

PYTHA GORAS

WISKUNDETIJDSCHRIFT VOOR JONGEREN

54ste JAARGANG - NUMMER 4 - FEBRUARI 2015

Leidse ketting

Je vindt het antwoord op
www.math.leidenuniv.nl/puzzels



Een Leidse ketting bestaat uit drie bolvormige kralen aan een gesloten ketting die elk wit, blauw of oranje zijn. De kralen kunnen vrij bewegen langs de ketting.

Bepaal het aantal verschillende Leidse kettingen. Twee Leidse kettingen zijn hetzelfde als je zonder de ketting te breken dezelfde configuratie kan krijgen.

Uitdaging: wat als er vier kralen zijn in plaats van drie? Of vijf?

Kom naar het Proefstuderen

Wiskunde kun je doen om de schoonheid en abstractie van de wiskunde zelf. Maar ook de praktische problemen en toepassingen vormen vaak een grote uitdaging. Een combinatie van beide leidt vaak tot spectaculaire resultaten. Wil je meer weten over Wiskunde studeren aan de Universiteit Leiden? Kom dan op **vrijdag 17 april** naar het Proefstuderen van de faculteit Wiskunde en Natuurwetenschappen.

Kijk voor meer informatie op www.studereninleiden.nl/studies/info/wiskunde/



**Universiteit
Leiden**

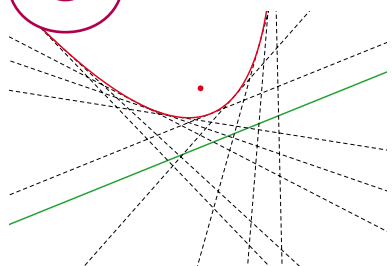
Wiskunde en Natuurwetenschappen



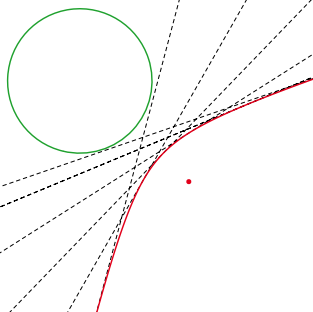
INHOUD

6

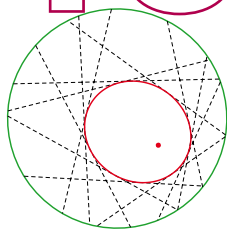
KEGELSNEDE VOUWEN



KEGELSNEDE BESCHRIJVEN

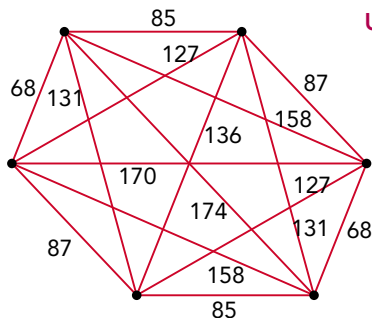


18



De parabool, hyperbool en ellips zijn kegelsneden. Je kunt ze vouwen en analytisch beschrijven. Over beide methoden kun je lezen in de eerste twee afleveringen van onze nieuwe serie over kegelsneden.

24



UITSLUITEND GEHELE AFSTANDEN

Teken een aantal punten in het platte vlak, op zo'n manier dat de afstand tussen elk tweetal punten geheel is. Kan je dat zelf met vier punten? Of vijf? Hoe moeilijk gaat dit worden?

EN VERDER

- 2 Kleine nootjes
- 4 Journaal
- 12 Jackpotgetallen
- 15 Pellpuzzel
- 16 Phi
- 22 Littlewood-nulpunten in beeld
- 30 Pythagoras Olympiade
- 33 Oplossingen Kruisgetalpuzzel & Letterwandelen

Omslagillustratie:
een parabool, een hyperbool en een ellips.

NIVEAUBALKJES Sommige pagina's bevatten één of meer zwarte balkjes onder het paginanummer. Voor artikelen zonder balkje is geen specifieke voorkennis nodig. Artikelen met één balkje bevatten wiskunde uit de onderbouw. Artikelen met twee balkjes vereisen kennis uit de bovenbouw. Drie balkjes: net iets moeilijker.

KLEINE NOOTJES

■ door Jan Guichelaar

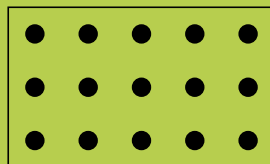


ZES KEER DELEN

Neem een getal van zes cijfers dat elk van de cijfers 1, 2, 3, 4, 5 en 6 precies één keer bevat. Noem dit getal a . Streep uit a één cijfer weg; het getal dat je overhoudt is b . Streep uit b één cijfer weg; het getal dat je overhoudt is c . Streep uit c één cijfer weg; het getal dat je overhoudt is d . Streep uit d één cijfer weg; het getal dat je overhoudt is e . Streep ten slotte uit e één cijfer weg; het getal dat je overhoudt is f . Van de getallen a tot en met f is er één deelbaar door 2, één door 3, één door 4, één door 5, één door 6 en één door 7. Wat zijn de getallen a tot en met f ?

PUNTEN OPSLUITEN

In de rechthoek hiernaast zijn 15 punten getekend. Teken twee vierkanten en een rechthoek in de grote rechthoek (hoekpunten ervan mogen wel op de rand, maar er niet overheen liggen). Doe dit zo, dat de grote rechthoek wordt verdeeld in 15 gesloten gebiedjes, in elk waarvan precies één van de punten ligt.



2

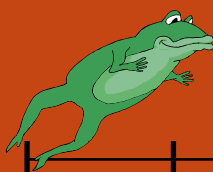
HOE OUD?

Over vijf jaar is Daans vader drie keer zo oud als Daan, terwijl hij vijf jaar geleden zeven keer zo oud was. Hoe oud zijn ze nu?



HEEN EN WEER

Op onderstaande lijn zijn acht punten gemarkeerd. De afstand tussen twee naast elkaar gelegen punten is steeds hetzelfde. Een kikker zit op het meest linkse punt. Hij springt zeven keer van punt naar punt. De afstand die hij springt, is steeds verschillend. Kan de kikker na zijn zeven sprongen weer uitkomen in zijn beginpunt? De punten die hij tussendoor aandoet, zijn steeds verschillend.



Kleine nootjes zijn eenvoudige opgaven die weinig of geen wiskundige voorkennis vereisen om opgelost te kunnen worden. De antwoorden vind je in het volgende nummer van *Pythagoras*.

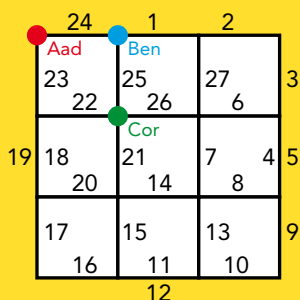


TWEEPERSOONSBANKEN

In een klaslokaal staan 15 tweepersoonsbanken. Vrijwel alle banken worden gebruikt. Een derde deel van de meisjes zit samen in een bank met een jongen. Deze jongens vormen twee derde deel van alle jongens. De rest van de meisjes en jongens hebben ieder een tweepersoonsbank voor zichzelf. Hoeveel leerlingen zitten er in de klas?

OPLOSSINGEN KLEINE NOOTJES NR. 3

De 24 straatjes. Ben legt de kortste afstand af: hij loopt 27 straatjes af (zie de figuur). Aad en Cor moeten meer dubbele straatjes aflopen.



Gewichten in balans.

Op symmetrie na zijn er tien mogelijkheden:

3 2 0		1 6 0
3 0 1		6 2 0
2 0 3		6 0 1
0 3 2		6 1 0
5 0 0		1 4 2
5 0 1		0 2 4
4 0 0		5 2 1
2 0 5		0 4 1
0 4 1		5 2 0
0 2 4		5 0 1

Lonten branden. Op de tijdstippen 0 en 2 steek je lont 1 aan en op 4 en 6 steek je lont 2 aan. Op tijdstip t zijn ze opgebrand. Lont 1 brandt $t + (t - 2) = 2t - 2$ minuten. Lont 2 brandt $(t - 4) + (t - 6) = 2t - 10$ minuten. Dan geldt: $2t - 2 = 2(t - 10)$, ofwel $t = 9$ minuten.

Driehoeken maken.

$3+4, 5+6, 7=7, 11, 7$
 $3+4, 5+7, 6=7, 12, 6$
 $3+5, 4+6, 7=8, 10, 7$
 $3+5, 4+7, 6=8, 11, 6$
 $3+6, 4+5, 7=9, 9, 7$
 $3+6, 4+7, 5=9, 11, 5$
 $3+6, 5+7, 4=9, 12, 4$
 $3+7, 4+5, 6=10, 9, 6$
 $3+7, 4+6, 5=10, 10, 5$
 $3+7, 5+6, 4=10, 11, 4$
 $3+4+5, 6, 7=12, 6, 7$

In totaal zijn er tien mogelijkheden, omdat de laatste (12, 6, 7) dezelfde driehoek geeft als de tweede (7, 12, 6).

Spel met munten. Mimi wint altijd. Op 3 antwoordt ze met 1 (dan 3-2-1 of 2-3-1). Op 2 antwoordt ze met 1 (dan 3-2-1-?, 2-3-2 of 2-3-1-?). Op 1 antwoordt ze met 3 (dan 2-3-1, 1-3-2 of 1-3-1-?). Bij het vragenken kan Mimi geen zet meer doen en wint ze.

JOURNAAL

■ door Alex van den Brandhof, Matthijs Coster en Marc Seijlhouwer

Tussenstand 1-tot-9-prijsvraag

In het novemберnummer schreven we de 1-tot-9-prijsvraag uit. Bij de opdracht '1-tot-9-klein' is het de bedoeling om met de getallen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 en 9 en de bewerkingen +, -, × en : de getallen 1 tot en met 200 te maken, onder de voorwaarde dat je de volgorde van de negen getallen voor elke som gelijk moet houden.

Bij het moeilijkere vervolg '1-tot-9-groot' moet je, op dezelfde wijze, de getallen 2000, 2001, 2002, ... maken (steeds weer dezelfde volgorde van de negen getallen, maar die mag wel anders zijn dan bij '1-tot-9-klein'). We beloofden extra prijzen te verdelen onder de leerlingen die vóór 1 januari tot 2015 wisten te komen. Nog in dezelfde maand dat *Pythagoras* uitkwam, ontvingen we al negen inzendingen. Sommige inzenders gingen zelfs al verder dan 2015, sommigen stuurden een programma mee (vaak in Python). Alle leerlingen die iets hebben ingezonden voor nieuwjaar worden beloond met een QAMA-rekenmachine. In volgorde van ontvangst zijn dat: Maxime Geenens (klas 3), KA-

IPB, Ronse (België); Justine Geenens (klas 1), KA-IPB, Ronse (België), Pim Spelier (klas 4), Christelijk Gymnasium Sorghvliet, Den Haag; Dave Houtenbos (klas 6), Bonhoeffer College, Castricum; Wouter Andriessen (klas 5), Onze-Lieve-Vrouw-van-Vlaanderen, Kortrijk (België); Nathan van 't Hof (klas 6), Hofstad Lyceum, Den Haag; Joris Nieuwveld (klas 5), Stedelijk Gymnasium Nijmegen; Stan Barmantloo (klas 4), Stedelijk Gymnasium Apeldoorn; Matthias van der Most (klas 2), Stedelijk Gymnasium Apeldoorn.

Een trucje dat we inmiddels al vaker zijn tegengekomen kunnen we wel alvast verklappen: $2016 = 4 \times 7 \times 8 \times 9$. Het is niet zo moeilijk om met de resterende getallen (1, 2, 3, 5 en 6) de getallen 0 tot en met 16 te maken, zelfs als de volgorde gefixeerd is. Gecombineerd met 2016 kun je dan eenvoudig de getallen 2000 (= $2016 - 16$) tot en met $2032 = (2016 + 16)$ maken. Kun jij verder komen? Stuur je oplossing in tot 15 april. (MC)

Wiskundigen bewijzen priemkloofvermoeden

Het getallenrijtje 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96 bestaat uit zeven opeenvolgende getallen die alle niet priem zijn. Het is de langste zogeheten *priemkloof* onder de 100. De langste priemkloof onder de 1000 bestaat uit 19 getallen, waarvan 888 het eerste is. Paul Erdős reserveerde 10.000 dollar voor een bewijs dat de lengte van de langste priemkloof onder de x (met x voldoende groot) minimaal gelijk is aan een constante maal $(\ln x) \times (\ln \ln x) \times (\ln \ln \ln x) / (\ln \ln \ln x)$. Hierbij is $\ln x$ de natuurlijke logaritme van x .

Onlangs hebben Kevin Ford, Ben Green, Sergei Konyagin, James Maynard en Terence Tao dit vermoeden bewezen. Hoewel je gerust van een doorbraak kunt spreken – een Erdősprobleem wordt niet elke dag opgelost – is de bewezen ondergrens niet scherp. De meeste wiskundigen geloven dat de lengte van de langste priemkloof onder de x in de orde van grootte van $(\ln x)^2$ ligt, een idee dat voor het eerst werd geopperd door de Zweedse wiskundige Harald Cramér in 1936. (AvdB)

Kansrekening met de Gauss-tool

Het is een soort geodriehoek, maar dan voor de statistiek: de Gauss-tool, bedacht door de ingenieur Sjuup Rekko. Het moet leerlingen helpen meer inzicht te krijgen in het oplossen van vraag-

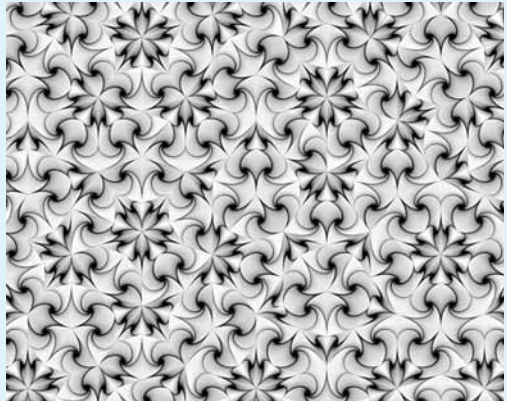
stukken die betrekking hebben op de zogeheten normale verdeling. Informatie over hoe de tool werkt en hoe je eraan kunt komen (kosten: 3 euro), kun je vinden op www.mathmind.nl.

Penrose-betegeling winnaar bij competitie over wiskundige kunst

Begin januari heeft in San Antonio, Texas, de Joint Mathematics Meetings plaatsgevonden. Deze bijeenkomst wordt elk jaar bezocht door wiskundigen van over de hele wereld. Er was onder andere een tentoonstelling op het raakvlak van kunst en wiskunde, waaraan ook een wedstrijd verbonden was.

Een van de winnaars was Kerry Mitchell, die *Penrose Pursuit 2* maakte (zie afbeelding). Hij heeft gebruik gemaakt van een Penrosebetegeling. Dat is een betegeling waarbij je met een klein aantal tegelvormen een heel vlak kan vullen op een niet-periodieke manier. Een dergelijke betegeling kan je dus niet verschuiven zodat hij weer helemaal op zichzelf past.

In de betegeling van Mitchell is gebruik gemaakt van de bekende vlieger- en pijlvorm. Deze zijn ingekleurd met lijnen die steeds dichters op elkaar lig-



gen. Dit verklaart het woord *pursuit* in de titel van het kunstwerk. Mitchell won in de categorie 'Best photograph, painting, or print'. (MS)

Ongecheckt bewijs maakt wiskundige boos

In november 2012 schreven we in het Journaal dat de Japanner Shinichi Mochizuki een bewijs had gevonden van het *abc*-vermoeden, een van de grote onopgeloste vraagstukken uit de getaltheorie. Mochizuki is ontevreden over de wiskundewereld. Hij vindt dat andere wiskundigen te weinig doen om zijn 500 pagina's tellende bewijs te controleren, waardoor het *abc*-vermoeden ruim twee jaar na zijn bekendmaking nog steeds open staat.

Het *abc*-vermoeden gaat over drie getallen, a , b en c die relatief priem zijn en waarvoor geldt dat $a + b = c$. Meestal is het getal r , dat het product is van alle priemfactoren waaruit a , b en c bestaan (het zogeheten *radicaal*), groter dan c . Maar soms is het kleiner dan c , bijvoorbeeld als $a = 1$, $b = 8$ en $c = 9$ (dan is $r = 2 \times 3 = 6$). Het vermoeden zegt nu dat in die gevallen r meestal niet véél kleiner is dan c . Het is een ingewikkeld vermoeden, al is het maar omdat 'niet veel kleiner' lastig in exacte wiskunde is uit te drukken. Wiskundigen breken al tientallen jaren hun hoofd erop.

Mochizuki wist naar eigen zeggen het bewijs te vinden door zich een heel nieuwe soort wiskunde eigen te maken. Dat is precies waarom het zo moeilijk te checken is: niemand weet precies hoe Mochizuki op zijn ideeën is gekomen, en iedereen die het zou willen controleren moet de wiskunde van de Japanner leren. Mochizuki heeft drie assistenten aan wie hij zijn wiskunde heeft uitgelegd, maar het bewijs is zo ingewikkeld dat die drie mensen waarschijnlijk nog wel een paar jaar bezig zijn.

Als meer wiskundigen zouden helpen, zou het natuurlijk sneller gaan, maar het eerst moeten aanleren van een heel nieuwe soort wiskunde gaat velen te ver. Mochizuki beseft dat, en schrijft op zijn website dat de meeste wiskundigen 'niet gekwalificeerd' zijn om zijn bewijs te kunnen begrijpen. Dit kwam hem weer op kritiek te staan uit de wiskundegemeenschap, die zegt dat hij zijn theorie op zijn minst helder moet kunnen uitleggen in een serie colleges. Zolang dat niet gebeurt, zal het geclaimde bewijs voorlopig ongecheckt blijven. (MS)

Ellipsen, parabolen en hyperbolen zijn mooie figuren die in de natuur voorkomen. Denk maar aan een steen die door de lucht vliegt, of een komeet die om de zon beweegt. In de techniek worden deze vormen veel toegepast bij antennes en concertzalen. Wist jij dat je ze gewoon kan vouwen uit een stuk papier?

■ door Jeanine Daems

KEGELSNEDEEN VOUWEN

MIDDELLOODLIJN Dit hele artikel is gebaseerd op een belangrijk begrip, namelijk *afstand*. We zoeken steeds punten die even ver van bepaalde andere objecten af liggen. Laten we simpel beginnen. Pak een vouwblaadje en teken twee stippen erop. Doe dat een beetje dik, zodat je de stippen ook aan de achterkant kunt zien. Nu maak je een rechte vouw door de ene stip precies op de andere stip te leggen en dan je blaadje plat te vouwen.

Vouw je blaadje weer open. Wat zie je nu? Niet iets heel bijzonders: gewoon een rechte vouw, met aan weerszijden de twee stippen. Als je de vouw als spiegelijlijn ziet, zijn de stippen precies elkaars spiegelbeeld. We noemen de stippen waarmee je begon even punt S en punt T , om er makkelijker over te kunnen praten.

Wat voor lijn is die vouw? Daarvoor kan het helpen om met een potlood de twee stippen te verbinden, je tekent dus lijnstuk ST . Als je ST meet, zul je zien dat de vouwlijn lijnstuk ST precies in twee gelijke stukken opdeelt. Bovendien zie je dat de hoek

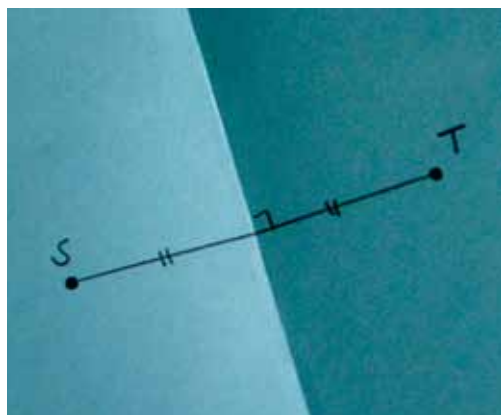
tussen lijnstuk ST en de vouwlijn recht is. Met andere woorden: de vouwlijn is de *middelloodlijn* van ST (zie figuur 1).

Kies nu vijf verschillende punten op die vouwlijn. Meet voor elk van die punten twee afstanden op: de afstand van het punt tot S en de afstand van het punt tot T . Wat valt je op?

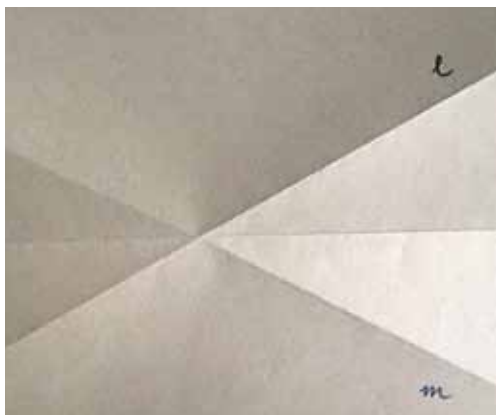
Als je netjes gevouwen en goed gemeten hebt, zul je ontdekken dat voor alle punten op de vouwlijn geldt dat de afstand tot S gelijk is aan de afstand tot T . We kunnen de middelloodlijn dan ook op twee manieren beschrijven:

- de middelloodlijn van een lijnstuk AB is de lijn die AB middendoor deelt en loodrecht op AB staat;
- de middelloodlijn van een lijnstuk AB bestaat precies uit alle punten die even ver van A als van B af liggen.

BISSECTRICES De middelloodlijn krijg je dus door te kijken welke punten gelijke afstand hebben tot twee gegeven punten. Laten we nu in plaats van



Figuur 1



Figuur 2

naar gegeven punten eens kijken naar twee lijnen.

Neem een nieuw vouwblaadje en vouw er twee willekeurige rechte lijnen in die elkaar snijden. Die twee vouwen noemen we lijn l en lijn m . Welke punten op het vouwblaadje liggen even ver van l als van m af?

Daar kunnen we eenvoudig achter komen: maak een vouw door lijn l en lijn m op elkaar te leggen en je blaadje plat te vouwen. Let op: dat kan op twee manieren, kies er om te beginnen één. Als het goed is, gaat de vouw door het snijpunt van l en m (zie figuur 2).

Pak weer je geodriehoek. Je vouw loopt nu door twee van de vier hoeken die l en m met elkaar vormen. Meet de hoek die l en m daar vormen, en meet ook de hoeken tussen l en de vouwlijn en tussen m en de vouwlijn. Je ziet dan dat de vouwlijn de hoek tussen l en m precies in twee gelijke hoeken verdeelt. Deze vouwlijn is dus de *bissectrice* (deellijn).

Maar liggen de punten van de bissectrice inderdaad even ver van beide lijnen af? Dat kun je ter controle even meten. Kies daarom weer een willekeurig punt op de vouwlijn en meet de afstand van zo'n punt tot lijn l en de afstand tot lijn m . Je moet wel een beetje opletten: de afstand van een punt tot een lijn is de *kortste weg*! Je moet dus meten in de richting die loodrecht op lijn l of m staat.

EEN BEETJE FLAUW... We weten nu dat de punten die gelijke afstand tot twee gegeven punten hebben de middelloodlijn vormen, en punten die gelijke afstand tot twee snijdende lijnen hebben de bissectrices. Hoe zit het in dit laatste geval als de gegeven lijnen elkaar niet snijden? De enige mogelijkheid is dan dat ze evenwijdig lopen, en het is eenvoudig te zien welke lijn je dan krijgt als je ze op elkaar vouwt: nog een evenwijdige lijn midden tussen de twee lijnen in. Die lijn heet de *middenparallel*.



Figuur 3

DE EERSTE KEGELSNEDE Pak nu een cirkelvormig vouwblaadje (te koop bij hobbywinkels, of knip zelf een cirkel uit een stuk papier). Teken nu ergens op het vouwblaadje een stip. Het is het leukst als je die niet te dicht bij het middelpunt van de cirkel kiest. Maak de stip niet al te dik, want dan kun je het nauwkeurigst vouwen. Kies nu een willekeurig punt op de rand van de cirkel, leg dat punt op de getekende stip en maak de vouw die je dan krijgt (zie figuur 3). Vouw de vouw weer open, zodat je weer een cirkel hebt. Kies vervolgens nog een een stuk of tien punten op de rand van de cirkel en vouw die één voor één op dezelfde manier op de getekende stip. Vouw wel telkens je blaadje weer open voor je een nieuwe vouw maakt.

(Je hoeft niet te tekenen welke punten op de rand je gebruikt hebt, het gaat om de vouwen.)

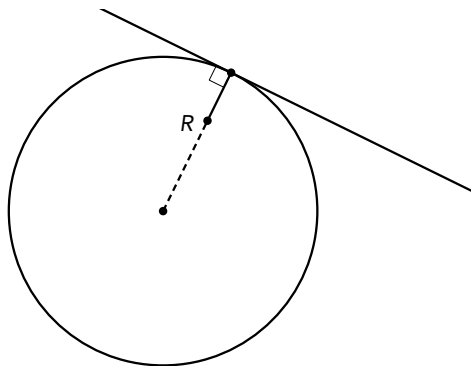
Wat voor figuur vormen al die vouwen als je dit voor een heleboel punten gedaan hebt? Je blaadje ziet er dan bijvoorbeeld uit als in figuur 4, afhankelijk van waar je de stip hebt getekend. Je ziet dat rond de getekende stip een gebiedje leeg blijft, begrensd door de gemaakte vouwen. En dat gebiedje heeft een soort ovaalvorm, die minder hoekig lijkt naarmate je meer vouwen hebt gemaakt. De vouwen benaderen samen een *ellips*. Een echte ellips heeft geen hoeken, maar een mooie, vloeiende rand.

Wat is een ellips dan precies, wiskundig gezien? Er zijn verschillende manieren om een ellips te definiëren, en in de loop van deze serie zul je ook verschillende definities tegenkomen. De definitie die het beste bij het vouwen past is deze:

Gegeven zijn een cirkel c en een punt P binnen die cirkel. Dan bestaat de ellips uit alle punten S waarvoor geldt: de afstand van S tot P is gelijk aan de afstand van S tot de cirkel.



Figuur 4

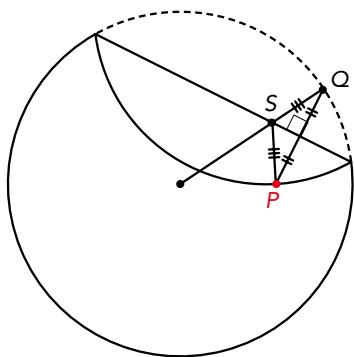


Figuur 5

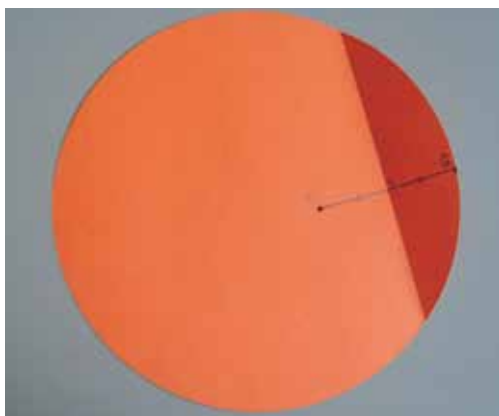
We gaan proberen zo'n punt te construeren. Maar dan moeten we eerst bedenken hoe we de afstand van een punt tot een cirkel kunnen bepalen. In het plaatje ligt punt R in de cirkel (maar voor ons argument maakt het eigenlijk niet uit of R binnen of buiten de cirkel ligt). We zoeken dus de kortste weg van R naar de cirkel. Je gevoel zegt waarschijnlijk: dat lijntje moet loodrecht op de cirkel staan. Maar wat betekent loodrecht bij een gebogen lijn? Als we een *raaklijn* aan de cirkel tekenen, moet ons lijntje loodrecht op die raaklijn staan. Dat lijntje is precies een straal van de cirkel (het lijnstuk tussen het raakpunt en het middelpunt van de cirkel; zie figuur 5).

Even terug naar onze vouwlijnen. We hadden al gezien dat de vouw die je krijgt als je twee punten op elkaar vouwt, de middelloodlijn is. De vouw is hier dus de middelloodlijn van lijnstuk PQ (zie figuur 6).

Welk punt van onze vouw ligt nu echt op de ellips? Voor dat punt geldt dat de afstand van S tot P gelijk is aan de afstand tot de cirkel. Daarom tekenen we de straal die door ons punt Q gaat, zoals in het plaatje te zien is. S is het snijpunt van de straal met de vouwlijn. En nu geldt dat $SQ = SP$, omdat S op de middelloodlijn ligt, maar ook is de lengte van lijnstukje SQ gelijk aan de afstand van S tot de cirkel,



Figuur 7



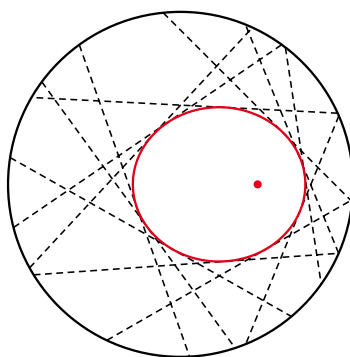
Figuur 6

omdat SQ op een straal ligt. Dus SP is gelijk aan de afstand van S tot de cirkel, met andere woorden: S ligt op de ellips (zie figuur 7).

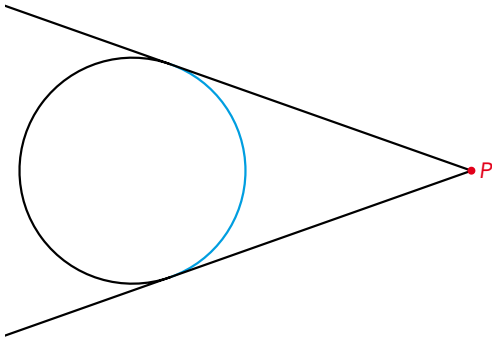
In figuur 8 is de hele ellips getekend tussen de vouwlijnen. De vouwlijnen (middelloodlijnen) raken aan de ellips. Het punt P is een *brandpunt* van de ellips en de cirkel c is de zogeheten *richtcirkel*. Het middelpunt van c is het andere brandpunt van de ellips. Wanneer we namelijk om punt P een cirkel met dezelfde straal tekenen als cirkel c en als brandpunt punt M nemen, krijgen we namelijk precies dezelfde ellips.

Aan het begin schreven we dat het het leukst was als je punt P niet te dicht bij het midden van de cirkel koos. Wat voor bijzondere ellips krijg je als je punt P wél in het midden van de cirkel kiest?

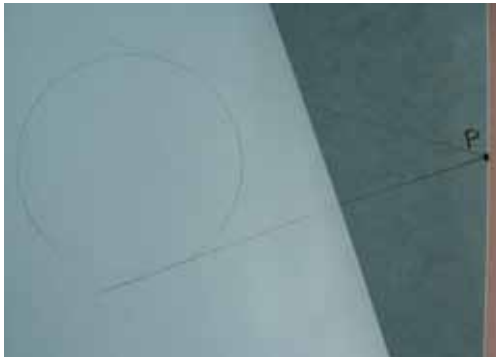
DE TWEEDE KEGELSNEDE Hetzelfde principe kunnen we natuurlijk toepassen op andere figuren. Wat zou er bijvoorbeeld gebeuren als onze getekende stip niet *binnen* maar *buiten* de cirkel ligt? Neem nu een gewoon vouwblaadje en teken daar met je passer een cirkel (c) op. Teken ook een stip P buiten de cirkel; het handigste is om P op de rand van het vouwblaadje te kiezen.



Figuur 8



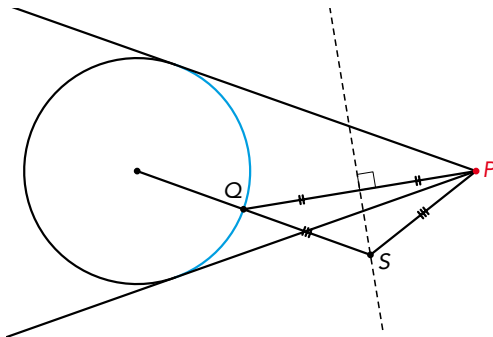
Figuur 9



Figuur 10



Figuur 11



Figuur 12

Je moet nu alleen een beetje opletten: we zoeken weer de punten S waarvoor geldt dat de afstand van S tot P gelijk is aan de afstand van S tot de cirkel.

Dat betekent dat je wel steeds het *dichtstbijzijnde* punt van de cirkel moet kiezen. Als je een lijn trekt vanuit punt P , heeft die lijn soms twee snijpunten met de cirkel. Dan moet je dus het snijpunt met de cirkel kiezen dat het dichtst bij P ligt. Als je vanuit P de twee raaklijnen aan de cirkel tekent, zijn de enige voor ons interessante punten van de cirkel die punten die precies binnen de raaklijnen vallen (de gekleurde punten in figuur 9).

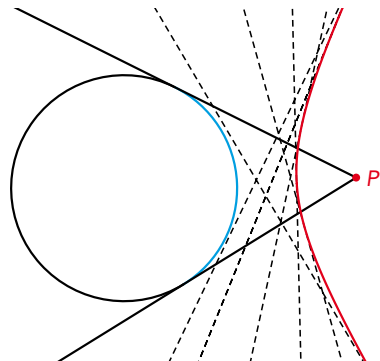
Als je nu punten kiest in het blauwe deel van de cirkel en P op die punten vouwt, krijg je vouwlijnen die samen een soort boog vormen. De vouwlijnen benaderen nu samen een *hyperbool* (zie figuur 10 en 11).

Wat is dan eigenlijk een hyperbool? We kunnen de hyperbool op een soortgelijke wijze definiëren als de ellips, het enige verschil is dat het punt nu buiten de cirkel ligt:

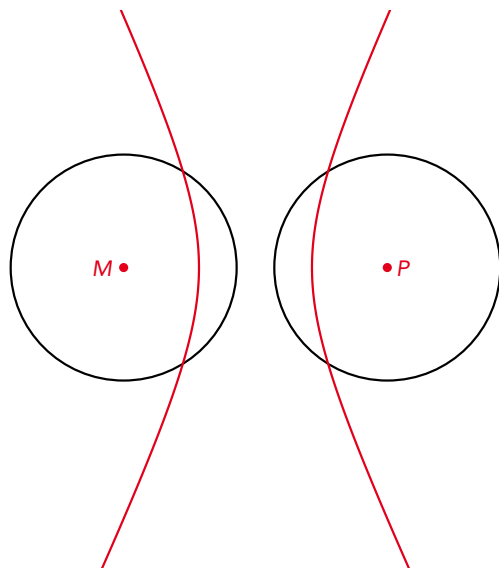
Gegeven zijn een cirkel c en een punt P buiten die cirkel. Dan bestaat de hyperbool uit alle punten S waarvoor geldt: de afstand van S tot P is gelijk aan de afstand van S tot de cirkel.

Het punt P heet het *brandpunt* van de hyperbool en de cirkel c heet de *richtcirkel*. En welk punt van zo'n vouwlijn ligt nou precies op de hyperbool? Ook dat gaat op dezelfde manier: bekijk het punt Q van de cirkel waar je P op gevouwen had. Het gezochte punt S moet op de middelloodlijn van PQ liggen, en even ver van punt P als van de cirkel. Dus SQ moet ook de afstand van S tot de cirkel zijn. Dat betekent, net als bij de ellips, dat S op de lijn ligt die vanuit het middelpunt van de cirkel door Q loopt (zie figuur 12). Als we de hele hyperbool tekenen, ziet die er uit als in figuur 13.

We hebben het woord hyperbool eigenlijk een



Figuur 13



Figuur 14

beetje slordig gebruikt. Wat we nu getekend hebben heet een *hyperbooltak*, want bij deze hyperbooltak hoort nog een stuk. Als je het middelpunt van c als brandpunt neemt en punt P als middelpunt van de richtcirkel (met dezelfde straal als cirkel c), dan krijg je nog een hyperbooltak, die het spiegelbeeld is van de eerste tak. Samen vormen ze de hele hyperbool (zie figuur 14).

10 DE DERDE KEGELSNEDE We hoeven natuurlijk niet per se naar een punt en een cirkel te kijken. We gaan nu hetzelfde idee toepassen op een rechte lijn l en een punt P daarbuiten. Teken op een vel papier een punt P , redelijk dicht bij een van de zijden. Die zijde gaat onze lijn l zijn. Kies nu een willekeu-

rig punt Q op lijn l en vouw dat punt op punt P ; dat betekent dus weer dat we de middelloodlijn van PQ vouwen (zie figuur 15). Doe dat voor een stuk of tien verschillende punten Q op de lijn l . Welke figuur lijken de vouwlijnen te vormen?

Wat je krijgt ziet er ongeveer uit als de kromme in figuur 16. Die lijkt op een boog die je al wel kent: de *parabool*. Op deze manier komen we bij een mogelijke definitie voor de parabool:

Gegeven zijn een lijn l en een punt P buiten die lijn. Dan bestaat de parabool uit alle punten S waarvoor geldt: de afstand van S tot P is gelijk aan de afstand van S tot de lijn l .

Weer zijn de vouwlijnen de raaklijnen aan de parabool. Hoe kunnen we nu de echte punten van de parabool zelf vinden? We doen eigenlijk precies hetzelfde als bij de ellips en de hyperbool. Je kiest een willekeurig punt Q op de lijn l . De kortste afstand van een willekeurig punt naar lijn l is nu het lijnstuk dat je krijgt als je vanuit dat punt een loodlijn op l trekt. We zoeken nu dus in feite het snijpunt S van de loodlijn vanuit Q met de middelloodlijn op PQ . Dan geldt namelijk dat $PS = QS$, omdat S op de middelloodlijn ligt, en ook is QS gelijk aan de afstand van S tot l , omdat QS loodrecht op l staat. Dus S ligt op de parabool (zie figuur 17).

Als we nu alle punten van de parabool tekenen, krijg je figuur 18. Het punt P waarmee je was begonnen heet weer het *brandpunt* en lijn l heet de *richtlijn* van de parabool.

Waarschijnlijk ken je de parabool al als grafiek van een kwadratische functie. Later in deze serie zul je zien dat een parabool die je krijgt volgens onze afstandsdefinitie inderdaad altijd precies beschreven wordt door een kwadratische uitdrukking. ■



Figuur 15

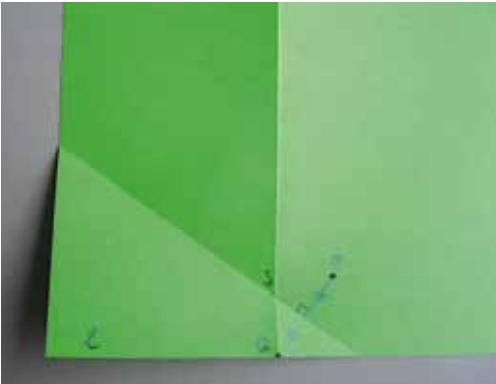


Figuur 16

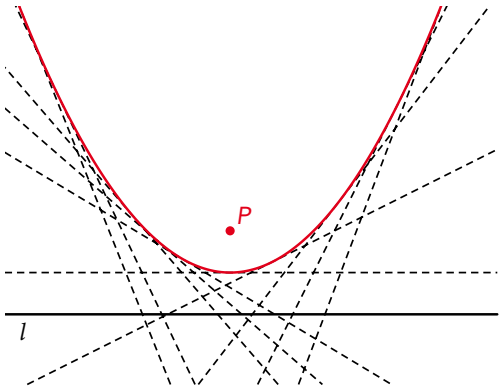
De punten op gelijke afstand van de twee objecten vormen...

	punt	lijn	cirkel
punt	middelloodlijn	parabool	ellips (punt binnen de cirkel) of hyperbool (punt buiten de cirkel)
lijn	parabool	bissectrices (bij snij-dende lijnen) of midden-parallel (bij evenwijdige lijnen)	parabool
cirkel	ellips (punt binnen de cirkel) of hyperbool (punt buiten de cirkel)	parabool	ellips (als de ene cirkel binnen de an-dere ligt), hyperbool (als de ene cirkel (deels) buiten de andere ligt) of mid-delloodlijn (als ze even groot zijn)

Wat we in dit artikel hebben besproken, staat samengevat in dit schema. Ook vakjes die we niet onderzocht hebben (lijn – cirkel, cirkel – cirkel) zijn ingevuld. Voor die vakjes helpt het om te bedenken dat je een cirkel soms als een ‘groot punt’ kunt beschouwen.



Figuur 17

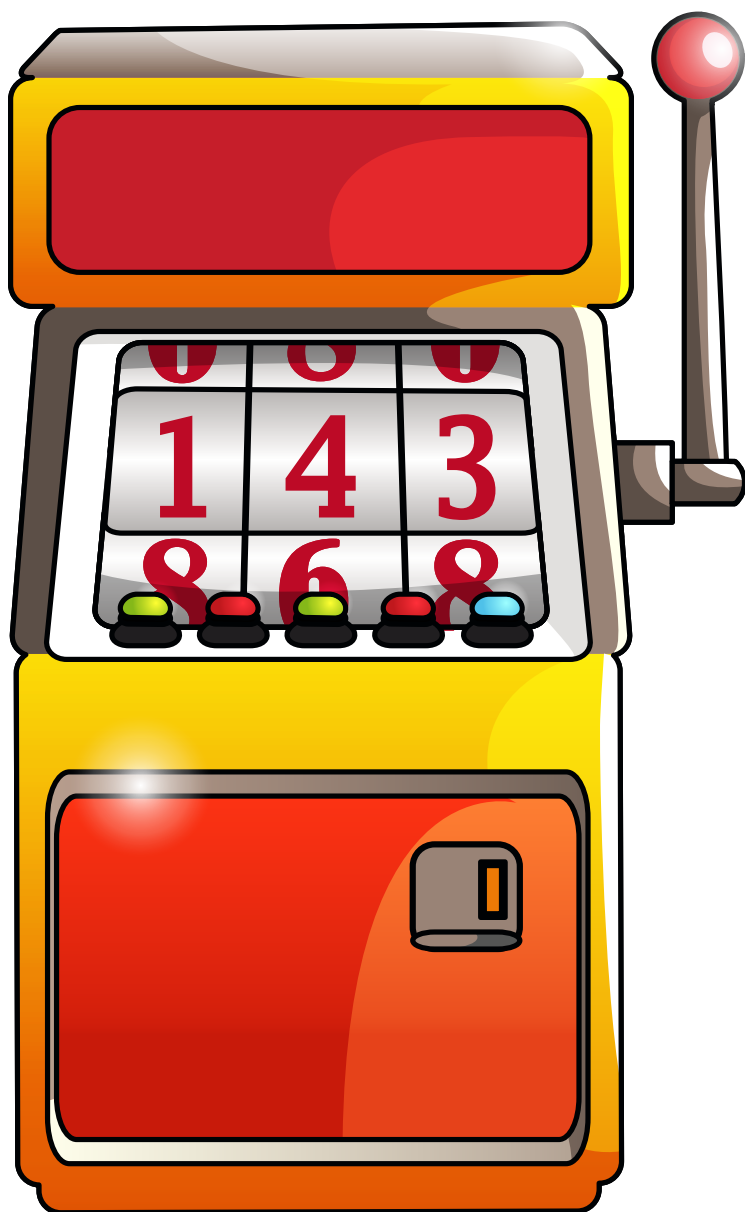


Figuur 18

Op 13 maart 2015 vindt de tweede ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade plaats. Op verschillende plaatsen in het land buigen zich die dag zo'n duizend leerlingen over de opgaven van deze wedstrijd. In dit artikel bespreken we opgave C2 van vorig jaar, over zogeheten 'jackpotgetallen'.

■ door Merlijn Staps

JACKPOTGETALLEN



Van jackpotgetallen heb je waarschijnlijk nog nooit eerder gehoord, tenzij je vorig jaar de tweede ronde van de Wiskunde Olympiade hebt gehaald. Daarin onderscheidt de olympiade zich van de wiskunde die je op school doet: de dingen die je dan op een toets tegenkomt, zie je (als het goed is althans) niet voor het eerst. Bij de olympiade is dat anders. Bekijk de volgende opgave maar eens:

Opgave C2 (Nederlandse Wiskunde Olympiade, tweede ronde 2014)

We noemen een positief geheel getal n een *jackpotgetal* als het de volgende eigenschap heeft: er bestaat een positief geheel getal k met minstens twee cijfers waarvan alle cijfers hetzelfde zijn (zoals 11111 of 888) en waarvoor $n \cdot k$ weer een getal is waarvan alle cijfers hetzelfde zijn. Zo is 3 een jackpotgetal, want $3 \cdot 222 = 666$.

- Bepaal een jackpotgetal van 10 cijfers en laat zien dat het inderdaad een jackpotgetal is.
- Laat zien dat 11 geen jackpotgetal is.
- Bepaal of 143 een jackpotgetal is en onderbouw je antwoord met een bewijs.

Je ziet: we moeten drie vragen over jackpotgetallen beantwoorden. Behalve de definitie weten we alleen dat 3 een jackpotgetal is, omdat $3 \cdot 222 = 666$ en 666 net als 222 een getal met allemaal gelijke cijfers is. Net zo zijn 1, 2 en 4 ook jackpotgetallen, want als we die getallen met 222 vermenigvuldigen krijgen we achtereenvolgens 222, 444 en 888, ook allemaal getallen met gelijke cijfers. En ook de getallen 5 tot en met 9 zijn jackpotgetallen, want die kunnen we met 111 vermenigvuldigen.

We zien dus dat in elk geval alle getallen van één cijfer jackpotgetallen zijn. Kunnen we er nog meer vinden? Het getal 10 blijkt geen jackpotgetal te zijn: een getal met 10 vermenigvuldigen komt overeen met een 0 aan het einde plaatsen; bij een positief getal levert dat dus nooit een getal met allemaal gelijke cijfers op. Bij (b) moeten we bewijzen dat 11 ook geen jackpotgetal is, maar laten we eerst proberen om nog wat meer jackpotgetallen te vinden.

We hebben hierboven de kleinste waarden voor n onderzocht (namelijk alle $n \leq 10$); datzelfde kun-

nen we met k proberen. De kleinste mogelijke waarde voor k is 11. Met welke n kunnen we 11 vermenigvuldigen zodat we weer een getal met enkel dezelfde cijfers krijgen? Uiteraard werken hier weer $1 \leq n \leq 9$, maar zijn er nog meer? Na enig proberen vind je misschien dat we $n = 101$ kunnen kiezen: immers, $101 \cdot 11 = 1111$. Ook 101 is dus een jackpotgetal en om vergelijkbare redenen geldt dat ook voor 202, 303, ..., 909.

Nu hebben we al met al 18 jackpotgetallen gevonden en hebben we een beetje gevoel voor de definitie ervan. Tijd om ons over de gestelde vragen te buigen. De eerste taak is om een groot jackpotgetal te vinden, namelijk één met 10 cijfers. Ons huidige record is 3 cijfers, maar dat kunnen we gemakkelijk verbeteren: net zoals 101 een jackpotgetal is, is 1001 er ook één: we hebben bijvoorbeeld $1001 \cdot 444 = 444\,444$. Op deze manier kunnen we ook een jackpotgetal met 10 cijfers vinden:

$$\begin{array}{r} 1000000001 \\ 8 \text{ nullen} \end{array}$$

is een jackpotgetal, want

$$1000000001 \cdot \underbrace{44444444}_{9 \text{ vieren}} = \underbrace{444 \dots 44}_{18 \text{ vieren}}.$$

Hiermee is deel (a) opgelost. Overigens is ons voorbeeld niet de enige mogelijkheid: 3003003003 werkt bijvoorbeeld ook, want $3003003003 \cdot 222$ is een getal dat bestaat uit 12 zessen. Met behulp van een computer zijn nog exotischere voorbeelden te vinden: 1285714287 is ook een jackpotgetal van 10 cijfers. Je mag zelf proberen de bijbehorende k te vinden.

11 IS GEEN JACKPOTGETAL Bij deel (b) moeten we bewijzen dat 11 juist geen jackpotgetal is. Dit is moeilijker dan bewijzen dat een getal n wél een jackpotgetal is, want daarvoor hoeven we enkel de bijbehorende k te geven. Nu moeten we laten zien dat welk getal k met allemaal dezelfde cijfers we ook kiezen, $11k$ nooit allemaal dezelfde cijfers heeft. We kunnen een aantal voorbeelden proberen: $11 \cdot 222 = 2442$, $11 \cdot 77 = 847$, $11 \cdot 555 = 6105$... Inderdaad telkens geen getal met alleen dezelfde

cijfers. Omdat we dit voor iedere mogelijke k moeten bewijzen, noemen we het enige cijfer dat in k voorkomt a en schrijven we $k = aa...a$, waarbij het aantal cijfers a onbekend is (maar wel minstens 2). Kunnen we nu iets zeggen over de cijfers van $11 \cdot (aa...a)$? De truc is om dit te schrijven als $10(aa...a) + (aa...a)$. Dan krijgen we de volgende optelling:

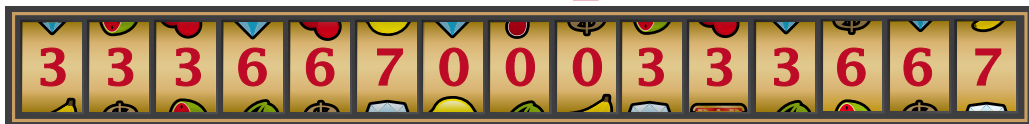
$$\begin{array}{r} aaa \dots aa0 \\ + aa \dots aaa \\ \hline ????????? \end{array}$$

We zien dat het laatste cijfer van $11(aa...a)$ een a moet zijn. Als $11(aa...a)$ allemaal dezelfde cijfers zou hebben, moeten dat dus allemaal a 's zijn. In het bijzonder moet het op-een-na-laatste cijfer (horende bij de tientallen) gelijk zijn aan a . Omdat de bijbehorende cijfers van $(aa...a)$ en $10(aa...a)$ allebei a 's zijn (het aantal cijfers was immers minstens 2), is het cijfer van de tientallen ofwel gelijk aan $2a$, dan wel gelijk aan $2a - 10$. Omdat $a > 0$, kan $2a$ niet gelijk zijn aan a , en omdat $a < 10$, kan $2a - 10$ ook niet gelijk zijn aan a . Het op-een-na-laatste cijfer van $11(aa...a)$ kan dus geen a zijn, en $11(aa...a)$ is dus nooit een getal met allemaal dezelfde cijfers (want de laatste twee cijfers kunnen al niet hetzelfde zijn). Om deze reden is 11 geen jackpotgetal.

IS 143 EEN JACKPOTGETAL? Alleen deel (c) resteert nog: is 143 een jackpotgetal? Het antwoord blijkt ja te zijn: er geldt $143 \cdot 777 = 111111$. Maar hoe hadden we dat nu kunnen bedenken? Simpelweg waarden voor k proberen lijkt niet het slimste om te doen – hoewel we ook op die manier, wanneer we bij $k = 11$ beginnen, na 16 pogingen de juiste k hebben gevonden.

Laten we eens kijken uit wat voor cijfers het getal k bestaat. Als we 143 zouden vermenigvuldigen met een getal k dat uit enkel enen bestaat, krijgen we een getal dat eindigt op de cijfers 73. Dit is zo omdat $43 \cdot 11 = 473$; als k uit meer dan twee enen bestaat heeft dit geen invloed op de laatste twee cijfers. Dit levert dus nooit een geschikte waarde voor k . Op deze manier kunnen we ook het cijfer 2 uitsluiten, want $43 \cdot 22 = 946$ eindigt op twee verschillende cijfers. We hadden dit ook zo kunnen bedenken: omdat $43 \cdot 11$ eindigt op de cijfers 73, eindigt $43 \cdot 22$ op de laatste twee cijfers van $73 \cdot 2 = 146$, oftewel op een 4 en een 6. Omdat $3 \cdot 73 = 219$, $4 \cdot 73 = 292$, $5 \cdot 73 = 365$, $6 \cdot 73 = 438$, $7 \cdot 73 = 511$, $8 \cdot 73 = 584$ en $9 \cdot 73 = 657$, is 7 het enige mogelijke cijfer voor k . We proberen nu $143 \cdot 77 = 11011$ en $143 \cdot 777 = 111111$ om bovenstaande oplossing te vinden. Overigens blijkt dit ook de enige oplossing te zijn: als we 143 met een getal van minstens vier zevens vermenigvuldigen, eindigt het resultaat op de cijfers 2111, en krijgen we dus nooit een getal met allemaal dezelfde cijfers. ■

Jackpot



$$k = 666$$

$$n \cdot k = 222.222.222.222.222.222$$

PELLPUZZEL

■ door Matthijs Coster

De rij van Pell lijkt een beetje op de bekende rij van Fibonacci. De eerste twee Pellgetallen zijn 1 en 2. Elk volgende getal is het dubbele van het voorafgaande getal plus het daaraan voorafgaande getal. Het derde getal is dus $2 \times 2 + 1 = 5$ en het vierde $2 \times 5 + 2 = 12$. Zo krijg je de rij

1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, ...

In plaats van 1 en 2 kun je als startgetallen ook 1 en 3 nemen. Dan krijg je de rij

1, 3, 7, 17, 41, 99, 239, ...

In het onderstaande diagram moeten zestien Pellgetallen worden ingevuld, namelijk 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 5, 7, 12, 12, 17, 29 (één getal per vakje). Er ontstaan dan twaalf getallen bestaande uit de cijfers van ten minste twee naast elkaar gelegen vakjes tussen dikke strepen, van links naar rechts, of van bo-

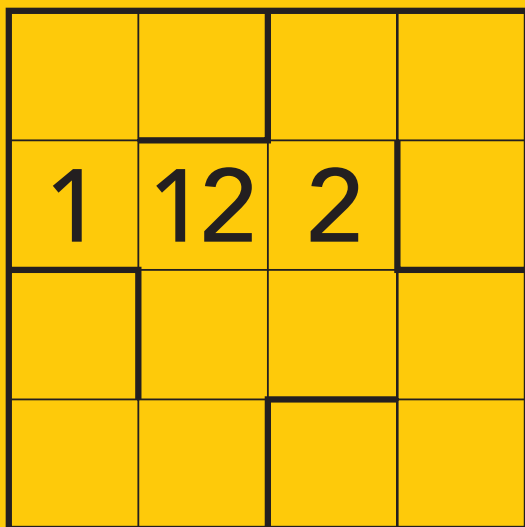
ven naar beneden. Verder zijn er horizontaal en verticaal nog vier getallen van één vakje.

De twaalf getallen zijn allemaal verschillend en hebben allemaal een bijzonderheid, zie de omschrijvingen rechts van het diagram. Kun jij met deze aanwijzingen het diagram invullen? Drie Pellgetallen hebben wij alvast ingevuld; die vormen samen een rechthoeksgetal.

De oplossing geven we in het volgende nummer van *Pythagoras*.

HINTS

1. Rechthoeksgetal: product van twee opeenvolgende getallen.
2. Driehoeksgetal: product van twee opeenvolgende getallen gedeeld door 2.
3. Fibonaccigetal: een getal uit de beroemde rij 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...
4. Taxicabgetal: google maar op "Hardy en Ramanujan". ■



kwadraat
kwadraat
derdemacht
vijfdemacht
rechthoeksgetal ✓
rechthoeksgetal
rechthoeksgetal
driehoeksgetal
driehoeksgetal
driehoeksgetal
Fibonaccigetal
taxicabgetal

$$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$$

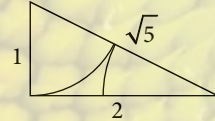
$$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$$

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,618$$

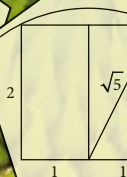
Een gulden rechthoek is een rechthoek met
lengte : breedte = φ : 1

De
gulden snede
deelt een lijnstuk
zodanig in twee ongelijke
delen, dat de verhouding van
het grote deel tot het kleine
deel gelijk is aan die van
het geheel tot het grote
deel.

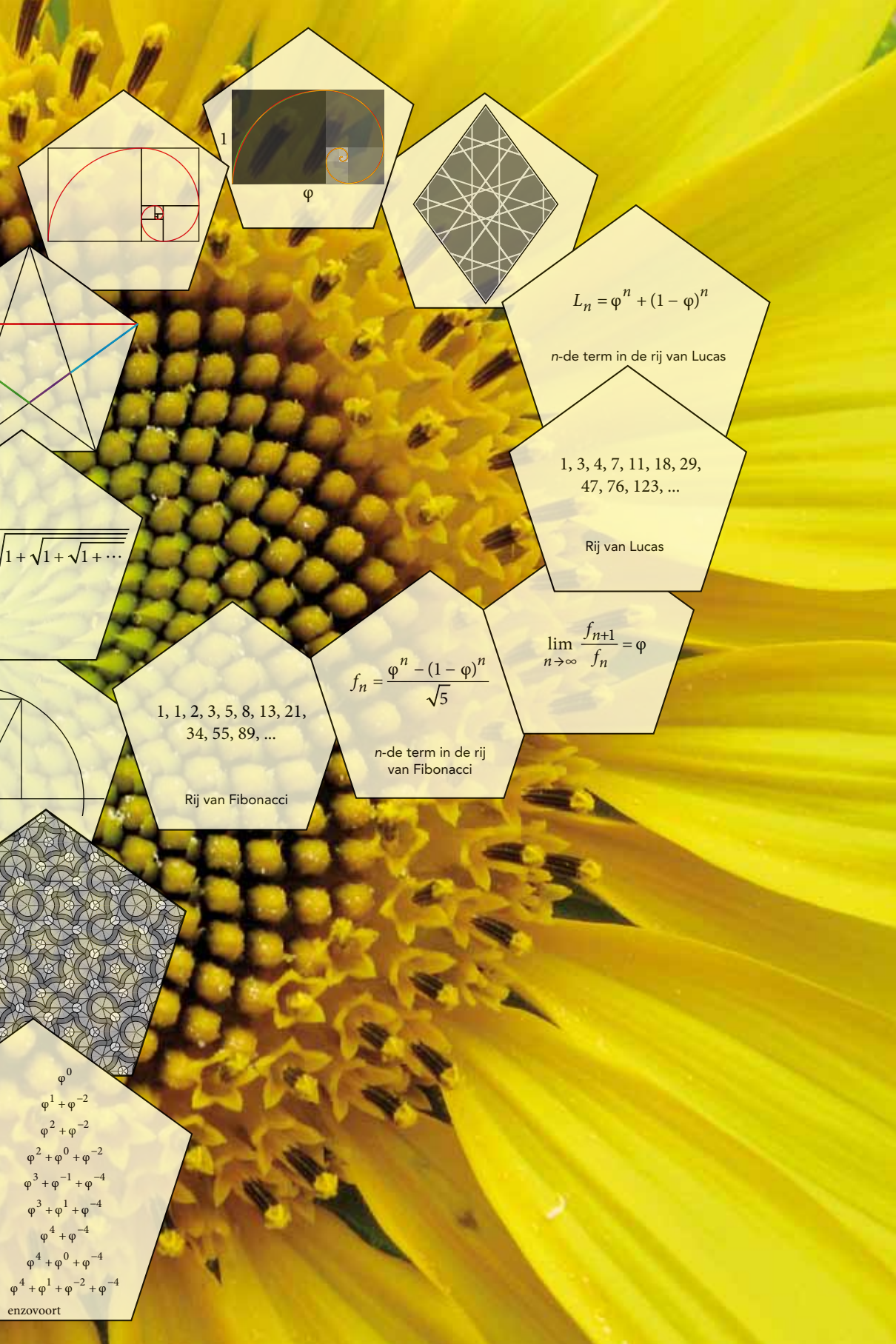
$$\varphi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$



$$\varphi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}$$



- 1 =
- 2 =
- 3 =
- 4 =
- 5 =
- 6 =
- 7 =
- 8 =
- 9 =



1

φ



$$L_n = \varphi^n + (1 - \varphi)^n$$

n -de term in de rij van Lucas

1, 3, 4, 7, 11, 18, 29,
47, 76, 123, ...

Rij van Lucas

$$1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}$$



1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,
34, 55, 89, ...

Rij van Fibonacci

$$f_n = \frac{\varphi^n - (1 - \varphi)^n}{\sqrt{5}}$$

n -de term in de rij
van Fibonacci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \varphi$$



φ^0

$\varphi^1 + \varphi^{-2}$

$\varphi^2 + \varphi^{-2}$

$\varphi^2 + \varphi^0 + \varphi^{-2}$

$\varphi^3 + \varphi^{-1} + \varphi^{-4}$

$\varphi^3 + \varphi^1 + \varphi^{-4}$

$\varphi^4 + \varphi^{-4}$

$\varphi^4 + \varphi^0 + \varphi^{-4}$

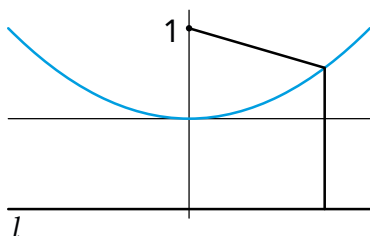
$\varphi^4 + \varphi^1 + \varphi^{-2} + \varphi^{-4}$

enzovoort

Ellipsen, parabolen en hyperbolen zijn allemaal speciale vormen van kegelsneden. We kunnen deze allemaal beschrijven door middel van kwadratische formules, bijvoorbeeld $x^2 + 2y^2 - 2xy - 3x - 4 = 0$. Kan je aan zo'n formule zien wat voor kegelsnede het is?

■ door Klaas Pieter Hart

KEGELSNEDE BESCHRIJVEN



Figuur 1

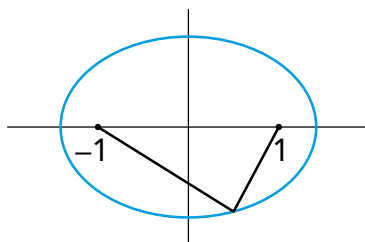
PARABOOL Een *parabool* bestaat uit de punten die gelijke afstand hebben tot een vast punt (het *brandpunt*) en een vaste lijn (de *richtlijn*). Neem bijvoorbeeld het punt $P(0, 1)$ en de lijn l met vergelijking $y = -1$. De afstand van een punt (x, y) tot P is gelijk aan

$$\sqrt{x^2 + (y-1)^2}$$

en de afstand tot l is $|y + 1|$. Als we die aan elkaar gelijk stellen krijgen we, na kwadrateren en wegstrepen, de vergelijking $y = \frac{1}{4}x^2$. De bijbehorende grafiek zie je in figuur 1.

ELLIPS Een *ellips* bestaat uit de punten waarvoor de som van de afstanden tot twee vaste punten (de *brandpunten*) constant is. Neem bijvoorbeeld $F_1(-1, 0)$ en $F_2(1, 0)$. We bepalen de punten (x, y) met de eigenschap dat de som van de afstanden tot F_1 en F_2 gelijk is aan $2\sqrt{2}$, dus

$$\sqrt{(x+1)^2 + y^2} + \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = 2\sqrt{2}.$$



Figuur 2

Breng een wortel naar rechts, kwadrateer en streep zo veel mogelijk weg. Na vereenvoudigen komt er:

$$4x - 8 = -4\sqrt{2}\sqrt{(x-1)^2 + y^2}$$

Deel 4 weg en kwadrateer nog een keer:

$$x^2 - 4x + 4 = 2x^2 - 4x + 2 + 2y^2.$$

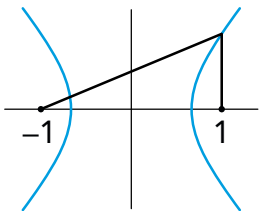
Dit geeft ons de volgende vergelijking voor de ellips:

$$x^2 + 2y^2 = 2.$$

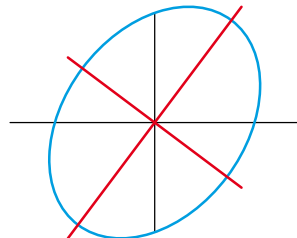
De grafiek van de ellips zie je in figuur 2.

HYPERBOOL Een *hyperbool* is op bijna dezelfde manier bepaald, alleen willen we dat het *verschil* tussen de afstanden constant is. Met de brandpunten als in het vorige voorbeeld en constant verschil $\frac{4}{3}$ krijgen we twee mogelijkheden:

$$\sqrt{(x+1)^2 + y^2} - \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = \frac{4}{3} \quad (1)$$



Figuur 3



Figuur 4

en

$$\sqrt{(x-1)^2 + y^2} - \sqrt{(x+1)^2 + y^2} = \frac{4}{3}. \quad (2)$$

Beide leiden op dezelfde manier als hierboven tot de vergelijking

$$45x^2 - 36y^2 = 20.$$

De grafiek van de hyperbool zie je in figuur 3. De rechterkromme hoort bij (1) en de linkerkromme bij (2).

KEGELSNEDEEN RECHT ZETTEN Onze voorbeelden hebben eenvoudige vergelijkingen en je kunt aan de gedaante van de vergelijking zien waar je mee te maken hebt. De parabool heeft één term van de eerste graad en één van de tweede graad; de ellips heeft twee termen van de tweede graad die allebei een positieve coëfficiënt hebben en bij de hyperbool hebben de tweedegraadstermen coëfficiënten met tegengesteld teken.

Maar wat doen we als we een vergelijking als deze voorgeschiedt krijgen:

$$41x^2 - 24xy + 34y^2 = 50?$$

Dit is een tweedegraadsvergelijking en de bijbehorende kromme is een kegelsnede, maar de vraag is natuurlijk van welk type. Het idee is op zoek te gaan naar de symmetrieassen van de figuur. In onze eerdere ellips en hyperbool zijn dat gewoon de x - en y -as. In figuur 4 zijn dat de rode lijnen. Die lijnen vormen een alternatief assenkruis en ze wor-

den bepaald door twee richtingsvectoren: (a, b) en $(-b, a)$. We gaan ervan uit dat die vectoren lengte 1 hebben, dus $a^2 + b^2 = 1$.

In figuur 5 zien we een punt (x, y) met twee paar coördinaten: de gewone, ten opzichte van x - en y -as, en de andere, ten opzichte van de rode assen. Het punt $(u, 0)$ staat voor $u(a, b) + 0(-b, a)$ en $(0, v) = 0(a, b) + v(-b, a)$; de rode coördinaten van ons punt zijn dus (u, v) en dat betekent dat $(x, y) = u(a, b) + v(-b, a) = (au - bv, bu + av)$.

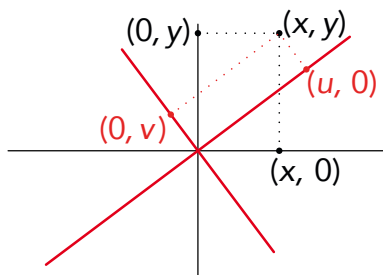
Als we nu $x = au - bv$ en $y = bu + av$ in de vergelijking invullen en alles netjes uitwerken, krijgen we

$$Au^2 + Buv + Cv^2 = 50$$

waarbij $A = 41a^2 + 24ab + 34b^2$, $B = 24a^2 - 14ab - 24b^2$ en $C = 41b^2 - 24ab + 34a^2$ (reken maar na).

Als we willen dat de rode assen de symmetrieassen van onze figuur zijn, dan moeten we ervoor zorgen dat $B = 0$, ofwel

$$12a^2 + 7ab - 12b^2 = 0.$$



Figuur 5

Wat belangrijk is, is de verhouding a/b ; als we die t noemen dan krijgen we een normale vergelijking:

$$12t^2 + 7t - 12 = 0.$$

De oplossingen zijn $t_1 = \frac{3}{4}$ en $t_2 = -\frac{3}{4}$. Met de voorwaarde $a^2 + b^2 = 1$ levert t_1 ons $a = \frac{3}{5}$ en $b = \frac{4}{5}$ (we mogen zelf het teken kiezen) en dan volgt dat $A = \frac{625}{25} = 25$ en $C = \frac{1250}{25} = 50$. In termen van de nieuwe coördinaten krijgen we dus de vergelijking $25u^2 + 50v^2 = 50$, ofwel

$$u^2 + 2v^2 = 2$$

en dat is precies de scheve ellips in figuur 4. Als we t_2 hadden gebruikt, zouden we op $2u^2 + v^2 = 2$ zijn uitgekomen en op hetzelfde plaatje; alleen de u - en v -as waren dan verwisseld.

Probeer zelf de symmetrieassen te vinden van de figuur die bij de vergelijking

$$23x^2 - 72xy + 2y^2 = 50$$

20 hoort en maak ook een schets.

HERKENNEN Om snel te herkennen met wat voor kromme je te maken hebt, hoef je niet al het werk dat we hierboven hebben gedaan te doen. Kijk nog eens naar het voorbeeld

$$41x^2 - 24xy + 34y^2 = 50.$$

Als je 41 buiten de haakjes haalt en een kwadraat afsplitst, krijg je

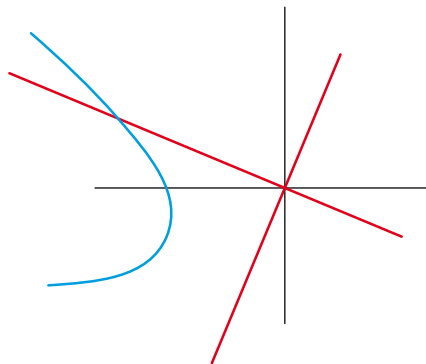
$$41\left(x - \frac{12}{41}y\right)^2 + \frac{1250}{41}y^2 = 50.$$

Hieraan kun je al zien dat we met een ellips te maken hebben, omdat de coëfficiënten van $(x - \frac{12}{41}y)^2$ en y^2 positief zijn.

Kun je zelf uitzoeken hoe de figuren van de vergelijkingen

$$\begin{aligned}x^2 - 4xy + 2y^2 &= 10 \quad \text{en} \\x^2 - 6xy + 9y^2 &= 16\end{aligned}$$

eruit zien?



Figuur 6

ALGEMENE VORM We hebben tot nu toe alleen vergelijkingen bekeken waarin alle termen van graad 2 zijn. In een vergelijking van een parabool verwachten we ook eerstegraadstermen. Een eerstegraadsterm kan ook betekenen dat het middelpunt van de kegelsnede niet de oorsprong is. Met de methode van 'recht zetten' kunnen we ook inzien of we met een parabool te maken hebben.

Bekijk eerst eens

$$41x^2 - 24xy + 34y^2 - 110x + 20y + 25 = 0.$$

We zagen dat als we $x = \frac{3}{5}u - \frac{4}{5}v$ en $y = \frac{4}{5}u + \frac{3}{5}v$ invullen, het gedeelte $41x^2 - 24xy + 34y^2$ verandert in $25u^2 + 50v^2$. Het eerstegraadsgedeelte verandert in $-50u + 100v$ en de hele vergelijking wordt dan

$$25u^2 + 50v^2 - 50u + 100v + 25 = 0,$$

ofwel

$$u^2 + 2v^2 - 2u + 4v + 1 = 0.$$

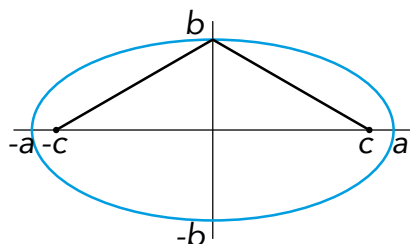
Hierin kunnen we kwadraten afsplitsen, waarna we de volgende vergelijking krijgen:

$$(u - 1)^2 + 2(v + 1)^2 = 2$$

Het middelpunt is dus $(1, -1)$ in uv -coördinaten en in gewone coördinaten wordt dat $(\frac{7}{5}, \frac{1}{5})$.

Een ander voorbeeld:

$$25x^2 + 120xy + 144y^2 + 26x - 377y + 338 = 0.$$



Figuur 7

Als we, als tevoren, weer $x = au - bv$ en $y = bu + av$ invullen, krijgen we als gemengde term

$$2(60a^2 + 119ab - 60b^2)uv$$

en met wat proberen kun je dat ontbinden als

$$2(12a - 5b)(5a + 12b)uv.$$

We kiezen $a = \frac{5}{13}$ en $b = \frac{12}{13}$. Na invullen van $x = \frac{5}{13}u - \frac{12}{13}v$ en $y = \frac{12}{13}u + \frac{5}{13}v$ gaat de oorspronkelijke vergelijking over in

$$169u^2 - 338u - 169v + 338 = 0$$

ofwel

$$u^2 - 2u - v + 2 = 0.$$

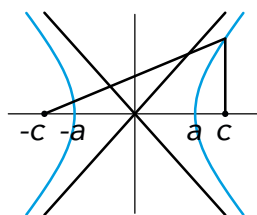
Dit laatste kun je omwerken tot $v = 1 + (u - 1)^2$ en daar is dan weer makkelijk af te lezen dat het om een parabool gaat en waar de top van die parabool ligt (zie figuur 6).

Van ellipsen en hyperbolen, met middelpunt in de oorsprong, wordt de vergelijking meestal als volgt opgeschreven:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

voor de ellips en

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



Figuur 8

voor de hyperbool. Die vormen komen bijna vanzelf tevoorschijn als je net als in het begin te werk gaat: neem eerst twee brandpunten $F_1(c, 0)$ en $F_2(-c, 0)$ en kies dan een constante a , met $a \geq c$.

Voor de ellips bekijk je alle punten waarvoor de afstanden tot F_1 en F_2 optellen tot $2a$ (dat maakt de formules aan het eind mooier):

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

(als $a < c$, dan voldoet geen enkel punt aan de eisen; waarom?). Als je netjes werkt, kom je uiteindelijk uit op

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Als we b zó nemen dat $b^2 = a^2 - c^2$ en als we ook nog delen door a^2b^2 , dan krijgen we bovenstaande vergelijking. Uit de vergelijking van de ellips kun je meteen de snijpunten met de assen aflezen: $(\pm a, 0)$ en $(0, \pm b)$. In onze afleiding kwamen we uit op $a > b$ en dat is in figuur 7 te zien. Nu zie je ook waarom we $2a$ genomen hebben: a is de hypotenuusa van de beide rechthoekige driehoeken.

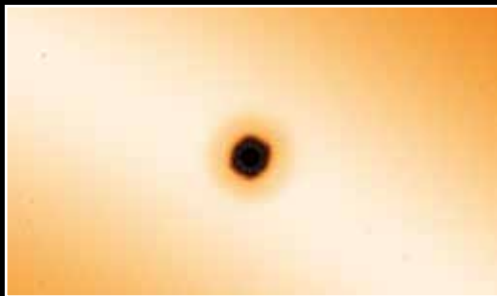
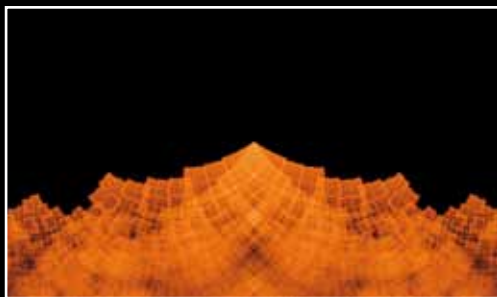
De berekening voor de hyperbool gaat ook net als in het begin; alleen zorgen we nu dat $a \leq c$ en nemen we onderweg $b^2 = c^2 - a^2$. De hyperbool heeft maar twee snijpunten met de assen: $(\pm a, 0)$ (zie figuur 8). De brandpunten zijn weer $(\pm c, 0)$ en het constante verschil is ook nu $2a$: kijk maar naar de punten $(\pm a, 0)$. Het getal b is nu niet zo duidelijk in de figuur te zien, maar hij is er wel: in de asymptoten; die worden gegeven door $y = \pm \frac{b}{a}x$. ■

LITTLEWOOD-NULPUN

■ door Alex van den Brandhof

Iedereen leert op school dat de functie $x^2 + 1$ geen nulpunten heeft. De wiskundige scherslijper zegt: die functie heeft geen *reële* nulpunten. Want *complexe* nulpunten zijn er wel: i en $-i$. Het getal i is, per definitie, de wortel uit -1 . De functie $x^2 - x + 1$ heeft twee complexe nulpunten: $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i$ en $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i$. En $x^3 + x^2 + x + 1$ heeft drie nulpunten: -1 (reëel), i en $-i$ (complex).

Een getal als $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i$ kun je weergeven in het complexe vlak: een tweedimensionaal coördinatenstelsel met het reële deel ($\frac{1}{2}$) op de horizontale as en het imaginaire deel ($\frac{1}{2}\sqrt{3}$) op de verticale as.



MEER NULPUNTEN DAN PIXELS De wiskundige Andrej Bauer van de universiteit van Ljubljana (Slovenië) berekende alle complexe nulpunten van $x^{26} + x^{25} + x^{24} + \dots + x^2 + x + 1$ en alle soortgelijke functies waarbij de grootste exponent kleiner is dan 26. Elke $+$ mag worden vervangen door een $-$, en ook de eerste term mag coëfficiënt -1 hebben. Bauer onderzocht dus de volgende functies:

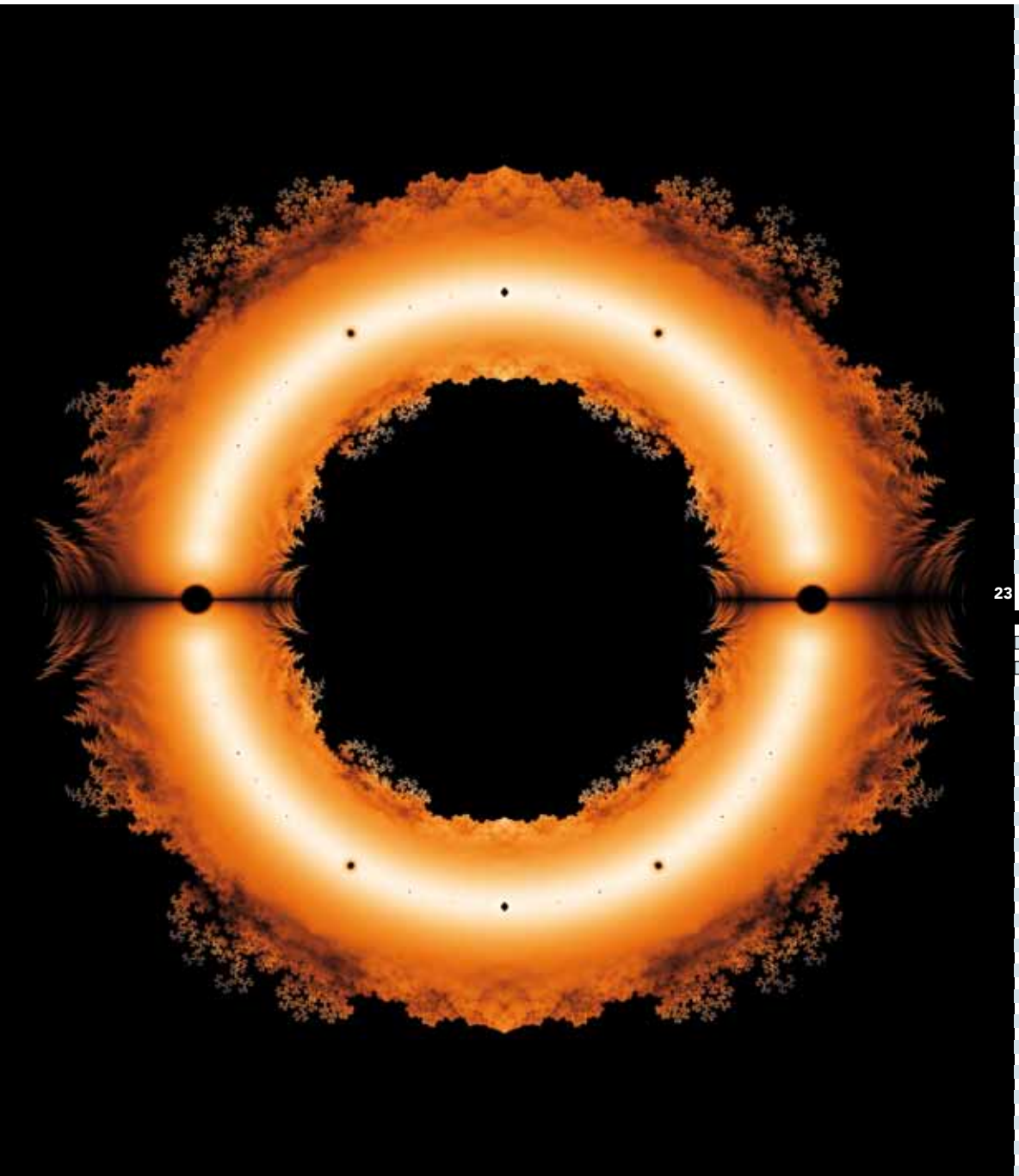
$$\pm x^n \pm x^{n-1} \pm x^{n-2} \pm \dots \pm x^2 \pm x \pm 1$$

voor $n \leq 26$. In totaal zijn dat $2^2 + 2^3 + \dots + 2^{27} = 268.435.452$ functies, die alles bij elkaar niet minder dan 6.710.886.404 complexe nulpunten hebben. Al die nulpunten kun je weergeven in het complexe vlak. Dat levert het indrukwekkende plaatje op dat op de rechterpagina is afgebeeld. De verschillende tinten oranje geven aan hoe al die nulpunten verdeeld liggen. De drie kleine plaatjes laten de structuur zien als je op een gedeelte inzoomt.

Het originele plaatje heeft $20.000 \times 17.500 = 350.000.000$ pixels. Dat is een heleboel (de file is 287 megabyte!), maar het is veel minder dan het aantal nulpunten. Het is dus onmogelijk om elk nulpunt te tekenen. Daarom berekende Bauer voor elke pixel het *aantal* nulpunten dat de pixel bevat. Het grootste aantal dat hij vond, was 4.358.576. Elke pixel heeft een kleur: van zwart, via verschillende tinten oranje, steeds lichter wordend naar wit. In een zwarte pixel ligt geen enkel nulpunt. Hoe lichter de pixel gekleurd is, hoe meer nulpunten die pixel bevat.

LITTLEWOOD-POLYNOMEN De functies die Bauer op hun nulpunten onderzocht, zijn zogeheten *Littlewood-polynomen*, naar de Britse wiskundige John Edensor Littlewood (1885-1977). Bauer maakte zijn plaatje van de nulpunten van Littlewood-polynomen met graad 26 en kleiner voor een praatje dat hij gaf tijdens *TEDx* in Ljubljana, in oktober vorig jaar. Hij was geïnspireerd door werk van John Baez en Sam Derbyshire. Derbyshire deed eerder iets soortgelijks met Littlewood-polynomen van lagere graad. ■

NTEN IN BEELD



We gaan proberen zo veel mogelijk punten in het platte vlak te plaatsen waarbij alle onderlinge afstanden tussen de punten geheel zijn. Dat is moeilijker dan het misschien lijkt. Over configuraties met eindig veel punten weten we eigenlijk nog maar weinig. In 1945 bewees Paul Erdős samen met Norman Anning de volgende stelling: oneindig veel punten in het platte vlak met alleen maar gehele afstanden liggen op een rechte lijn.

■ door Derk Pik

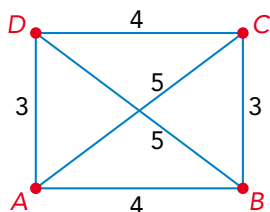
UITSLUITEND GEHELE AFSTANDEN



Figuur 1

24 De eenvoudigste manier om veel punten in het platte vlak te plaatsen zodanig dat de afstand tussen elk tweetal punten geheel is, is door ze te plaatsen op een rechte lijn (zie figuur 1). Je kunt dan oneindig veel punten kwijt. Zijn er ook andere configuraties mogelijk?

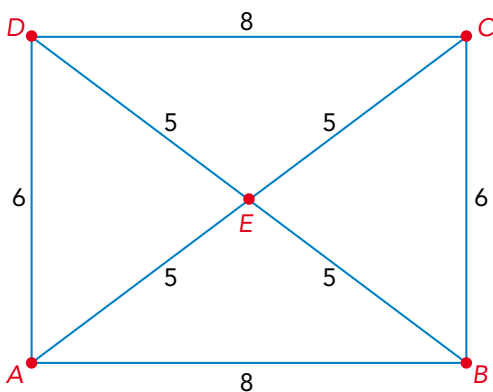
Een oplossing met vier punten zie je in figuur 2. Omdat $3^2 + 4^2 = 5^2$ zijn de voorkomende afstanden in deze configuratie 3, 4 en 5. Tekent je nog beide diagonalen, dan is het snijpunt van die diagonalen een vijfde punt. We moeten de afstanden dan wel twee keer zo groot maken om ervoor te zorgen dat alle afstanden geheel zijn (zie figuur 3). De afstanden zijn 5, 6, 8 en 10.



Figuur 2

Veel verder kom je niet op deze manier. Om het probleem goed te begrijpen, zullen we beginnen met drie punten met gehele onderlinge afstanden.

DRIEHOEKEN Je kunt op vele manieren drie punten in het platte vlak te tekenen die onderling allemaal gehele afstanden hebben. De afstanden 2, 3, 4 geven de driehoek in figuur 4. De driehoek met



Figuur 3

deze lengtes bestaat, omdat $2 < 3 + 4$, $3 < 2 + 4$ en $4 < 2 + 3$. In het algemeen geldt: om een driehoek te tekenen met de afstanden a , b en c moet voldaan zijn aan de driehoeksongelijkheid, dat wil zeggen: $a < b + c$, $b < c + a$ en $c < a + b$.

Kunnen we bij driehoek ABC in figuur 4 een vierde punt D tekenen met gehele afstanden tot A , B en C ? Dit zullen we uitgebreid analyseren om een gevoel te krijgen voor het algemene probleem.

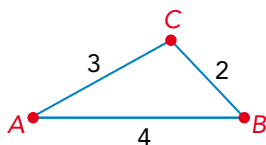
Stel, we hebben een punt D dat gehele afstanden heeft tot A , B en C . In dat geval is de waarde van $|CD - BD|$ ook geheel. Met de omgekeerde driehoeksongelijkheid geldt bovendien: $|CD - BD| \leq BC = 2$.

Omdat $|CD - BD|$ geheel en positief is, blijven de waarden 0, 1 of 2 nog over. We kunnen soortgelijke conclusies trekken voor $|AD - BD|$ en $|AD - CD|$. We krijgen een beperkt aantal waarden:

$$\begin{aligned} |AD - BD| &= 0, 1, 2, 3, 4, \\ |AD - CD| &= 0, 1, 2, 3, \\ |CD - BD| &= 0, 1, 2. \end{aligned}$$

Als AD , BD en CD geheel zijn, moet aan elk van de drie bovenstaande vergelijkingen zijn voldaan voor een van de genoemde waarden aan de rechterkant. We zullen zien dat er maar weinig punten overblijven die een gehele afstand hebben tot de drie punten A , B en C . Van deze punten kunnen we controleren of hun afstand tot A , B en C geheel is.

DE CIRKEL Een Pythagoreïsch drietal is een drietal gehele getallen (a, b, c) waarvoor geldt dat $a^2 + b^2 = c^2$. Voorbeelden zijn $(3, 4, 5)$ en $(5, 12, 13)$. Dit soort drietallen kunnen helpen om punten in het vlak te plaatsen met onderling gehele afstanden. We zullen laten zien hoe we willekeurig veel punten met onderling gehele afstanden in het vlak kunnen zetten. De functie



Figuur 4

$$\varphi(t) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2} \right)$$

bepaalt voor elke t een punt op de cirkel met straal 1. Immers:

$$\left(\frac{1-t^2}{1+t^2} \right)^2 + \left(\frac{2t}{1+t^2} \right)^2 = \frac{1-2t^2+t^4+4t^2}{(1+t^2)^2} = 1.$$

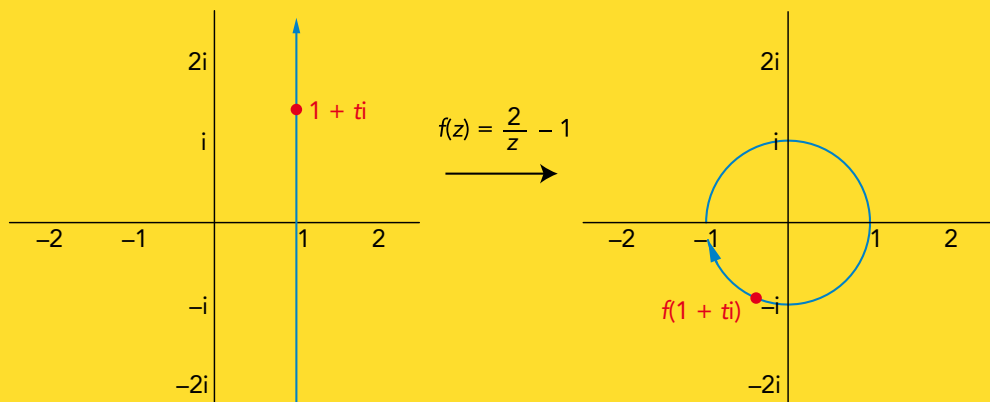
Als we in deze functie φ voor t waarden a/b invullen waarvoor $a^2 + b^2 = c^2$, met a , b en c geheel, dan blijken we punten op de cirkel te krijgen die allemaal als onderlinge afstand een rationaal getal hebben. Waarom dit zo is, kan je lezen in het kader op pagina 26. Neem als voorbeeld $t = 0$, $t = 3/4$, $t = 4/3$, $t = 5/12$, $t = 8/15$. We vinden de punten $(1, 0)$, $(7/25, 24/25)$, $(-7/25, 24/25)$, $(119/169, 120/169)$ en $(161/289, 240/289)$. De afstand tussen elk tweetal punten, tezamen met het middelpunt $(0, 0)$, is steeds een rationaal getal. We maken de afstanden allemaal geheel door alle punten met het getal $25 \times 169 \times 289$ te vermenigvuldigen. De punten zijn dan $M(0, 0)$, $A(1221025, 0)$, $B(341887, 1172184)$, $C(-341887, 1172184)$, $D(859775, 867000)$ en $E(680225, 1014000)$ (zie figuur 5). De figuur kan niet kleiner worden geschaald, want de grootste gemene deler van BC , AM en DE is 1.

We hebben nu een manier gedemonstreerd om willekeurig veel punten in het platte vlak te plaatsen waarvan alle onderlinge afstanden geheel zijn. Deze punten komen steeds te liggen op een zeer grote cirkel. Bovendien zien we met deze constructie: hoe meer punten, hoe groter de cirkel.

HYPERBOLEN EN MIDDELLOODLIJN We keren terug naar driehoek ABC met $AB = 4$, $AC = 3$ en $BC = 2$ (zie figuur 4). Stel, een punt D voldoet aan de vergelijking $|AD - BD| = k$. We zagen dat uit $|AB| = 4$ en de driehoeksongelijkheid volgde dat $k = 0, 1, 2, 3, 4$. We hebben het geval $k = 0$ al besproken: dan ligt D op de middelloodlijn van A en B . Als $k = 4$, dan ligt D op de lijn AB en niet tussen A en B in. Voor $k = 1, 2, 3$ stelt de vergelijking een hyperbool voor. In figuur 6 zijn al deze krommen getekend.

We doen hetzelfde voor het lijnstuk AC . Als er een punt D bestaat met gehele afstand tot zowel A , B als C , dan is het een van de afgebeelde snijpunten

EEN TOEPASSING VAN COMPLEXE GETALLEN



Figuur 12

Hoe vinden we willekeurig veel punten op de eenheidscirkel met alleen maar onderling rationale afstanden? We laten dit zien met behulp van complexe getallen. We gebruiken de functie

$$f(z) = \frac{2}{z} - 1.$$

Deze functie beeldt de lijn $\text{Re}(z) = 1$ af op de eenheidscirkel (zie figuur 12). Om dat aan te tonen, kiezen we een punt op die lijn: dat is van de vorm $1 + ti$ met t een reëel getal. Nu is

$$f(1 + ti) = \frac{2}{1 + ti} - 1 = \frac{2(1 - ti)}{(1 + ti)(1 - ti)} - 1 = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} + \frac{-2t}{1 + t^2}i.$$

De uitkomst ligt op de eenheidscirkel, want

$$\left(\frac{1 - t^2}{1 + t^2}\right)^2 + \left(\frac{-2t}{1 + t^2}\right)^2 = 1.$$

We gaan nu gebruikmaken van een speciale eigenschap van de functie f . Stel we hebben twee complexe getallen w en z , zo dat $|w|$, $|z|$ en $|w - z|$

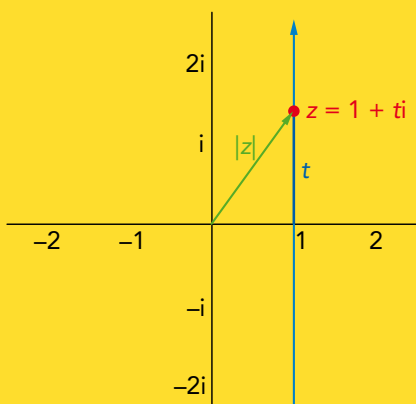
alle drie rationaal zijn. Dan is

$$|f(w) - f(z)| = \left| \left(\frac{2}{w} - 1 \right) - \left(\frac{2}{z} - 1 \right) \right| = \left| \frac{2}{w} - \frac{2}{z} \right| = \frac{2|w - z|}{|w| \cdot |z|}$$

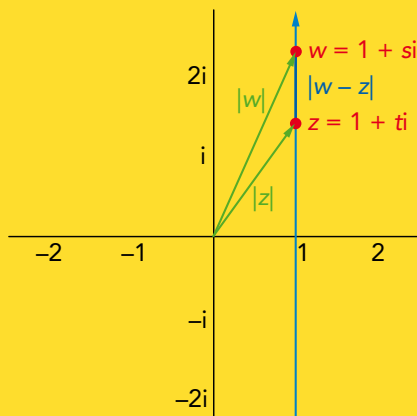
ook rationaal. We gaan dus op zoek naar complexe getallen w en z op de lijn $\text{Re}(z) = 1$ waarvoor $|w|$, $|z|$ en $|w - z|$ rationaal zijn (zie figuur 13). Voor welke t is $|1 + ti|$ rationaal? Als $t = a/b$ met $a^2 + b^2 = c^2$ geheel, dan is

$$|1 + ti| = \sqrt{t^2 + 1} = \left| \frac{c}{b} \right|$$

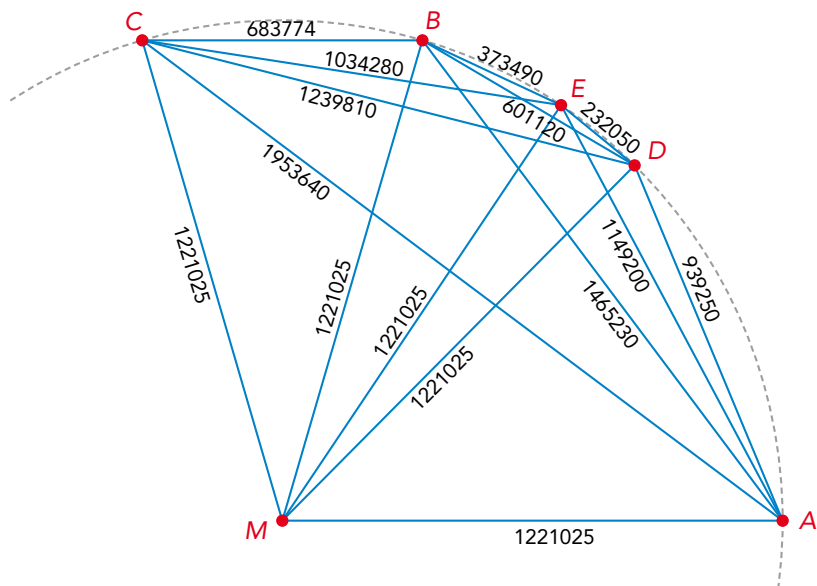
rationaal. Een breuk a/b waarvoor $a^2 + b^2 = c^2$, met a , b en c geheel, heet een *Pythagoreïsche breuk*. Dus als we definiëren $z = 1 + ti$ en $w = 1 + si$, met s en t beide Pythagoreïsche breuken, dan zijn $|w|$, $|z|$ en ook $|w - z| = |s - t|$ rationaal (zie figuur 14). Dus $f(w)$ en $f(z)$ hebben een rationale afstand op de eenheidscirkel.



Figuur 13



Figuur 14



Figuur 5

(zie figuur 7). In dat geval zijn $|AD - BD|$ en $|AD - CD|$ zeker geheel.

Twee verschillende hyperbolen hebben maximaal vier snijpunten. Dit volgt uit het feit dat een hyperbool volledig vastligt zodra je er vijf punten van weet (zie het kader op pagina 29). Stel, twee hyperbolen hebben vijf snijpunten. Beide hyperbolen zijn daarmee volledig gegeven en ze vallen bovendien samen. Twee verschillende hyperbolen kunnen daarom hoogstens vier snijpunten hebben.

In figuur 7 zien we drie groene hyperbolen en twee oranje. Elke groene hyperbool heeft dus maximaal vier snijpunten met elke oranje hyperbool. Verder heeft een rechte hoogstens twee punten gemeen met een hyperbool (zie het kader op pagina

29) en heeft een rechte hoogstens één punt gemeen met een andere rechte. Voor het rekengemak schatten we deze laatste twee gevallen ook naar boven met maximaal 4.

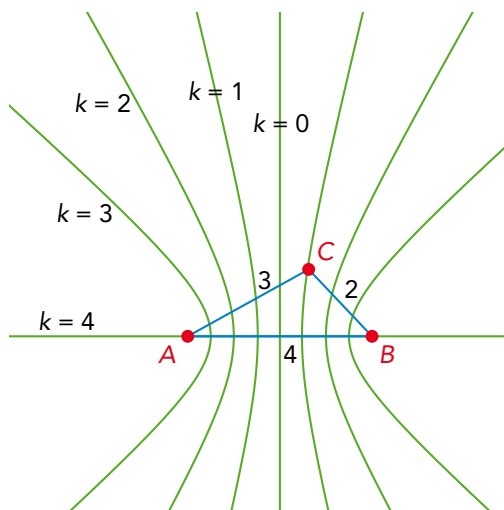
De $4 + 1$ groene krommen gegeven door

$$|AD - BD| = k$$

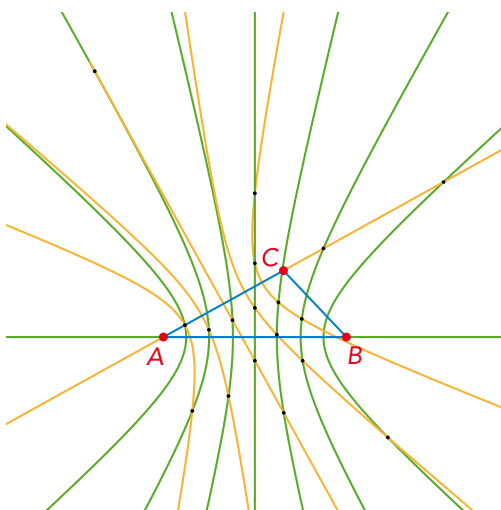
met $k = 0, 1, 2, 3, 4$, en de $3 + 1$ oranje krommen

$$|AD - CD| = n$$

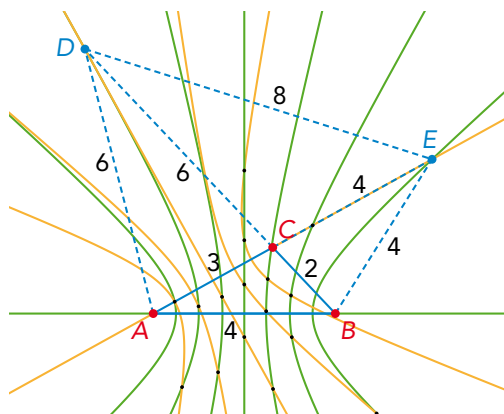
met $n = 0, 1, 2, 3$, snijden in hoogstens $4 \times (4 + 1) \times (3 + 1) = 80$ punten. In het echt zijn het er natuurlijk heel wat minder. We kunnen van dit kleine aan-



Figuur 6



Figuur 7



Figuur 8

tal punten gemakkelijk controleren of ze op gehele afstand liggen tot A, B en C. In dit geval komen er twee nieuwe punten D en E bij, die we bovendien zelfs tegelijkertijd aan de figuur kunnen toevoegen: hun onderlinge afstand is namelijk 8 (zie figuur 8).

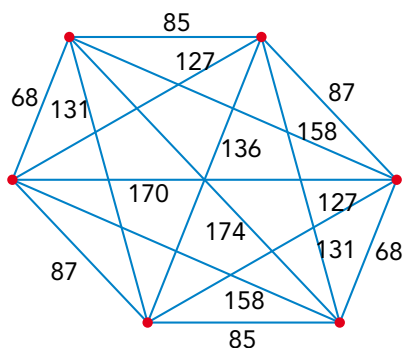
GEEN DRIE OP EEN LIJN, GEEN VIER OP EEN CIRKEL

We gaan de eisen aanscherpen: we houden ons vanaf nu bezig met het probleem om punten in het vlak te plaatsen, zodanig dat

- alle afstanden geheel zijn;
- er geen drie punten op een lijn liggen;
- er geen vier punten op een cirkelboog liggen.

Hoeveel punten kunnen we in het vlak plaatsen met deze eigenschappen? Toen Richard Guy in 1981 in zijn boek *Unsolved Problems in Number Theory* vroeg naar zes punten in het vlak met bovenstaande eigenschappen, kwam John Leech met de oplossing die je ziet in figuur 9. Hij gebruikte driehoeken, waarvan alle zijden samen met alle zwaartelijnen rationale verhoudingen hebben. Euler heeft dergelijke driehoeken uitgebreid bestudeerd. Leech plaatste zes van deze congruente driehoeken in een zeshoek. De zes hoekpunten hebben allemaal onderling rationale afstanden. Merk op dat met de nieuwe eisen het snijpunt in het midden niet mee mag doen, want met dit punt krijgen we drie punten op een lijn.

In 1990 vond Arnfried Kemnitz een andere op-

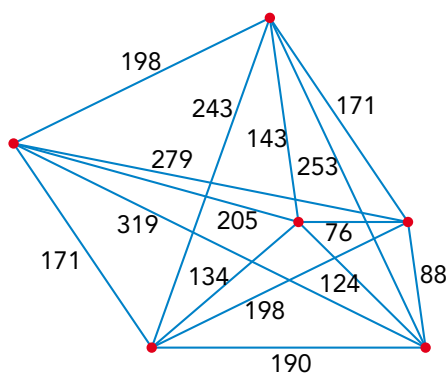


Figuur 9

lossing om zes punten te plaatsen (zie figuur 10). Van de vijftien afstanden zijn er dertien verschillend. We zien als regelmatige deelfiguur alleen nog een parallellogram zitten.

Met geavanceerde wiskundige programmeertechnieken vonden Tobias Kreisel en Sacha Kurz configuraties met zeven punten. Een ervan is afgebeeld in figuur 11. Zelfs in deze figuur zit nog enige regelmaat. Er zijn drie trapezia, waarvan de twee evenwijdige zijden steeds de verhouding 1 : 2 hebben.

Bestaan er configuraties van acht punten met bovenstaande drie eisen? Dit is een open vraag. Over eindig veel punten met alleen maar gehele afstanden weten we eigenlijk nog maar weinig.



Figuur 10

ONEINDIG VEEL PUNTEN Paul Erdős en Norman Anning toonden in 1945 de juistheid van de volgende stelling aan.

Stelling. Als oneindig veel punten in het vlak alleen maar onderling gehele afstanden hebben, dan liggen deze punten op een lijn.

Het bewijs gaat als volgt. Stel, we hebben een verzameling V , bestaande uit punten in het vlak met alleen maar onderling gehele afstanden, die niet allemaal op één lijn liggen. Neem drie punten A , B en C uit V die niet op één lijn liggen. De getallen $k = AB$ en $m = AC$ zijn geheel en groter dan 0. Stel, D is een willekeurig punt uit de verzameling V . Vanwege de omgekeerde driehoeksongelijkheid geldt

$$|DA - DB| \leq AB = k.$$

Het punt D ligt dus op een van de volgende $k + 1$, door A en B gedefinieerde krommen. Het ligt op

- de middelloodlijn van A en B , als $|DA - DB| = 0$;
- een hyperbool met brandpunten A en B , als $|DA - DB| = 1, 2, 3, \dots, k - 1$;
- een rechte door A en B , als $|DA - DB| = k$.

Omdat D willekeurig gekozen was, ligt de gehele

verzameling punten op deze $k + 1$ krommen.

Net zo ligt D op een van de $m + 1$ krommen gedefinieerd door

$$|DA - DC| \leq AC = m.$$

Elk paar van bovenstaande krommen heeft ten hoogste vier snijpunten. De verzameling heeft dus ten hoogste $4(k + 1)(m + 1)$ punten.

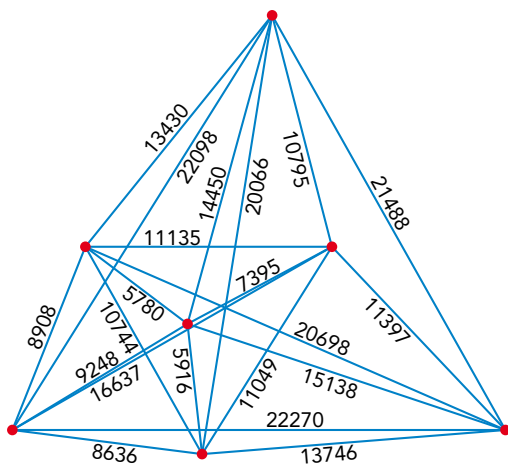
In het bijzonder kan een oneindige verzameling punten die niet allemaal op één lijn liggen en alleen maar gehele afstanden bevat dus niet bestaan!

CONCLUSIE We hebben gezien dat we een eindig, maar willekeurig groot aantal punten met onderling gehele afstanden kunnen plaatsen op een cirkel. Naarmate het aantal punten groter wordt, wordt de straal van deze cirkel in deze constructie ook steeds groter. Als we eisen dat er geen cirkels en lijnen in de constructie zitten, kunnen we een klein aantal punten relatief dichtbij elkaar plaatsen. Als we de grootste afstand binnen de constructie zo klein mogelijk willen houden, hoe groot moet een constructie met zes punten dan zijn? En met zeven punten, en verder? Met het kleine aantal voorbeelden dat er bestaat, is het nog te vroeg om daar iets over te zeggen. ■

KEGELSNEDEN

De algemene vergelijking van een kegelsnede, en dus in het bijzonder van een hyperbool, wordt gegeven door $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$. Ten minste één van de parameters a tot en met f is ongelijk aan nul. Als we de vergelijking delen door deze parameter, hebben we nog vijf parameters over. Als vijf punten van de hyperbool gegeven zijn, krijgen we door deze in te vullen vijf lineaire vergelijkingen met vijf onbekenden. In het algemeen krijgen we precies één oplossing: de vergelijking van de hyperbool.

Een lijn wordt door $y = ax + b$ of $x = d$ beschreven. Als we de hyperbool snijden met een lijn, dan krijgen we door substitutie een kwadratische vergelijking in x of in y : in beide gevallen zijn er hoogstens twee oplossingen.



Figuur 11

PYTHAGORAS OLYMPIADE

■ door Matthijs Coster, Eddie Nijholt en Harry Smit

Doe mee met de Pythagoras Olympiade! Elke aflevering bevat vier opgaven. De eerste twee zijn wat eenvoudiger; onder de goede inzendingen van leerlingen uit de klassen 1, 2 en 3 wordt een cadeaubon van Bol.com ter waarde van 20 euro verloot. De laatste twee zijn echte breinbrekers; onder de goede inzendingen van leerlingen (tot en met klas 6) wordt een bon van 20 euro verloot. Per aflevering wordt maximaal één bon per persoon vergeven.

Daarnaast krijgen leerlingen (tot en met klas 6) punten voor een *laddercompetitie*, waarmee eveneens een cadeaubon van Bol.com van 20 euro te verdienen valt. De opgaven van de onderbouw zijn 1 punt waard, de opgaven van de bovenbouw 2 punten. De leerling met de hoogste score in de laddercompetitie krijgt een bon. Zijn puntentotaal wordt weer op 0 gezet. Wie zes achtereenvolgende keren niets inzendt, verliest zijn punten in de laddercompetitie. Met de bovenbouw-opgaven kun je ook een plaats in de finale van de Nederlandse Wiskunde Olympiade verdienen, mocht het via de voor-

ronden niet lukken:

aan het eind van elke jaargang worden enkele goed scorende leerlingen uitgenodigd voor de NWO-finale. Niet-leerlingen kunnen met de Pythagoras Olympiade meedoen voor de eer.



HOE IN TE ZENDEN? Stuur je oplossing (getypt of een scan of foto van een handgeschreven oplossing) naar pytholym@gmail.com. Je ontvangt een automatisch antwoord zodra we je bericht hebben ontvangen.

Let op: het is niet meer mogelijk schriftelijk in te zenden.

Voorzie het antwoord van een duidelijke toelichting (dat wil zeggen: een berekening of een bewijs). Vermeld je naam en adres; leerlingen moeten ook hun klas en de naam van hun school vermelden.

Je inzending moet bij ons binnen zijn vóór 30 april 2015.

DE GOEDE INZENDERS VAN NOVEMBER 2014

294: Nathan van 't Hof (klas 6), Hofstad Lyceum, Rijsojk; Bram Jonkheer (klas 6), Emelwerda College, Emmeloord; Arie van der Kraan, Nuth; Pascal Kwanten, Almere; Niels van Mierlo (klas 3), Christelijk Gymnasium, Utrecht; Antonie Moes (klas 3), Goois Lyceum, Bussum; Matthijs Pool (klas 4), Ignatius Gymnasium, Amsterdam; Pim Spelier (klas 4), Christelijk Gymnasium Sorghvliet, Den Haag; Eline Welling (klas 3), Goois Lyceum, Bussum.

295: Sander Engelberts (klas 4), Goois Lyceum, Bussum; Nathan van 't Hof (klas 6), Hofstad Lyceum, Rijsojk; Bram Jonkheer (klas 6), Emelwerda College, Emmeloord; Pascal Kwanten, Almere; Niels van Mierlo (klas 3), Christelijk Gymnasium, Utrecht; Antonie Moes (klas 3), Goois Lyceum, Bussum; Matthijs Pool (klas 4), Ignatius Gymnasium, Amsterdam; Pim Spelier (klas 4), Christelijk Gymnasium Sorghvliet, Den Haag; Eline Welling (klas 3), Goois Lyceum, Bussum; Wouter Zijlstra (klas 5), Koningin Wilhelmina College, Culemborg.

296: Bram Jonkheer (klas 6), Emelwerda College, Emmeloord; Pim Spelier (klas 4), Christelijk Gymnasium Sorghvliet, Den Haag.

297: Kees Boersma, Vlissingen; Romke Egbers, Meppel; Bram Jonkheer (klas 6), Emelwerda College, Emmeloord; Pim Spelier (klas 4), Christelijk Gymnasium Sorghvliet, Den Haag; Eline Welling (klas 3), Goois Lyceum, Bussum; Wouter Zijlstra (klas 5), Koningin

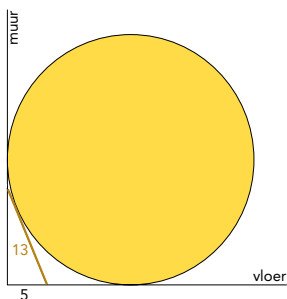
Wilhelmina College, Culemborg.

Cadeaubonnen: Eline Welling en Wouter Zijlstra.

Stand laddercompetitie: Pim Spelier (21 p; cadeaubon), Michelle Sweering (18 p), Frenk Out (14 p), Wouter Andriessen (12 p), Wout Gevaert (12 p), Marinda Westerveld (11 p), Tara van Belkom (10 p), Bram Jonkheer (10 p), Reinier Schmiermann (9 p), Beaudine Smeekes (9 p), Oscar Heijdra (8 p), Nathan van 't Hof (7 p), Niels van Mierlo (7 p), Sander Engelberts (6 p), Tjard Langhout (6 p), Levi van de Pol (6 p), Simon Roelandt (6 p), Michiel Versnel (6 p), Max Bosman (5 p), Ivo van Dijk (5 p), Laurens Hilbrands (4 p), Eline Welling (4 p), Sebastiaan Ceuppens (3 p), Anton van Es (3 p), Wouter Zijlstra (3 p), Jelle Couperus (2 p), Sietse Couperus (2 p), Maud van de Graaf (2 p), Phillip de Groot (2 p), Yvette Keij (2 p), Antonie Moes (2 p), Matthijs Pool (2 p), Stef Rasing (2 p), Sied Vrasdonk (2 p), Marc Zuurbier (2 p), Simon de Best (1 p), Ludivine Bonvarlez (1 p), Johanna Bult (1 p), Maarten Clercx (1 p), Kenny van Dijken (1 p), Famke Driessen (1 p), Tessa Engelberts (1 p), Tim Groot (1 p), Calista Hainaut (1 p), Gerben-Jan Hooijer (1 p), Merlijn Hunik (1 p), Boris Kloeg (1 p), Elisabeth Kuijper (1 p), Nora Lahlou (1 p), Bram van der Linden (1 p), Daphné Meyer-Horn (1 p), Hannah Nijse (1 p), Alwin van der Paardt (1 p), Olivier Segers (1 p).

OPGAVE 302

Tegen een muur leunt een plankje met een lengte van 13 cm. Een zijaanzicht zie je hieronder. De onderzijde van het plankje is 5 cm verwijderd van de muur. Op de vloer ligt een strandbal die raakt aan het plankje én aan de muur. Wat is de diameter van de strandbal? Je mag aannemen dat het plankje dikte 0 heeft.

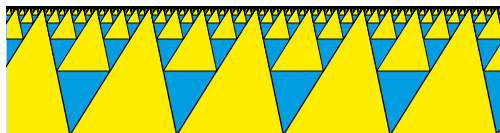


OPGAVE 303

Neem vier positieve getallen die optellen tot 10. Bijvoorbeeld 1, 2, 2 en 5. Als je die vier getallen met elkaar vermenigvuldigt, krijg je een nieuw getal (in ons voorbeeld: $1 \times 2 \times 2 \times 5 = 20$). Wat is het grootste getal dat je op deze manier kunt verkrijgen?

OPGAVE 304

Een *fractal* is een figuur die ontstaat door voortdurende herhaling van eenzelfde patroon op steeds kleinere schaal. In de fractal hieronder zijn alle driehoeken gelijkvormig. Wat is de verhouding tussen de gele en de blauwe oppervlakte?

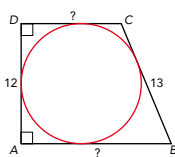


OPGAVE 305

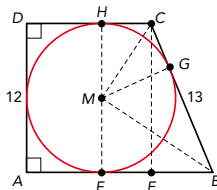
37 is een priemgetal. Als je achter 37 een willekeurig aantal enen plaatst, bijvoorbeeld, 371, of 3711, of 37111, enzovoort, is dat getal nooit priem (bijvoorbeeld $371 = 7 \times 53$). Toon dat aan.

OPLOSSING 294

Van vierhoek $ABCD$ zijn de hoeken A en D recht. Verder geldt dat $AD = 12$ en $BC = 13$. Ten slotte raakt een cirkel aan elk van de vier zijden. Bepaal de lengte van AB en CD .

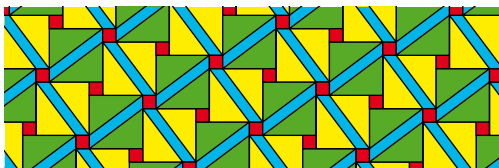


Oplossing. Teken punt E op AB zodanig dat CE evenwijdig is met AD . Driehoek EBC is dan rechthoekig met $CE = 12$ en $BC = 13$. Uit de stelling van Pythagoras volgt dan dat $BE = 5$. Laat nu F , G en H de raakpunten van respectievelijk AB , BC en CD aan de cirkel (met middelpunt M) zijn. Dan geldt: $\angle MHC = \angle MGC = 90^\circ$. Verder zijn HM en GM beide gelijk aan de straal van de cirkel en hebben de driehoeken MHC en MGC de zijde MC gemeenschappelijk. Hieruit volgt dat de driehoeken congruent zijn; in het bijzonder geldt dat $CH = CG$. Evenzo zien we dat $BF = BG$. Uit $BG + CG = BC = 13$ en $BF - CH = BE = 5$ volgt nu dat $BF = 9$ en $CG = 4$. We hebben nu: $AB = AF + FE + EB = 6 + 4 + 5 = 15$ en $CD = CH + HD = 4 + 6 = 10$.



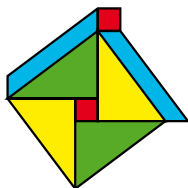
OPLOSSING 295

Hieronder is een vlakvulling afgebeeld. In elk geel en groen vierkant zijn twee rechthoekige driehoeken getekend met rechthoekszijden 3 en 4; het gebied tussen die twee driehoeken is blauw gekleurd. Hoe verhouden zich de oppervlaktes van het rode, gele, groene en blauwe deel tot elkaar?



Oplossing. De vlakvulling bestaat uit een eindeloze herhaling van onderstaand patroon, waarin alle gekleurde stukken precies twee maal voorkomen. Een gele driehoek heeft oppervlakte $\frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6$. De totale gele oppervlakte is dus 12; hetzelfde geldt voor de groene oppervlakte. Een blauwe vierhoek vormt

tezamen met een gele en een groene driehoek precies een vierkant met zijde 4. Een blauwe vierhoek heeft dus oppervlakte $4 \times 4 - 12 = 4$ en dat geeft een totale blauwe oppervlakte van 8. Ten slotte is de oppervlakte van een rood vierkantje gelijk aan 1, dus de totale rode oppervlakte is 2. De verhouding rood : geel : groen : blauw is dus gelijk aan $2 : 12 : 12 : 8 = 1 : 6 : 6 : 4$.

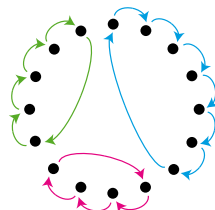


OPLOSSING 296

Er staan 16 tafeltjes in een kring, genummerd 1 tot en met 16. Op elk tafeltje ligt een briefje met de tekst 'Ga naar tafel met tafelnummer ...', waarbij er nooit naar het tafeltje zelf wordt verwezen. Bij elk van de tafeltjes staat een leerling. Bij een wis-seling voeren zij de opdracht op het briefje uit en verplaatsen zij zich naar een ander tafeltje. Na een aantal stappen zijn alle leerlingen weer terug bij hun eerste tafeltje. Wat is het kleinste aantal wis-selingen waarbij dit zal gebeuren? En wat is het grootste aantal wisselingen?

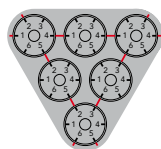
Oplossing. Het kleinst mogelijke aantal wisselingen is 2. We kunnen de tafels immers in acht groepjes van twee verdelen en per groepje de twee tafels naar elkaar laten verwijzen. Voor het grootst mogelijke aantal bekijken we per leerling hoe lang het duurt voordat hij of zij weer terug is. Deze leerling zal een cykel van tafels afaan voordat hij of zij weer bij de begintafel uitkomt. Wanneer dat zo is, zullen de leerlingen die bij deze aangedane tafels begonnen dezelfde cykel afgelopen zijn. Iedereen zit weer op zijn of haar plaats wanneer alle cycli helemaal rond zijn, wat zal gebeuren wanneer het aantal wis-selingen deelbaar is door de lengtes van al deze cycli. Met andere woorden, we zoeken getallen groter dan 1 die optellen tot 16 en die een zo groot mogelijke kleinste gemeenschappelijke veelvoud (kgv) hebben. In deze zoektocht hoeven we dubbel niet mee te rekenen, aangezien het vervangen van een tweetal dezelfde getallen door tweemaal dat getal het kgv nooit kleiner kan maken. Omdat de som van vijf verschillende getallen groter dan 1 ten minste $2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 20$ is, hoeven we ons alleen te concentreren op tweetallen, drietallen en viertallen. Het product van zo'n tweetal is hooguit $8^2 = 64$ en het product van zo'n viertal is hooguit $4^4 = 256$, waarbij we opmerken dat de eis dat deze vier getallen optellen tot 16 verder geeft dat minstens twee getallen even zijn. Het kgv van die getallen is

dus nooit groter dan $\frac{1}{2} \times 256 = 128$. Rest ons de drietallen te controleren en een antwoord te vinden dat een groter kgv geeft dan deze bovengrenzen. Deze vinden we inderdaad, de hoogst haalbare waarde is $\text{kgv}(4, 5, 7) = 140$. Dit correspondeert dus met een cykel van 4, een cykel van 5 en een cykel van 7.

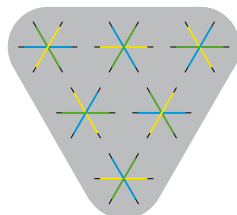


OPLOSSING 297

Een kluis bevat zes draaischijven, zoals aangegeven in de figuur. Elke schijf bevat de getallen 1 tot en met 6. Voor de sier staan er drie rode lijnen rondom de draaischijven. Voor hoeveel cijfercombinaties geldt dat op elk van deze rode lijnen de getallen 1 tot en met 6 staan (uiteraard in een willekeurige volgorde)?



Oplossing. We vereenvoudigen de tekening van de draaischijven door onderstaande tekening, waarbij 1-4 is vervangen door een gele streep, 2-5 door een blauwe streep en 3-6 door een groene streep. Als we eenmaal een cijfercombinatie hebben gevonden, kunnen we elk van de schijven een halve slag draaien, waarmee we $63 (= 2^6 - 1)$ andere cijfercombinaties vinden. Dit geldt ook indien we alle schijven 60° of 120° naar rechts draaien; dan vinden we twee andere cijfercombinaties. We gaan er eerst vanuit dat de schijf linksboven gefixeerd is. Vervolgens kijken we naar de schijven rechtsboven en onder. Als deze twee schijven zijn gekozen, liggen de andere schijven ook vast, omdat op de rode lijnen in de oorspronkelijke figuur de drie verschillende kleuren geel, blauw en groen moeten liggen. Dat betekent in het bijzonder dat de schijven rechtsboven en onder verschillend gedraaid moeten zijn. Dat betekent dat als de schijf rechtsboven wordt gekozen, daarmee de schijf onder vastligt. Het aantal cijfercombinaties is dus $2^6 \times 3 \times 2 = 384$.



OPLOSSING

KRUISGETALPUZZEL & LETTERWANDELEN

Hier zie je de oplossingen van de kruisgetalpuzzel en de Rumble-puzzel uit de vorige *Pythagoras*.

1	2	8	3		4	1	5	2	6	3	7	4
8	1	1	0	0	0	0	1	1	1	0		
	0		9		0			9	6	9		
10	1	11	4	6	12	4	1		13	5	7	
14	2	0		8			15	1	2			
		16	6	6			18	7	4			
19	8	2	1	2	20	6	2	8		21	9	
		22	5	9	0	4	9				7	

F	J	T	H
V	I	W	C
N	E	R	A
Z	G	S	D



54ste jaargang nummer 4
februari 2015
ISSN 0033 4766

Pythagoras stelt zich ten doel jongeren kennis te laten maken met de leuke en uitdagende kanten van wiskunde. Pythagoras richt zich tot leerlingen van vwo en havo en alle anderen die jong van geest zijn.

Internet www.pyth.eu

Hoofredacteur Derk Pik

Eindredacteur Alex van den Brandhof

Redactie Matthijs Coster,
Jeanine Daems, Jan Guichelaar,
Klaas Pieter Hart, Paul Levrie,
Marc Seijlhouwer

Vormgeving Grafisch Team Digipage,
Leidschendam

Druk Drukkerij Ten Brink, Meppel

Uitgever Koninklijk Wiskundig
Genootschap (KWG)

Management Pythagoras Jan Turk,
Mark Veraar (KWG), Derk Pik

Lezersreacties en kopij

Bij voorkeur per e-mail; lezersreacties naar Jan Guichelaar, jan@pyth.eu en kopij naar Derk Pik, derk@pyth.eu. Eventueel per post naar Pythagoras, p.a. Centrum Wiskunde & Informatica, Postbus 94079, 1090 GB Amsterdam.

Abonnementen, bestellingen en mutaties

Abonneservice Pythagoras
Postbus 2238
5600 CE Eindhoven
Telefoon 088 226 5258
E-mail: abonnementen@pyth.eu

Abonnementsprijs

(zes nummers per jaargang)
€ 28,00 (Nederland en België),
€ 30,00 (overige landen),
€ 18,00 (groepsabbonnement NL/B),
€ 28,00 (geschenkabbonnement NL/B),
€ 30,00 (geschenkabbonnement overige landen).

Een geschenkabbonnement stopt automatisch na één jaar. Overige abonnementen gelden tot wederopzegging. Zie www.pyth.eu voor verdere toelichtingen.

Aan dit nummer werkten mee

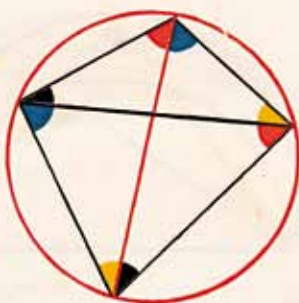
Alex van den Brandhof
(alex@pyth.eu),
Matthijs Coster
(matthijs@pyth.eu),
Jeanine Daems
(jeanine@pyth.eu),
Jan Guichelaar
(jan@pyth.eu),
Klaas Pieter Hart
(kp@pyth.eu),
Paul Levrie
(paul@pyth.eu),
Eddie Nijholt
(eddie@pyth.eu),
Derk Pik
(derk@pyth.eu),
Marc Seijlhouwer
(marc@pyth.eu),
Harry Smit
(h.j.smit@students.uu.nl),
Merlijn Staps
(merlijnstaps@hotmail.com).

Pythagoras wordt mede mogelijk gemaakt door de bijdragen van de onderstaande instituten en instellingen.





THE opposite angles
and ,  and
 of any quadrilateral figure in-
scribed in a circle, are together equal to
two right angles.



Draw  and 
the diagonals; and because angles in

the same segment are equal  = ,

and  = ;

add  to both.

$\therefore$  +  =  +  =  =

two right angles (B. 1. pr. 32.). In like manner it may
be shown that,

 +  = .

Q. E. D.

P



Bron: Oliver Byrne, *The First Six Books of The Elements of Euclid*, Taschen.