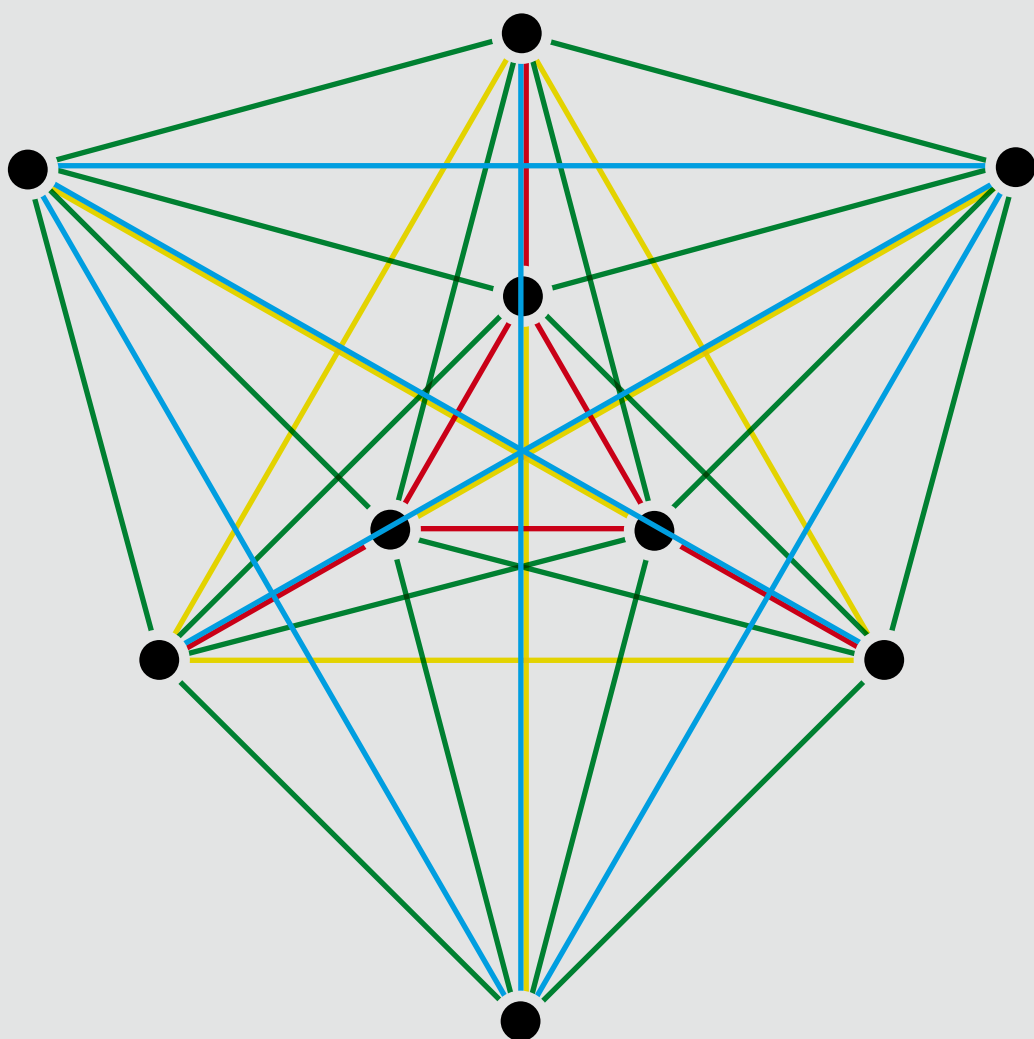


PYTHA GORAS

WISKUNDETIJDSCHRIFT VOOR JONGEREN



54ste JAARGANG - NUMMER 3 - JANUARI 2015

PRE-UNIVERSITY

**twente
academy**

pre-university college

mathrace

**8 WEKEN LANG
WISKUNDIGE VRAAGSTUKKEN!**

Ben jij goed in wiskunde?

Op maandag 9 februari 2015 start de Mathrace voor leerlingen uit 3 of 4 vwo!

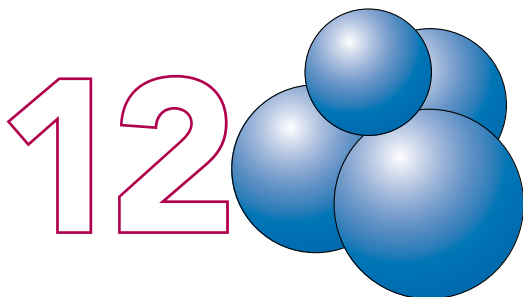
8 weken lang kan je tijdens de Mathrace wekelijks je hoofd breken over wiskundige vraagstukken. De deelnemer die aan het einde van de wedstrijd de meeste punten heeft verdiend, wint een gave prijs: een binair horloge, ter waarde van 70 euro!



Deelname aan de wedstrijd is gratis en kan via de webpagina 'Wedstrijden' op www.twenteacademy.nl.

UNIVERSITEIT TWENTE.

INHOUD

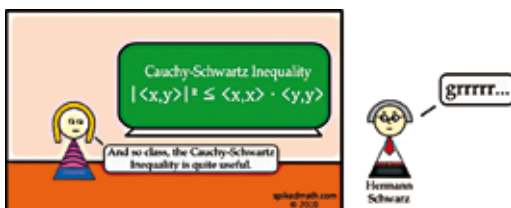


DE ONGELIJKHEID VAN CAUCHY EN SCHWARZ

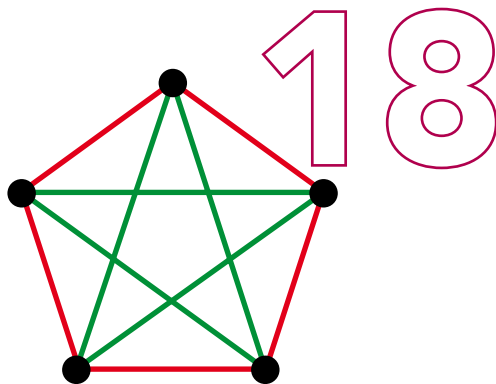
24

VIER RAKENDE BOLLEN

Als je de middelpunten van vier elkaar rakende bollen met elkaar verbindt, ontstaat een viervlak. Althans, als je de grootte van de vier bollen goed kiest.



Deze jaargang is 'kwadraten' een thema in *Pythagoras*. In deze tweede aflevering gaat het over een van de beroemdste ongelijkheden uit de wiskunde: die van Augustin-Louis Cauchy en Hermann Amandus Schwarz.



EEN AFSTANDPROBLEEM

Teken een aantal punten en bekijk de afstand tussen elk tweetal punten. Bij n punten krijg je $n(n-1)/2$ afstanden. Sommige afstanden zullen echter meer dan één keer voorkomen. Hoeveel *verschillende* afstanden krijg je minimaal? Paul Erdős had hier wel een idee over, maar kon het niet bewijzen. In 2010 lukte dat twee Amerikanen wel.

EN VERDER

- 2 Kleine nootjes
- 4 Journaal
- 6 Stralende cirkels
- 10 Kruisgetalpuzzel
- 11 Evelien en Bruut
- 15 Letterwandelen
- 16 Pi
- 22 Bonte mutsen – oplossing
- 23 Driehoeksstelling
- 28 Dommweg proberen
- 30 Pythagoras Olympiade
- 33 Oplossing Dobbelsteenprobleem

Omslagillustratie: een rangschikking van 9 punten waarbij het aantal verschillende afstanden 4 is.

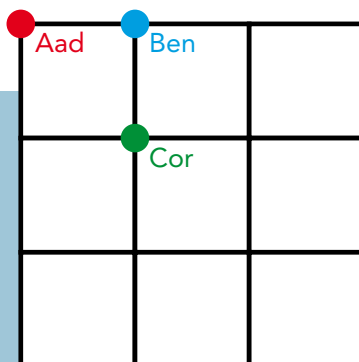
■ **NIVEAUBALKJES** Sommige pagina's bevatten één of meer zwarte balkjes onder het paginanummer. Voor artikelen zonder balkje is geen specifieke voorkennis nodig. Artikelen met één balkje bevatten wiskunde uit de onderbouw. Artikelen met twee balkjes vereisen kennis uit de bovenbouw. Drie balkjes: net iets moeilijker.

KLEINE NOOTJES

■ door Jan Guichelaar

DE 24 STRAATJES

'De 24 Straatjes' is een wijk in de stad Damestram, volgens de plattegrond hiernaast. Aad, Ben en Cor staan alle drie op een kruispunt (aangegeven in de figuur). Ze willen alle 24 straatjes aflopen. Een straatje meerdere keren doorlopen mag, eindigen in een ander punt dan het beginpunt mag ook. Aad, Ben en Cor nemen de efficiëntste route: de route waarbij ze zo weinig mogelijk hoeven te lopen. Wie van de drie legt de kortste afstand af?



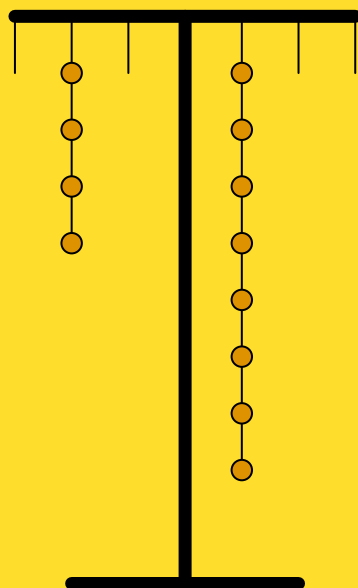
LONTEN BRANDEN

Je hebt een lange lont die overal even dik is (en dus gelijkmatig opbrandt). Je knipt hem door, zodat je twee stukken hebt. Stuk 1 is precies twee keer zo lang als stuk 2. Je steekt het ene einde van lont 1 aan, 2 minuten later steek je het andere einde van lont 1 aan, weer 2 minuten later steek je het ene einde van lont 2 aan, en ten slotte steek je weer 2 minuten later het andere einde van lont 2 aan. Na even wachten blijken de lonten precies tegelijkertijd opgebrand te zijn. Hoeveel minuten na het eerste aansteken zijn ze opgebrand?



GEWICHTEN IN BALANS

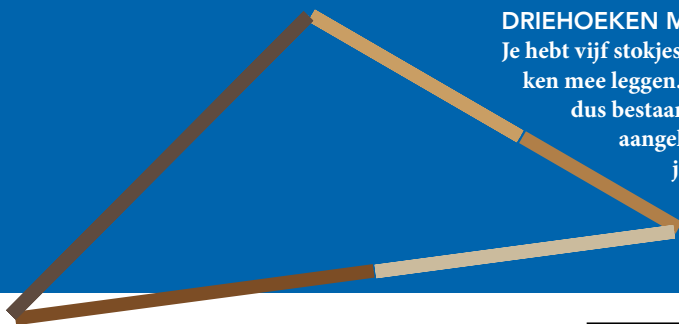
Je hebt een balans waaraan links en rechts op drie punten één of meer gewichtjes gehangen kunnen worden. De afstanden tot de punten zijn 1, 2 en 3 eenheden vanuit het midden. Je hebt 12 gelijke gewichtjes en wilt ze allemaal ophangen, zó dat de balans in evenwicht is. Het plaatje toont een voorbeeld met twee kolommen (vier kolommen zijn leeg). Op hoeveel manieren kun je evenwicht krijgen met vier kolommen van verschillende lengtes (dus twee lege kolommen)?



DRIEHOEKEN MAKEN

Je hebt vijf stokjes met lengtes 3, 4, 5, 6 en 7 en wilt er driehoeken mee leggen. Je moet alle stokjes gebruiken (een zijde kan dus bestaan uit meerdere stokjes die tegen elkaar zijn aangelegd). Hoeveel verschillende driehoeken kun je maken? Gespiegelde driehoeken tellen niet dubbel.

Hiernaast zie je de driehoek met zijden $3 + 4$, $5 + 6$ en 7 .



Kleine nootjes zijn eenvoudige opgaven die weinig of geen wiskundige voorkennis vereisen om opgelost te kunnen worden. De antwoorden vind je in het volgende nummer van *Pythagoras*.

SPEL MET MUNTEN

Antoine en Mimi hebben samen één stapel van tien munten voor zich. Om beurten moeten zij er 1, 2 of 3 van afnemen, maar: niet hetzelfde aantal als de tegenstander net daarvoor heeft gedaan. Dus: neemt de tegenstander er 2 af, dan mag de ander er alleen 1 of 3 afnemen. Bovendien moet hij ervoor zorgen dat de tegenstander altijd nog een geldige zet kan doen. Als hij dat niet doet, heeft hij verloren. Wie de laatste moet wegnemen met een toegestane zet, heeft verloren. Kan Antoine altijd winnen, als hij mag beginnen? Of kan dan juist Mimi altijd winnen?



3

OPLOSSINGEN KLEINE NOOTJES NR. 2

Hoe lang geleden? 25.06.1987

Chocoladereep. Joep eet de eerste keer het x -de deel van alles. Er moet gelden:

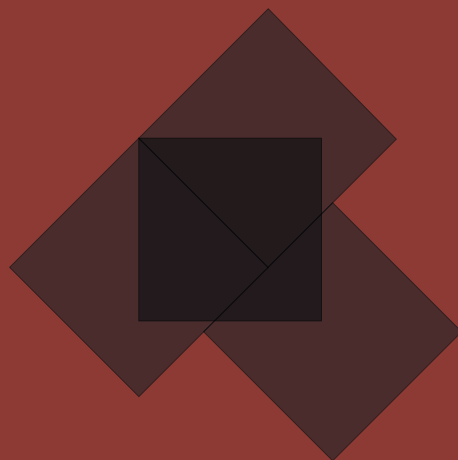
$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \left(\frac{2}{3} - x \right) = x + \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3} - x \right), \text{ dus } x = \frac{5}{12}.$$

Steeds een één. De even getallen geven bij elkaar weer een even getal (een + of - doet er niet toe). Een even aantal oneven getallen geeft ook samen een even getal. Dus alleen als er een oneven aantal oneven getallen zit in de rij 1, 2, 3, ..., n , kan er 1 uitkomen. Je ziet gemakkelijk dat dit altijd kan, bijvoorbeeld met drie oneven getallen:
 $1 + 2 - 3 - 4 + 5 = 1$.

Aas-heer of heer-vrouw.

De kans is $\frac{4}{6} \cdot \frac{1}{5} + \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{15}$.

Vierkant bedekken. Ja, het kan:



Raadsels van Griekse oercomputer opgelost

Het Antikythera-mechanisme, een ingenieus apparaat uit het Griekenland van de Oudheid, blijkt nog ouder dan men al dacht. Natuurkundige James Evans en wetenschapshistoricus Christián Carman onderzochten het mechanisme, om te kijken hoe het werkte en wat het vertelde over de staat van wiskunde en techniek 2000 jaar geleden.

Het apparaat werd aan het begin van de twintigste eeuw uit de Egeïsche Zee, in de buurt van het Griekse eiland Antikythera, gevist. Al snel werd duidelijk dat het om een zeer ingewikkeld systeem ging met heel veel tandwielen die op vernuftige wijze met elkaar werkten. Het Antikythera-mechanisme kon voorspellen wanneer er een zons- of maansverduistering was en liet zien welke hemellichamen op welk tijdstip waar stonden.

De onderzoekers ontdekten het precieze jaartal waarin het apparaat aan moest gaan: 205 voor Christus (zeven jaar nadat Archimedes stierf). Dat betekent dat het vóór die tijd werd ontworpen en in elkaar gezet. Tot nu toe werd gedacht dat het Antikythera-mechanisme uit iets latere tijd stamde: 100 à 150 voor Christus.

De onderzoekers kwamen achter de precieze

leeftijd door de werking van het mechanisme te vergelijken met de gegevens over eclipsen van de oude Babyloniërs. Deze hielden nauwkeurig bij wanneer de zon of maan verduisterd werd. Ze keken welk tijdperk van verduisteringen precies aansloot op de data die het Antikythera-mechanisme aan zou moeten geven als het was gestart. Geen makkelijke klus, want het apparaat houdt tientallen dingen bij naast de verduisteringen; ook die moesten kloppen met de gegevens uit die tijd.

De ontdekking zegt veel over de oude Grieken. Hun technologie was rond 200 voor Christus al veel verder dan we tot nu toe dachten. Goniometrie gebruikten de oude Grieken niet, omdat die tak van de wiskunde nog niet bestond. Waarschijnlijk leenden ze de rekenkundige manieren van de Babyloniërs, die erg goed waren in het uitrekenen van de bewegingen van hemellichamen. (MS)



Acht jaar rekenen aan Mersennepriemen met $n < 32.582.657$

In november 2006 schreven we in het Journaal dat op 4 september van dat jaar een nieuw Mersennepriemgetal werd gevonden: $2^{32.582.657} - 1$. Mersennepriemgetallen zijn priemgetallen van de vorm $2^n - 1$. Hierbij moet n zelf ook priem zijn. Dat niet elk getal van de vorm $2^n - 1$ (met n priem) priem is, maakt het voorbeeld $2^{11} - 1 = 2.047$ duidelijk: $2.047 = 23 \times 89$.

$2^{32.582.657} - 1$ was eind 2006 het grootste priemgetal dat toen bekend was. Bovendien waren op dat moment 44 Mersennepriemgetallen bekend. Maar onduidelijk was of $2^{32.582.657} - 1$ wel het 44ste Mersennepriemgetal was, als we ze ordenen naar grootte. Misschien bestond er nog wel een kleiner

priemgetal van de vorm $2^n - 1$, dat door de priemspoorzoekers nog altijd onopgemerkt was gebleven. De organisatie GIMPS (Great Internet Mersenne Prime Search) kon hier na acht jaar eindelijk duidelijkheid over geven: $2^{32.582.657} - 1$ is daadwerkelijk het 44ste Mersennepriemgetal. Elk getal van de vorm $2^n - 1$ met n priem en $n < 32.582.657$ is geverifieerd; nieuwe priemen werden niet gevonden.

Bij het ter perse gaan van deze *Pythagoras* zijn er 48 Mersennepriemgetallen bekend. Of het grootste ($2^{57.885.161} - 1$, gevonden in januari 2013) ook daadwerkelijk het 48ste Mersennepriemgetal is, weten we niet. Misschien duurt het ook wel weer jaren voordat dat duidelijk is. (AvdB)

Kunstmatige intelligentie bedenkt goocheltrucs

Goochelaars hoeven voortaan niet meer met hun eigen trucs op de poppen te komen. Een computerbrein kan nu volautomatisch kaart- en puzzeltrucs bedenken, die de goochelaar vervolgens kan gebruiken in zijn act. De promovendus Howard Williams en professor Peter McOwan van de Queen Mary University in Londen schreven een computeralgoritme dat aan de hand van bestaande magie nieuwe trucs bedenkt.

De computer kan zowel trucs met kaarten als 'magische puzzels' (waarbij een legpuzzel plotse-ling andere dingen laat zien als de goochelaar de puzzel herschikt) bedenken. Beide trucs vereisen veel rekenwerk, dat bij uitstek door een computer kan worden gedaan. Een computer kan veel grotere hoeveelheden informatie verwerken en kan elke mogelijke uitkomst nalopen op een manier die voor mensen vrijwel onmogelijk is. Daardoor kan hij ra-

zendsnel trucs bedenken; hij kan bij wijze van spreken op het podium met nieuwe ideeën komen.

De computer krijgt van tevoren informatie over hoe de kaart- en puzzeltrucs werken. Vervolgens slaat het algoritme aan het rekenen, gebruikmakend van concepten uit de combinatoriek, kansrekening en meetkunde. Ook stopten de onderzoekers iets over psychologie in hun algoritme, waardoor de computer weet wanneer een toeschouwer een truc herkent als dezelfde truc, en wanneer hij het gevoel heeft iets nieuws te zien. Hiermee werd het aantal verrassende trucs dat met het algoritme werd gevonden zo groot mogelijk.

Een van de bedachte kaarttrucs is ook als app voor Android uitgebracht, onder de naam Phoney. Williams en McOwan publiceerden hun artikel 'Magic in the machine: a computational magician's assistant' in november in *Frontiers in Psychology*. (MS)

Inclusive fitness wiskundig aangevochten

'Als de voordelen van een gedrag vermenigvuldigd met de verwantschap tussen gever en ontvanger groter zijn dan de nadelen voor de gever, is altruïsme evolutionair gunstig.' Zo luidt een beroemde wet uit de mathematische biologie. Uitgedrukt in een formule: $b \times r > c$. Hierbij is r , de verwantschapscoëfficiënt, het verschil tussen de kans dat een familielid van de altruïst hetzelfde gen voor altruïsme draagt en de kans dat een familielid van een niet-altruïst toch drager is van het altruïsme-gen. Verder zijn b en c de baten respectievelijk kosten van altruïstisch gedrag (voor het familielid). De baten en kosten hebben betrekking op het aantal nakomelingen. De altruïst heeft minder nakomelingen, maar zijn broers en zussen juist meer. De theorie – *inclusive fitness* – werd vijftig jaar geleden bedacht door de Britse bioloog William Hamilton (1936-2000).

Naast de inclusive-fitness-theorie is er de theorie van *groepsselectie*, die er in het kort op neerkomt dat altruïstische groepen (waarvan de leden bereid zijn zich voor elkaar op te offeren) het winnen van zelfzuchtige individuen. Binnen groepen winnen de egoïsten misschien terrein, maar in de competitie tussen de groepen zijn de altruïsten in het voordeel. Hoewel er grote onenigheid is over de relevantie van de groepsselectietheorie, zijn de meeste biologen het erover eens dat elk groepsselectiemodel kan worden geformuleerd in termen van inclusive fitness, en vice versa. De gelijkwaardigheid van deze

twee theorieën was immers aangetoond in de jaren tachtig van de vorige eeuw, gebruikmakend van de zogeheten *Price-vergelijking*, naar de Amerikaan George Price (1922-1975).

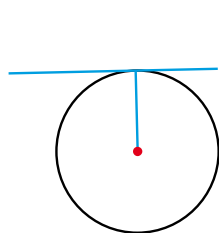
Twee maanden geleden werd dit wijdverbreide standpunt onderuitgehaald in het *Journal of Theoretical Biology*. De econometrist Matthijs van Veelen, hoogleraar Evolutie & Gedrag aan de Universiteit van Amsterdam, toonde samen met Shishi Luo en Burton Simon, twee wiskundigen uit de Verenigde Staten, aan dat het wiskundig niet altijd mogelijk is om groepsselectie te analyseren met behulp van inclusive fitness. "De Price-vergelijking heeft een heilige status onder biologen", zegt Van Veelen. "George Price was een goede populatiegeneticus, maar helaas ook een statistische beunhaas." Het 'be-wijs' dat groepsselectie en inclusive fitness equivalent zijn, gebruikmakend van de Price-vergelijking, deugt volgens Van Veelen dan ook niet.

Volgens Van Veelen worden Price en Hamilton in de biologie gezien als een soort opperpriesters aan wiens woord niet mag worden getwijfeld. "Een van de reviewers uit het inclusive-fitnesskamp sloeg groen uit van woede en heeft een scheldkannonade gehouden, waaruit eigenlijk vooral bleek dat hij er niks van begreep," zegt de Amsterdamse econometrist. Maar bij een conferentie wist Van Veelen het voltallige publiek te overtuigen. De basis van zijn model is zuiver wiskundig, en daar is geen speld tussen te krijgen. (AvdB)

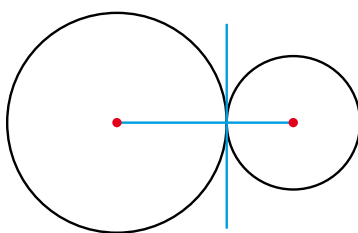
In oude gebouwen zoals kerken en musea bevinden zich dikwijls glas-in-lood-ramen met interessante patronen gebaseerd op lijnen en cirkels. In dit stuk laat Dave Odegard zien hoe verrassend eenvoudig de verhoudingen in dergelijke ramen zijn.

■ door Dave Odegard

STRALENDE CIRKELS



Figuur 1



Figuur 2

Cirkels en lijnen zijn eenvoudige figuren. Beide zijn met twee punten bepaald. Kies twee punten en er is precies één lijn die door beide punten loopt. Kies twee punten en er is precies één cirkel die het eerste punt als middelpunt heeft en het tweede punt doorsnijdt. Met een stukje touw kun je dit al prima illustreren. Trek het strak en je hebt een lijn. Als je één eind van je touw vastzet en het andere eind strak rond laat bewegen over een vlak heb je een voorstelling van een cirkel. In de wiskunde worden deze ruwe voorstellingen meer exact. De lijn wordt oneindig lang, en heeft geen breedte. De cirkel wordt perfect rond en heeft ook geen breedte.

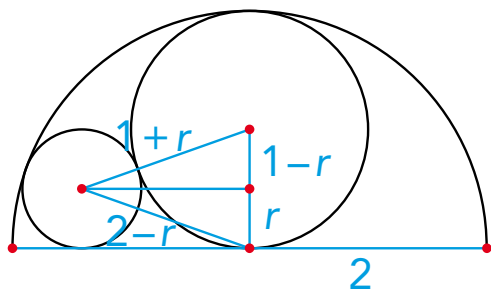
Het wordt nog interessanter als cirkels en lijnen samenkomen. Een cirkel en een lijn kunnen één, twee, of geen punten gemeen hebben. Het interessantste geval is als ze precies één punt delen. Dan is de lijn een *raaklijn* aan de cirkel. Geen enkel punt van de lijn ligt binnen de cirkel en het punt dat het dichtst bij het middelpunt ligt, is het *raakpunt*. Teken een straal van de cirkel naar dit raakpunt en het resultaat is een symmetrische figuur (zie figuur 1). Je intuïtie zegt dat de twee hoeken hetzelfde moeten zijn en dus beide 90 graden. Dit zou betekenen dat de getekende straal een loodlijn is. Je kunt hier je intuïtie veilig volgen: in de vierde klas leer je hoe je dit echt kunt bewijzen.

Als twee cirkels elkaar raken, delen ze een raaklijn. Er zijn twee mogelijkheden: één cirkel ligt binnen de andere, of ze liggen beide buiten elkaar (zie figuur 2). Wanneer je de twee stralen tekent naar het raakpunt, ontstaan er rechte hoeken die ervoor zorgen dat de middelpunten van de twee cirkels en het raakpunt allemaal op dezelfde lijn liggen. Nu kunnen we ingewikkeldere figuren maken op basis van deze meetkundige resultaten, en de lengtes van de stralen van de cirkels berekenen. Om te wennen aan de berekeningen, geven we alvast twee voorbeelden.

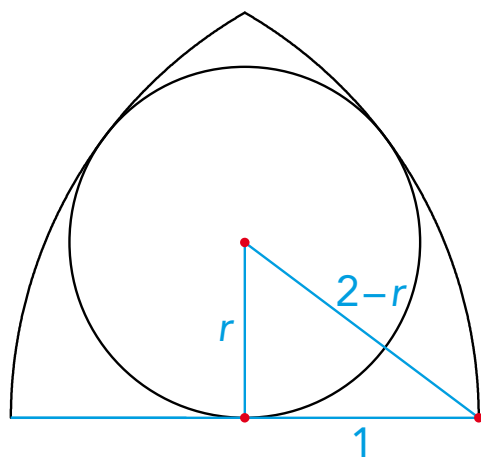
In figuur 3 plaatsen we een cirkel met straal 1 in een cirkel met straal 2. Hoe groot is de cirkel die er aan de linkerkant nog net tussen past? Noem de straal van deze cirkel r . Er geldt: $(2 - r)^2 = r^2 = (1 + r)^2 - (1 - r)^2$. Na het uitwerken van de haakjes vind je de oplossing: $r = \frac{1}{2}$.

En in figuur 4 geldt: $(2 - r)^2 = r^2 + 1^2$. Wederom haakjes uitwerken geeft snel het resultaat: $r = \frac{3}{4}$.

GLAS-IN-LOOD-RAMEN Wij zijn niet de eersten die dit doen. Monumentale gebouwen zoals kerken en musea hebben vaak glas-in-lood-ramen waar deze wiskunde in verborgen ligt. Het lijkt wel alsof het volgende uitgangspunt wordt gebruikt: bij een goed wiskundig patroon ligt alles vast na



Figuur 3

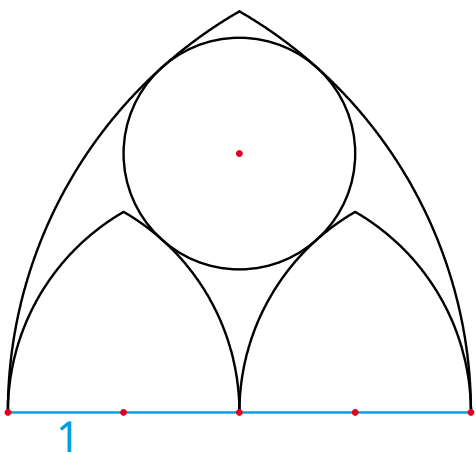


Figuur 4

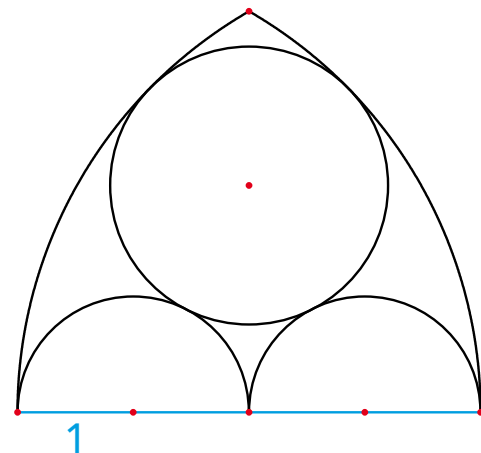
de keuze van de schaal. Dit maakt het mogelijk om nog onbekende lengtes uit te rekenen.

Door de eeuwen heen zijn verschillende bouwstijlen ontwikkeld. Begin je met een halve cirkel, dan heb je een rondboog, karakteristiek voor de romaanse stijl. Kies je voor een zesde van een cirkel, dan kan je een spitsboog maken, karakteristiek

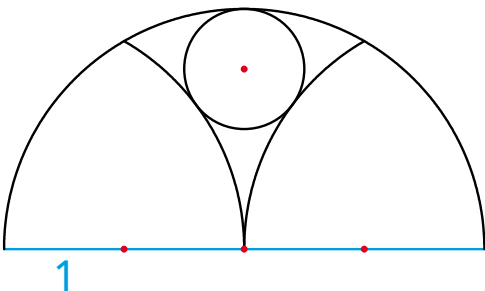
voor de gotiek. De figuren 5 tot en met 8 tonen vier ramen gemaakt met verschillende keuzes en combinaties. Dit zijn allemaal strakke patronen waar de enige onbekende de straal van de cirkel bovenin is. Ik heb de schaalkeuze bepaald door bij elk patroon één van de lengtes aan te geven. Bereken de lengte van de straal van de bovencirkels door gebruik



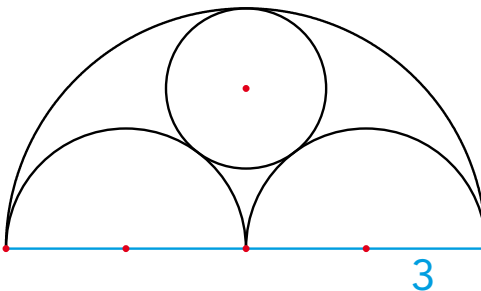
Figuur 5



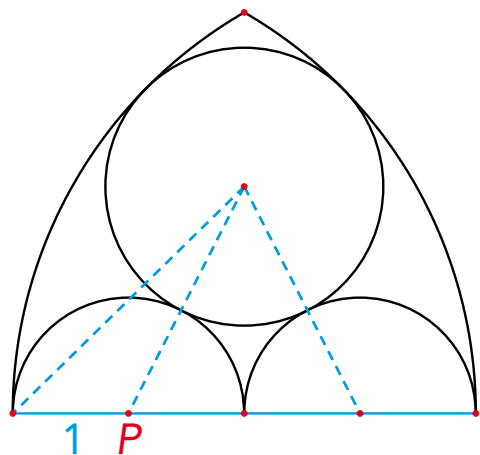
Figuur 6



Figuur 7



Figuur 8



Figuur 9

te maken van de aangegeven schaal, de meetkunde hierboven, Pythagoras en wat algebra.

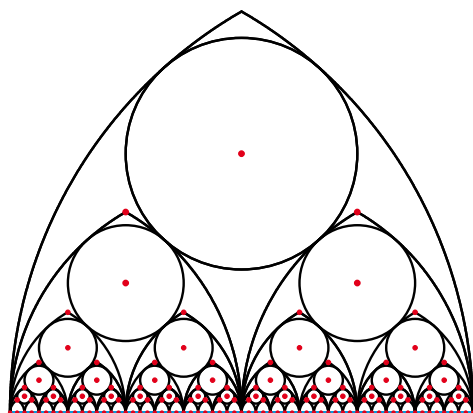
Het is opvallend hoe simpel deze stralen zich laten berekenen. Bij figuur 6 kun je ook de cosinusregel toepassen, met gebruik van het feit dat de cosinussen van de hoeken bij middelpunt P slechts van teken verschillen (zie figuur 9). Probeer dit eens, ook als oefening voor de volgende berekeningen.

VOOR LIEFHEBBERS Omdat de berekeningen tot nu toe redelijk eenvoudig waren, zou je op zoek kunnen gaan naar moeilijker gevallen. We geven enkele voorbeelden.

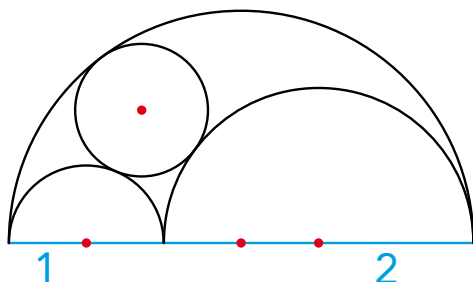
Sommige patronen, zoals figuur 5, kunnen worden 'gefractaliseerd'. Het resultaat zie je in figuur 10. Dit is niet moeilijk te berekenen, omdat de lagen slechts in een schaalfactor verschillen. Ik vermoed overigens dat dit fractalpatroon niet erg geliefd zou zijn bij de werklieden die het raam daadwerkelijk moeten maken!

Symmetrie is aanwezig in alle voorbeelden die we tot nu toe hebben gezien. We kunnen de symmetrie breken door het patroon van figuur 8 te vervangen met het *mes van de schoenmaker* (zie figuur 11). De bepaling van de straal van de bovencirkel is ook het makkelijkst op te lossen met de cosinusregel en het feit dat de cosinussen van supplementaire hoeken slechts van teken verschillen.

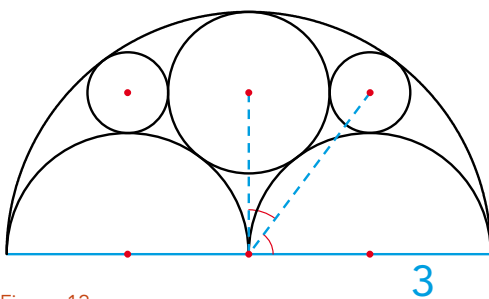
Een andere complicatie is mogelijk door de lege stukjes met meer rakende cirkels te vullen. Het patroon van figuur 8 zou uitgebreid kunnen worden zoals te zien is in figuur 12. Soms is het nog mooier om een deel van een cirkel weg te laten, zoals bij figuur 13. Dan krijg je een mooie traan of een druppelvorm bestaande uit drie cirkeldelen. Met wat goniometrie kun je nu de verrassende waarde van de kleinste straal uitrekenen. Het antwoord is weer een



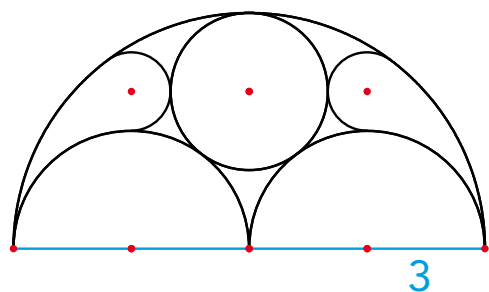
Figuur 10



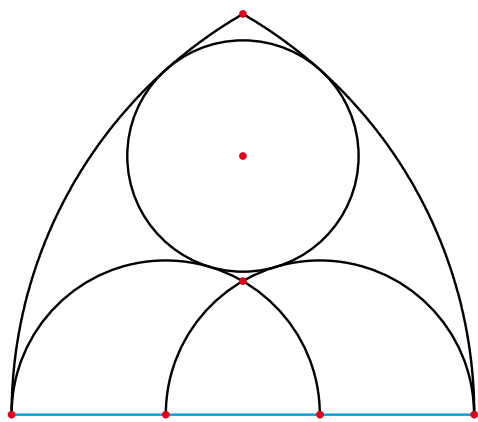
Figuur 11



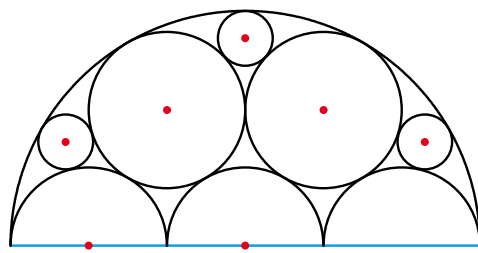
Figuur 12



Figuur 13



Figuur 14

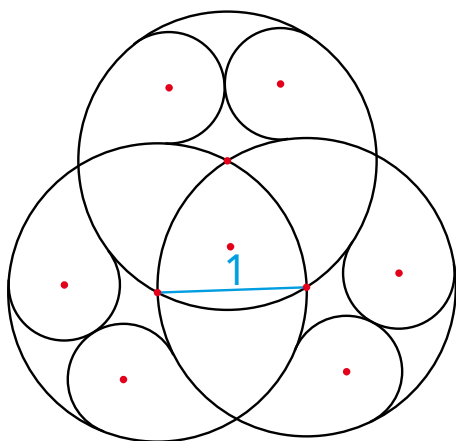


Figuur 15

heel simpel getal. Als je nu het patroon goed bekijkt, zie je dat je een eenvoudige rechthoekige driehoek kan tekenen. Over welke driehoek heb ik het en hoe vaak zie je hem? Dit is een echt gebruikt patroon dat onder andere te zien is op de voorgevel van het Rijksmuseum.

In alle gevallen tot nu toe is de basislijn in twee stukken verdeeld. De figuren 14 en 15 tonen patronen waarbij er drie stukken zijn in plaats van twee. Hoe lang zijn de stralen van de bovencirkels nu? Het laatste patroon is beter te begrijpen als je het reflecteert door zijn basis. Dan zie je een figuur met zesvoudige draaisymmetrie die in alle richtingen strekt en niet alleen naar boven reikt.

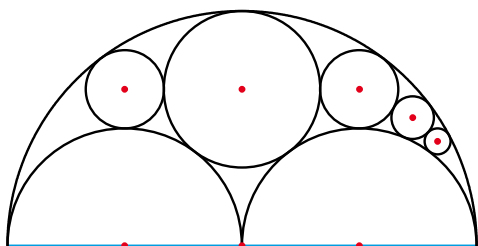
Figuur 16 heeft drievoudige draaisymmetrie. Dit patroon is gebruikt in de kathedraal van Lund, Zweden. Hoe groot zijn de stralen van de kleine cirkels?



Figuur 16

De uitbreiding van het patroon in figuur 8 is een begin in het opvullen van de ruimtes tussen de elkaar rakende cirkels. Wij hadden veel geluk in de uitbreiding door gebruik te maken van de hoek van 90 graden. Zou het mogelijk zijn om nog verder te gaan? Het kan wel, maar dan niet zonder groot geslacht. De stelling van Descartes (waarover Paul Levrie het artikel 'De kussende cirkels van de prinses' schreef in *Pythagoras* 51-5 (april 2012)) geeft een formule om de straal uit te rekenen van de laatste cirkel in een groep van vier cirkels die elkaar allemaal raken (zie figuur 17). In de tekening zijn twee extra cirkels getekend. Wat zijn de lengtes van hun stralen?

Het lukt me inmiddels niet meer om langs een monumentaal gebouw te lopen zonder op zoek te gaan naar mooie patronen. Als jij een mooi patroon vindt, laat het ons weten. Zeker als er verrassende verhoudingen in voorkomen! ■



Figuur 17

KRUISGETALPUZZEL

■ door Jeanine Daems

1	2	3		4	5	6	7
8							
						9	
10	11		12			13	
14					15		
	16	17			18		
19				20			21
	22						

Horizontaal

- 1: bevriend met 220
- 4: som van twee kwadraten; de opeenvolgende cijfers van die som stijgen
- 8: binair geschreven getal dat wel deelbaar is door 2 en door 3, maar niet door 4
- 9: deelbaar door 23
- 10: palindroom en kwadraat
- 13: de onlangs overleden wiskundige Alexander Grothendieck gebruikte dit getal ooit per ongeluk als voorbeeld van een priemgetal, terwijl het dat niet is
- 14: heeft zes positieve delers
- 15: deelbaar door vier opeenvolgende getallen
- 16: duivels getal
- 18: som van twee kwadraten
- 19: de cijfersom van dit getal is 38 en het getal is deelbaar door 59
- 22: tiendemacht

Verticaal

- 1: palindroom en deelbaar door 17
- 2: kwadraat
- 3: macht van 2
- 4: deelbaar door drie opeenvolgende priemgetallen
- 5: deelbaar door precies twee priemgetallen
- 6: dit getal bestaat uit zeven verschillende cijfers
- 7: som van twee twaalfdemachten
- 11: deelbaar door een vijfde macht
- 12: 11 verticaal plus 7995
- 15: kleinste getal dat op twee verschillende manieren te schrijven is als som van twee derdemachten
- 17: priemgetal met cijfersom 16
- 20: zowel kwadraat als derdemacht
- 21: grootste priemgetal onder de 100

De oplossing komt in de volgende *Pythagoras*. ■

EVELIEN EN BRUUT

■ door Niek Huttinga

Stel je voor dat je bij een lokaal op je docent staat te wachten. Niets is dan vervelender dan iemand die voorkruipt en op jouw plek gaat zitten. Evelien overkomt dit regelmatig omdat ze in de klas zit bij Bruut, een brutale leerling.

De mentor van hun klas heeft een schema gemaakt van de plaatsen waar iedereen zou moeten zitten. Aangezien Bruut zijn huiswerk nooit maakt, wil hij niet op zijn eigen plaats recht voor de docent zitten. Hij kiest daarom willekeurig een plaats uit alle plaatsen behalve zijn eigen. Als Bruut zit durven de andere leerlingen pas naar binnen, en ze gaan zitten op hun eigen plaats voor zover dat mogelijk is. Als hun eigen plaats bezet is, kiezen ze willekeurig een plaats uit de nog vrije plaatsen.

Evelien kan pas als laatste het lokaal in, en vreest dus dat ze niet op haar eigen plaats kan gaan zitten. Evelien is echter optimistisch ingesteld. Terwijl ze wacht tot ze naar binnen kan, berekent ze wat de kans is dat ze wél op haar eigen plaats kan zitten. Wat is deze kans, en hoe berekent ze deze? Ga er vanuit dat er 30 leerlingen in de klas van Evelien en Bruut zitten.

OPLOSSING Het is van belang dat je inziet dat er een proces wordt gestart wanneer je bij je plaats komt en er iemand anders op zit. Je moet dan willekeurig een andere plaats kiezen, maar deze plaats is ook weer een plaats die eigenlijk voor iemand anders bestemd is. Als die op zijn beurt weer bij zijn plaats komt en ziet dat deze bezet is, moet hij weer op een plaats gaan zitten die ook eigenlijk voor iemand anders bestemd is. Dit proces gaat door tot iemand die zijn stoel bezet vindt op de stoel van Bruut of van Evelien gaat zitten.

In het eerste geval zullen de overige leerlin-

gen, en dus ook Evelien, gewoon op hun eigen plaats kunnen gaan zitten. Als iemand op de stoel van Evelien gaat zitten, kunnen alle overige leerlingen behalve Evelien op hun eigen plaats gaan zitten.

We hebben nu twee gebeurtenissen waardoor het proces ten einde kan lopen: iemand gaat op de stoel van Bruut zitten, of iemand gaat op de stoel van Evelien zitten. We noemen de kans op de eerste gebeurtenis p , en de kans op de tweede gebeurtenis q . Evelien kan dan met kans p op haar eigen plaats gaan zitten. Gezien het gegeven dat alle leerlingen die hun plaats bezet zien willekeurig een andere plaats kiezen, moet gelden $p = q = \frac{1}{2}$.

We hebben nu bijna het antwoord. De enige die nog roet in het eten kan gooien is Bruut. Dit gebeurt wanneer Bruut direct op de plaats van Evelien gaat zitten. De kans dat dit niet gebeurt, is gelijk aan $\frac{28}{29}$. Concluderend is de kans dat Evelien op haar eigen plaats gaat zitten dus $\frac{28}{29} \cdot \frac{1}{2} = \frac{28}{58}$, oftewel zo'n 48%.

MATHRACE Bovenstaande opgave komt uit de Mathrace, een wiskundewedstrijd voor middelbare scholieren uit 3 en 4 vwo. Deze wedstrijd duurt acht weken lang en iedere week krijg je een opdracht die je moet maken. Als jij de winnaar bent en de opgaven goed maakt, dan kun je een binair horloge winnen!

Op 9 februari begint de volgende Mathrace al weer. Lijkt het je leuk om mee te doen? Kijk dan eens op de website www.twentecademy.nl en klik onder het kopje 'Wedstrijden' op Mathrace. Je kunt hier opgaven oefenen van de vorige Mathraces, uitwerkingen lezen, en zien hoe goed de deelnemers het op dit moment doen tijdens de Mathrace. Tot 9 februari! ■

Neem vier bollen. Ze mogen onderling van afmeting verschillen, maar voor elke bol moet wel gelden dat die niet veel kleiner is dan de andere drie. Als je ze tegen elkaar aan drukt, krijg je een stabiel bouwwerkje waarin elke bol elke andere bol raakt. Dit artikel gaat over het viervlak dat ontstaat als je de middelpunten van de bollen met elkaar verbindt.

■ door Marco Swaen

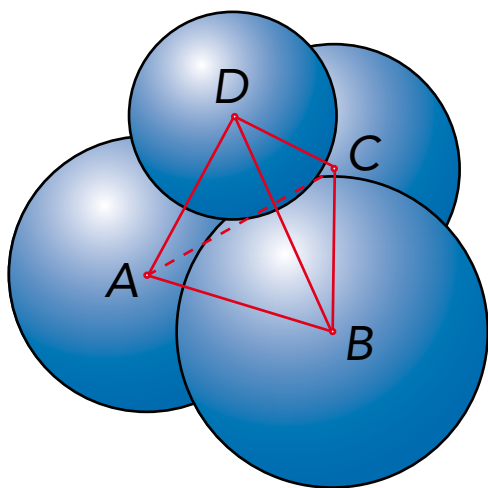
VIER RAKENDE BOLLEN

Stel je vier bollen voor die tegen elkaar zijn gedrukt zodat elk van de vier de andere drie raakt. De middelpunten van de vier bollen vormen dan een *tetraëder* (zie figuur 1). De vraag is nu: is dit dan een speciale tetraëder, of kun je, als je de stralen van de bollen goed kiest, zo elke tetraëder maken?

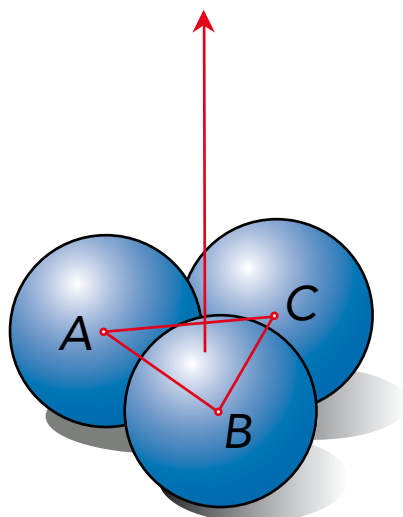
NEE Sommige mensen kunnen zich de situatie met de vier bollen goed ruimtelijk voorstellen, en vinden na wat puzzelen een tegenvoorbeeld. Neem bijvoorbeeld een gelijkzijdige driehoek ABC als grondvlak (zie figuur 2). Elk van de drie hoekpunten moet dan het middelpunt van een bol worden,

en die drie bollen moeten elkaar raken. Dat kan alleen als de drie bollen even groot zijn. Zo ontstaat er een symmetrieas die precies tussen de drie bollen doorloopt. Het middelpunt D van een vierde bol, die deze drie raakt, moet dan wel op die as liggen, dus recht boven het driehoekige grondvlak ABC . Zit D *niet* recht boven het midden van driehoek ABC , dan is de tetraëder niet te maken met vier rakende bollen.

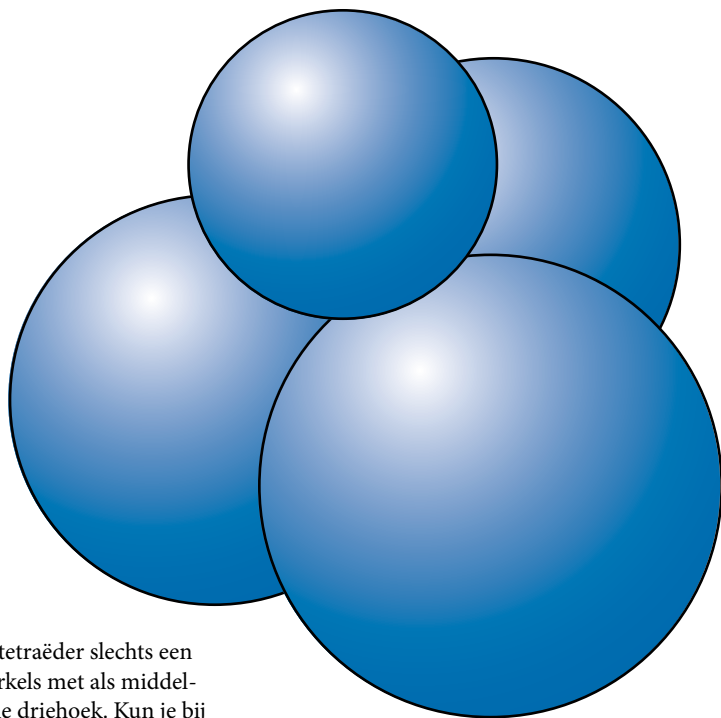
Blijft de vraag welke tetraëders je dan wel kunt maken met vier rakende bollen. Om die vraag te beantwoorden, is het handig de zaak eerst te onderzoeken in een overzichtelijkere omgeving: het platte vlak.



Figuur 1



Figuur 2



PLAT In het platte vlak is de tetraëder slechts een driehoek, en zijn de bollen cirkels met als middelpunten de hoekpunten van die driehoek. Kun je bij een gegeven driehoek altijd cirkels om de hoekpunten trekken die elkaar allemaal raken? Figuur 3 laat zien dat het bij een driehoek met zijden 6, 7 en 9 in elk geval lukt.

Het kan zelfs altijd, bij elke willekeurige driehoek ABC (zie figuur 4). Noem de gezochte stralen a , b en c . Willen de cirkels elkaar precies raken, dan moet aan de volgende drie eisen worden voldaan:

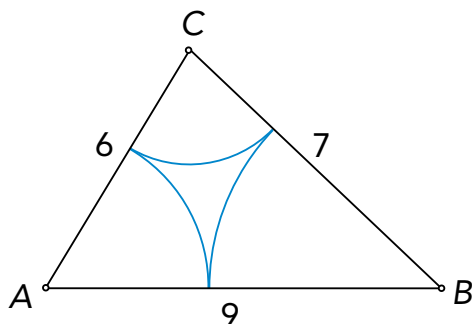
$$\begin{aligned} a + b &= AB, \\ b + c &= BC, \\ c + a &= CA. \end{aligned}$$

Dit stelsel van drie vergelijkingen met drie onbekenden is altijd op te lossen. Wat a moet zijn, kun je berekenen door de eerste en de derde vergelijking bij elkaar op te tellen, en daar dan de tweede vanaf te halen:

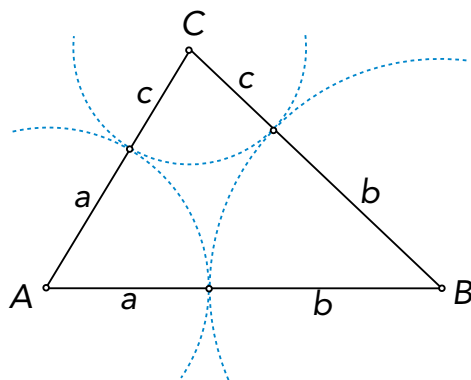
$$a + b - (b + c) + c + a = AB - BC + CA,$$

dus

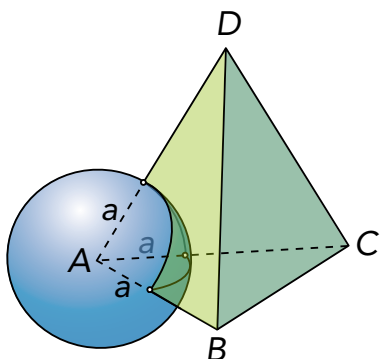
$$a = \frac{AB + AC - BC}{2}.$$



Figuur 3



Figuur 4



Figuur 5

Dit kun je gemakkelijker als volgt zien: tel de aanliggende zijden op, trek de overstaande zijde daarvan af, en deel het resultaat door 2. Dan is meteen ook duidelijk dat de straal nooit negatief kan worden, want twee zijden van een driehoek zijn samen altijd langer dan de derde zijde.

De stralen b en c bereken je op dezelfde manier. Onze conclusie is: elke driehoek kun je maken met drie rakende cirkels.

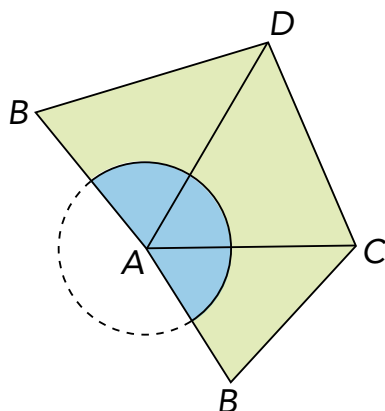
AANGRENZENDE DRIEHOEKEN Nu terug naar de tetraëders. Een tetraëder bestaat uit vier driehoeken. Stel dat we de tetraëder kunnen maken met vier rakende bollen, dan snijden die bollen in elk zijvlak drie rakende cirkels uit. Per zijvlak kunnen we dan uitrekenen wat de stralen van die cirkels moeten zijn. Passen die stralen bij elkaar, dan is de tetraëder met rakende bollen te maken. En omgekeerd.

Bekijk bijvoorbeeld hoekpunt A in figuur 5. Dit treedt op als hoekpunt in de zijvlakken ABC , ACD en ABD . De cirkel rond A in driehoek ABC heeft straal $\frac{1}{2}(AB + AC - BC)$. Maar A is ook een hoekpunt in het zijvlak ACD , de straal van de cirkel in die driehoek is $\frac{1}{2}(AC + AD - CD)$. Deze moeten gelijk zijn, anders komen de cirkels niet van dezelfde bol, dus

$$\frac{AB + AC - BC}{2} = \frac{AC + AD - CD}{2}.$$

En daaruit volgt dat $AB - BC = AD - CD$. Wat dat meetkundig betekent, is beter te zien als je dit herschrijft tot

$$AB + CD = AD + BC.$$

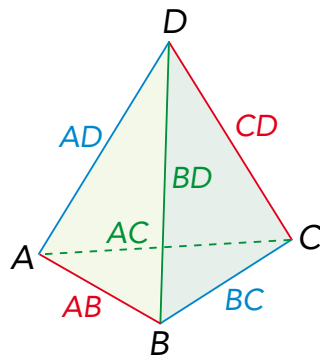


Merk op dat links en rechts de som staat van twee overstaande ribben. Ten slotte is A ook nog een hoekpunt in het zijvlak ABD . Eisen we dat ook de straal daar gelijk is aan die bij driehoek ABC , dan krijgen we als voorwaarde:

$$AD + BC = AC + BD.$$

CONCLUSIE Voor de andere hoekpunten loopt het verhaal precies zo, zodat we kunnen concluderen dat een tetraëder te maken is met vier rakende bollen als de som van de lengtes van elk van de drie paren overstaande ribben gelijk is (zie figuur 6). Dus als

$$AB + CD = AC + BD = AD + BC. \quad \blacksquare$$



Figuur 6

LETTERWANDELEN

■ door Jaap Klouwen

Twee jaar geleden was het Nederlandstalige *Rumble* een van de meest gedownloade apps op de smartphone. *Rumble* is een digitale variant op *Boggle*, een woordspel waarbij het de bedoeling is om woorden te maken door een 'lijn' te trekken door een 4×4 -bord van zestien letters. *Boggle* bestaat al heel lang: onder de naam 'Scrabble voor gevorderden' is het al te vinden in het boek *In der Werkstatt der Hirnverzwirner* (1979) van Otto Botsch. In 1989 kwam een Nederlandse vertaling uit onder de titel *Hersenkronkels*.

Hier bekijken we een kleine variant op *Rumble*, die we 'letterwandelen' noemen. Probeer een woord te maken op de volgende manier. Begin op een willekeurig veld. Maak vervolgens zo vaak als je wilt een van de volgende stappen:

- maak een stap op hetzelfde veld;
- ga naar een naburig veld: naar boven, naar onder, naar links, naar rechts of diagonaal.

Op onderstaand 4×4 -bord kun je het woord *denkwerk* maken door zeven stappen te maken: telkens

een stap naar een naburig veld. Ook kun je *geestig* in zes stappen maken, waarbij de tweede stap een pas op de plaats is. Andere mogelijke woorden zijn bijvoorbeeld *baden*, *kneden*, *hunebed* en *twee*.

EEN TWEE DRIE ... Je hebt natuurlijk al gezien dat het bord zestien *verschillende* letters bevat. Het toeval wil dat de telwoorden een tot en met tien ook precies zestien verschillende letters bevatten. Nu kan je de vraag wel raden:

Maak een 4×4 -bord waarin alle telwoorden 'een' tot en met 'tien' te lezen zijn met letterwandelen.

De tien woorden hoeven niet in één reeks gelezen kunnen worden. In puzzelland bestaat de gewoonte de 'ij' als één letter te beschouwen. Dat doen wij niet: de 'ij' is een tweeklank (net als 'ei', 'ui', 'eu' etcetera) en bestaat dus uit de letters i en j. ■

A	B	R	F
D	E	N	K
S	G	W	U
C	T	I	H



Nog veel meer hersenkrakers over taal en wiskunde staan in het net uitgekomen puzzelboek *Denkwerk* van Jaap Klouwen (uitgeverij Kosmos, 19,95 euro).

$$\pi \approx 3$$

$$\pi \approx \frac{22}{7}$$

$$\pi \approx \frac{355}{113}$$

$$\pi \approx \frac{103993}{33102}$$

π is, per definitie, de verhouding tussen de omtrek en de diameter van een cirkel.

$$\pi \approx 3,1415926535897932384626433832795028841971693993751058209749445923078164062862089986280348253421170679821$$

De oppervlakte van een cirkel met straal r is gelijk aan πr^2 .

De omtrek van een cirkel met straal r is gelijk aan $2\pi r$.

$$\pi \approx \sqrt[3]{31}$$

Het volume van een bol met straal r is gelijk aan $\frac{4}{3}\pi r^3$.

De oppervlakte van een bol met straal r is gelijk aan $4\pi r^2$.

Het 'volume' van een vierdimensionale bol met straal r is gelijk aan $\frac{\pi^2}{2} r^4$.

Eva, o lief, o zoete hartedief, uw blauwe oogen zyn wreed bedrogen.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \pi$$

Voorts maakte hij de zee, van gietwerk, tien el van rand tot rand, geheel rond, vijf el hoog, terwijl een meesnoer van dertig el haar rondom kon omspannen. (1 Koningen 7:23)

$$\pi \approx \frac{\ln(640320^3 + 744)}{\sqrt{163}}$$

$$\pi \approx \sqrt{7 + \sqrt{6 + \sqrt{5}}}$$

$$\pi \approx 0 + 3 + \frac{1 - (9 - 8^{-5})^{-6}}{7 + 2^{-4}}$$

Pegg

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{16^n} \left(\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6} \right) = \pi$$

Plouffe

$$e^{\pi} - \pi \approx 19,999099979$$

$$e^{\pi\sqrt{163}} \approx 262537412640768743,999999999999$$

Ramanujans constante

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{3} \left(1 + \frac{2}{5} \left(1 + \frac{3}{7} \left(1 + \frac{4}{9} (1 + \dots) \right) \right) \right)$$

Newton

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Gauss

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 1} dx = \frac{\pi}{e}$$

Laplace

$$\sqrt{\frac{\pi e}{2}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{2}{1 + \frac{3}{1 + \frac{4}{1 + \frac{5}{\ddots}}}}}} + 1 + \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} + \dots$$

Ramanujan

De 762-ste tot en met 767-ste decimaal van π is 9. De natuurkundige Richard Feynman wilde zijn hoofd leren tot en met 9 negens. De plaats van de negens noemt men het Feynmanpunt van π .

Als we een naald met lengte 1 op een vlak met evenwijdige lijnen met onderlinge afstand 1 laten vallen, dan is de kans dat de naald op een van de lijnen valt, gelijk aan $2/\pi$.

Buffon

$$\pi = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} - \frac{1}{13} + \dots$$

Euler

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Euler

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi$$

$\pi \approx$

$$768 \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + 1}}}}}}}}$$

Liu-Hui

$\pi =$

$$\sqrt{12} \left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 3^2} - \frac{1}{7 \cdot 3^3} + \frac{1}{9 \cdot 3^4} - \dots \right)$$

Madhava

$$\pi \approx \frac{9}{5} + \sqrt{\frac{9}{5}}$$

Ramanujan

$$\frac{\pi}{4} =$$

$$4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}$$

Machin

$$\frac{2}{\pi} =$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}{2} \dots$$

Vieta

$$\pi = \frac{4}{1 + \frac{1^2}{3 + \frac{1^2}{5 + \frac{1^2}{7 + \frac{1^2}{9 + \frac{1^2}{\ddots}}}}}}$$

Gauss

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{((2n)!)^3 (1+4n)}{(n!)^6 2^{6n}}$$

$$= \frac{2}{\pi}$$

Bauer

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e} \right)^n$$

Stirling

$$e^{\pi i} = -1$$

Euler

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$$

Leibniz

$$\pi \approx \frac{7^7}{4^9}$$

$$\pi \approx \sqrt[4]{\frac{3^4 + 2^4 + \frac{1}{2 + (\frac{2}{3})^2}}{22}} = \sqrt[4]{\frac{2143}{22}}$$

Ramanujan

$$\sqrt{\pi} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2 \pi^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2}$$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \dots$$

Wallis

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \frac{1^2}{2 + \frac{3^2}{2 + \frac{5^2}{2 + \frac{7^2}{2 + \frac{9^2}{\ddots}}}}}$$

Brouncker

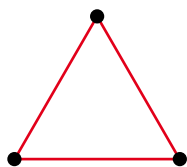
$$\pi \approx \sqrt{2 + \sqrt{3}}$$

In *Annals of Mathematics* van deze maand staat een bewijs van een vermoeden uit de combinatorische meetkunde. Paul Erdős stelde dit vermoeden op in 1946. Het gaat over het minimale aantal verschillende afstanden tussen punten in het platte vlak.

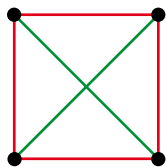
■ door Alex van den Brandhof en Derk Pik



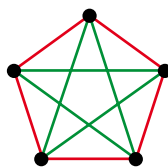
EEN AFSTANDPROBLEEM



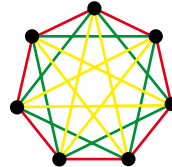
Figuur 1



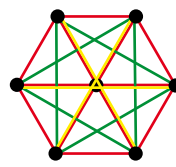
Figuur 2



Figuur 3



Figuur 4



18 Teken een stel punten en verbind elk tweetal punten met een rechte lijn. Lijnen van verschillende lengte geef je verschillende kleuren, lijnen van gelijke lengte krijgen dezelfde kleur. De vraag die Erdős in 1946 in *The American Mathematical Monthly* stelde is: wat is het kleinste mogelijke aantal kleuren bij een gegeven aantal punten?

In zijn artikel vertelt Erdős dat hij vele jaren aan het probleem gewerkt heeft, maar dat hij niet verder kwam dan het geven van een ruwe onder- en bovengrens. Het artikel, getiteld 'On sets of distances of n points', is te vinden op internet.

EENVOUDIGE GEVALLEN Bij drie punten is het makkelijk: één kleur volstaat, door de punten op de hoekpunten van een gelijkzijdige driehoek te plaatsen (zie figuur 1). Bij vier punten heb je twee kleuren nodig en ook bij vijf punten lukt het met twee kleuren (zie figuur 2 en 3).

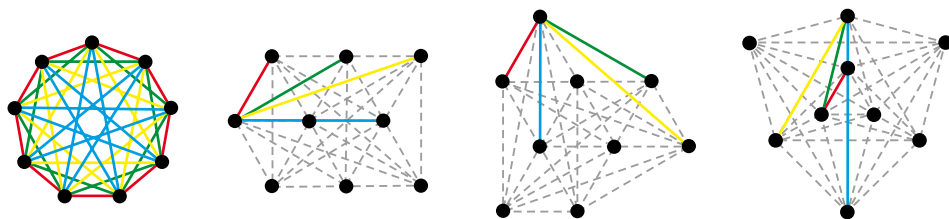
Bij zes of zeven punten heb je een derde kleur nodig; de twee mogelijkheden om zeven punten optimaal te plaatsen, zie je in figuur 4.

Bij acht of negen punten heb je vier kleuren nodig; de vier mogelijkheden om negen punten te

plaatsen, zie je in figuur 5. Slechts bij één mogelijkheid zijn alle lijnen met kleur aangegeven. Bij de andere drie mogelijkheden is van elke lengte er één met kleur aangegeven; de overige lijnen zijn gestippeld met zwart. Overtuig jezelf dat er geen vijfde kleur nodig is om deze stippellijnen te kleuren!

Bij tien, elf of twaalf punten heb je vijf kleuren nodig. Voor twaalf punten volstaat het niet om de punten op de hoeken van een regelmatige twaalfhoek te leggen; je zou dan zes kleuren nodig hebben. Probeer zelf te bedenken hoe je twaalf punten moet rangschikken, zodat je aan vijf kleuren genoeg hebt. De oplossing staat aan het eind van dit artikel.

SCHATTINGEN De vraag is hoe je verder moet. Hoeveel verschillende afstanden krijg je minimaal voor grote waarden van n ? Het vinden van configuraties met bijvoorbeeld 50 punten is ondoenlijk. Je kan beter proberen grenzen te vinden waar $g(n)$ tussen moet liggen als n steeds groter wordt. Hierbij staat $g(n)$ voor het minimale aantal verschillende afstanden in een configuratie met n punten in het platte vlak.



Figuur 5

Erdős liet in 1946 zien dat $g(n)$ moest liggen tussen twee grenzen. Hij toonde aan dat

$$c_1 \sqrt{n} \leq g(n) \leq c_2 \frac{n}{\ln n}$$

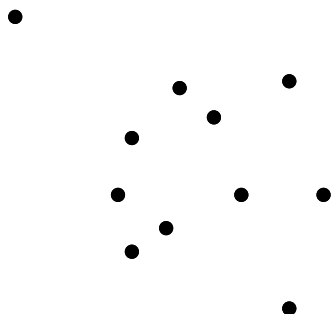
voor twee constanten c_1 en c_2 . Hij sprak het vermoeden uit dat de werkelijke waarde van $g(n)$ zich zou gedragen als $\frac{n}{\ln n}$. In 2010 hebben Nets Katz van de Indiana University en Larry Gutz van het Institute for Advanced Study in Princeton het probleem opgelost: het vermoeden van Erdős was inderdaad juist. Er zijn twee constanten k_1 en k_2 zo, dat

$$k_1 \frac{n}{\ln n} \leq g(n) \leq k_2 \frac{n}{\ln n}$$

vanaf een zekere waarde van n .

DE ONDERGRENEN VAN ERDŐS Erdős' vermoeden is niet eenvoudig te bewijzen; niet voor niets duurde het 65 jaar voordat het probleem werd opgelost. Maar wie er even goed voor gaat zitten, kan Erdős' bewijs dat er een constante c_1 bestaat zodanig dat $g(n) \geq c_1 \sqrt{n}$ voor n voldoende groot, goed volgen.

We beginnen met een puntenwolk van n punten. In figuur 6 zie je een voorbeeld met $n = 11$. Kies twee punten in de wolk, P en Q . We tekenen s cir-



Figuur 6

kels om P zo, dat op elke cirkel ten minste één punt van de puntenwolk ligt en elk punt van de puntenwolk (behalve P) op een van deze cirkels ligt. Vervolgens tekenen we t cirkels om Q met dezelfde eigenschap. In ons voorbeeld is zowel s als t gelijk aan 3 (zie figuur 7).

Elke cirkel om P snijdt elke cirkel om Q in ten hoogste twee punten. We hebben dus s cirkels waarop per cirkel ten hoogste $2t$ snijpunten liggen. Op alle s cirkels samen liggen derhalve ten hoogste $2st$ snijpunten. Behalve P en Q zijn er in totaal $n - 2$ punten, dus $n - 2 \leq 2st$.

Hieruit volgt dat ofwel $s \geq \sqrt{(n - 2) / 2}$, ofwel $t \geq \sqrt{(n - 2) / 2}$. Immers, als zowel s als t kleiner dan $\sqrt{(n - 2) / 2}$ zou zijn, dan stond er $n - 2 < 2 \sqrt{(n - 2) / 2} \cdot \sqrt{(n - 2) / 2} = n - 2$ en dat kan natuurlijk niet.

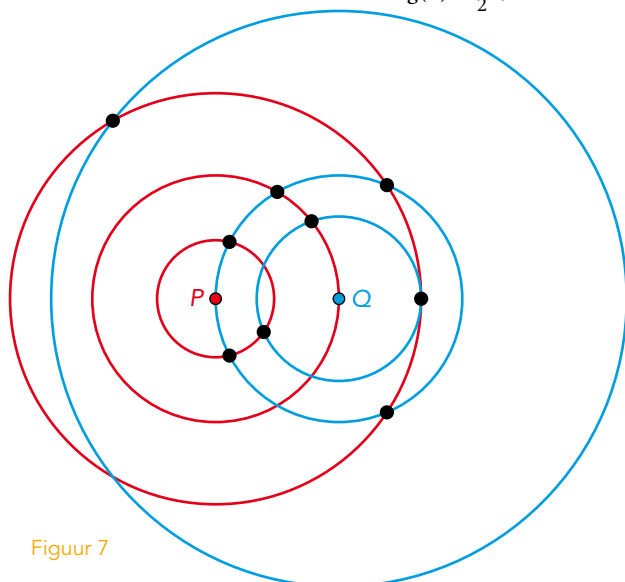
In figuur 7 kun je zien dat het totaal aantal afstanden in de puntenwolk ten minste gelijk moet zijn aan zowel s als t . Hieruit volgt dat

$$g(n) \geq \max\{s, t\} \geq \sqrt{(n - 2) / 2}.$$

Ten slotte geldt voor $n \geq 4$:

$$\sqrt{(n - 2) / 2} = \sqrt{\frac{1}{2}n - 1} \geq \sqrt{\frac{1}{2}n - \frac{1}{4}n} = \frac{1}{2}\sqrt{n}.$$

Hiermee hebben we bewezen dat $g(n) \geq \frac{1}{2}\sqrt{n}$.



Figuur 7

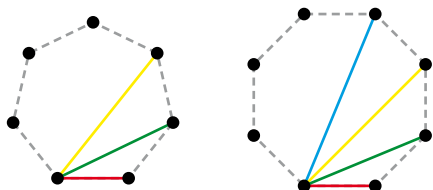
BOVENGRENZEN We weten dat $g(n)$, het minimale aantal verschillende afstanden in een configuratie met n punten in het platte vlak, op den duur stijgt en voor alle $n \geq 4$ groter is dan $\frac{1}{2}\sqrt{n}$. We weten nog niets over hoe snel $g(n)$ werkelijk stijgt.

Het maximale aantal afstanden in een configuratie met n punten is gelijk aan het aantal combinaties van 2 uit n , dus aan

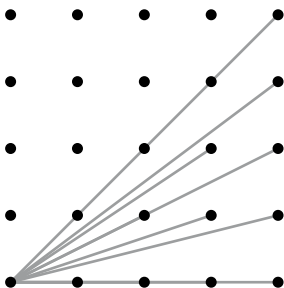
$$\binom{n}{2} = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n.$$

Deze bovengrens kunnen we op een eenvoudige manier verscherpen. Leg de n punten op de hoeken van een regelmatige n -hoek. Voor $n = 7$ en $n = 8$ is de situatie getekend in figuur 8. Voor zowel een oneven als een even aantal punten is het aantal afstanden ten hoogste gelijk aan $\frac{1}{2}n$. Dit is kleiner dan $\frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$.

Het kan echter nóg beter. Als n een kwadraat is, orden de n punten dan in een vierkant grid. Alle afstanden die in dit $(\sqrt{n} \times \sqrt{n})$ -grid voorkomen, kun je tekenen vanuit de linkerbenedenhoek naar een punt op of onder de diagonaal. Er zijn



Figuur 8



Figuur 9

$\frac{1}{2}\sqrt{n}(\sqrt{n}+1) - 1 = \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}\sqrt{n} - 1$ van dit soort verbindingen. In figuur 9 zie je alle afstanden voor het geval $n = 25$. In het linkerplaatje zijn alle lijnen getekend vanuit de linkerbenedenhoek naar een punt op of onder de diagonaal. Omdat sommige lijnen dan over elkaar vallen, zijn alle afstanden rechts getekend in verschillende kleuren, zonder dat lijnen overlappen.

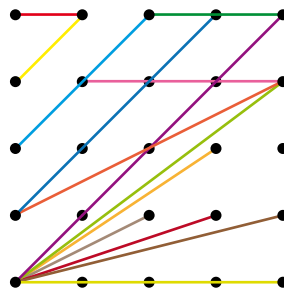
Omdat $\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}\sqrt{n} - 1$ meer is dan $\frac{1}{2}n$, de bovengrens die we vonden in de ordening met de regelmatige veelhoek hierboven, lijkt het in eerste instantie slechter om de punten in een vierkant grid te plaatsen dan op de hoeken van een regelmatige n -hoek. Echter, als n flink groot is, wint de ordening in het vierkante grid. Dat komt doordat er voor grote n veel afstanden ontstaan die op meerdere manieren getekend kunnen worden. Neem bijvoorbeeld de verbinding van de linkerbenedenhoek 7 naar rechts en 1 omhoog: deze afstand is gelijk aan

$$\sqrt{7^2 + 1^2} = \sqrt{50}.$$

Maar de verbinding 5 naar rechts en 5 omhoog levert dezelfde afstand:

$$\sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50}.$$

Hoe kunnen we dit principe generaliseren? Bekijk daartoe figuur 10. Stel, we gaan a naar rechts en b omhoog. We krijgen de afstand $\sqrt{a^2 + b^2}$. Uit de



figuur maken we op dat

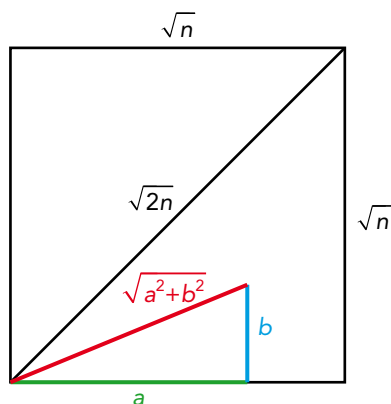
$$\sqrt{a^2 + b^2} \leq \sqrt{2n},$$

ofwel $a^2 + b^2 \leq 2n$. Elke waarde $a^2 + b^2$ is geheel. De vraag 'hoeveel afstanden zitten er in het vierkante grid?' is dezelfde vraag als: 'hoeveel gehele getallen kleiner dan of gelijk aan $2n$ zijn te schrijven als de som van twee kwadraten?'. Het antwoord komt uit de getaltheorie: dit aantal blijkt te schatten met $c_2 \cdot n / (\ln n)$, waarbij c_2 een zekere constante is. Deze door Erdős gevonden bovengrens is scherper dan $\frac{1}{2}n$. In de geschiedenis van het probleem is Erdős' bovengrens niet meer verbeterd.

Tot slot: we zijn er bij de gridordening vanuit gaan dat n een kwadraat is. Als dat niet zo is, neem dan een iets groter getal dat wel een kwadraat is. Daarmee kun je tot een soortgelijke schatting komen.

BETER EN BETER Het probleem heeft sinds het artikel van Erdős veel wiskundigen aangetrokken. In 1952 bracht Leo Moser de ondergrens voor de groei van $g(n)$ naar een constante maal $n^{2/3}$. De ondergrens werd vervolgens verbeterd naar $n^{5/7}$ (in 1984, door Fan Chung), $n^{4/5}$ (in 1993, door László Székely), $n^{6/7}$ (in 2001, door József Solymosi en Csaba D. Tóth), om in 2004 uit te komen op een constante maal

$$n^{(48 - 14e)/(55 - 16e) - \varepsilon},$$



Figuur 10

waarbij e de basis van de natuurlijke logaritme voorstelt (ongeveer 2,718) en waarbij $\varepsilon > 0$ een willekeurig (klein) getal mag zijn. Als je dit invult, is deze macht van n ongeveer gelijk aan 0,8641375. Dit laatste resultaat werd gevonden door Nets Hawk Katz en Gábor Tardos in 2004.

Groot was de verbazing in de wiskundige gemeenschap toen Larry Gutz en Nets Hawk Katz in 2010 lieten zien dat Erdős echt gelijk had gehad: er zijn twee constanten k_1 en k_2 zo, dat

$$k_1 \frac{n}{\ln n} \leq g(n) \leq k_2 \frac{n}{\ln n}$$

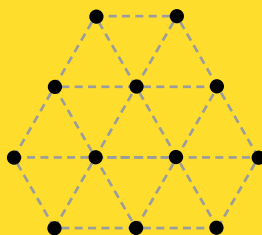
vanaf een zekere waarde van n .

Het is mooi om te zien hoe van een vrijwel onmogelijk te berekenen functie toch nog zulke elegante formules voor de groei kunnen worden gevonden! Guth en Katz hebben de prestigieuze *Annals of Mathematics* gehaald met hun bewijs. Hun artikel is verschenen in het januarinummer 2015 van dit blad. ■

Voor dit artikel is gebruik gemaakt van het boek *The Erdős Distance Problem* (2011) van Julia Gari-baldi, Alex Iosevich en Steven Senger.

OPLOSSING VOOR $N = 12$

Als je 12 punten rangschikt zoals in de figuur hieronder (de punten zijn roosterpunten van een grid dat uit gelijkzijdige driehoeken bestaat) en elk tweetal punten met een rechte lijn verbindt, is het aantal lijnen van verschillende lengte gelijk aan 5.



BONTE MUTSEN

oplossing



■ door Alex van den Brandhof

In de vorige *Pythagoras* stond op pagina 10 een puzzel over de kerstman en 126 kabouters met gekleurde mutsen. Gevraagd werd naar N , het aantal keer dat de kerstman op zijn kerstklok slaat. We geven de oplossing, ontleend aan de Duitse tekst op www.mathekalender.de.

Beschouw eerst de situatie vóórdat de kerstman voor het eerst de klok luidt. Atto kijkt om zich heen en stelt vast dat Bilbo als enige een tomaatrode muts draagt. De kerstman had gezegd dat elke kabouter zijn eigen kleur door logisch nadenken kan bepalen. Als Bilbo geen enkele tomaatrode muts zou zien, dan zou hij beslist niet kunnen vaststellen of zijn muts tomaatrood, vuurrood, bordeauxrood of een totaal andere kleur heeft. Bilbo moet dus zeker iemand met een tomaatrode muts zien.

Maar omdat Atto geen enkele andere kabouter met een tomaatrode muts ziet, kan Atto nu concluderen dat de door Bilbo geziene tomaatrode muts op zijn eigen hoofd moet zitten. Atto staat na de eerste slag van de klok dus op en verlaat de zaal. Bilbo denkt natuurlijk precies hetzelfde, de situatie is immers symmetrisch: hij ziet Atto als enige met een tomaatrode muts en concludeert daaruit dat hijzelf ook een tomaatrode muts heeft. Tegelijk met Atto en Bilbo verlaten nog vier andere kabouterparen de zaal: Alpo en Barbo met aardbeirood, Akko en Bebo met oxiderood, Archo en Bodo met oriëntrood, en Ando en Buzzo met koraalrood.

Wat gebeurt er voor de tweede slag van de klok? Chico kijkt om zich heen en stelt vast dat Coco en Cambo de enige kabouters met boterbloemgele mutsen zijn. Waarom is Coco niet al bij de eerste slag de zaal uitgelopen? Als Coco maar één boterbloemgele muts had gezien, had hij (net als Atto, Bilbo en die acht andere kabouters) al bij de eerste slag kunnen vaststellen dat zijn eigen muts boterbloemgeel is en kunnen weglopen. Omdat hij dat niet deed, moet er een derde boterbloemgele muts zijn. Het kan niet anders dan dat Chico die op zijn eigen hoofd heeft. Na de tweede slag verlaat Chico dus de zaal, net als Coco en Cambo, voor wie de situatie identiek is. Ook drie andere kaboutertrios met dotterbloemgele, sleutelbloemgele respectievelijk zonnebloemgele mutsen verlaten de zaal.

Wat gebeurt er voor de derde slag? Dondo ziet dat Darko, Dezzo en Duffo de enige drie kabou-

ters zijn met een karmozijnrode muts. Waarom is Darko niet al bij de tweede slag de zaal uitgegaan? Als Darko maar twee karmozijnrode mutsen had gezien, had hij al bij de tweede slag kunnen vaststellen dat zijn eigen muts karmozijnrood is en kunnen weglopen. Omdat hij dat niet deed, moet er een vierde karmozijnrode muts zijn. Die moet dan wel op Dondo's hoofd zitten. Na de derde slag verlaat Dondo dus de zaal, net als Darko, Dezzo en Duffo.

Zo gaat het verder. Als er in het begin precies k kabouters zijn met een identieke kleur muts, dan verlaten die k kabouters na de $(k - 1)$ ste slag de zaal. De volgende tabel laat zien hoe de situatie er na 13 slagen uitziet.

1 ^e slag:	$5 \times 2 = 10$ kabouters
2 ^e slag:	$4 \times 3 = 12$ kabouters
3 ^e slag:	$1 \times 4 = 4$ kabouters
4 ^e slag:	$1 \times 5 = 5$ kabouters
5 ^e slag:	$1 \times 6 = 6$ kabouters
6 ^e slag:	$1 \times 7 = 7$ kabouters
7 ^e slag:	$1 \times 8 = 8$ kabouters
8 ^e slag:	$1 \times 9 = 9$ kabouters
9 ^e slag:	$0 \times 10 = 0$ kabouters
10 ^e slag:	$0 \times 11 = 0$ kabouters
11 ^e slag:	$0 \times 12 = 0$ kabouters
12 ^e slag:	$0 \times 13 = 0$ kabouters
13 ^e slag:	$2 \times 14 = 28$ kabouters

Na de 13^e slag hebben in totaal 89 van de 126 kabouters de zaal verlaten. Er zijn dus nog 37 kabouters aanwezig. Omdat elke nog aanwezige kleur minstens 15 keer moet voorkomen, hebben óf alle 37 kabouters dezelfde kleur muts, óf er zijn twee kleuren in een van de volgende combinaties: $15 + 22$, $16 + 21$, $17 + 20$, $18 + 19$. Omdat er in totaal maar zeven slagen zijn waarbij niemand de zaal verlaat, kan de tabel alleen als volgt gecompliceerd worden:

14 ^e slag:	$0 \times 15 = 0$ kabouters
15 ^e slag:	$0 \times 16 = 0$ kabouters
16 ^e slag:	$0 \times 17 = 0$ kabouters
17 ^e slag:	$1 \times 18 = 18$ kabouters
18 ^e slag:	$1 \times 19 = 19$ kabouters

Het antwoord is dus: $N = 18$. ■

De wiskundige Pappos leefde van ongeveer 290 tot 350 na Christus. Hij onderwees in Alexandrië. Er zijn enkele stellingen waardoor zijn naam nog steeds bekend is. Een van deze stellingen, met de naam *driehoeksstelling van Pappos*, gaat over oppervlaktes in een driehoek. Van deze stelling geven we in dit artikel een bewijs. Een tweede stelling, vaak gewoon de *stelling van Pappos* genoemd, gaat over twee lijnen.

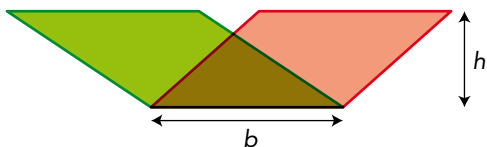
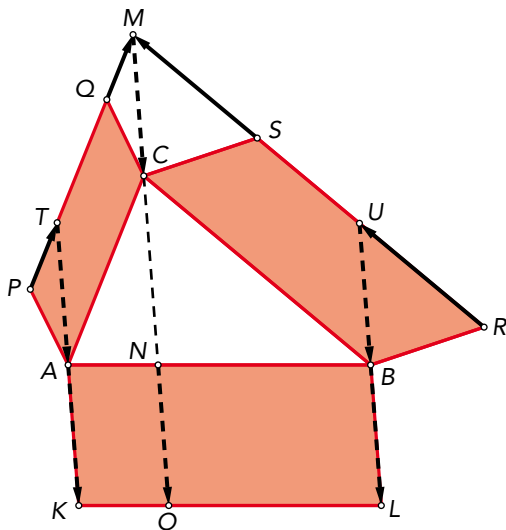
■ door Jan Guichelaar

DRIEHOEKSSTELLING

Voor een willekeurige driehoek formuleerde Pappos een stelling waarbij de oppervlaktes van willekeurige parallellogrammen op twee zijden samen gelijk zijn aan de oppervlakte van een speciaal parallellogram op de derde zijde. Het lijkt een beetje op de Stelling van Pythagoras, die er inderdaad een bijzonder geval van is.

Start met een driehoek ABC . Teken op de zijden AC en BC twee willekeurige parallellogrammen: $ACQP$ en $CBRS$. Verleng PQ en RS en noem het snijpunt M . Teken op AB het parallellogram $ABLK$ met $AK = BL = MC$ en $AK \parallel BL \parallel MC$. We zullen laten zien dat de som van de oppervlaktes van de eerste twee parallellogrammen gelijk is aan de oppervlakte van het laatste parallellogram. Als we de oppervlaktes aangeven met rechte haken, is dit in formulevorm:

$$[ACQP] + [BCSR] = [ABLK].$$



De oppervlakte van een parallellogram is gelijk aan 'basis $\times$ hoogte'. De twee parallellogrammen die hier getekend zijn, hebben dus dezelfde oppervlakte.

HET BEWIJS Verschuif het punt Q naar M en P naar T over gelijke stukken, en vervolgens evenzo S naar M en R naar U . We krijgen dan vanwege de translatie van de parallellogramzijden evenwijdig aan de overstaande zijden gelijke oppervlaktes:

$$[ACQP] = [ACMT] \quad \text{en} \quad [BCRS] = [CBUM].$$

Vervolgens verschuiven we TA naar AK , MC naar NO en UB naar BL . Dan geldt ook dat de oppervlaktes gelijk blijven, en dus:

$$\begin{aligned} [KLBA] &= [KONA] + [OLBN] = \\ [ACMT] + [CBUM] &= [ACQP] + [BCRS]. \end{aligned}$$

Hiermee is de driehoeksstelling bewezen. Als we in de begindriehoek $\angle C = 90^\circ$ nemen en voor de parallellogrammen op AC en BC vierkanten, dan krijgen we de stelling van Pythagoras als bijzonder geval van de driehoeksstelling van Pappos.

EEN ANDERE STELLING Pappos is verder nog bekend om een andere stelling. Deze gaat uit van twee rechte lijnen, met drie punten A_1, B_1 en C_1 op de eerste lijn en drie punten A_2, B_2 en C_2 op de tweede lijn. Dan geldt altijd dat de drie snijpunten S_1 (van A_1B_2 en A_2B_1), S_2 (van B_1C_2 en B_2C_1) en S_3 (van C_1A_2 en C_2A_1) op één rechte lijn liggen. Kan je dit zelf bewijzen? ■

Deze jaargang is 'kwadraten' een thema in *Pythagoras*. In deze tweede aflevering gaat het over een van de beroemdste ongelijkheden uit de wiskunde: die van de Fransman Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) en de Duitser Hermann Amandus Schwarz (1843-1921).

■ door Klaas Pieter Hart

DE ONGELIJKHEID VAN CAUCHY EN SCHWARZ

In het boek *Analyse Algébrique* van Augustin-Louis Cauchy uit 1821 staat een stelling die onder wiskundigen bijna net zo legendarisch is geworden als de stelling van Pythagoras. De stelling zoals die in 1821 werd geformuleerd zie je op pagina 25. De moderne formulering is als volgt.

Stelling. Laat $a_1, a_2, \dots, a_n$ en $b_1, b_2, \dots, b_n$ twee n -tallen reële getallen zijn. Dan geldt

$$|a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n| \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2}$$

en er geldt gelijkheid precies dan als alle verhoudingen a_i/b_i aan elkaar gelijk zijn. Deze stelling staat bekend als de *Ongelijkheid van Cauchy*.

Het bewijs is eigenlijk heel eenvoudig en het gebruikt alleen maar dat kwadraten niet negatief zijn. We doen het voor tweetallen en we trekken het kwadraat van het linkerlid van het kwadraat van het rechterlid af:

$$(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 = a_1^2 b_2^2 - 2a_1 a_2 b_1 b_2 + a_2^2 b_1^2 = (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2$$

(werk de vermenigvuldigingen maar uit). Dus

$$(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2)^2.$$

Uit de eerste gelijkheid volgt ook dat

$$(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) = (a_1 b_1 + a_2 b_2)^2$$

precies dan als $a_1 b_2 = a_2 b_1$, dat wil zeggen als $a_1/b_1 = a_2/b_2$.

Opgave 1. Laat zien dat het verschil tussen $(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)$ en $(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2$ gelijk is aan $(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 + (a_1 b_3 - a_3 b_1)^2 + (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2$. Bewijs vervolgens de stelling voor drietallen getallen.

EEN TOEPASSING In de wiskunde kom je veel problemen tegen die vragen naar een maximale of minimale functiewaarde onder een gegeven nevenvoorwaarde. Bijvoorbeeld: wat is de maximale waarde van $3x - 5y$ als gegeven is dat $x^2 + y^2 = 1$?

Dit probleem kunnen we nu snel oplossen.

16.^e THÉORÈME. Soient $a, a', a'' \dots, a, a', a'' \dots$ deux suites de quantités, et supposons que chacune de ces suites renferme un nombre n de termes. Si les rapports

$$\frac{a}{a}, \frac{a'}{a'}, \frac{a''}{a''}, \&c. \dots$$

ne sont pas tous égaux entre eux, la somme

$$aa + a'a' + a''a'' \dots$$

sera inférieure au produit

$$\sqrt{(a^2 + a'^2 + a''^2 \dots)} \cdot \sqrt{(a^2 + a'^2 + a''^2 \dots)};$$

en sorte qu'on aura

$$(3^o) \left\{ \begin{array}{l} \text{val. num. } (aa + a'a' + a''a'' \dots) \\ < \sqrt{(a^2 + a'^2 + a''^2 \dots)} \cdot \sqrt{(a^2 + a'^2 + a''^2 \dots)}. \end{array} \right.$$

De stelling van Cauchy zoals hij die zelf formuleerde in 1821, in het boek *Analyse Algébrique*.

Neem in Cauchy's ongelijkheid $a_1 = 3, a_2 = -5$, $b_1 = x$ en $b_2 = y$. Dan volgt

$$|3x - 5y| \leq \sqrt{3^2 + 5^2} \sqrt{x^2 + y^2}.$$

We bekijken paren (x, y) die aan $x^2 + y^2 = 1$ voldoen; voor die paren geldt dus altijd $|3x - 5y| \leq \sqrt{34}$ en de enige paren waar gelijkheid geldt, moeten voldoen aan $3y = -5x$, ofwel $y = -\frac{5}{3}x$. Als je dit invult in $x^2 + y^2 = 1$ krijg je $x^2 = \frac{9}{34}$ en $y^2 = \frac{25}{34}$. De eis dat $3y = -5x$ impliceert dat x en y tegengesteld teken moeten hebben, dus $(x, y) = (3/\sqrt{34}, -5/\sqrt{34})$ of $(x, y) = (-3/\sqrt{34}, 5/\sqrt{34})$. Voor het eerste paar geldt $3x - 5y = \sqrt{34}$ en voor het tweede paar geldt $3x - 5y = -\sqrt{34}$.

We hebben het gevraagde maximum dus gevonden, en het paar (x, y) waarvoor dat maximum wordt aangenomen.

EEN ANDERE ONGELIJKHEID Door geschikte n -tallen te kiezen kun je verrassende andere ongelijkheden maken. Neem bijvoorbeeld alle b_i gelijk aan 1; dan krijg je

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq \sqrt{n} \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$$

voor elk n -tal reële getallen.

Je kunt dit resultaat gebuiken om de volgende mooie ongelijkheid voor drie positieve reële getallen x, y en z af te leiden:

$$\sqrt{\frac{x+y}{x+y+z}} + \sqrt{\frac{x+z}{x+y+z}} + \sqrt{\frac{y+z}{x+y+z}} \leq \sqrt{6}.$$

Opgave 2. Laat x, y en z positief zijn.

Bewijs dat

$$x + y + z \leq 2 \left(\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{x+y} \right).$$

SOMMEN VAN COSINUSSEN Hier is een totaal andere toepassing van de ongelijkheid van Cauchy. Neem twee rijtjes getallen: $p_1, p_2, \dots, p_k$ en $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$. We nemen aan dat de p_i niet-negatief

zijn en dat $p_1 + p_2 + \dots + p_k = 1$. Bekijk de functie

$$f(x) = p_1 \cos \beta_1 x + p_2 \cos \beta_2 x + \dots + p_k \cos \beta_k x.$$

Dan geldt

$$f^2(x) \leq \frac{1}{2}(1 + f(2x)). \quad (*)$$

Probeer dat voor het geval $k = 2$ maar eens te bewijzen, door alles uit te schrijven. Dat is lang niet eenvoudig, maar met onze ongelijkheid, en een slimme keuze van a_i en b_i , zijn we er zó. Neem maar $a_i = \sqrt{p_i}$ en $b_i = \sqrt{p_i} \cos \beta_i x$. Onze ongelijkheid geeft dan

$$f^2(x) \leq \sum_{i=1}^k p_i \cdot \sum_{i=1}^k p_i \cos^2 \beta_i x.$$

Maar $p_1 + p_2 + \dots + p_k = 1$ en een bekende goniometrische formule zegt $\cos^2 a = \frac{1}{2}(1 + \cos 2a)$. Er staat dus eigenlijk

$$f^2(x) \leq \sum_{i=1}^k p_i \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\beta_i x \right).$$

26 En dat is nu net de ongelijkheid in (*). Deze ongelijkheid heet de Harker-Kasper-ongelijkheid en is ontdekt bij onderzoek van kristallen. Om iets te kunnen zeggen over de verbanden tussen atomen in materialen waren dit soort ongelijkheden belangrijk bij het schatten van parameters die veelal niet exact berekend konden worden.

WAT DEED SCHWARZ? De titel van dit stuk noemt twee namen, Cauchy en Schwarz, maar Schwarz is tot nu toe niet vermeld. Wat Hermann Amandus Schwarz heeft gedaan, is een ander bewijs van de ongelijkheid geven en laten zien dat de ongelijkheid in veel ruimere situaties geldt.

Schwarz' bewijs verliep als volgt. Hij voerde een variabele t in en maakte de volgende functie van t :

$$p(t) = \sum_{i=1}^n (a_i t - b_i)^2.$$

Deze functie is nooit negatief en je kunt hem omschrijven tot

$$p(t) = t^2 \sum_{i=1}^n a_i^2 - 2t \sum_{i=1}^n a_i b_i + \sum_{i=1}^n b_i^2,$$

een gewone tweedegraadsfunctie dus. Maar omdat $p(t) \geq 0$ voor alle t weten we uit de abc -formule dat de discriminant, $b^2 - 4ac$, kleiner dan of gelijk aan nul moet zijn. Voor deze functie betekent dat

$$4 \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 - 4 \sum_{i=1}^n a_i^2 \sum_{i=1}^n b_i^2 \leq 0$$

en dat is nu net de ongelijkheid van Cauchy.

Met dit idee kun je veel meer. Neem eens twee functies, f en g , bijvoorbeeld van $[0, 1]$ naar $\mathbf{R}$. Dan geldt, net als hierboven, de volgende ongelijkheid:

$$\int_0^1 (t \cdot f(x) - g(x))^2 dx \geq 0.$$

Je kunt de linkerkant als volgt herschrijven:

$$t^2 \int_0^1 f^2(x) dx - 2t \int_0^1 f(x)g(x) dx + \int_0^1 g^2(x) dx.$$

Door weer naar de discriminant te kijken, krijgen we

$$\left(\int_0^1 f(x)g(x) dx \right)^2 \leq \int_0^1 f^2(x) dx \cdot \int_0^1 g^2(x) dx.$$

Deze ongelijkheid staat in een artikel van de Russische wiskundige Viktor Bunyakovsky uit 1859.

Met de ongelijkheid voor integralen is het leuk spelen; door geschikte intervallen en functies te nemen kun je allerlei handige afschattingen maken.

Kijk bijvoorbeeld eens naar

$$\int_0^1 x^{10} e^x dx.$$

Deze integraal kun je door middel van partieel integreren exact uitrekenen:

$$\int_0^1 x^{10} e^x dx = 1334961 \cdot e - 3628800,$$

maar die berekening, die veel tijd kost, zegt ons niet hoe groot de integraal ongeveer is. Met $f(x) = x^{10}$ en $g(x) = e^x$ vinden we (met véél minder moeite):

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^{10} e^x dx &\leq \sqrt{\int_0^1 x^{20} dx} \cdot \sqrt{\int_0^1 e^{2x} dx} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{21}} \cdot \sqrt{\frac{e^2 - 1}{2}} < \frac{2}{\sqrt{21}} < \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Dat laatste volgt als je bedenkt dat $e < 3$ en dus $\frac{1}{2}(e^2 - 1) < 4$, en natuurlijk $\sqrt{21} > \sqrt{16} = 4$. Aan de andere kant: $x^{10} e^x \geq x^{10}$, dus volgt meteen dat

$$\int_0^1 x^{10} e^x dx > \int_0^1 x^{10} dx = \frac{1}{11}.$$

Opgave 3. Laat zien dat voor elke n geldt:

$$\frac{1}{n+1} < \int_0^1 x^n e^x dx < \frac{2}{\sqrt{2n+1}}.$$

Ongelijkheden als in opgave 3 komen uit een onderdeel van de analyse dat *asymptotiek* wordt genoemd; daar wil men vooral weten wat de *orde van grootte* van bepaalde uitdrukkingen is.

We geven nog een laatste voorbeeld. Neem $f(x) = \sqrt{1+x}$ en $g(x) = 1/\sqrt{1+x}$ en gebruik de ongelijkheid met een variabel interval:

$$\left(\int_0^t 1 dx \right)^2 \leq \int_0^t (1+x) dx \cdot \int_0^t \frac{1}{1+x} dx$$

(immers $f(x) \cdot g(x) = 1$). Reken alles uit:

$$t^2 \leq \left(t + \frac{1}{2}t^2\right) \cdot \ln(1+t),$$

ofwel

$$2t^2 \leq t(2+t) \cdot \ln(1+t).$$

Deel door $t(2+t)$ en je vindt

$$\frac{2t}{2+t} \leq \ln(1+t).$$

Deze ongelijkheid is behoorlijk scherp; op het hele interval $[0, 1]$ is het verschil maar een paar honderdsten: $\ln 2$ is maar ietsje meer dan $\frac{2}{3}$. ■

De eerste ronde van de Wiskunde Olympiade staat weer voor de deur; eind januari zal deze weer plaatsvinden op alle aangemelde scholen. Wat voor opgaven krijg je daar voor je kiezen? En hoe pak je zo'n opgave eigenlijk aan? Eén strategie is – hoe raar het ook klinkt – om gewoon maar eens domweg wat te proberen.

■ door Birgit van Dalen en Quintijn Puite



DOMWEG PROBEREN

In 2014 zat de volgende opgave bij de eerste ronde van de Wiskunde Olympiade:

Een tuin met een vijver (het zwarte vakje) zal betegeld worden met zeshoekige tegels, zoals in figuur 1. We hebben drie kleuren tegels: rood, groen en blauw. Het is niet toegestaan om twee tegels van dezelfde kleur tegen elkaar aan te leggen. Op hoeveel manieren kunnen we de tuin betegelen?

De tuin bestaat uit 21 tegels en elke tegel is rood, groen of blauw, dus er zijn $3 \times 3 \times \dots \times 3 = 3^{21}$ betegelingen mogelijk, althans, als we gemakshalve die eis even vergeten dat het niet toegestaan is om twee tegels van dezelfde kleur tegen elkaar aan te leggen. 'Even' controleren welke betegelingen er dan daadwerkelijk voldoen, is er helaas niet bij, want dit gaat om meer dan 10 miljard mogelijkheden... Dus ga je proberen iets heel slims te bedenken, je staart nog eens naar het plaatje, je denkt nog eens na. Maar je komt geen steek verder. Wat nu? De gouden tip in dit geval lijkt te flauw om waar te zijn: pak je kleurpotloden en ga maar aan de slag met kleuren!

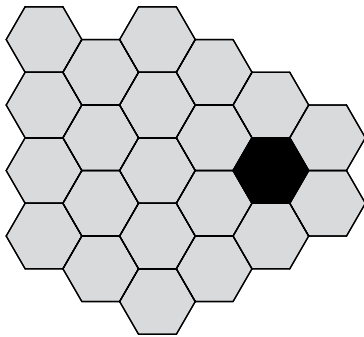
ZOMAAR EEN KLEURING Vergeet dus even de uiteindelijke vraag (Op hoeveel manieren...?) en probeer gewoon eens de tegels te kleuren volgens de voorgeschreven eis. Kleur bijvoorbeeld de tegel linksboven rood (tegel 1 in figuur 2). Dan hebben we voor tegel 2 direct daaronder de keuze uit groen en blauw. We kiezen groen. Nu we deze twee tegels gekleurd hebben, is het even afgelopen met de keuzevrijheid: er blijft voor tegel 3 maar één kleur over: blauw. En tegel 4, die aan tegel 2 en 3 grenst, moet dan wel rood worden. Waardoor vervolgens ook de kleur van tegel 5 (groen) en die van tegel 6 (blauw) vastligt. Zo kunnen we één voor één de kleur van steeds weer een nieuwe tegel afleiden, waarmee we uiteindelijk de tegelvloer van figuur 3 vinden.

We moeten nog twee tegels kleuren, tegel A en tegel B. Tegel A grenst aan een groene, dus die moet rood of blauw zijn. En tegel B grenst juist aan een rode, dus die moet blauw of groen zijn. Er valt eindelijk weer wat te kiezen; we maken ons plaatje af door voor A rood te kiezen en voor B blauw (zie figuur 4). Hiermee hebben we de tuin op een goede manier betegeld, want ook tegel A en B hebben nu een verschillende kleur.

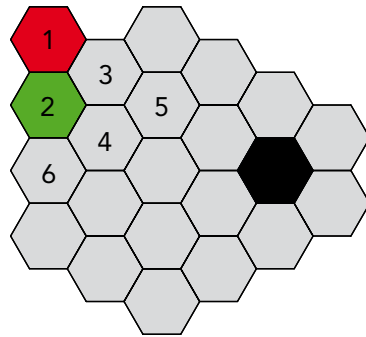
DE OORSPRONKELIJKE VRAAG Tijd om eens de eigenlijke vraag erbij te pakken: op hoeveel manieren kunnen we deze betegeling eigenlijk kiezen? Toen we eenmaal tegel 1 en 2 gekozen hadden, lagen de meeste tegels vast. Alleen voor A en B was er nog keuze: voor A konden we rood of blauw kiezen, en voor B juist blauw of groen. Dat levert in eerste instantie de $2 \times 2 = 4$ opties die in de figuren 5a tot en met 5d zijn aangegeven.

Bij de derde optie (figuur 5c) grenzen echter twee blauwe tegels aan elkaar, dus deze optie vervalt. De andere opties voldoen wel, dus al met al komen we op drie mogelijke betegelingen, gegeven dat tegel 1 rood is en tegel 2 groen. Maar we hadden natuurlijk ook tegel 1 en 2 anders kunnen kiezen. Wat als we tegel 1 groen zouden kiezen en tegel 2 juist blauw? Dan verloopt de rest van de kleuring eigenlijk hetzelfde als hierboven, alleen moet je overal even rood vervangen door groen, groen door blauw en blauw door rood.

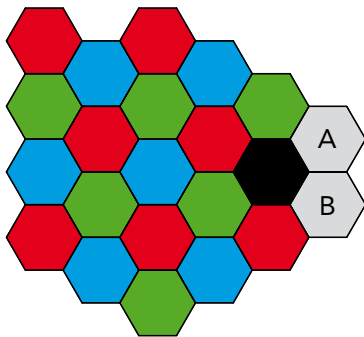
We kunnen de tegels van de tuin dus weer helemaal inkleuren tot aan de tegels A en B, waarvoor er weer drie mogelijkheden zijn. We zien dat er dus bij elke keuze van tegel 1 en 2 drie mogelijkheden zijn om A en B te kiezen. Resteert de vraag: hoeveel keuzes voor tegel 1 en 2 zijn er in totaal? Tegel 1 kan rood, blauw of groen zijn. En als die gekozen is, zijn er voor tegel 2 nog twee opties over. Dat zijn $3 \times 2 = 6$ mogelijkheden. En omdat er voor elk van deze mogelijkheden drie mogelijkheden zijn om A en B te kiezen, levert dit in totaal $6 \times 3 = 18$ betegelingen; klaar!



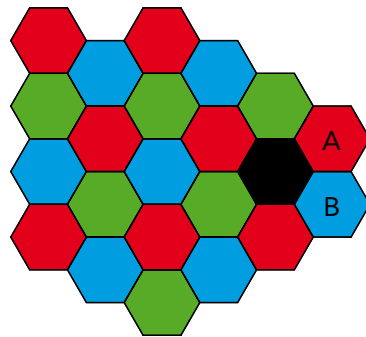
Figuur 1



Figuur 2



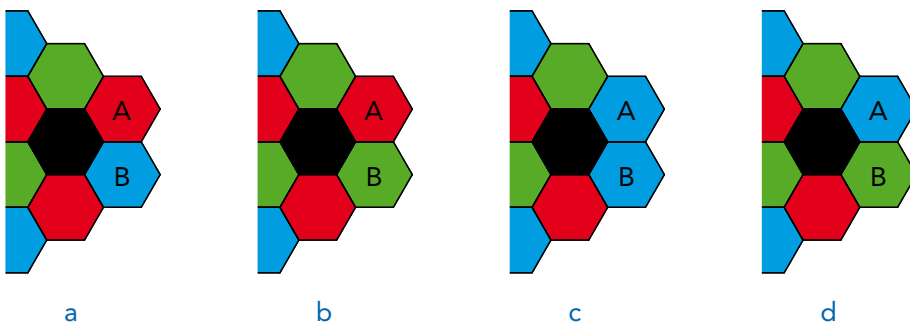
Figuur 3



Figuur 4

DURF TE PROBEREN Door gewoon maar eens te gaan kleuren, kregen we het probleem in de vingers. We zagen dat er helemaal niet zoveel vrijheid is om de kleuring te kiezen; op de tegels 1, 2, A en B na valt er niets te kiezen. Daardoor ging het probleem over in: op hoeveel manieren kunnen we tegels 1 en 2 kiezen? En als alles vastligt, hoe kunnen we dan tegel A en B kiezen? Dat hadden we nooit verzonnen, als we niet gewoon eens waren begonnen met kleuren!

Dit is maar één van de strategieën die van pas kunnen komen bij het maken van olympiade-opgaven. Deze en negen andere strategieën staan beschreven in het boek *Successtrategieën voor de Wiskunde Olympiade*. Vraag je docent voor meer informatie of kijk op www.wiskundeolympiade.nl, onder Publicaties. Elke school die in 2014 deelnam aan de eerste ronde van de Wiskunde Olympiade heeft een aantal van deze boeken ontvangen. ■



Figuur 5

PYTHAGORAS OLYMPIADE

■ door Matthijs Coster, Eddie Nijholt en Harry Smit

Doe mee met de Pythagoras Olympiade! Elke aflevering bevat vier opgaven. De eerste twee zijn wat eenvoudiger; onder de goede inzendingen van leerlingen uit de klassen 1, 2 en 3 wordt een cadeaubon van Bol.com ter waarde van 20 euro verloot. De laatste twee zijn echte breinbrekers; onder de goede inzendingen van leerlingen (tot en met klas 6) wordt een bon van 20 euro verloot. Per aflevering wordt maximaal één bon per persoon vergeven.

Daarnaast krijgen leerlingen (tot en met klas 6) punten voor een *laddercompetitie*, waarmee eveneens een cadeaubon van Bol.com van 20 euro te verdienen valt. De opgaven van de onderbouw zijn 1 punt waard, de opgaven van de bovenbouw 2 punten. De leerling met de hoogste score in de laddercompetitie krijgt een bon. Zijn puntentotaal wordt weer op 0 gezet. Wie zes achtereenvolgende keren niets inzendt, verliest zijn punten in de laddercompetitie. Met de bovenbouw-opgaven kun je ook een plaats in de finale van de Nederlandse Wiskunde Olympiade verdienen, mocht het via de voor-

ronden niet lukken:

aan het eind van elke jaargang worden enkele goed scorende leerlingen

uitgenodigd voor de NWO-finale. Niet-leerlingen kunnen met de Pythagoras Olympiade meedoen voor de eer.



HOE IN TE ZENDEN? Stuur je oplossing (ge-typt of een scan of foto van een handgeschreven oplossing) naar pytholym@gmail.com. Je ontvangt een automatisch antwoord zodra we je bericht hebben ontvangen.

Let op: het is niet meer mogelijk schriftelijk in te zenden.

Voorzie het antwoord van een duidelijke toelichting (dat wil zeggen: een berekening of een bewijs). Vermeld je naam en adres; leerlingen moeten ook hun klas en de naam van hun school vermelden.

Je inzending moet bij ons binnen zijn vóór 1 maart 2015.

DE GOEDE INZENDERS VAN SEPTEMBER 2014

290: Tara van Belkom (klas 5), Gymnasium Felisenum, Velsen-Zuid; Ivo van Dijk (klas 6), Goois Lyceum, Bussum; Sander Engelberts (klas 4), Goois Lyceum, Bussum; Tim Groot (klas 2), Goois Lyceum, Bussum; Karel Haighton, Gouda; Oscar Heijdra (klas 4), Goois Lyceum, Bussum; Gerben-Jan Hooijer (klas 3), Goois Lyceum, Bussum; Merlijn Hunik (klas 4), Grotius College, Delft; Bram Jonkheer (klas 6), Emelwerda College, Emmeloord; Pieter-Jan Meuris (klas 4), Klein Seminarie, Roeselare; Niels van Mierlo (klas 3), Christelijk Gymnasium, Utrecht; Frenk Out (klas 6), Mummellius Gymnasium, Alkmaar; Alwin van der Paardt (klas 3), Goois Lyceum, Bussum; Levi van de Pol (klas 2), Ichthus College, Veenendaal; Stef Rasing (klas 3), Goois Lyceum, Bussum; Pim Spelier (klas 3), Christelijk Gymnasium Sorghvliet, Den Haag.

291: Ludivine Bonvarlez (klas 3), Koninklijk Atheneum, Tervuren; Kenny van Dijken (klas 3), Koninklijk Atheneum, Tervuren; Sander Engelberts (klas 4), Goois Lyceum, Bussum; Calista Hainaut (klas 3), Koninklijk Atheneum, Tervuren; Nathan van 't Hof (klas 6), Hofstad Lyceum, Rijswijk; Bram Jonkheer (klas 6), Emelwerda College, Emmeloord; Arie van der Kraan, Nuth; Nora Lahlou (klas 3), Koninklijk Atheneum, Tervuren; Pieter-Jan Meuris (klas 4), Klein Seminarie, Roeselare; Daphné Meyer-Horn (klas 3), Koninklijk Atheneum, Tervuren; Niels van Mierlo (klas 3), Christelijk Gymnasium, Utrecht; Frenk Out (klas 6), Mummellius Gymnasium, Alkmaar; Levi van de Pol (klas 2), Ichthus College, Veenendaal; Stef Rasing (klas 3), Goois Lyceum, Bussum; Olivier Segers (klas 3), Goois Lyceum, Bussum; Pim Spelier (klas 3), Christelijk Gymnasium Sorghvliet, Den Haag; Robert van der Waall, Huizen.

292: Kees Boersma, Vlissingen; Nathan van 't Hof (klas 6), Hofstad Lyceum, Rijswijk; Arie van der Kraan, Nuth; Pieter-Jan Meuris (klas 4), Klein Seminarie, Roeselare; Levi van de Pol (klas 2), Ichthus College, Veenendaal; Marcel Roggeband, Hoofddorp; Pim Spelier (klas 3), Christelijk Gymnasium Sorghvliet,

Den Haag; Robert van der Waall, Huizen.

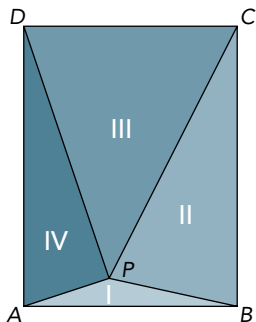
293: Kees Boersma, Vlissingen; Sander Engelberts (klas 4), Goois Lyceum, Bussum; Nathan van 't Hof (klas 6), Hofstad Lyceum, Rijswijk; Bram Jonkheer (klas 6), Emelwerda College, Emmeloord; Pieter-Jan Meuris (klas 4), Klein Seminarie, Roeselare; Levi van de Pol (klas 2), Ichthus College, Veenendaal; Pim Spelier (klas 3), Christelijk Gymnasium Sorghvliet, Den Haag; Robert van der Waall, Huizen.

Cadeaubonnen: Levi van de Pol en Nathan van 't Hof.

Stand laddercompetitie: Pieter-Jan Meuris (21 p; cadeaubon), Michelle Sweering (18 p), Pim Spelier (15 p), Frenk Out (14 p), Wouter Andriessen (12 p), Wout Gevaert (12 p), Marinda Westerveld (11 p), Tara van Belkom (10 p), Reinier Schmiermann (9 p), Beaudine Smeekes (9 p), Oscar Heijdra (8 p), Tjard Langhout (6 p), Levi van de Pol (6 p), Simon Roelandt (6 p), Tim Vermeulen (6 p), Michiel Versnel (6 p), Max Bosman (5 p), Ivo van Dijk (5 p), Sander Engelberts (5 p), Nathan van 't Hof (5 p), Eva Kapitein (5 p), Niels van Mierlo (5 p), Art Waeterschoot (5 p), Bob Zwetsloot (5 p), Laurens Hilbrands (4 p), Bram Jonkheer (4 p), Sebastiaan Ceuppens (3 p), Jildert Denneman (3 p), Anton van Es (3 p), Ritchie Keijssper (3 p), Timen Schenk (3 p), Sjoerd de Vries (3 p), Jelle Couperus (2 p), Sietse Couperus (2 p), Maud van de Graaf (2 p), Phillip de Groot (2 p), Yvette Keij (2 p), Stef Rasing (2 p), Tom Smeding (2 p), Jelle den Uil (2 p), Sied Vrasdonk (2 p), Marc Zuurbier (2 p), Sterre ter Beek (1 p), Simon de Best (1 p), Ludivine Bonvarlez (1 p), Johanna Bult (1 p), Maarten Clercx (1 p), Kenny van Dijk (1 p), Famke Driessen (1 p), Tessa Engelberts (1 p), Tim Groot (1 p), Calista Hainaut (1 p), Gerben-Jan Hooijer (1 p), Merlijn Hunik (1 p), Boris Kloeg (1 p), Elisabeth Kuijper (1 p), Nora Lahlou (1 p), Bram van der Linden (1 p), Daphné Meyer-Horn (1 p), Hannah Nijssje (1 p), Anne Noom (1 p), Alwin van der Paardt (1 p), Olivier Segers (1 p), Seb Waterreus (1 p).

OPGAVE 298

Gegeven is een rechthoek $ABCD$ en een punt P daarbinnen. De lijnstukken AP , BP , CP en DP verdelen de rechthoek in de stukken I tot en met IV (zie onderstaande figuur). Verder is gegeven: de verhouding tussen de oppervlakte van I en die van IV is gelijk aan $1 : 4$, en de verhouding tussen de oppervlakte van II en die van III is gelijk aan $2 : 3$. Wat is nu de verhouding tussen de oppervlakte van I en die van II?



OPGAVE 299

Een kangoeroe start op een even getal k en maakt dan als volgt een serie sprongen: hij springt naar elk van de delers van k van hoog naar laag, behalve 1. De kangoeroe eindigt dus in 2. Met startgetal 42 ziet de serie sprongen er dus als volgt uit:

$$42 \rightarrow 21 \rightarrow 14 \rightarrow 7 \rightarrow 6 \rightarrow 3 \rightarrow 2.$$

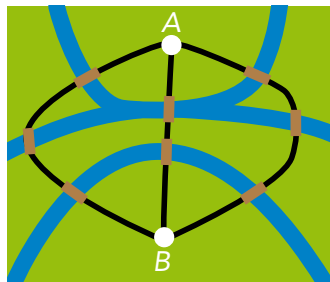
De kangoeroe heeft zichzelf het doel gesteld dat hij zoveel mogelijk van de getallen 2 tot en met 20 wil bereiken, zonder hierbij via twee opeenvolgende getallen te springen. Het voorbeeld hierboven is dus niet goed, want zowel 2 en 3 als 6 en 7 zijn opeenvolgende getallen. Een voorbeeld van een goede serie sprongen is:

$$50 \rightarrow 25 \rightarrow 10 \rightarrow 5 \rightarrow 2.$$

Hierbij worden de getallen 2, 5, en 10 bereikt. Geef een zo groot mogelijke verzameling getallen van 2 tot en met 20 die de kangoeroe kan aandoen bij zijn serie sprongen.



OPGAVE 300



Tussen twee gebouwen A en B liggen acht bruggen, die allemaal en onafhankelijk van elkaar met kans $\frac{1}{2}$ open staan (zie afbeelding). Wat is op een gegeven tijdstip de kans dat er een route van A naar B is waarbij alle bruggen op die route dicht zijn?

OPGAVE 301

Je hebt een zak met honderd ballen, genummerd van 1 tot en met 100. Uit deze zak pak je 55 ballen. Er zullen altijd twee ballen zijn waarvan de nummers 9 van elkaar verschillen, twee die 10 verschillen, twee die 12 verschillen, en twee die 13 verschillen. Maar er zullen niet noodzakelijk twee ballen bij zijn die 11 van elkaar verschillen. Verklaar dit.

OPLOSSING 290

Bij een groepje van zes jongens zijn er twee die appels stelen. Maar wie van de zes?

Jan zei: 'Piet en Dirk.'

Wim zei: 'Donald en Tom.'

Donald zei: 'Tom en Piet.'

Dirk zei: 'Jan en Piet.'

Piet zei: 'Donald en Wim.'

Tom was niet te vinden.

Vier van de vijf ondervraagde jongens hadden een van de dieven goed en hadden gelogen over de andere. De vijfde had geen van beide dieven correct genoemd. Wie waren de dieven?

Oplossing. Elk van de 5 jongens doet twee uitspraken die ieder waar of niet waar kunnen zijn. Van deze 10 uitspraken zijn er 4 waar en 6 onwaar. Deze 4 ware uitspraken moeten corresponderen met 2 jongens die de appels daadwerkelijk hebben gestolen. Jan, Dirk en Wim worden 1 keer genoemd, Tom en Donald worden 2 keer genoemd, en Piet

3 keer. Om tot 4 ware uitspraken te komen, moeten we Tom en Donald aanwijzen als daders of Piet combineren met één van Jan, Dirk of Wim. Als Tom en Donald de daders zijn, dan zou Wim 2 keer de waarheid hebben gesproken. Dat geldt ook voor de combinaties van Piet met Jan of Dirk. Zodoende zijn Piet en Wim de daders.

OPLOSSING 291

Schrijf het getal 5,02 0142 0142 0142 ... als een breuk.

Oplossing. Noem het gegeven getal S , en bereken de waarde van $9.999S = 10.000S - S$:

$$50.201,4201420142... - 5,02014201420142... = 50.196,4.$$

Dus

$$S = \frac{501964}{99990} = \frac{250982}{49995}.$$

OPLOSSING 292

Zoals je weet, is de grootste gemene deler van 5 en 20 gelijk aan 5. De getallen 5, 20 en 4 hebben de eigenschap dat $\frac{1}{5} + \frac{1}{20} = \frac{1}{4}$. Laat zien dat de volgende algemene stelling juist is.

Gegeven zijn drie natuurlijke getallen a , b en c zodanig dat $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$. Dan geldt altijd dat de grootste gemene deler van a en b groter is dan 1.

Met andere woorden: laat zien dat er een getal groter dan 1 bestaat dat zowel a als b deelt.

Oplossing. Vermenigvuldig beide zijden van $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$ met abc , dan krijg je $ac + bc = ab$, ofwel

$$c = \frac{ab}{a+b}. \quad (*)$$

Merk op dat $a > 1$ en $b > 1$, dus zeker $a + b > 1$.

Kies een priemdelers p van $a + b$. Vanwege (*) en het feit dat c geheel is, geldt dat p eveneens een deler is van ab . Dit betekent dat p minimaal een deler is van a of b . Maar p is ook een deler van $a + b$. Daarom is p een deler van zowel a als b , dus ook van de grootste gemene deler van a en b .

OPLOSSING 293

Vind alle getallenrijtjes $u_0, u_1, u_2, \dots$ die voldoen aan

$$u_n \cdot (u_{n+1})^2 - u_n - u_{n+1} + 1 = 0$$

met $u_0 = 1$.

Oplossing. Omdat $u_0 = 1$, geldt $u_1^2 - 1 - u_1 + 1 = 0$, ofwel $u_1^2 - u_1 = 0$. Dus $u_1 = 0$ of $u_1 = 1$. Gaan we uit van $u_n = 0$, dan volgt $u_{n+1} = 1$. Gaan we uit van $u_n = 1$, dan volgt $u_{n+1} = 0$ of $u_{n+1} = 1$ (op dezelfde wijze zoals we u_1 berekenden). Samenvattend geldt dat elk getallenrijtje $u_0, u_1, u_2, \dots$ met de volgende eigenschappen voldoet:

- $u_0 = 1$;
- het getallenrijtje bevat alleen maar nullen en enen;
- in het getallenrijtje komen geen twee opeenvolgende nullen voor.

OPLOSSING DOBBELSTEENPROBLEEM

■ door Robbert Fokkink

In de vorige *Pythagoras* stond op pagina 19 een dobbelsteenprobleem. Ik zou zelf als volgt spelen: gooi eerst de ene dobbelsteen 12 keer – is er dan nog steeds geen zes gevallen, gooi dan de andere dobbelsteen 12 keer. Nu moet ik uitrekenen hoeveel deze strategie naar verwachting oplevert. Ik noem de opbrengst X . Er is een kans p dat ik zelfs na 24 keer gooien nog niet klaar ben. Deze p is gelijk aan $(\frac{5}{6})^{12}$, ruim 11 procent. Dat is natuurlijk een beetje zuur: na 24 keer gooien ben ik dan weer terug bij af met ondertussen 1,7 miljoen aan kosten. Aan de andere kant, met kans $1 - p$ ben ik dan klaar en heb ik een bedrag Y opgestreken, afhankelijk van het aantal worpen. Blijf positief denken!

We hebben nu een recursie $X = p(X - 1,7 \text{ miljoen}) + (1 - p)Y$, ofwel $X = -214.752 + Y$. Wat is nu die Y ? In dit geval ben ik binnen 24 worpen klaar en heb ik de bonus van 1 miljoen binnen, dat is mooi. Helaas gaan er kosten vanaf. Met kans $\frac{1}{2}$ begon ik met de behekste dobbelsteen en moest wisse-

len na 12 worpen, dat kost 500.000 aan wisselboete en 600.000 aan werpkosten. Dus gaat er de helft van 1,1 miljoen aan kosten vanaf, er blijft nog 450.000 over. Maar dat is niet alles, ik moet ook nog het verwachte aantal worpen met de onbehekste dobbelsteen in rekening brengen. **Kansrekeningvraagje:** stel dat je binnen 12 keer een zes gooit met een zuivere dobbelsteen, hoe vaak verwacht je dan te gooien? **Antwoord:** 4,4841..., dat mag je zelf uitrekenen! Brengen we deze werpkosten ook nog in rekening, dan daalt Y uiteindelijk naar 225.794. Mijn verwachte opbrengst X is dus 11.042 euro. Toch nog altijd mooi meegenomen.

De prijs gaat naar de speler die de strategie heeft bedacht met de hoogste verwachte opbrengst. De hier gegeven strategie is van mijzelf. Of het de beste is, weet ik niet, maar niemand heeft een betere ingestuurd. Sterker nog, niemand heeft iets ingestuurd. De prijs voor de puzzel geef ik daarom aan mezelf. Ik ben er erg blij mee. ■



54ste jaargang nummer 3
januari 2015
ISSN 0033 4766

Pythagoras stelt zich ten doel jongeren kennis te laten maken met de leuke en uitdagende kanten van wiskunde. Pythagoras richt zich tot leerlingen van vwo en havo en alle anderen die jong van geest zijn.

Internet www.pyth.eu

Hoofredacteur Derk Pik

Eindredacteur Alex van den Brandhof

Redactie Matthijs Coster,
Jeanine Daems, Jan Guichelaar,
Klaas Pieter Hart, Paul Levrie,
Marc Seijlhouwer

Vormgeving Grafisch Team Digipage,
Leidschendam

Druk Drukkerij Ten Brink, Meppel

Uitgever Koninklijk Wiskundig
Genootschap (KWG)

Management Pythagoras Jan Turk,
Mark Veraar (KWG), Derk Pik

Lezersreacties en kopij

Bij voorkeur per e-mail; lezersreacties naar Jan Guichelaar, jan@pyth.eu en kopij naar Derk Pik, derk@pyth.eu. Eventueel per post naar Pythagoras, p.a. Centrum Wiskunde & Informatica, Postbus 94079, 1090 GB Amsterdam.

Abonnementen, bestellingen en mutaties

Abonneeservice Pythagoras
Postbus 2238
5600 CE Eindhoven
Telefoon 088 226 5258
E-mail: abonnementen@pyth.eu

Abonnementsprijs

(zes nummers per jaargang)
€ 28,00 (Nederland en België),
€ 30,00 (overige landen),
€ 18,00 (groepsabbonnement NL/B),
€ 28,00 (geschenkabbonnement NL/B),
€ 30,00 (geschenkabbonnement overige landen).

Een geschenkabbonnement stopt automatisch na één jaar. Overige abonnementen gelden tot wederopzegging. Zie www.pyth.eu voor verdere toelichtingen.

Aan dit nummer werkten mee

Alex van den Brandhof
(alex@pyth.eu),
Matthijs Coster
(matthijs@pyth.eu),
Jeanine Daems
(jeanine@pyth.eu),
Birgit van Dalen
(birgit@wiskundeolympiade.nl),
Robbert Fokkink
(r.j.fokkink@tudelft.nl),
Jan Guichelaar
(jan@pyth.eu),
Klaas Pieter Hart (kp@pyth.eu),
Niek Huttinga
(mathrace@twenteacademy.nl),
Jaap Klouwen
(j.klouwen@hva.nl),
Paul Levrie (paul@pyth.eu),
Eddie Nijholt (eddie@pyth.eu),
Dave Odegard
(dave@odegard.demon.nl),
Derk Pik (derk@pyth.eu),
Quintijn Puite
(quintijn@wiskundeolympiade.nl),
Marc Seijlhouwer
(marc@pyth.eu),
Harry Smit
(h.j.smit@students.uu.nl),
Marco Swaen
(m.d.g.swaen@uva.nl).

Pythagoras wordt mede mogelijk gemaakt door de bijdragen van de ondersteunende instituten en instellingen.



TU Delft TU/e

UNIVERSITEIT
TWENTE.





FROM a given point (—),
to draw a straight line equal
to a given finite straight
line (—).

Draw — (post. 1.), describe
△ (pr. 1.), produce — (post.
2.), describe (post. 3.), and



(post. 3.); produce — (post. 2.), then
— is the line required.

For — = — (def. 15.),
and — = — (const.), ∴ — = —
(ax. 3.), but (def. 15.) — = — ;
∴ — drawn from the given point (—),
is equal the given line —.

Q. E. D.



Bron: Oliver Byrne, *The First Six Books of The Elements of Euclid*, Taschen.