden voor de andere lijn, en de deling door 2 is nodig omdat anders elk tweetal dubbel wordt geteld. Het aantal snijpunten van n lijnen in algemene ligging is dus $n(n-1)/2$.

MAXIMALE KLEURINGEN In figuur 2 zie je een figuur waarbij 7 lijnen zijn getekend. Het lukt eenvoudig om er 4 blauw te kleuren, zodat aan de voorwaarden wordt voldaan: de 15 eindige gebieden hebben allemaal niet een volledig blauwe rand. Omdat $4 \geq \sqrt{7}$, is dit voldoende. We zien echter ook dat het niet mogelijk is om nóg een lijn blauw te kleuren; dan zou er een eindig gebied ontstaan met een volledig blauwe rand. We noemen deze kleuring daarom *maximaal*. Ook de kleuring in figuur 1 was maximaal.

Wat weten we van deze maximale kleuringen?



Figuur 1



Figuur 2



Het Nederlandse team: v.l.n.r. Bob Zwetsloot (16 jaar, Noordwijkerhout, 5 vwo, Teylingen College Leeuwenhorst; reisde mee als winnaar van de aanmoedigingsprijs), Michelle Sweering (goud, 17 jaar, Krimpen aan den IJssel, 6 vwo, Erasmiaans Gymnasium Rotterdam), Matthew Maat (zilver, 14 jaar, Enschede, 4 vwo, Bonhoeffer College Enschede), Peter Gerlagh (goud, 18 jaar, Tilburg, 6 vwo, Theresia Lyceum Tilburg), Bas Verveeldt (zilver, 17 jaar, Tilburg, 6 vwo, Theresia Lyceum Tilburg), Jeroen Winkel (goud, 17 jaar, Nijmegen, 6 vwo, Stedelijk Gymnasium Nijmegen), Tysger Boelens (brons, 18 jaar, Ter Apel, 6 vwo, RSG Ter Apel).

Ten eerste is het duidelijk dat er altijd eentje moet bestaan: we kunnen gewoon één voor één lijnen blauw kleuren, totdat het niet meer kan. En als we een maximale kleuring hebben, weten we ook dat als we een willekeurige niet-blaauwe lijn blauw kleuren, er dan een eindig gebied ontstaat dat wel een volledig blauwe rand heeft (anders hadden we die lijn toch nog blauw kunnen maken bij het maken van de maximale kleuring). Elke niet-blaauwe lijn zit dus aan de rand van ten minste één eindig gebied waarvan de rand verder helemaal blauw is. Noem nu een snijpunt van twee blauwe lijnen een *blauw punt*. We gaan koppelingen maken tussen niet-blaauwe lijnen en blauwe punten. We weten dat elke niet-blaauwe lijn aan ten minste één eindig gebied grenst waarvan de rand voor de rest alleen blauw is. Dit gebied heeft minstens twee blauwe zijden (namelijk als het in feite een driehoek is) en van zijn hoekpunten is er dus minstens één een blauw punt. Nu wordt de niet-blaauwe lijn aan één van deze blauwe punten gekoppeld. In figuur 3 zie je een voorbeeld: de niet-blaauwe lijn zit hier aan een vierhoek en twee driehoeken die elk verder alleen maar blauwe lijnen bevatten. Als er meerdere van zulke eindige gebieden zijn met verder alleen maar blauwe lijnen, kiezen we er gewoon eentje. Kies bijvoorbeeld de vierhoek. Dit gebied bevat twee blauwe punten: A en B. De niet-blaauwe lijn kan dus gekoppeld worden aan A of B: dit maakt niet uit, ook hier kiezen we er weer willekeurig eentje.

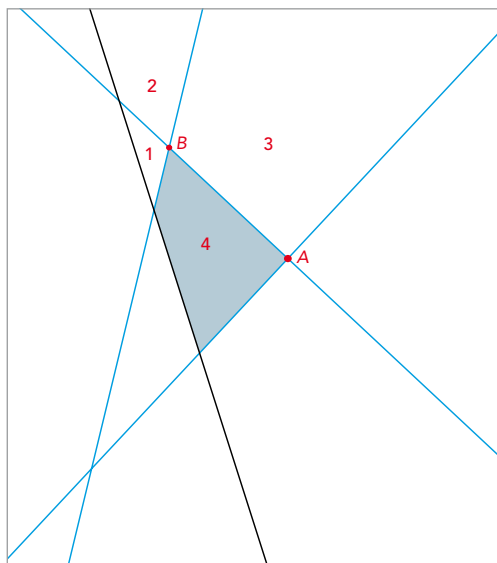
Noteer met k het aantal blauwe lijnen in een maximale kleuring. We weten van deze lijnen ook dat ze allemaal niet evenwijdig zijn aan elkaar en dat er geen drie lijnen door één punt gaan, dus ook deze k lijnen zijn in algemene ligging. Dus er zijn $k(k-1)/2$ blauwe punten.

Rondom elk blauw punt liggen precies 4 gebieden (zie figuur 3: de vier gebieden rondom punt B zijn aangegeven). Dus naast elk blauw punt kunnen hoogstens 4 eindige gebieden liggen waarvan maar één stukje van de rand niet blauw is, dus er kunnen hoogstens 4 lijnen aan dit punt gekoppeld zijn. Dus elke niet-blaauwe lijn is gekoppeld aan een blauw punt, en elk blauw punt is gekoppeld aan ten hoogste 4 niet-blaauwe lijnen: er zijn dus hoogstens 4 keer zoveel niet-blaauwe lijnen als er blauwe punten zijn. Er zijn $n - k$ niet-blaauwe lijnen en $k(k-1)/2$ blauwe

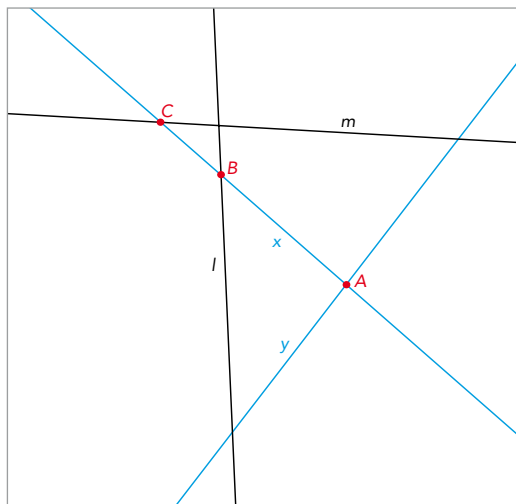
punten, dus $n - k \leq 4 \cdot k(k-1)/2 = 2k(k-1)$, dus $n \leq 2k^2 - 2k + k < 2k^2$, dus $k \geq \sqrt{n/2}$. We hebben nu dus al een kleuring met minstens $\sqrt{n/2}$ blauwe lijnen! Dit was op de IMO 3 punten waard, van de 7.

MET DE KLOK MEE Om te bewijzen dat we $\sqrt{n}$ lijnen blauw kunnen kleuren, moeten we onze methode enigszins aanpassen. We hadden eerst voor elke niet-blaauwe lijn een gebied gevonden dat die lijn aan de rand heeft, en verder alleen blauwe lijnen, en de niet-blaauwe lijn vervolgens gekoppeld aan een willekeurig blauw punt in het gebied. Nu nemen we niet een willekeurig blauw punt in het gebied, maar het eerste blauwe punt dat we krijgen als we vanaf de niet-blaauwe lijn met de klok mee de punten langsgaan. In figuur 3 zou (als we weer de vierhoek zouden kiezen) de niet-blaauwe lijn dus gekoppeld worden aan punt B, en niet punt A.

Nog steeds is elke niet-blaauwe lijn nu gekoppeld aan een blauw punt. We kunnen nu echter bewijzen dat bij elk blauw punt hoogstens 2 niet-blaauwe lijnen horen. We doen dit door aan te nemen dat er een blauw punt is dat bij minstens 3 niet-blaauwe



Figuur 3



Figuur 4

lijnen hoort, en dan een tegenspraak af te leiden. Stel dus dat er een blauw punt A is dat bij minstens 3 niet-blauwe lijnen hoort. Dan zijn er dus 3 gebieden rondom A , waarvan de rand bijna helemaal blauw is. Daarvan moeten er dan 2 naast elkaar liggen. Noem de niet-blauwe lijn in de rand van het ene gebied l en die in de rand van het andere gebied m , waarbij het gebied van m in de richting van de klok na het gebied van l komt (zie figuur 4, maar let nog even niet op de ligging van de punten B of C ; we voeren deze punten straks pas in en gaan ook dan pas afleiden welke dichter bij A ligt). In deze figuur zijn niet alle lijnen getekend; er kunnen nog andere blauwe en/of niet-blauwe lijnen tussendoor lopen. Noteer met x de lijn door A die grenst aan beide gebieden, en met y de andere lijn door A . We weten dat m het enige niet-blauwe stukje is van het gebied boven A , en l het enige niet-blauwe stukje van het gebied links van A . Noteer met B het snijpunt van l en x , en met C het snijpunt van m en x . We weten dat B en C niet hetzelfde punt zijn, omdat er geen drie lijnen door een punt gaan. Ook weten we dat A het eerste blauwe punt is als we vanuit lijnstuk l kloksgewijs langs de punten lopen. Er zit dus precies één lijnstuk tussen l en A . Er lopen maar twee lijnen door A , en aangezien het met de klok mee gaat, moet dit lijnstuk AB zijn. Dit betekent dus dat B in het gebied van l zit. Kennelijk zitten A en B in hetzelfde gebied, dus er kan geen enkele lijn meer door het lijnstuk AB lopen, want die zou B dan van het gebied afsnijden. Dit betekent dus ook dat C niet op het lijnstuk AB ligt, want de lijn m loopt door C . Dus B ligt tussen A en C . Nu bekijken we het gebied dat hoort bij de lijn m . Dit is dan een gebied met één niet-blauw stukje, name-

lijk van de lijn m , en A zit in het gebied. Maar als A in het gebied zit, dan zit B ook in het gebied, want er loopt geen lijn door het lijnstuk AB . Maar dan zit er ook een stukje van l in de rand, en l is niet blauw. We hebben nu dus nog een niet-blauw stukje in de rand van het gebied. Dit leidt tot de tegenspraak.

Dus elke niet-blauwe lijn is nu gekoppeld aan een blauw punt, en elk blauw punt is gekoppeld aan hoogstens 2 niet-blauwe lijnen. Dus het aantal niet-blauwe lijnen is hoogstens 2 keer zo groot als het aantal blauwe punten. Het aantal niet-blauwe lijnen is $n - k$ en het aantal blauwe punten is $k(k - 1)/2$, dus $n - k \leq 2 \cdot k(k - 1)/2 = k(k - 1) = k^2 - k$, dus $n \leq k^2$, dus $k \geq \sqrt{n}$. We hebben dus $\sqrt{n}$ of meer blauwe lijnen!

NOG MEER BLAUWE LIJNEN? Wat we nu hebben bewezen is niet alleen dat we $\sqrt{n}$ of meer lijnen blauw kunnen kleuren; het is dat *elke* maximale kleuring al minstens $\sqrt{n}$ blauwe lijnen heeft. Het maakt dus niet uit hoe we het doen, als we steeds maar nieuwe lijnen blauw maken totdat het niet meer kan, komen we al op minstens $\sqrt{n}$ blauwe lijnen. Het is daarom niet verbazingwekkend dat we op een groter aantal blauwe lijnen uit kunnen komen door een slimmere methode te gebruiken: de teamleider van het Amerikaanse IMO-team Po-Shen Loh heeft bewezen dat het ook met $c\sqrt{\log n} \cdot \sqrt{n}$ blauwe lijnen kan, voor een zekere constante $c > 0$. Dit bewijs gebruikt moeilijker technieken en combinatorische stellingen. Voor n groot genoeg geldt natuurlijk $c\sqrt{\log n} > 1$. Er geldt zelfs $c\sqrt{\log n} > M$ voor elke M die je maar wilt, mits je n maar groot genoeg maakt. Dit is dus een grote verbetering. ■

PYTHAGORAS OLYMPIADE

■ door Matthijs Coster, Eddie Nijholt en Harry Smit

Doe mee met de Pythagoras Olympiade! Elke aflevering bevat vier opgaven. De eerste twee zijn wat eenvoudiger; onder de goede inzendingen van leerlingen uit de klassen 1, 2 en 3 wordt een cadeaubon van Bol.com ter waarde van 20 euro verloot. De laatste twee zijn echte breinbrekers; onder de goede inzendingen van leerlingen (tot en met klas 6) wordt een bon van 20 euro verloot. Per aflevering wordt maximaal één bon per persoon vergeven.

Daarnaast krijgen leerlingen (tot en met klas 6) punten voor een *laddercompetitie*, waarmee eveneens een cadeaubon van Bol.com van 20 euro te verdienen valt. De opgaven van de onderbouw zijn 1 punt waard, de opgaven van de bovenbouw 2 punten. De leerling met de hoogste score in de laddercompetitie krijgt een bon. Zijn puntentotaal wordt weer op 0 gezet. Wie zes achtereenvolgende keren niets inzendt, verliest zijn punten in de laddercompetitie. Met de bovenbouw-opgaven kun je ook een plaats in de finale van de Nederlandse Wiskunde Olympiade verdienen, mocht het via de voor-

ronden niet lukken:

aan het eind van elke jaargang worden enkele goed scorende leerlingen uitgenodigd voor de NWO-finale. Niet-leerlingen kunnen met de Pythagoras Olympiade meedoen voor de eer.



HOE IN TE ZENDEN? Stuur je oplossing (getypt of een scan van een handgeschreven oplossing) naar pytholym@gmail.com. Je ontvangt een automatisch antwoord zodra we je bericht hebben ontvangen.

Let op: het is niet meer mogelijk schriftelijk in te zenden.

Voorzie het antwoord van een duidelijke toelichting (dat wil zeggen: een berekening of een bewijs). Vermeld je naam en adres; leerlingen moeten ook hun klas en de naam van hun school vermelden.

Je inzending moet bij ons binnen zijn vóór 31 december 2014.

DE GOEDE INZENDERS VAN JUNI 2014

286: Jelle Couperus (klas 6), Goois Lyceum, Bussum; Pieter Dekker, Krimpen a/d Lek; Famke Driessen (klas 5), Goois Lyceum, Bussum; Nathan van 't Hof (klas 6), Hofstad Lyceum, Rijswijk; Boris Kloeg (klas 3), Varendonck College, Asten; Niels van Mierlo (klas 3), Christelijk Gymnasium, Utrecht; Beaudine Smeekes (klas 6), Goois Lyceum, Bussum.

287: Sebastiaan Ceuppens (klas 4), Goois Lyceum, Bussum; Jelle Couperus (klas 6), Goois Lyceum, Bussum; Pieter Dekker, Krimpen a/d Lek; Ivo van Dijk (klas 5), Goois Lyceum, Bussum; Nathan van 't Hof (klas 5), Hofstad Lyceum, Rijswijk; Arie van der Kraan, Nuth; Tjard Langhout (klas 4), Goois Lyceum, Bussum; Niels van Mierlo (klas 3), Christelijk Gymnasium, Utrecht; Reinier Schmiermann (klas 4), Stedelijk Gymnasium 's-Hertogenbosch; Beaudine Smeekes (klas 6), Goois Lyceum, Bussum; Marinda Westerveld (klas 6), Goois Lyceum, Bussum.

288: Kees Boersma, Vlissingen; Sebastiaan Ceuppens (klas 4), Goois Lyceum, Bussum; Reinier Schmiermann (klas 4), Stedelijk Gymnasium 's-Hertogenbosch; Beaudine Smeekes (klas 6), Goois Lyceum, Bussum.

289: Kees Boersma, Vlissingen; Nathan van 't Hof (klas 5), Hofstad Lyceum, Rijswijk.

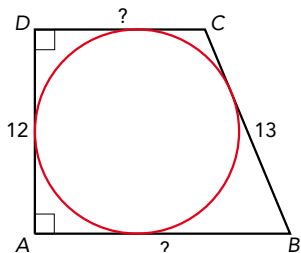
Cadeaubonnen: Niels van Mierlo en Reinier

Schmiermann.

Stand laddercompetitie: Nathan van 't Hof (20 p; cadeaubon), Michelle Sweering (18 p), Pieter-Jan Meuris (15 p), Wouter Andriessen (12 p), Wout Gevaert (12 p), Frenk Out (12 p), Marinda Westerveld (11 p), Tara van Belkom (9 p), Reinier Schmiermann (9 p), Beaudine Smeekes (9 p), Pim Spelier (9 p), Oscar Heijdra (7 p), Tjard Langhout (6 p), Simon Roelandt (6 p), Tim Vermeulen (6 p), Michiel Versnel (6 p), Max Bosman (5 p), Eva Kapitein (5 p), Art Waeterschoot (5 p), Bob Zwetsloot (5 p), Ivo van Dijk (4 p), Laurens Hilbrands (4 p), Niels van Mierlo (4 p), Sebastiaan Ceuppens (3 p), Jildert Denneman (3 p), Anton van Es (3 p), Ritchie Keijsper (3 p), Timen Schenk (3 p), Sjoerd de Vries (3 p), Jelle Couperus (2 p), Sietse Couperus (2 p), Maud van de Graaf (2 p), Phillip de Groot (2 p), Yvette Keij (2 p), Tom Smeding (2 p), Jelle den Uil (2 p), Sied Vrasdonk (2 p), Marc Zuurbier (2 p), Sterre ter Beek (1 p), Simon de Best (1 p), Johanna Bult (1 p), Maarten Clercx (1 p), Famke Driessen (1 p), Sander Engelberts (1 p), Tessa Engelberts (1 p), Boris Kloeg (1 p), Elisabeth Kuijper (1 p), Bram van der Linden (1 p), Hannah Nijse (1 p), Anne Noom (1 p), Seb Waterreus (1 p).

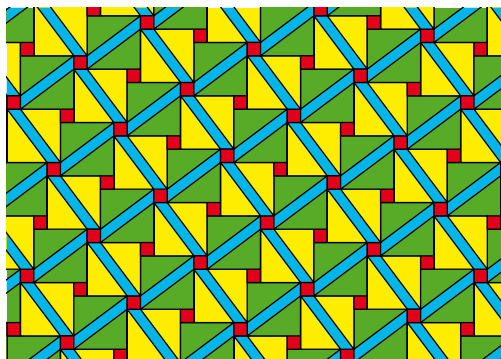
OPGAVE 294

Van vierhoek $ABCD$ zijn de hoeken A en D recht. Verder geldt dat $AD = 12$ en $BC = 13$. Ten slotte raakt een cirkel aan elk van de vier zijden. Bepaal de lengte van AB en CD .



OPGAVE 295

Hieronder is een vlakvulling afgebeeld. In elk geel en groen vierkant zijn twee rechthoekige driehoeken getekend met rechthoekszijden 3 en 4; het gebied tussen die twee driehoeken is blauw gekleurd. Hoe verhouden zich de oppervlaktes van het rode, gele, groene en blauwe deel tot elkaar?

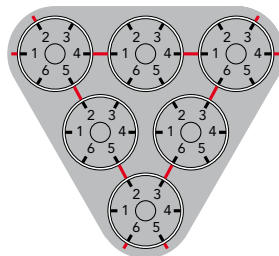


OPGAVE 296

Er staan 16 tafeltjes in een kring, genummerd 1 tot en met 16. Op elk tafeltje ligt een briefje met de tekst 'Ga naar tafel met tafelnummer ...', waarbij er nooit naar het tafeltje zelf wordt verwezen. Bij elk van de tafeltjes staat een leerling. Bij een wisseling voeren zij de opdracht op het briefje uit en verplaatsen zij zich naar een ander tafeltje. Na een aantal stappen zijn alle leerlingen weer terug bij hun eerste tafeltje. Wat is het kleinste aantal wisselingen waarbij dit zal gebeuren? En wat is het grootste aantal wisselingen dat mogelijk is?

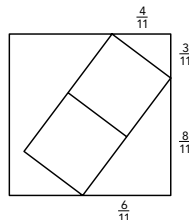
OPGAVE 297

Een kluis bevat zes draaischijven, zoals aangegeven in de figuur. Elke schijf bevat de getallen 1 tot en met 6. Voor de sier staan er drie rode lijnen rondom de draaischijven. Voor hoeveel cijfercombinaties geldt dat op elk van deze rode lijnen de getallen 1 tot en met 6 staan (uiteraard in een willekeurige volgorde)?



OPLOSSING 286

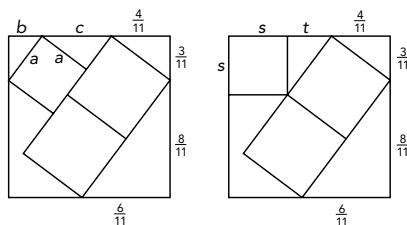
Kees plaatst twee vierkanten in een eenheidsvierkant (dit is een vierkant met zijde 1), zoals aangegeven in de figuur. Hij wil nog een derde vierkant plaatsen zo, dat de som van de drie omtrekken maximaal is. Bepaal deze som.



Oplossing. Het is duidelijk, dat de optimale situatie zich in een van de twee hieronder getekende gevallen voordoeft. In de linker situatie geldt $\frac{b}{a} = \frac{3}{5}$ en $\frac{c}{a} = \frac{5}{4}$. Verder geldt $b + c = \frac{7}{11}$, ofwel $\frac{3}{5}a + \frac{5}{4}a = \frac{7}{11}$. Hieruit berekenen we $a \approx 0,344$.

In de rechter situatie geldt $s + t = \frac{7}{11}$. Verder geldt $t = \frac{3}{4}s$. Hieruit berekenen we $s + \frac{3}{4}s = \frac{7}{11}$, ofwel $s = \frac{4}{11} \approx 0,364$.

De omtrek van het vierkant in de rechter situatie is dus maximaal, en dat geldt dan natuurlijk ook voor de omtrek van de drie vierkanten samen.



OPLOSSING 287

Erwin gaat zwemmen in een zwembad met een eiland in het midden. In 3 minuten zwemt Erwin één keer helemaal rond. Af en toe wordt de stroming aangezet. Als Erwin met de stroming mee zwemt, dan lukt het hem om in 2 minuten één keer rond te zwemmen. Hoe lang doet Erwin erover om tegen de stroming in één keer helemaal rond te zwemmen?

Oplossing. Aangezien Erwin zonder stroming 3 minuten over een ronde doet, zwemt hij $1/3$ rondje per minuut. Als hij de stroming mee heeft, zwemt hij $1/2$ rondje per minuut. De stroming gaat dus met een snelheid van $1/2 - 1/3 = 1/6$ rondje per minuut. Als Erwin deze stroming tegen krijgt, zal hij nog maar $1/3 - 1/6 = 1/6$ rondje per minuut zwemmen, dus doet Erwin tegen de stroom in 6 minuten over een rondje.

OPLOSSING 288

In een land bestaan de kentekens van auto's uit zes cijfers (van 0 tot en met 9). Bovendien geldt dat twee kentekens minimaal op twee plaatsen verschillen. Dus als 142857 voorkomt als kenteken, dan komt 147857 niet voor (want alleen het derde cijfer verschilt). Hoeveel kentekens zijn er in dit land in totaal mogelijk?

Oplossing. Als je twee willekeurige kentekens van auto's uit dit land pakt, dan kunnen de eerste vijf cijfers van het ene kenteken niet allemaal hetzelfde zijn als de eerste vijf cijfers van het andere kenteken. Immers, als dat wel zo zou zijn, kan alleen het zesde cijfer verschillen, maar dat mag niet vanwege de eis dat twee kentekens minimaal op twee plaatsen verschillen. Aangezien er $10^5 = 100.000$ mogelijkheden zijn voor de eerste vijf cijfers, kan het aantal mogelijke kentekens ook maar maximaal 100.000 zijn.

Nu laten we zien dat er ook echt 100.000 kentekens mogelijk zijn (en niet minder). Voor elke com-

binatie van de eerste vijf cijfers kiezen we het zesde cijfer gelijk aan het laatste cijfer van de som van de eerste vijf cijfers. Als nu bij twee kentekens maar één cijfer van de eerste vijf cijfers verschilt, dan verschilt de som van de eerste vijf cijfers minstens 1 en maximaal 9, dus is het laatste cijfer niet hetzelfde. Deze kentekens verschillen dan ook op het zesde cijfer.

We concluderen dat er in het betreffende land precies 100.000 kentekens gemaakt kunnen worden.

OPLOSSING 289

Gegeven is de vergelijking

$$\frac{x^2 - 1}{y} + y + 8 = 6x.$$

Toon aan dat er oneindig veel oplossingen (x, y) bestaan waarbij x en y gehele getallen zijn.

Oplossing. Vermenigvuldig de vergelijking met y :

$$x^2 - 1 + y^2 + 8y = 6xy,$$

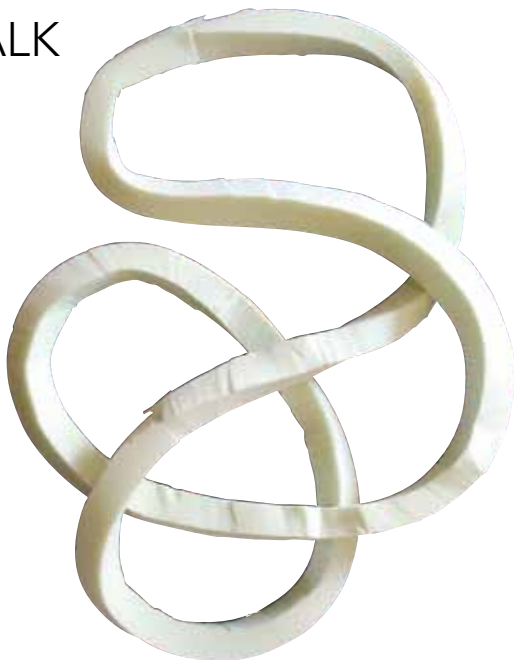
ofwel

$$\begin{aligned} x^2 - 6xy + y^2 + 8y - 1 &= \\ (x - 3y)^2 - 8y^2 + 8y - 1 &= \\ (x - 3y)^2 - 2(2y - 1)^2 + 1 &= 0. \end{aligned}$$

We kijken nu naar oplossingen van $A^2 - 2B^2 + 1 = 0$. We vinden de oplossingen $(A, B) \in \{(1, 1), (7, 5), (41, 29), (239, 169), \dots\}$. Voor elk van de volgende oplossingen geldt dat de oplossingen afgeleid kunnen worden uit de twee voorafgaande oplossingen (6 maal de vorige oplossing min de oplossing daarvoor): $41 = 6 \cdot 7 - 1$, $29 = 6 \cdot 5 - 1$, $239 = 6 \cdot 41 - 7$ en $169 = 6 \cdot 29 - 5$, enzovoort. (We geven hiervan nu geen bewijs; het past wel binnen het thema 'kwadraten' waaraan *Pythagoras* deze jaargang een serie artikelen wijdt (aflevering 1 in het vorige nummer, aflevering 2 in het volgende nummer).) De bijbehorende oplossingen voor (x, y) zijn $(4, 1)$, $(16, 3)$, $(86, 15)$, $(494, 85)$, Er zijn dus oneindig veel oplossingen.

OPLOSSING MÖBIUSBALK

De foto's tonen de oplossing van de puzzel op pagina 11 van het vorige nummer. Je ziet: de figuur valt niet in delen uit elkaar!



PYTHAGORAS

54ste jaargang nummer 2
november 2014
ISSN 0033 4766

Pythagoras stelt zich ten doel jongeren kennis te laten maken met de leuke en uitdagende kanten van wiskunde. *Pythagoras* richt zich tot leerlingen van vwo en havo en alle anderen die jong van geest zijn.

Internet www.pyth.eu

Hoofdredacteur Derk Pik

Eindredacteur Alex van den Brandhof

Redactie Matthijs Coster,
Jeanine Daems, Jan Guichelaar,
Klaas Pieter Hart, Paul Levrie,
Marc Seijlhouwer

Vormgeving Grafisch Team Digipage,
Leidschendam

Druk Drukkerij Ten Brink, Meppel

Uitgever Koninklijk Wiskundig
Genootschap (KWG)

Management Pythagoras Jan Turk,
Mark Veraar (KWG), Derk Pik

Lezersreacties en kopij

Bij voorkeur per e-mail; lezersreacties naar Jan Guichelaar, jan@pyth.eu en kopij naar Derk Pik, derk@pyth.eu. Eventueel per post naar Pythagoras, p.a. Centrum Wiskunde & Informatica, Postbus 94079, 1090 GB Amsterdam.

Abonnementen, bestellingen en mutaties

Abonneeservice Pythagoras
Postbus 2238
5600 CE Eindhoven
Telefoon 088 226 5258
E-mail: abonnementen@pyth.eu

Abonnementsprijs

(zes nummers per jaargang)
€ 28,00 (Nederland en België),
€ 30,00 (overige landen),
€ 18,00 (groepsabonnement NL/B),
€ 28,00 (geschenkabonnement NL/B),
€ 30,00 (geschenkabonnement overige landen).

Een geschenkabonnement stopt automatisch na één jaar. Overige abonnementen gelden tot wederopzegging. Zie www.pyth.eu voor verdere toelichtingen.

Aan dit nummer werkten mee

Alex van den Brandhof
(alex@pyth.eu),
Matthijs Coster
(matthijs@pyth.eu),
Jeanine Daems
(jeanine@pyth.eu),
Robbert Fokkink
(r.j.fokkink@tudelft.nl),
Jan Guichelaar
(jan@pyth.eu),
Klaas Pieter Hart
(kp@pyth.eu),
Paul Levrie
(paul@pyth.eu),
Eddie Nijholt
(eddie@pyth.eu),
Rudi Penne
(rudi.penne@uantwerpen.be),
Derk Pik
(derk@pyth.eu),
Marc Seijlhouwer
(marc@pyth.eu),
Harry Smit
(h.j.smit@students.uu.nl),
Jeroen Winkel
(winkeljeroen@gmail.com).

Pythagoras wordt mede mogelijk gemaakt door de bijdragen van de onderstaande instituten en instellingen.



TU Delft TU/e

UNIVERSITEIT
TWENTE.





BOOK III.

DEFINITIONS.

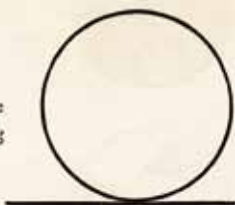
I.



QUAL circles are those whose diameters are equal.

II.

A right line is said to touch a circle when it meets the circle, and being produced does not cut it.



III.

Circles are said to touch one another which meet but do not cut one another.



IV.

Right lines are said to be equally distant from the centre of a circle when the perpendiculars drawn to them from the centre are equal.



Bron: Oliver Byrne, *The First Six Books of The Elements of Euclid*, Taschen.