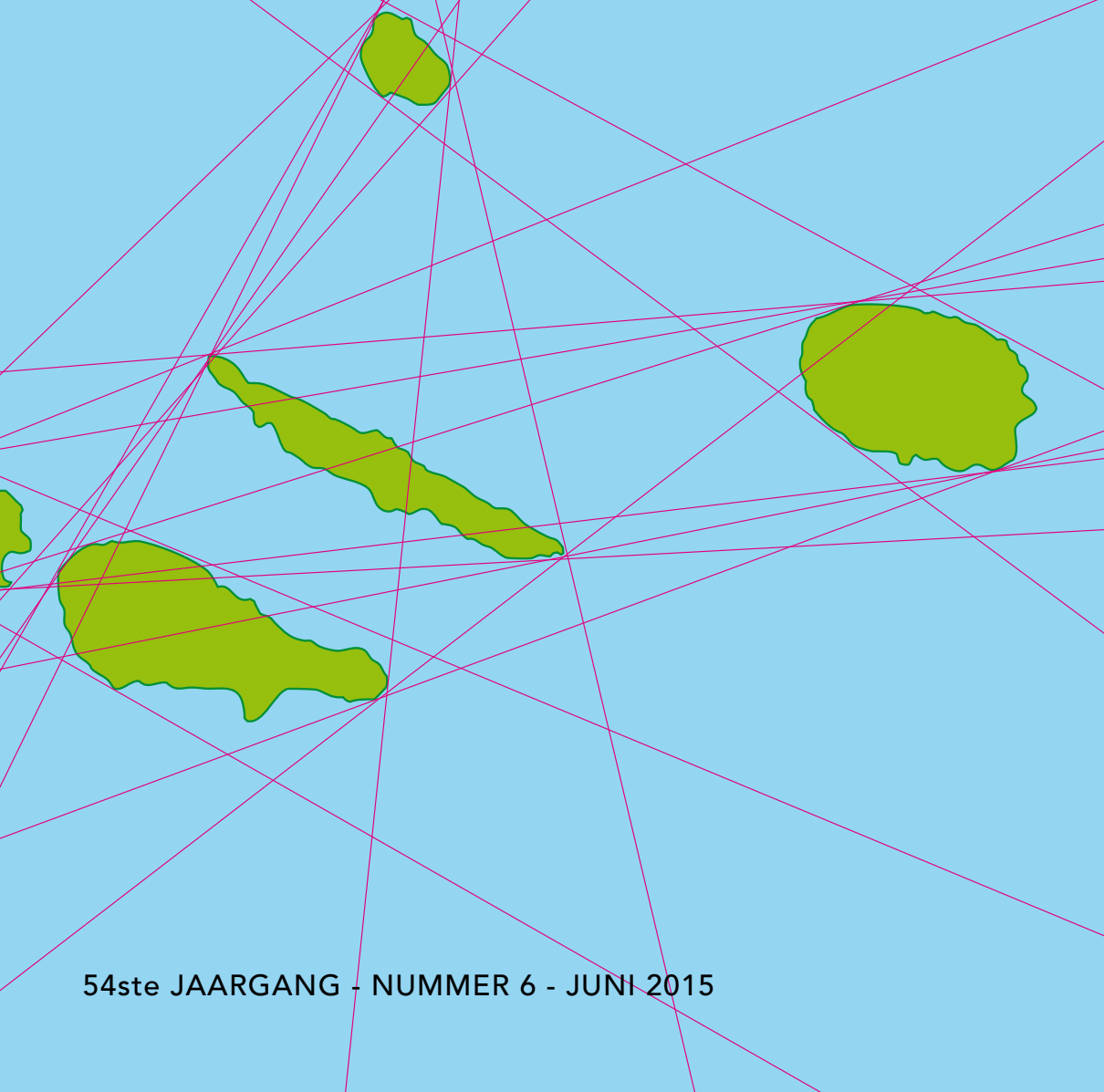


PYTHA GORAS

WISKUNDETIJDSCHRIFT VOOR JONGEREN



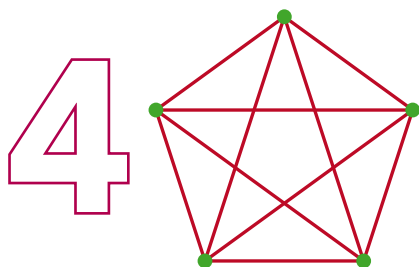
54ste JAARGANG - NUMMER 6 - JUNI 2015



Ontdek de Zebra-reeks !

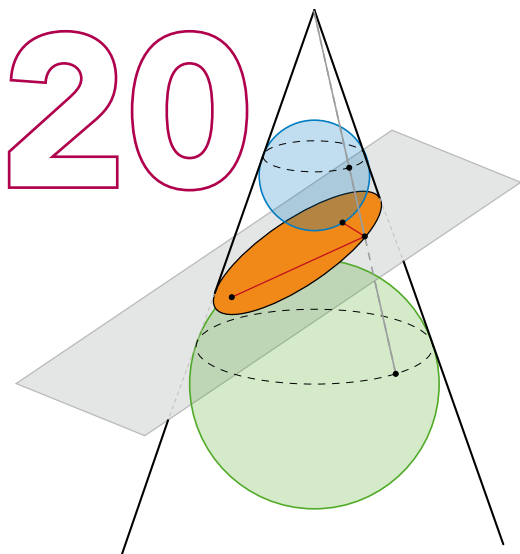


INHOUD



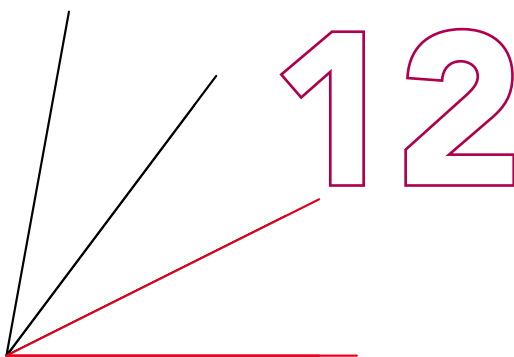
AZOREN: VOORBEELD VAN EEN EILANDENLIGGING

De Azoren vormen een eilandengroep ten westen van Portugal. Jaap Klouwen bedacht het woord 'zichtbaarheidsgetal'. Het zichtbaarheidsgetal van een eiland is het aantal andere eilanden dat je vanaf dat eiland kunt zien. Van de vijf middeleeuws eilanden van de Azoren hebben er vier zichtbaarheidsgetal 3, en één zichtbaarheidsgetal 4.



DE BOLLEN VAN DANDELIN

Onze derde aflevering in de serie over kegelsneden gaat over ellipsen. Als je een kegel zodanig in twee stukken zaagt dat de rand van het snijvlak gesloten is, is dat snijvlak ellipsvormig. Een mooi bewijs daarvan is afkomstig van Germinal Pierre Dandelin.



HOEKEN DELEN MET ARCHIMEDES EN ABE

Een hoek kun je niet in drie gelijke delen verdelen met behulp van een passer en een latje. Met een zogeheten 'neusis' lukt het wel. En met vouwkunst kom je er ook.

Omslagillustratie: kaart van de Azoren met de 'zichtbaarheidslijnen'

EN VERDER

- 2 Kleine nootjes
- 9 Neusisconstructies
- 10 Oplossing Opgave pagina 9
- Oplossing Mutsenprobleem
- 11 Journaal
- 16 0
- 18 De 1-tot-9-prijsvraag – uitslag
- 24 De speltheorie van Varoufakis
- 26 Nogmaals gehele afstanden
- 28 De NWO, voor jong en oud!
- 30 Pythagoras Olympiade
- 32 Elk getal overdekt – aanvulling
- 33 Oplossing Som- en productpuzzels

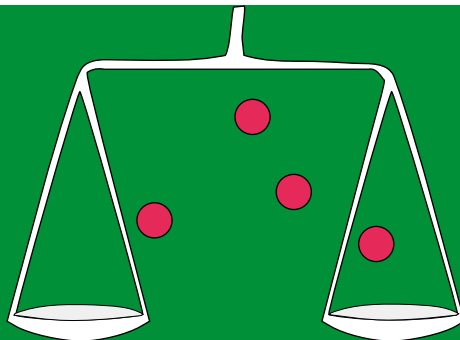
NIVEAUBALKJES Sommige pagina's bevatten één of meer zwarte balkjes onder het paginanummer. Voor artikelen zonder balkje is geen specifieke voorkennis nodig. Artikelen met één balkje bevatten wiskunde uit de onderbouw. Artikelen met twee balkjes vereisen kennis uit de bovenbouw. Drie balkjes: net iets moeilijker.

KLEINE NOOTJES

■ door Jan Guichelaar

HOEVEEL MUNTJES?

Marcus heeft een oneven aantal munten van 10 cent. Hij zegt: 'Ik kan het bedrag dat ik heb ook op andere manieren maken, waarbij ik alle soorten munten met een waarde kleiner dan 1 euro (dus muntjes van 1, 2, 5, 10, 20 en 50 cent) mag gebruiken.' Ook zegt hij: 'Het totaal aantal manieren waarop ik dat kan doen (inclusief de manier met alleen 10-cent-munten), is gelijk aan mijn aantal muntjes nu.' Hoeveel 10-cent-munten heeft Marcus?



VIER GEWICHTEN

Je hebt vier gewichten met de letters a , b , c en d erop. Je weet dat er twee 1 gram wegen en twee 2 gram. Met de hand is dat niet te voelen. Je mag wel een balans met twee armen gebruiken. In hoeveel wegingen op de balans kun je bepalen welke twee 1 gram wegen en welke twee 2 gram? En hoe ga je te werk?

2

PALINDROOMGETALLEN

Palindroomgetallen zijn getallen die niet veranderen als je ze in omgekeerde richting leest (voorbeelden zijn 151, 27872 en 88). Er zijn natuurlijk 10 palindroomgetallen van één cijfer. Een getal dat uit meer dan één cijfer bestaat, mag uiteraard niet met het cijfer 0 beginnen. Bepaal het aantal palindroomgetallen van twee, drie en vier cijfers. Kun je de regelmaat vinden voor grotere lengtes?

RODE EN BLAUWE KNIKKERS

In een bak zitten rode en blauwe knikkers. In totaal zijn er 20 knikkers, maar je kent de verdeling van het aantal rode en blauwe knikkers niet. Je trekt één knikker uit de bak. Wat is de kans dat die knikker blauw is, als het volgende gegeven is:

- er bestaat een andere verdeling rood en blauw, waarbij de kans op een blauwe knikker vier keer zo klein is;
- er bestaat nog een andere verdeling, waarbij de kans op blauw vier keer zo groot is.



Kleine nootjes zijn eenvoudige opgaven die weinig of geen wiskundige voorkennis vereisen om opgelost te kunnen worden. De antwoorden vind je in het volgende nummer van *Pythagoras*.

PRODUCT VAN DRIE GETALLEN

Bas heeft een bak waarin meer dan twee kaartjes zitten. Hij zegt tegen zijn vriendin Laura: 'Ik heb een getal G in gedachten genomen en ik heb alle drietallen getallen bepaald die vermenigvuldigd G opleveren. Op elk kaartje in deze bak staat de som van een van die drietallen.' Bas pakt er willekeurig twee uit en zegt: 'Het product van deze twee getallen is 253.' 'O, maar dan weet ik wel wat G is,' zegt Laura. Jij ook?

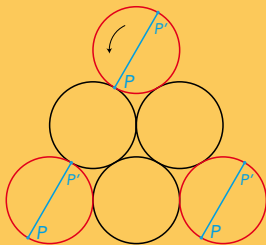


OPLOSSINGEN KLEINE NOOTJES NR. 5

Draaien maar. Door-

dat de cirkel langs de cirkel linksboven draait, komt P' , als de cirkel linksonder is, tegen de linkercirkel aan. Punt P is dan weer linksbeneden.

Na het volgende stuk is P opnieuw linksonder en na het derde stuk van de volledige rondloop weer. Punt P is dus weer op zijn oude plek.

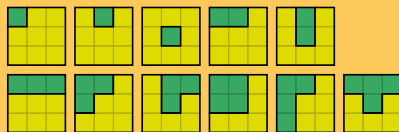


Hoe ver komt de sprinkhaan? Er zijn 16 mogelijkheden voor het rijtje van sprongen naar links (L) of rechts (R). Alleen bij LLLL, RRRR, LLLR en RRRL is de afstand 40 cm of 30 cm geweest. De kans is dus $4/16 = 1/4$.

Knippen in 2 polymino's. Er zijn 11 manieren:

Vierkant vullen. Als je start, heb je 5 velden die je bereikt in een oneven aantal zetten en 4 in een even aantal: in totaal dus een oneven aantal. Je doet in totaal $1 + 2 + \dots + 8 + 9 = 45$ zetten, een oneven aantal. Even proberen leert dat het kan. Maar de onderste munt moet wel op zijn startveld terugkeren. Dus daar moet dan toevallig een even getal op staan. Anders lukt het niet.

Volle emmer water. Stel dat er L liter in de emmer past. Er geldt: $\frac{3}{4}(\frac{2}{3}(\frac{1}{2}L + 1) + 1) + 1 = L$. Dat geeft $L = 3$. Het volume van de emmer is dus 3 liter.



Op ongeveer 1300 kilometer ten westen van Portugal – het land waar ze bij horen – liggen de Azoren. Deze subtropische en vulkanische eilandengroep telt negen eilanden. Vorig jaar was Jaap Klouwen op drie van de vijf prachtige middeneilanden. Hem schoten toen interessante vragen te binnen over de ligging van een stel eilanden en schreef daarover dit artikel.

■ door Jaap Klouwen

AZOREN: VOORBEELD VAN EEN EILANDENLIGGING



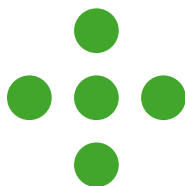
4

Op een dag stond ik in het zuidoosten van het eiland Terceira. Omdat de onderlinge afstanden van de middeneilanden tussen de 5 en 20 kilometer zijn, kon ik daar een glimp van de oostpunt van het eiland Pico opvangen. Pico is dus zichtbaar vanaf Terceira. Het meest westelijke van de vijf middeneilanden, Faial, kan men echter niet zien vanaf Terceira, omdat het langwerpige eiland São Jorge dat verhindert. Uiteraard waren São Jorge en het noordelijke eiland Graciosa zichtbaar vanaf Terceira. Vanaf Terceira kan je dus drie andere eilanden zien. Dit geldt voor bijna alle middeneilanden, behalve São Jorge: vanaf dat eiland zie je alle vier de andere eilanden.

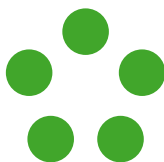
De *zichtbaarheidsgetallen* van de vijf middeneilanden van de Azoren zijn dus 3, 3, 3, 3, en 4. We noemen zo'n rij zichtbaarheidsgetallen van de eilanden een *valentiepatroon* en noteren dit als 33334, steeds op volgorde van laag naar hoog. Merk op dat als eiland A eiland B ziet, dit natuurlijk ook andersom geldt. Symbolisch kan je het plaatje van het valentiepatroon 33334 ook aangeven zoals in figuur 1.

ZICHTBAARHEID We maken een aantal afspraken over de zichtbaarheid van eilanden.

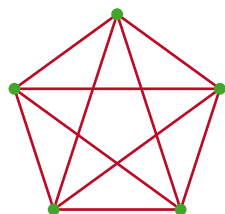
1. Alle eilanden liggen binnen de (fysieke) grenzen van zichtbaarheid. Het zichtbaarheidsgetal van een eiland is dus altijd minimaal 1.
2. De eilanden hoeven niet even groot te zijn (zoals dat wel zijn in figuur 1). Ze kunnen zelfs allerlei (tweedimensionale) vormen aannemen.
3. Elk eiland is één geheel, dat wil zeggen: het bestaat op zich niet weer uit andere delen.
4. Zichtbaarheid van eiland B vanaf eiland A betekent dat er minstens één plek op eiland A is van waaruit eiland B zichtbaar is. Dit geldt dus ook omgekeerd.
5. Er zijn geen bergen op een eiland. Daarom zul je een verder weg gelegen eiland niet toch kunnen zien omdat er toevallig een berg op staat, en ook kan je niet op een berg klimmen om andere eilanden te zien. (Op de Azoren is dit overigens niet echt waar: Pico kent een vulkaan van ruim 2300 meter hoog. We negeren dit dus in het vervolg van dit artikel.)



Figuur 1 Eilandenligging met valentiepatroon 33334



Figuur 2 Eilandenligging met valentiepatroon 44444



Figuur 3 Graaf met valentiepatroon 44444

6. Als drie eilanden alle drie aan een rechte lijn raken, kunnen de buitenste twee eilanden elkaar niet zien. Je kunt dus niet 'langs de rand' van een eiland naar een ander eiland kijken.

VIJF EILANDEN Welke valentiepatronen zijn er mogelijk met vijf eilanden? Probeer om een idee te krijgen, eerst de volgende opgaven te maken. De oplossingen staan aan het eind van het artikel.

Opgave 1. Bedenk een ligging van vijf eilanden met valentiepatroon 23344.

Opgave 2. Bedenk een ligging van vijf eilanden met valentiepatroon 13334.

Opgave 3. Bedenk een ligging van vijf eilanden met valentiepatroon 11123.

Om te analyseren welke valentiepatronen daadwerkelijk door een eilandengroepering gevormd kunnen worden, moeten we op een systematische wijze te werk gaan. We doen dit door de vijf eilanden en hun onderlinge zichtbaarheden op te vatten als een *graaf*. Een graaf is een symbolische weergave van objecten en hun onderlinge relaties door respectievelijk punten en lijnen. De punten in de graaf zijn bij ons de eilanden. Een lijn tussen twee punten geeft aan of twee eilanden elkaar kunnen zien. We zullen zien dat deze weergave ons wel helpt in de ordening, maar niet noodzakelijkerwijs tot een eilandengligging leidt.

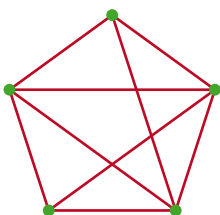
We beginnen met een van de eenvoudigste eilandengliggingen, namelijk die waarbij alle eilanden

elkaar zien (zie figuur 2). Het valentiepatroon is simpel: 44444. We kunnen de eilanden associëren met een graaf met vijf punten (zie figuur 3).

In dit geval is elk tweetal punten (elk tweetal eilanden) door een lijn met elkaar verbonden. De som van de vijf valenties is $5 \times 4 = 20$, het grootst mogelijke aantal in een graaf met vijf punten. Deze graaf heet een *volledige graaf* met 5 punten.

Elke graaf heeft een even valentiesom, omdat elke lijn twee punten verbindt. We hebben de hoogste valentiesom, 20, al gehad (zie figuur 3). Laten we nu kijken naar som 18. Dit valentiepatroon krijg je als je één lijn uit de graaf weghaalt. Zo krijgen we 33444. Uit deze constructie kunnen we ook meten concluderen dat 24444 geen valentiepatroon van een graaf is. Immers: door het wegnemen van één lijn krijgen twee punten valentie 3 (zie figuur 4). Een mogelijke bijbehorende eilandengligging zie je in figuur 5.

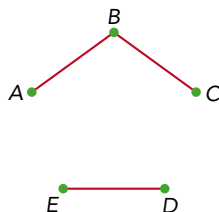
In het algemeen kan je zeggen dat er bij elk valentiepatroon van een mogelijke eilandengligging een graaf kan worden getekend. Omgekeerd blijkt dit niet zo te zijn, zoals figuur 6 aantoont. Bij het valentiepatroon 11112 is wel een graaf mogelijk, maar geen eilandengligging. Dit is als volgt in te zien: stel van de eilanden A, B, C, D en E is B het enige eiland van waaraf je twee andere eilanden kan zien, namelijk A en C. Nu moeten de eilanden D en



Figuur 4 Graaf met valentiepatroon 33444

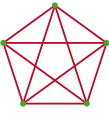
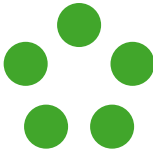
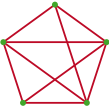
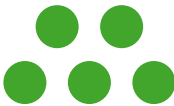
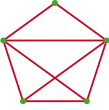
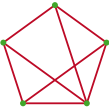
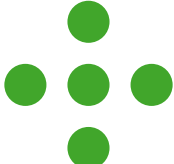


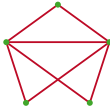
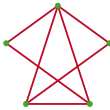
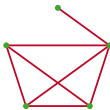
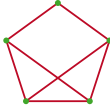
Figuur 5 Eilandenligging bij de graaf in figuur 4

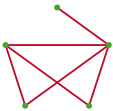
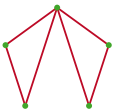
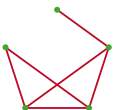
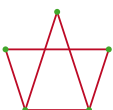


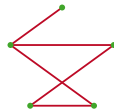
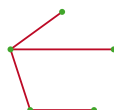
Figuur 6 Bij het valentiepatroon 11112 is geen eilandengligging mogelijk: we komen niet verder dan drie eilanden

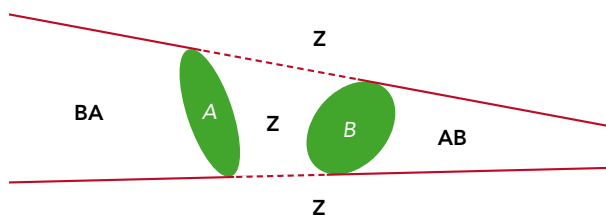
vp = valentiepatroon

nr	som	vp	graaf	eilandenligging
1	20	44444		
2	18	24444	niet mogelijk	niet mogelijk
3	18	33444		
4	16	13444	niet mogelijk	niet mogelijk
5	16	22444	niet mogelijk	niet mogelijk
6	16	23344		
7	16	33334		

nr	som	vp	graaf	eilandenligging
8	14	11444	niet mogelijk	niet mogelijk
9	14	12344	niet mogelijk	niet mogelijk
10	14	22244		
11	14	22334		
12	14	13334		
13	14	23333		niet mogelijk
14	12	11244	niet mogelijk	niet mogelijk

nr	som	vp	graaf	eilandenligging
15	12	11334	niet mogelijk	niet mogelijk
16	12	12234		
17	12	22224		
18	12	12333		
19	12	22233		niet mogelijk
20	10	11134	niet mogelijk	niet mogelijk
21	10	11224		

nr	som	vp	graaf	eilandenligging
22	10	11233		
23	10	12223		
24	10	22222		niet mogelijk
25	8	11114		
26	8	11123		
27	8	11222		
28	6	11112		niet mogelijk



Figuur 7 Zichtbaarheidsgebieden van de eilanden A en B

E nog ergens aan vast gemaakt worden. Dit kan niet aan A , B of C , want die zijn al bezet. Dus D moet aan E vast. Alleen kan je dit eilandenpaar nergens neerzetten, want overal is ten minste een van de eilanden A , B , C zichtbaar.

Het opmerkelijke is dat bij nog drie grafen geen eilandenligging mogelijk is. In de tabel op de vorige twee pagina's zie je de complete telling. Er blijken 20 mogelijke valentiepatronen voor *grafen* te zijn en 16 valentiepatronen voor *eilandenliggingen*. Bij elk even getal van 2 tot en met 20 kun je een graaf maken met dat getal als valentiesom; soms wel meer dan één. Sommige van die grafen hebben punten met valentie nul: die bekijken we hier niet, omdat we er van uitgaan dat je vanaf elk eiland een ander eiland moet kunnen zien. Als we willen dat de valentie van elk punt ten minste 1 is, dan moeten we dus de even getallen van 6 tot en met 20 nalopen. In de tabel zie je de 20 mogelijke valentiepatronen van grafen. Daarvan vallen er drie af als valentiepatronen van eilandgroepen, te weten 22222, 22233 en 23333. In de tabel zijn dit de nummers 13, 19 en 24. Hieronder leggen we uit waarom.

DE VALENTIEPATRONEN 22222, 22233 EN 23333 We laten eerst zien dat 22222 geen valentiepatroon voor een eilandenligging kan zijn (zie figuur 7). Bekijk daartoe eerst de twee eilanden A en B . Deze verdelen het vlak in drie delen:

- **AB**: het gebied zichtbaar vanuit B , maar niet vanuit A (de A -schaduw van B);
- **BA**: het gebied zichtbaar vanuit A , maar niet vanuit B (de B -schaduw van A);
- **Z**: het gebied zichtbaar vanuit A én vanuit B .

Voor we verder gaan, merken we op dat twee personen waarvan de een zich in **AB** bevindt en de ander in **BA**, elkaar niet kunnen zien.

Van de eilanden C , D en E is geen enkel punt zichtbaar vanuit A én B , dus die eilanden liggen in de vereniging van de delen **AB** en **BA**. Omdat elk eiland uit één stuk bestaat, ligt elk van die drie eilanden helemaal in **AB** óf helemaal in **BA**. Omdat E zichtbaar is vanuit A , moet het in **BA** liggen en evenzo moet C in **AB** liggen.

De vraag is nu waar D moet liggen. Als D in **AB** ligt, dan is het niet zichtbaar vanuit E , en als het in **BA** ligt, kunnen de inwoners van C het niet zien.

We kunnen D dus *niet* zó plaatsen dat we het patroon 22222 kunnen realiseren.

Op dezelfde manier kun je de patronen 22233 en 23333 uitsluiten. Om te beginnen 22233 (graaf nummer 19 in de tabel). Nog steeds moet E in **BA** liggen en C in **AB**, maar dan kunnen E en C elkaar niet zien. Voor het patroon 23333 (nummer 13 in de tabel) geldt dat het nog steeds zo is dat geen van de eilanden C , D en E zowel vanaf A als B te zien is, dus C , D en E moeten ieder óf in **AB** óf in **BA** liggen. Omdat ze elkaar onderling moeten kunnen zien, moeten ze allemaal in hetzelfde gebied liggen, maar dan kun je E niet vanuit A zien, of C en D niet vanuit B .

Uiteindelijk zijn er met vijf eilanden zestien verschillende valentiepatronen te maken. Nu hoeven we ze alleen nog maar allemaal daadwerkelijk ergens ter wereld tegen te komen!

Opgave 4. Hoeveel valentiepatronen en bijbehorende eilandenliggingen zijn er mogelijk bij vier eilanden? ■

OPLOSSINGEN

Opgave 1, 2 en 3. Zie de nummers 6, 12 en 26 in de tabel. Mogelijke eilandenliggingen zijn hieronder getekend.



Opgave 4. Er zijn vijf valentiepatronen: 3333, 2233, 1223, 1113, 1122. Mogelijke eilandenliggingen zijn hieronder getekend.



NEUSISCONSTRUCTIES

■ door Jeanine Daems

Het woord 'neusislat' in het nieuwe Zebraboekje *Met passer, liniaal en neusislat*, geschreven door Ad Meskens en Paul Tytgat, is waarschijnlijk nieuw voor je. Een neusislat is een soort liniaal, waarbij slechts één gegeven afstand afgepast is (meestal vanaf een uiteinde).

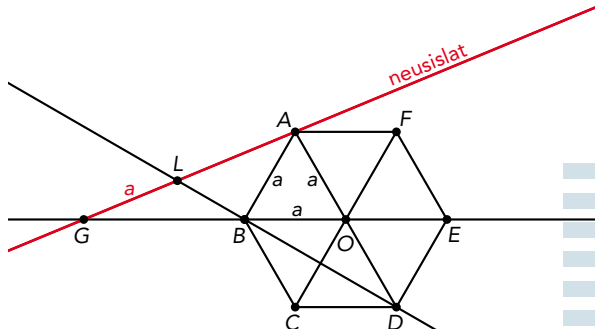
Voor de oude Grieken was zo'n neusislat eigenlijk verboden. Alleen passer en latje werden toegestaan voor meetkundige constructies. Een latje is een liniaal, maar dan zonder schaalverdeling: er mocht niet gemeten worden. De neusis meet natuurlijk in feite wel, dus die voldoet niet aan deze strenge eis. De oude Grieken zelf gebruikten ook wel eens minder strenge eisen. Archimedes bijvoorbeeld maakte wel neusisconstructies, en soms werden ook kegelsneden (parabolen, hyperbolen en ellipsen) toegestaan naast de cirkels en rechte lijnen uit de allerstrengste eis.

Archimedes loste met de neusislat het beroemde probleem van de driedeling van de hoek op. In het artikel 'Delen met Archimedes en Hisashi Abe' op pagina 12 kun je lezen hoe die constructie werkt. In het Zebraboekje kun je ook nog een paar andere neusisconstructies voor ditzelfde probleem vinden.

KUBUS VERDUBBELEN De driedeling van de hoek is een van de drie beroemde Griekse constructieproblemen. De andere twee zijn de verdubbeling van de kubus en de kwadratuur van de cirkel. De kwadratuur van de cirkel komt in het boekje niet voor, maar de verdubbeling van de kubus wel. De vraag hierbij is: gegeven de ribbe van een kubus, kun je dan de lengte van een ribbe construeren van een kubus waarvan de inhoud precies twee keer zo groot is?

Dat komt natuurlijk neer op de vraag: als een lijnstuk van lengte a gegeven is, kun je dan een lijnstuk van lengte $\sqrt[3]{2}a$ construeren? Ook voor dit probleem is het antwoord: met passer en latje alleen kan dat niet, maar met een neusislat wel. In het boekje zijn verschillende oplossingen te vinden. De constructie die ik het leukste vind, werkt als volgt.

Teken een regelmatige zeshoek $ABCDEF$ met zijde a (zie bovenstaande figuur). Teken de rechte lijnen BE en BD . Teken een rechte lijn door A en pas op deze lijn een lijnstuk met lengte a af. Zoek door draaien en verschuiven de positie van de rech-



te lijn zo, dat het stuk tussen de rechte lijnen BE en BD gelijk is aan a . Noem G het punt op BE waarvoor dit zo is; dan is $AG = a + \sqrt[3]{2}a$.

Opgave. Het bewijs dat lijnstuk AL in deze constructie inderdaad lengte $\sqrt[3]{2}a$ heeft, wordt in het boekje niet gegeven, maar is wel een leuke opgave om zelf over na te denken. Hints: neem voor het gemak aan dat $a = 1$, definieer $x = AL$ en $y = GB$, gebruik de sinusregel en de stelling van Pythagoras. (De oplossing staat op de volgende pagina.)

CONSTRUCTIES MET GEOGEBRA Naast deze neusisconstructies is ook het construeren van conchoides met GeoGebra een leuk onderdeel van het boek. Voor de constructies van krommen met GeoGebra leer je verder nog snel hoe poolcoördinaten werken, er wordt wat ingegaan op de geschiedenis, er is een hoofdstuk over construeerbare getallen, enzovoorts. In de afsluitende opdracht onderzoek je waarom de regelmatige zevenhoek niet construeerbaar is, maar die blijkt wederom wel met een neusisconstructie getekend te kunnen worden. Het boekje bestaat, kortom, uit een aantal interessante, maar redelijk losstaande onderwerpen, waarbij het soms wel lastig is de grote lijn te blijven herkennen.

Als je op zoek bent naar een onderwerp voor een profielwerkstuk en meetkundige constructies interessant vindt, geeft dit boekje zeker een boel inspiratie. Wat betreft de voorkennis: de auteurs gaan ervan uit dat je met coördinaten kunt rekenen, begrijpt hoe parameterkrommen werken en al eens met meetkundige bewijzen bent bezig geweest. ■

Ad Meskens en Paul Tytgat, *Met passer, liniaal en neusislat*, Zebra-reeks deel 41, Epsilon Uitgaven, 2015. 68 pagina's, € 10.

OPLOSSING OPGAVE PAGINA 9

Voor de oplossing van de opgave op de vorige pagina, nemen we voor het gemak aan dat $a = 1$. Zij $x = AL$ en $y = GB$. Omdat BD de gelijkzijdige driehoek BOC precies doormidden deelt, is $\angle OBD = 30^\circ$.

Daarom zijn de hoeken ABD en ABL recht. In driehoek ABL noteren we met α de hoek bij L . De sinus van die hoek is, per definitie, gelijk aan 'overstaande zijde' gedeeld door 'schuine zijde', ofwel:

$$\sin(\alpha) = 1/x.$$

En in driehoek GLB vertelt de sinusregel ons:

$$\frac{\sin(30^\circ)}{1} = \frac{\sin(180^\circ - \alpha)}{y},$$

Omdat $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin(\alpha)$ en $\sin(30^\circ) = \frac{1}{2}$, vinden we nu dat

$$\sin(\alpha) = y/2.$$

Combineren levert op dat $1/x = y/2$, oftewel $y = 2/x$.

Verder kunnen we vanuit A een loodlijn op GE

tekenen; noem het voetpunt S . Volgens de stelling van Pythagoras in driehoek GAS geldt dan:

$$(y + \frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2}\sqrt{3})^2 = (1+x)^2.$$

Dit verder uitwerken en $y = 2/x$ invullen leidt tot de vergelijking

$$x^4 + 2x^3 - 2x - 4 = 0. \quad (*)$$

En als je $x = \sqrt[3]{2}$ invult, oftewel $x^3 = 2$, zie je dat dat leidt tot

$$x \cdot 2 + 2 \cdot 2 - 2x - 4$$

en dat is inderdaad 0. Dus $x = \sqrt[3]{2}$ is inderdaad een oplossing! Voor de laatste stap van het bewijs – aantonen dat $\sqrt[3]{2}$ de enige positieve oplossing van $(*)$ is – merken we op dat $x^4 + 2x^3 - 2x - 4$ kan worden ontbonden als $(x+2)(x^3-2)$. Dit is niet zo lastig om in te zien, omdat we al wisten dat $x^3 = 2$. De enige andere (reële) oplossing van $(*)$ is dus $x = -2$. ■

10

OPLOSSING MUTSENPROBLEEM

Drie logici gaan naar een café. Bij binnenkomst krijgt ieder, onafhankelijk van elkaar, een rode of een blauwe muts op; de kans op een rode muts is voor elk 0,5 en de kans op een blauwe eveneens. Elke persoon kan de mutsen van de twee anderen zien, maar zijn eigen muts niet. Elke persoon kan ofwel proberen om de kleur van zijn eigen muts te raden, ofwel passen. Alle drie doen dat tegelijkertijd, dus het is niet mogelijk om je gok te baseren op de gok van een ander. Als niemand verkeerd gokt én ten minste één persoon de kleur van zijn muts goed raadt, krijgen ze allemaal een grote prijs. Belangrijk: vóór de wedstrijd kunnen de drie logici met elkaar overleggen. Welke strategie moeten ze hanteren om ervoor te zorgen dat de kans dat ze winnen maximaal is?

OPLOSSING Voor de verdeling van de mutsen

zijn $2^3 = 8$ mogelijkheden: RRR, RRB, RBR, BRR, RBB, BRB, BBR, BBB. In 6 van de 8 gevallen zijn beide kleuren mutsen vertegenwoordigd: één muts van de ene kleur en twee mutsen van de andere kleur. In elk van deze gevallen geldt: er is precies één persoon die twee gelijk gekleurde mutsen ziet. De strategie is nu als volgt. Als je twee verschillend gekleurde mutsen ziet, dan pas je. En als je twee gelijk gekleurde mutsen ziet, gok je dat je eigen muts de kleur heeft die je *niet* ziet. Dus zie je twee rode mutsen, dan roep je 'blauw'. En zie je twee blauwe, dan roep je 'rood'. In de 6 gevallen waarbij beide kleuren vertegenwoordigd zijn, leidt deze strategie tot winst. In de andere 2 gevallen gaat het fout: niemand past dan, iedereen roept de foute kleur. De winstkans is dus $6/8$, ofwel 75%.

Kijk voor een uitgebreidere uitleg op www.relisoft.com/science/hats3.html. ■

JOURNAAL

■ door Alex van den Brandhof en Marc Seijlhouwer

Abelprijswinnaar John Nash verongelukt

De beroemde wiskundige John Nash (1928) is op 23 mei op tragische wijze om het leven gekomen. Op de terugweg van een reis naar Noorwegen maakte de taxichauffeur die Nash en zijn vrouw van het vliegveld naar huis zou brengen, een inhaalmanoeuvre waarbij de taxi in botsing kwam met een andere auto. Dat werd het echtpaar fataal.

De reis naar Oslo maakte Nash omdat hij daar, samen met de Canadees Louis Nirenberg (1925), de Abelprijs in ontvangst had genomen. Deze prijs, officieus ook wel de 'Nobelprijs voor wiskunde' genoemd, was aan hen toegekend voor hun baanbrekende werk in de theorie van partiële differentiaalvergelijkingen. De twee hebben elkaar sterk beïnvloed, maar hebben nooit samen gepubliceerd.

Eerder al, in 1994, werd Nash bekroond met de Nobelprijs voor economie, voor zijn onderzoek in de speltheorie. Over dit werk, en vooral ook over zijn ziekte – Nash kampte sinds zijn dertigste tientallen jaren met schizofrenie – gaat de Oscarwinnende film *A Beautiful Mind* uit 2001. Deze film laat Nash' onderzoek over partiële differentiaalvergelij-

kingen buiten beschouwing. Maar volgens kenners behoren juist deze resultaten tot zijn belangrijkste. Een van Nash' mijlpalen is zijn bewijs uit 1957 van Hilberts negentiende probleem, op het gebied van de variatierekening. Nash is de enige persoon ter wereld die zowel een Nobelprijs als de Abelprijs heeft gewonnen. (AvdB)



Foto: Håkon Mosvold Larsen / NTB scapix

Op 19 mei namen John Nash (links) en Louis Nirenberg (midden) de Abelprijs in ontvangst uit handen van de Noorse koning Harald (rechts).

Databasegoeroe wint Turing Award

De Amerikaan Michael Stonebraker (1943), een informaticus die veel werk heeft gedaan op het gebied van databases, heeft de Turing Award gewonnen. De Turing Award is de hoogste onderscheiding in de informatica en wordt sinds 1966 jaarlijks uitgereikt door de Association for Computing Machinery. De prijs wordt op 20 juni uitgereikt aan Stonebraker.

Stonebraker krijgt de prijs onder andere voor het bedenken van Ingres, een databasestructuur die nu nog steeds veel gebruikt wordt. Volgens de jury geldt Stonebraker als de architect van vrijwel alle moderne databases. Een database is een digitaal archief. Bij het ontwerpen van een database is het grote probleem hoe je gegevens zo efficiënt mogelijk kan opslaan. Tegenwoordig vormen ze de ruggengraat van het internet; bijna elke website gebruikt ze. Stonebraker bedacht manieren om databases veiliger en

eenvoudiger doorzoekbaar te maken. Hij kwam met regels om een verzoek van de gebruiker aan de database om te bouwen, zodat het verzoek klopte met de structuur van de database. In de praktijk kwam dat erop neer dat niet elke gebruiker zomaar alles uit de database kon halen en bijvoorbeeld de plek of volgorde van bepaalde gegevens niet kon aanpassen. Het leidde tot databases die geordender, overzichtelijker en veiliger waren. Dat maakte ze veel bruikbaar, en het Ingres-systeem waarin Stonebraker zijn uitvinding inbouwde is nu nog steeds de basis voor de databases die door grote bedrijven worden gebruikt.

Bij de Turing Award, officieus ook wel de 'Nobelprijs voor informatica' genoemd, hoort een geldbedrag van een miljoen dollar. Dat bedrag is fors hoger dan voorgaande jaren, waarmee sponsor Google het belang van computerwetenschappen in de moderne maatschappij wil benadrukken. (MS)

HOEKEN DELEN MET

■ door Luuk Hoevenaars

Heb je je wel eens afgevraagd wat je met een passer en een liniaal zónder streepjes waarop afstanden staan (gewoon een latje dus) allemaal kunt construeren? De constructies van de middelloodlijn en de bissectrice zijn in de eerste klas waarschijnlijk wel aan bod gekomen.

Er bestaan nog veel meer constructies die mogelijk zijn met passer en latje. Een regelmatige zeventienhoek bijvoorbeeld. Dat ontdekte Carl Friedrich Gauss in 1796 toen hij 19 jaar oud was. Hij was daar zo trots op dat hij besloot wiskunde te gaan studeren. Gelukkig maar, want hij werd een van de grootste wiskundigen ooit en kreeg vanwege zijn vele ontdekkingen de bijnaam Prins van de Wiskunde.

ONMOGELIJK Hoe interessant het ook is, dit artikel gaat niet over wat je wél kunt construeren met passer en latje, maar juist wat je níét kunt construeren. Er zijn constructies die onmogelijk blijken, niet omdat je niet lang genoeg hebt geprobeerd, maar omdat ze echt niet uitgevoerd kunnen worden binnen bepaalde, duidelijk vastgelegde spelregels.

Een voorbeeld van zo'n onmogelijke constructie is de *trisectrice* van een willekeurige hoek. Net zoals de bissectrice een hoek in tweeën deelt, kun je met de trisectrice een hoek in drieën delen. Bij de oude Grieken was eigenlijk al bekend dat in het algemeen de trisectrice niet met passer en latje geconstrueerd kan worden. Ze waren echter ook wel in voor een potje valsspelen. Zo vroeg Archimedes zich rond het jaar 250 voor Christus af of een hoek wél in drieën kan worden gedeeld als je een liniaal met streepjes (een *neusis* in het Grieks) mag gebruiken. En het lukte hem: je ziet Archimedes' werkwijze hiernaast.

ORIGAMI Een andere interessante manier om de spelregels te veranderen, is door te vouwen in plaats van te tekenen. Dan heb je dus helemaal geen gereedschap meer nodig! De Japanse vouwkunst *origami* (ori = vouwen, gami = papier) ontstond ongeveer duizend jaar geleden, maar is pas sinds halverwege de negentiende eeuw als constructiemethode gebruikt. Het nadeel van deze methode lijkt te zijn dat je alleen lijnen en punten kunt maken, en geen cirkels. Je zou het daarom misschien niet

verwachten, maar met origami kun je alle lijnen en punten construeren die je met passer en latje kunt maken, en zelfs nog meer!

Opgave 1. Gegeven zijn een lijn l en een punt P op die lijn. Hoe vouw je de loodlijn op l door P ?

Opgave 2. Gegeven zijn twee lijnen die elkaar snijden. Hoe vouw je de bissectrice (deellijn) van deze lijnen?

Opgave 3. Kun je ook een hoek tussen twee gegeven lijnen in vier gelijke hoeken verdelen?

In 1980 bedacht de Japanse wiskundige Hisashi Abe hoe je met origami een willekeurige hoek in drieën verdeelt: de stappen zie je op pagina 14. Het bewijs dat de hoek daadwerkelijk in drie gelijke delen wordt verdeeld, staat op pagina 15. Hoeken die zijn gemarkeerd met een * zijn allemaal gelijk. In de laatste stap blijkt de hoek die de lijnen l en m met elkaar maken, te bestaan uit drie met een * gemarkeerde hoeken.

SOMS KAN HET WEL MET PASSER EN

LINIAAL We zeiden dat met passer en latje een hoek niet in drieën gedeeld kan worden. Maar bij sommige speciale hoeken lukt het wel. Bijvoorbeeld bij een *rechte* hoek (zie figuur 1). De lijnen l en m staan loodrecht op elkaar en snijden elkaar in het punt A . Kies een willekeurig punt B op m en teken de cirkel met middelpunt A en punt B op de rand. Teken daarna de cirkel met middelpunt B en punt A op de rand. Trek ten slotte de lijn door A en het snijpunt C van de twee cirkels.

Opgave 4. Bewijs dat de hoek tussen lijn AC en lijn l gelijk is aan 30° , en dus de trisectrice is van de rechte hoek tussen l en m .

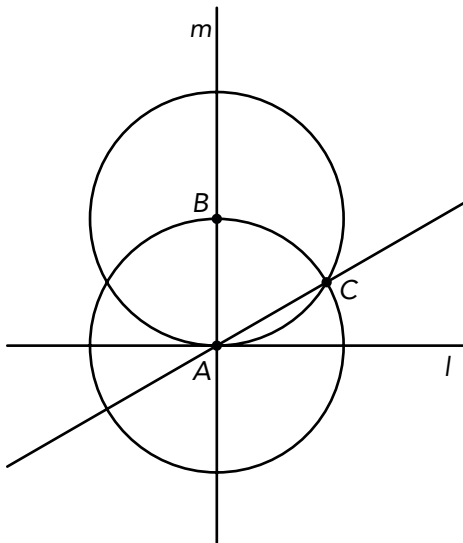
MORLEY'S MIRAKEL Of de Britse wiskundige Frank Morley (1860-1937) iets van origami af wist, weten we niet, maar zeker is dat hij wel veel wist van driedelingen van hoeken. Bij het bestuderen van *cardioiden* (bepaalde krommen in het platte vlak) stuitte hij op een wonderbaarlijke eigenschap van trisectrices in een driehoek.

ARCHIMEDES EN ABE

Je weet misschien wel dat de drie bissectrices in een driehoek elkaar precies snijden in één punt (zie figuur 2 op de volgende pagina, links). Dat is opmerkelijk, omdat drie lijnen over het algemeen drie onderlinge snijpunten hebben.

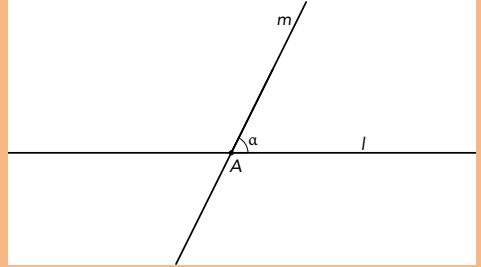
Morley ontdekte een soortgelijke eigenschap voor de trisectrices in een driehoek (zie figuur 2, rechts). De trisectrices snijden elkaar paarsgewijs en de driehoek die uit die snijpunten ontstaat is gelijkzijdig, ongeacht de vorm van driehoek ABC waarmee wordt gestart!

In de twintigste eeuw zijn tientallen bewijzen gegeven van deze wonderbaarlijke eigenschap. Zo'n bewijs heeft ook wel eens in *Pythagoras* gestaan (zie bijvoorbeeld het artikel 'Een schoonheidsprijs voor een stelling' in *Pythagoras* 19-2 (november 1979); tevens opgenomen in het boek *De Pythagoras Code*).

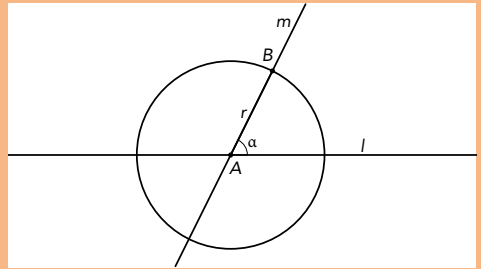


Figuur 1 Constructie van de trisectrice van een hoek van 90° met passer en latje.

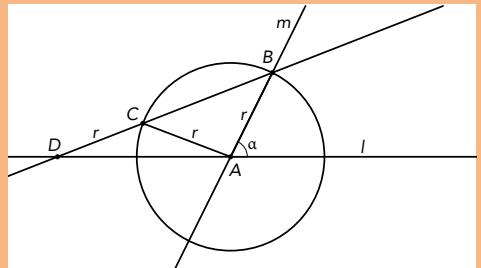
DRIEDELING VAN EEN HOEK MET EEN NEUSIS



1. Twee lijnen, l en m , snijden elkaar in punt A . Hoek α willen we in drieën delen met behulp van een passer en een neusis met streepjes op afstand r van elkaar.



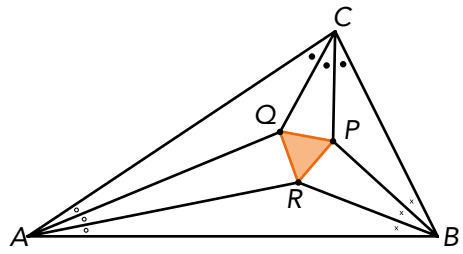
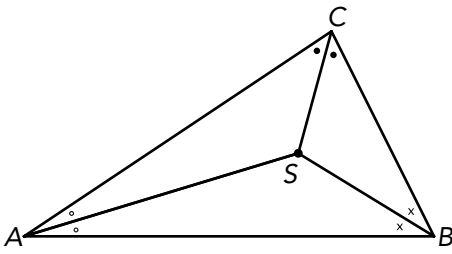
2. Teken een cirkel met middelpunt A en straal r . Het snijpunt van de cirkel met lijn m noemen we B .



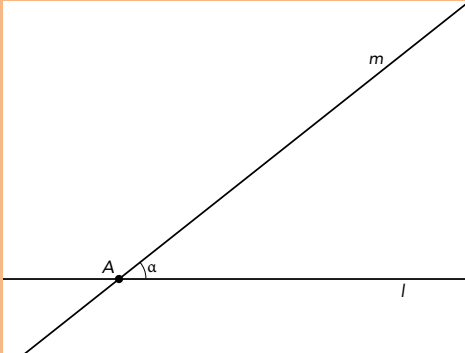
3. Teken met de neusis een lijn door B . Doe dit zó, dat

- deze lijn de cirkel nog in een tweede punt, C , snijdt;
- de afstand CD gelijk is aan r (hierbij is D het snijpunt van de neusis en lijn l).

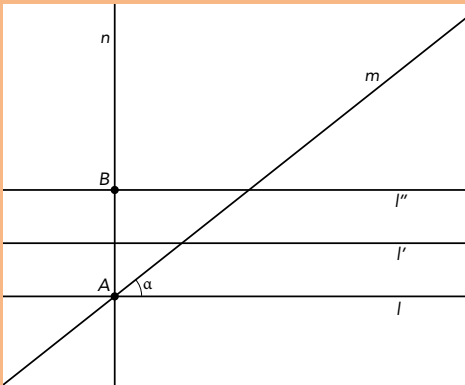
Door te gebruiken dat de driehoeken ACD en ACB gelijkbenig zijn, kun je nu aantonen dat $\angle CDA = \alpha/3$.



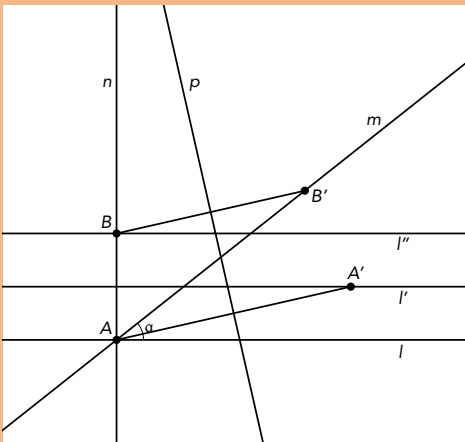
DRIEDELING VAN EEN HOEK MET ORIGAMI



1. Bekijk twee (vouw)lijnen l en m met snijpunt A . Hoek α willen we met behulp van vouwen in drieën delen.



2. Vouw de loodlijn n op lijn l door punt A . Vouw de loodlijn l'' op lijn n door een willekeurig punt B van n . Vouw A op B en noem de vouwlijn l' .



3. Vouw tegelijkertijd punt A op lijn l' en punt B op lijn m . Noem de vouwlijn p en de beeldpunten A' en B' . Vouw de lijn AA' (dit is de loodlijn op p door A). De hoek tussen l en AA' blijkt precies gelijk te zijn aan $\alpha/3$ en is dus de trisectrice van α .

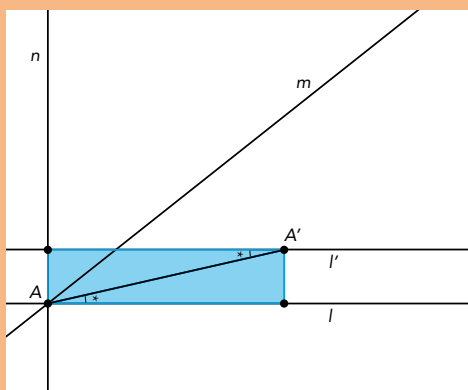
Figuur 2 Links een driehoek ABC met zijn drie bissectrices; die snijden elkaar in S . Rechts een driehoek ABC met alle trisectrices; driehoek PQR is gelijkzijdig!

ANDERE CONSTRUCTIEMETHODEN Er zijn nog veel meer interessante constructiemethoden dan de twee die we in dit artikel hebben besproken. Wat te denken bijvoorbeeld van constructies met

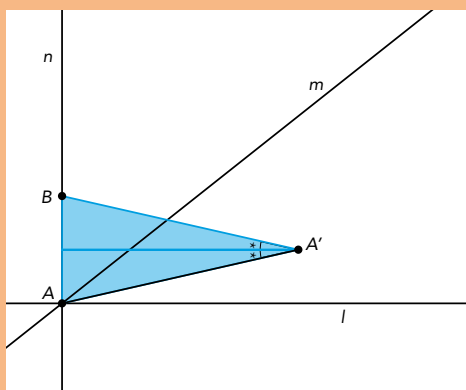
- lucifers (hiermee kun je even veel construeren als met passer en latje);
- tomahawk (hiermee kun je even veel construeren als met origami);
- meccano (hiermee kun je meer construeren dan met origami).

Over dergelijke constructies kun je lezen in het boek *Geometric Constructions* (Springer, 1998) van George Martin. ■

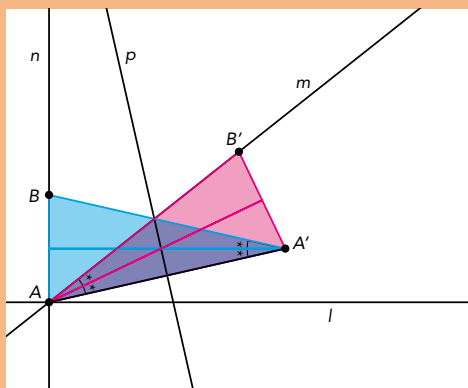
BEWIJS VAN DE ORIGAMICONSTRUCTIE



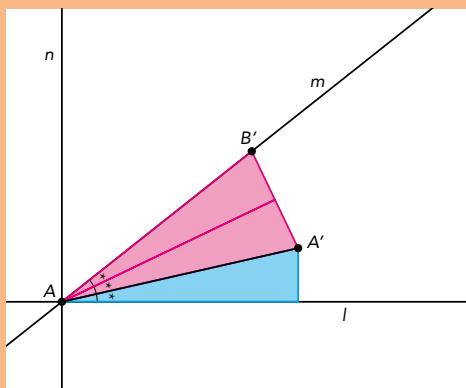
1. De lijnen l en l' in de vouwconstructie zijn evenwijdig (zie je waarom?). De twee hoeken bij A en A' die gemarkeerd zijn met een * zijn gelijk vanwege Z-hoeken.



2. De korte zijden van de twee blauwe driehoeken zijn gelijk (zie je waarom?). De driehoeken zijn congruent op basis van zijde-hoek-zijde.



3. De blauwe driehoeken zijn congruent met de roze driehoeken, omdat de blauwe worden gespiegeld in de vouwlijn p .



4. De drie getekende driehoeken zijn congruent, dus de drie gelijke hoeken die gemarkeerd zijn met een * vormen samen hoek α . De lijn AA' deelt α dus in drieën.

$$a + 0$$

$$\prod_{p \text{ priem}} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = 0$$

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n+1}}{(2n+1)!} = 0$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \downarrow 0} x \ln(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty}$$

$$= a$$

$$a \times \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{0}^a = \mathbf{0} \quad (a > 0)$$

$$a^{\mathbf{0}} = 1 \quad (a \neq 0)$$

$$\frac{\mathbf{0}}{a} = \mathbf{0} \quad (a \neq 0)$$

$$\frac{d}{dx} a = \mathbf{0}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \mathbf{0}$$

$$\sin(\pi) = \mathbf{0}$$

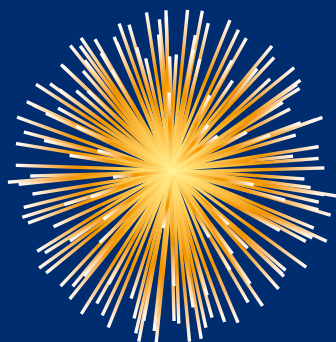
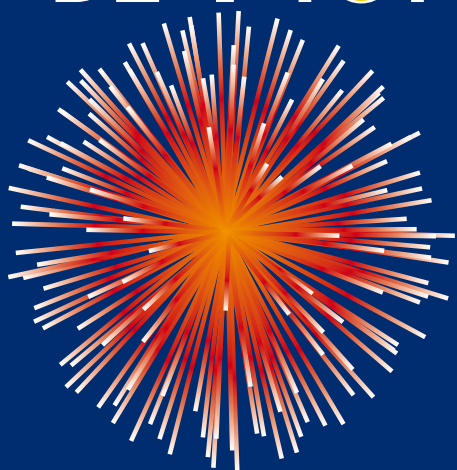
$$\emptyset, \{\emptyset\}, \\ \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \\ \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \dots$$

$$\frac{1}{n} = \mathbf{0}$$

In november schreven we de 1-tot-9-prijsvraag uit. Hoewel er veel inzendingen waren, vingen we her en der op dat er hard is gerekend zonder dat er resultaten zijn ingestuurd. Dat is jammer, want de redactie is altijd benieuwd naar oplossingen van lezers. Toch kunnen we enorm tevreden zijn met de grote diversiteit en hoge kwaliteit van de inzendingen.

■ door Matthijs Coster

DE 1-TOT-9-PRIJSVRAAG UITSLAG



DE OPDRACHTEN

1-tot-9-klein. Kies een volgorde waarin je de getallen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 en 9 plaatst. Plaats vervolgens hiertussen de bewerkingen +, -, × en :, zó dat de expressie die er nu staat precies het getal 1 oplevert. Haakjes mogen onbepaald worden gebruikt, evenals extra mintekens (van de 4 mag je dus desgewenst -4 maken). Laat de getallen in dezelfde volgorde staan en probeer nu zoveel mogelijk andere getallen te maken.

1-tot-9-groot. Kies opnieuw een volgorde waarin je de getallen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 en 9 plaatst. Probeer door de bewerkingen +, -, × en : ertussen te zetten het getal 2000 te maken. Als dat is gelukt, probeer je 2001 te maken, zonder de volgorde van de negen getallen te wijzigen. Daarna ga je verder met 2002, 2003 enzovoort. Probeer zo ver mogelijk te komen.

OPLOSSINGEN De enorme variëteit bleek wel uit de keuze van de volgorde van de getallen 1 tot en met 9. Slechts twee volgordes (**123456789** en **987654321**) werden tweemaal ingezonden. Sommige inzenders schreven een computerprogramma, anderen rekenden zonder daarvan gebruik te maken. Dat leverde een groot verschil in resultaten. Het neemt niet weg dat er bij beide oplossingsmethoden slimme strategieën nodig waren om er

gens te komen.

Joris Nieuwveld kwam met een fraai wiskundig idee. Met de getallen 1 en 2 in de volgorde **21** kun je eenvoudig 1 tot en met 3 maken: $2 - 1 = 1$, $2 \times 1 = 2$ en $2 + 1 = 3$. Joris koos de volgorde **984365** en liet zien dat je zo de getallen 1 tot en met 144 kunt maken (met uitzondering van 128, 129 en 142). Nu kun je dit combineren tot een tabel met resultaten 1 tot en met 1000 door $7 \times$ bewerking(**984365**) $\pm$ bewerking(**21**). Voor de drie uitzonderingen moest hij toch nog wat rekenen.

De berekeningen boven de 2000 waren nog veel lastiger. In het januarinummer noemden we al het trucje waarmee je al tot 2032 kon komen: $2016 = 4 \times 7 \times 8 \times 9$. Het is niet zo moeilijk om met de resterende getallen (1, 2, 3, 5 en 6) de getallen 0 tot en met 16 te maken, zelfs als de volgorde gefixeerd is. Gecombineerd met 2016 kun je dan eenvoudig de getallen 2000 ($= 2016 - 16$) tot en met 2032 ($= 2016 + 16$) maken. Zowel Nathan van 't Hof als Joris Nieuwveld gebruikten dit trucje. Stan Barmantloo gebruikte slechts het feit dat $2016 = 4 \times 7 \times 8 \times 9$.

Voor grotere getallen wordt het heel lastig om de berekening voort te zetten. Hiervoor is de hulp van de computer onontbeerlijk. Yannick Scheepers ondervond dat zelfs de computer het rekenwerk knap lastig vond. Hij schreef een programma en liet de computer een hele nacht rekenen zonder dat er een

$$\begin{aligned}
&1 + 4 + (5 + 8 \times (9 + 7)) \times (3 + 6 \times 2) = 2000 \\
&1 + 4 - (5 - 8 \times 9 \times 7) : 3 \times 6 \times 2 = 2001 \\
&-1 + 4 - 5 + (8 \times 9 \times 7 - 3) \times (6 - 2) = 2002 \\
&1 - 4 - 5 + (8 \times 9 \times 7 - 3) \times 6 + 2 = 3000 \\
&1 - 4 - 5 + (8 \times 9 \times 7 - 3) \times (6 + 2) = 4000 \\
&-1 - 4 + (5 + 8 \times 9) \times (7 \times (3 + 6) + 2) = 5000 \\
&-1 - 4 \times (5 - 8 \times (9 \times 7 \times 3 - 6 + 2)) = 5899 \\
&1 - 4 + 5 \times (8 + 9 \times 7 \times 3) \times 6 + 2 = 5909 \\
&-1 \times 4 \times (5 - 8 \times 9 \times 7) \times 3 + 6 \times 2 = 6000 \\
&-(1 - 4 \times (5 \times 8 - 9)) \times (7 + 3 \times 6) \times 2 = 6198 \\
&-(1 + 4 \times (5 + 8)) \times (9 - 7 \times 3 \times 6) + 2 = 6203 \\
&-1 - 4 \times (5 - 8 \times (9 \times 7 \times 3 + 6) + 2) = 6211 \\
&-1 \times 4 \times (5 - 8 \times (9 \times 7 \times 3 + 6) + 2) = 6212 \\
&1 - 4 \times (5 - 8 \times (9 \times 7 \times 3 + 6) + 2) = 6213 \\
&(1 + 4 \times 5) \times (8 + (9 + 7) \times 3 \times 6) - 2 = 6214 \\
&-1 - 4 + (5 + 8) \times 9 \times (7 \times 3 + 6) \times 2 = 6313 \\
&1 + 4 + (5 + 8 \times 9) \times 7 + 3 \times 6 \times 2 = 6509 \\
&1 - 4 \times (5 \times (8 - 9 \times 7) + 3) \times 6 + 2 = 6521 \\
&1 + 4 \times (5 \times 8 + 9 \times 7) \times (3 \times 6 - 2) = 6593 \\
&-1 - 4 - 5 \times (8 - 9 \times 7) \times 3 \times (6 + 2) = 6595 \\
&1 + (4 + (5 \times 8 \times 9 + 7) \times 3) \times 6 + 2 = 6633 \\
&(1 + 4 + (5 \times 8 \times 9 + 7) \times 3) \times 6 - 2 = 6634
\end{aligned}$$

antwoord volgde. Toch is het knap om een dergelijk programma te schrijven.

Anderen kwamen wel verder. Enkele van de programmeurs bleven ergens haken tussen de 2000 en 3000. Jan Paredaens gebruikte Python, had zijn bovengrens ingesteld op 3000 en koos de volgorde **123456789**. Hij zond ook enkele extra bestanden in, waarbij hij liet zien welke resultaten hij kon behalen als hij bepaalde operaties niet gebruikte. Zo liet hij zien dat slechts bij acht getallen de operatie : noodzakelijk is, namelijk bij 2104, 2284, 2614, 2758, 2812, 2884, 2902 en 2914.

Pim Spelier stuurde een uitgebreide toelichting bij zijn Python-programma. Hij kwam tot 3398. Hij liet het programma recursief te werk gaan (d.w.z. dat een programma-onderdeel in staat was om zichzelf aan te roepen met andere (minder) variabelen). Belangrijk onderdeel is dat je voor een aantal getallen (bijvoorbeeld 7, 3, 8, 9, 4) alle mogelijke waarden wilt bepalen die kunnen worden bereikt door toepassing van willekeurige haakjes en operaties. Lastig hierbij is dat je van voor naar achter kunt werken, maar dan mis je 560, dat wordt verkregen door $7 \times (3 + 8 + 9) \times 4$. Daarom rekende Pim eerst van voren naar achter, maar daarna ook van achter naar voren.

Aad van de Wetering paste zijn eigen programma 'Reken' toe, dat hij al twintig jaar geleden had

geschreven. Hij moest alleen nog een keuze maken voor een optimale volgorde. Hij koos te eindigen met **85321**. Zijn programma kwam het verst met de volgorde **469785321**. Hij kwam tot en met 4481. Het record werd echter gevestigd door Bas van 't Hof. Met de volgorde **145897362** kwam hij tot en met 6634; hierboven zie je 22 van zijn oplossingen. Bas schreef zijn programma in Fortran.

PRIJZEN We zijn erg onder de indruk van de kwaliteit van de inzendingen, zowel van de scholieren als van de volwassen lezers. De jury heeft besloten het prijzengeld (200 euro) te verdelen onder de beste inzendingen van scholieren. Pim Spelier (Christelijk Gymnasium Sorghvliet, Den Haag) krijgt 100 euro, Joris Nieuwveld (Stedelijk Gymnasium, Nijmegen) 50 euro, en Nathan van 't Hof (Hofstad Lyceum, Den Haag) en Stan Barmantloo (Stedelijk Gymnasium, Apeldoorn) ontvangen elk 25 euro.

Wie bij '1-tot-9-groot' vóór 1 januari tot 2015 wist te komen, dong mee naar een extra prijs. De allereerste inzenders waren Maxime en Justine Geenens (Koninklijk Atheneum, Ronse, België), Pim Spelier (Christelijk Gymnasium Sorghvliet, Den Haag) en Dave Houtenbos (Bonhoeffer College, Castricum). Zij krijgen een QAMA-rekenmachine. ■

Onze derde aflevering in de serie over kegelsneden gaat over ellipsen. Als je een kegel zodanig in twee stukken zaagt dat de rand van het snijvlak gesloten is, is dat snijvlak ellipsvormig. Een mooi bewijs daarvan is afkomstig van Germinal Pierre Dandelin.

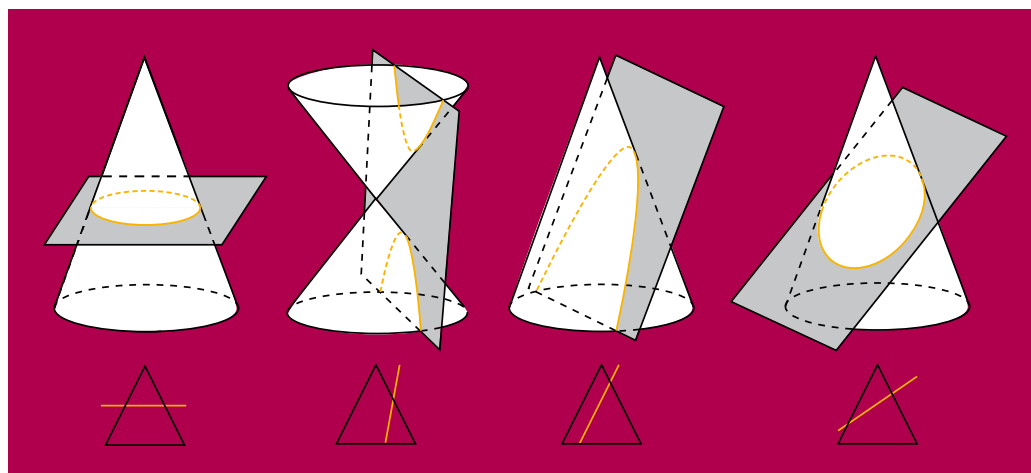
■ door Jan Guichelaar, Paul Levrie en Rudi Penne

DE BOLLEN VAN DANDELIN

Ellipsen kunnen op vele manieren gedefinieerd worden. In *Pythagoras* van februari 2009 (te vinden in het archief op www.pyth.eu) presenteerden we een 'ellipsenparade' van zes verschillende manieren. Een daarvan was de zogeheten 'tuinmanmethode': tuinmannen passen deze methode toe om ovale perkjes af te zetten. Zet twee spijkers in een plankje en neem een touwtje waarvan de einden aan elkaar zijn geknoopt. Leg het touwtje om de spijkers en trek het met de punt van een potlood strak. Teken een gesloten kromme op het plankje door steeds het touwtje strak te houden. Het stuk touw tussen de twee punten heeft steeds dezelfde lengte, dus de

som van de afstanden van het potlood tot de twee punten ook. De kromme die nu verschijnt op het plankje noemen we een *ellips*, de twee plaatsen van de spijkers heten de *brandpunten*.

KEGELSLEDEN Een kegelsnede krijg je door de zaag in een kegel te zetten. Een kegel heeft een top *T* en daardoorheen loopt een as (een halve rechte). De *kegelmantel* wordt gevormd door alle halve rechten die vertrekken vanuit *T* en die met de as een vaste hoek $\alpha < 90^\circ$ maken. We kunnen ook een dubbele kegel maken, zoals in het tweede plaatje van figuur 1. De kegel kan op meerdere manieren



Figuur 1 De vier kegelsneden; van links naar rechts: cirkel, hyperbool, parabool, ellips

worden gesneden met een vlak. Ze zijn aangegeven in figuur 1:

- een vlak loodrecht op de as;
- een vlak dat beide delen van de kegel snijdt;
- een vlak dat maar één deel van de kegel snijdt en evenwijdig loopt aan een van de halve rechten die de kegel vormen;
- een vlak dat maar één deel van de kegel snijdt en een gesloten schuin 'stuk' van de kegel snijdt.

In het eerste geval is de snijrand een *cirkel*. In het tweede geval zien we als snijranden twee losse krommen. Deze vormen samen de twee takken van een *hyperbool*. In het derde geval is de snijrand een

parabool. In het laatste geval, en daar gaan we het verder over hebben, zien we een gesloten kromme als snijrand.

Die kromme is een *ellips*. Dit moeten we natuurlijk nog wel bewijzen, omdat we de ellips met de tuinmanmethode gedefinieerd hebben. We moeten dan in die gesloten kromme de twee brandpunten vastleggen en daarna bewijzen dat vanaf elk punt op de snijrand de som van de afstanden tot die twee brandpunten een vaste waarde heeft.

Daarvoor heeft Germinal Pierre Dandelin (1794-1847) een prachtig bewijs bedacht. Dandelin had een Franse vader en een Belgische moeder. Hij werd wiskundige en militair. Hij vocht voor Napoleon in 1814. Na de Napoleontische tijd ging hij naar België (toen nog deel van De Nederlanden) en werd Nederlander. Later speelde hij nog een militaire rol bij de afscheiding van België van Nederland in 1830.

DANDELINS BEWIJS MET DE BOLLEN

Dandelins bewijs is zo mooi, omdat het zo simpel is. Bekijk de kegel K , met top T , in figuur 2. Het vlak V snijdt een stuk van de kegel af met de gesloten rand E . We moeten bewijzen dat deze gesloten kromme E een ellips is.

Boven het vlak en binnen de kegel plaatsen we een zo groot mogelijke bol S_1 . Deze bol raakt de binnenkant van de kegel volgens de cirkel R_1 en het snijvlak in punt F_1 . Plaats onder het snijvlak en binnen de kegel de bol S_2 die aan de kegel raakt volgens cirkel R_2 en het snijvlak in punt F_2 .

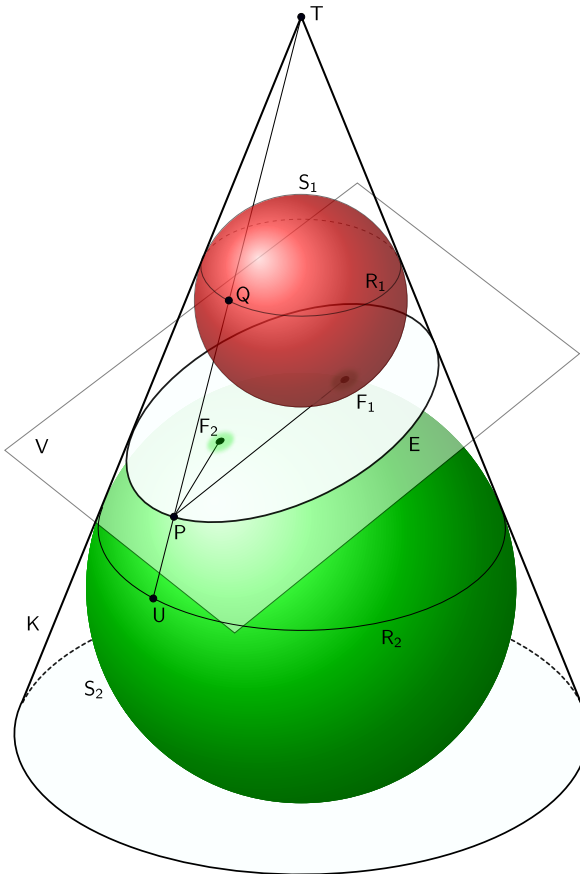
Neem nu op de gesloten kromme een willekeurig punt P en trek de lijn door T en P op de kegelmantel. Deze lijn raakt aan de bovenste bol in punt Q op cirkel R_1 en aan de onderste bol in punt U op cirkel R_2 .

Bekijk nu de twee lijnstukken PF_1 en PQ . Deze twee lijnstukken raken beide aan de bol S_1 . Hieruit volgt dat deze lijnstukken even lang zijn: $PF_1 = PQ$. Op dezelfde manier kun je laten zien dat $PF_2 = PU$.

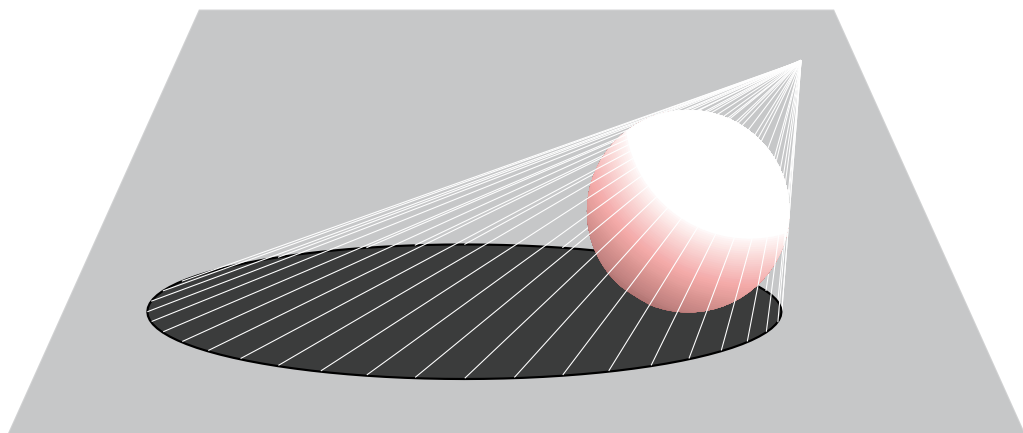
Voor de som van de afstanden van P tot F_1 en F_2 hebben we:

$$PF_1 + PF_2 = PQ + PU = QU.$$

Als je nu een ander punt zou nemen van de geslo-



Figuur 2 Dandelins bewijs met twee bollen



Figuur 3 De schaduw van een bol

ten kromme, zeg P' , dan krijgen we:

$$P'F_1 + P'F_2 = P'Q' + P'U' = Q'U'.$$

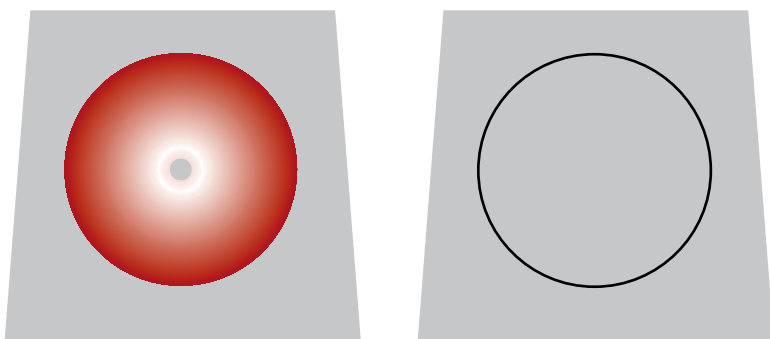
Maar je ziet direct dat $QU = Q'U'$, omdat het steeds dezelfde afstand is langs een halve rechte uit de top die de twee cirkels snijdt.

22 We mogen nu dus concluderen dat voor elk punt van de gesloten kromme E de som van de afstanden tot F_1 en F_2 een vaste waarde heeft. Volgens de definitie aan het begin van dit artikel is E dus een ellips.

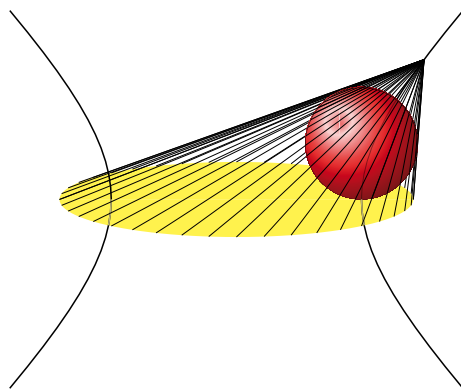
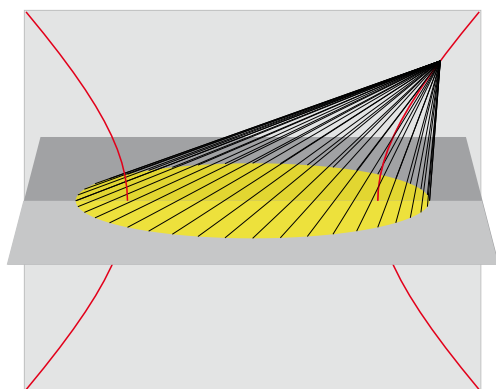
LICHTBRON De twee bollen in figuur 2 raken het vlak V precies in de brandpunten F_1 en F_2 van de ellips. De volgende toepassing hiervan gebruikt maar één bol. Stel dat een bol die op een vlak ligt belicht

wordt door een puntvormige lichtbron die zich op een hoogte bevindt die groter is dan de diameter van de bol. Dan werpt de bol een schaduw af op het vlak waar hij op rust, en de rand van die schaduw is een ellips. Er ontstaat namelijk een kegel (zie figuur 3). De snijding van die kegel met het vlak waar de bol op rust, is dan ook een ellips. Uit de stelling van Dandelin volgt verder ook dat het punt waar de bol op het vlak rust, een brandpunt is van de ellips.

Stel nu dat we ons oog plaatsen waar de lichtbron zich bevindt, en we kijken in de richting van de bol. Dan zien we niets van de ellips, want de bol zit in de weg. Maar stel je nu even voor dat we met een pen over de rand van de ellips zijn gegaan. Als we dan de bol wegnemen, dan zien we de ellips, maar we zien hem als een cirkel (zie figuur 4).



Figuur 4 Zicht op de bol en op de achterliggende ellips



Figuur 5 De punten van waaruit we de gele ellips zien als een cirkel

ALGEMENER Je kunt je dan ook een meer algemene vraag stellen: gegeven een ellips gelegen in een vlak, vanuit welke punten in de ruimte zien we deze ellips als een cirkel?

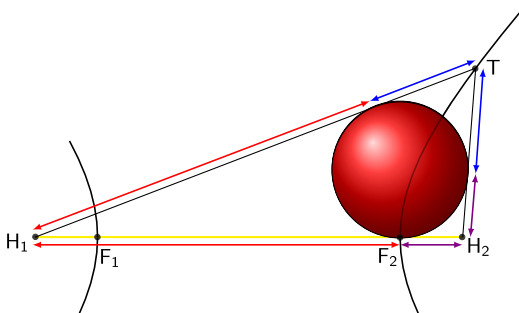
Dit is een mooie toepassing van kegelsneden. Zo'n punt moet, om redenen van symmetrie, in het vlak liggen dat de grote as van de ellips bevat en loodrecht staat op het vlak van de ellips. We zullen bewijzen dat het punt op een hyperbool ligt in dat vlak, je ziet hem in figuur 5.

Als we het oogpunt in kwestie verbinden met alle punten van de ellips, dan krijgen we een oppervlak in de ruimte. Als we de ellips als een cirkel willen zien, dan moet dat oppervlak een stuk zijn van een kegeloppervlak, en dan moet er ook een bol inpassen die raakt aan dat kegeloppervlak en aan het vlak van de ellips. Die bol ligt dan op een van de brandpunten van de ellips.

Om aan te tonen dat het inderdaad om een hyperbool gaat, bekijken we de zaak in het loodvlak door de grote as van de ellips. We krijgen dan een situatie zoals in figuur 6. De gele lijn is de grote as van de ellips. De punten F_1 en F_2 zijn de brandpunten van de ellips. De punten H_1 en H_2 zijn de toppen van de ellips.

Het punt T is het oogpunt. Gelijkgekleurde dubbele pijlen stellen dezelfde afstand voor. Dat die afstanden twee aan twee aan elkaar gelijk zijn, volgt uit de symmetrie van de cirkel. We kunnen dus uit de figuur aflezen dat de afstand van T tot H_1 min de afstand van T tot H_2 (= rood + blauw - (paars +

blauw)) gelijk is aan de afstand van F_1 tot F_2 (= rood - paars). Deze laatste afstand is onafhankelijk van de grootte van de cirkel. Als we deze groter maken op zo'n manier dat de cirkel blijft rusten op het punt F_2 , dan verplaatst het punt T zich. De kromme waarover dit punt zich verplaatst is dan een hyperbool, omdat het verschil $TH_1 - TH_2$ constant is, en dat is precies de definitie van een hyperbool. De hyperbool in kwestie heeft dus de toppen van de gegeven ellips als brandpunten, en de brandpunten van de gegeven ellips als toppen. Omdat een ellips volledig bepaald is door de afstand tussen de toppen samen met die tussen de brandpunten, is het inderdaad steeds diezelfde ellips die we zien als een cirkel. ■



Figuur 6 De punten van waaruit we de gele ellips zien als een cirkel

DE SPELTHEORIE VAN

■ door Robbert Fokkink

Griekenland heeft een rijke wiskundige geschiedenis.

Vanaf 700 jaar voor Christus heeft dit land een groot aantal wiskundigen voortgebracht die van blijvende invloed zijn geweest. De grootste namen zijn Thales, Pythagoras, Euclides en Archimedes. Deze klassieke Grieken zijn intussen al ruim tweeduizend jaar dood en sindsdien gebeurde er wiskundig gezien weinig in Griekenland.

Dankzij de financiële crisis komt daar nu eindelijk verandering in. De eerste wiskundige die strafrechtelijk werd vervolgd vanwege rekenfouten, is een Griek: Andreas Georgiou.

De eerste wiskundige die ervan wordt verdacht zijn kennis te misbruiken om de internationale politiek te beïnvloeden, is een Griek: Yanis Varoufakis.

Wat hebben deze mannen precies gedaan? De statisticus Andreas Georgiou zou het Bruto Nationaal Product verkeerd hebben uitgerekend. Hem dreigde een gevangenisstraf. Gelukkig voor Georgiou liep het af met een sissers, waarmee hij nu uit de publieke belangstelling is verdwenen.

Dat kan niet worden gezegd van Yanis Varoufakis, die al maandenlang continu op de televisie verschijnt: *BBC Newsnight*, het Duitse *Neo Magazin*, een rapbattle in het VARA-programma *Cojones*. Is hij niet op tv, dan staat hij wel in de krant met een opiniestuk, een interview, of met zijn luxe villa die je kunt boeken via airbnb. Varoufakis is de eerste wiskundige met sterallures.

SPELTHEORIE Twintig jaar geleden schreef Varoufakis een boek over speltheorie, een tak van wiskunde die je kunt gebruiken om menselijk gedrag te analyseren. *The Washington Post* speculeerde dat deze Griekse minister zijn diepe wiskundige inzicht zou uitbuiten om de financiële onderhandelingen met de Europese Commissie tot een gunstig einde te brengen. Een samenzweringstheorie was geboren en Varoufakis bleek behoorlijk mediageniek. Hij was niet meer van de beeldbuis af te slaan.



Wat is speltheorie precies en waar is het goed

voor? Niet zo'n gemakkelijke vraag. Laten we er een voorbeeld bij pakken van John von Neumann, de bedenker van deze theorie. We gaan samen een spel spelen met drie kaarten: Boer, Vrouw en Heer. De speler met de hoogste kaart wint. We schudden ze goed en leggen de kaarten dicht op tafel. We doen allebei een euro in de pot. Jij mag beginnen: je pakt een kaart, die je niet aan mij laat zien. Nu moet je passen of verdubbelen. Als je past, dan is de pot voor mij, maar als je verdubbelt, moet je nog een euro in de pot doen. Vervolgens pak ik een kaart en moet passen of meegaan. Als ik pas, dan is de pot voor jou, maar ga ik mee, dan moet ik ook een euro bijleggen en daarna vergelijken we onze kaarten. De winnaar krijgt vier euro.

Stel dat je de Vrouw pakt. Pas je dan, of verdubbel je? De kans dat je wint met de Vrouw is $1/2$, dus je moet wel verdubbelen, anders verlies je een euro, en nu is het mijn beurt. Ik pas met de Boer, jij wint een euro, maar ik ga mee met de Heer en win twee euro... Met de Vrouw verlies je gemiddeld gesproken een halve euro. Misschien wordt het nu duidelijk waarom ik je heb laten beginnen.

Stel dat je de Boer pakt, dat is slecht nieuws. Pas je dan? Speltheorie zegt: verdubbel met kans $1/3$ en pas met kans $2/3$. Indien je verdubbelt, dan is de beurt aan mij en als ik de Vrouw pak, dan heb ik een probleem. Heb je nu de Boer of heb je nu de Heer? Ik moet kansen berekenen. Als je de Boer hebt, dan verdubbel je in $1/3$ van de gevallen; heb

VAROUFAKIS



je de Heer, dan verdubbel je altijd. Dus bedenken ik me dat jij met kans $1/4$ de Boer hebt en met kans $3/4$ de Heer. Als ik meega voor twee euro, dan verlies ik gemiddeld een euro. Tja, dan kan ik net zo goed gelijk passen met de Vrouw, dat maakt helemaal niets uit. Speltheorie zegt: bluff op zo'n manier dat het voor je tegenstander helemaal niets uitmaakt wat hij doet.

Het is tijd om de balans op te maken, zie tabel 1. In de eerste regel staat de kaartverdeling en in de tweede regel staat wat die verdeling jou oplevert, als jij speelt volgens de aanbeveling van de speltheorie.

Gemiddeld gesproken kost dit spel je $1/9$ euro. Niet best, het is tijd om van plaats te verwisselen. Haal iemand over om dit spel met jou te spelen. Iemand die niet bang is voor een gokje. Wees zo galant om hem of haar te laten beginnen en nu heb je nog maar één probleem: wat doe je met de Vrouw? Speltheorie zegt: ga mee met kans $1/3$, want dan maakt het helemaal niets uit voor je tegenstander wat hij doet als hij de Boer heeft. Verdubbelen of passen, het kost hem in dit geval allebei gemiddeld een euro (reken maar na!). Je tegenstander past dus altijd met de Boer en verdubbelt met de Vrouw of de Heer. Zijn uitbetaling staat in tabel 2.

De uitbetalingen zijn iets anders dan die in tabel 1, want nu is het spel geanalyseerd vanuit het gezichtspunt van de speler die *niet* begint. De totale kosten van het spel zijn gelijk gebleven. Je tegen-

stander mag bluffen wat hij wil met de Boer, maar gemiddeld gesproken verliest hij $1/9$ euro.

Er zit een enigszins deprimerend aspect aan deze analyse. Speel je als een topexpert, dan maakt het niet uit wie je tegenstander is. Je presteert net zo goed tegen een doorgewinterde gokker als tegen een hersendode zombie, omdat je op zo'n manier speelt dat het voor je tegenstander helemaal niets uitmaakt wat hij doet. Het is natuurlijk de kunst om je strategie aan te passen, zodra je merkt dat hij suboptimaal speelt. Past je tegenstander bijvoorbeeld altijd met de Boer, dan moet jij altijd gaan passen met de Vrouw, want zo verschuift de uitbetaling van je tegenstander in tabel 2 naar die in tabel 3, en dat is beter voor jou. Je tegenstander moet natuurlijk wel scherp blijven bluffen met de Boer! Om de eventuele laksheid van een tegenstander uit te buiten, is het nodig het spel vaak te spelen. Zo leer je de tegenstander goed kennen.

De Europese Unie lijkt voorlopig niet van zins om een structurele oplossing te verzinnen voor de Griekse economie, die hobbelt van het ene naar het andere bijna-faillissement. Zolang Varoufakis politiek in het zadel blijft, kan hij het onderhandelingspel nog vaak herhalen. Juist dan kan hij laten zien dat hij een meester is in speltheorie. Daar zit wel een probleem, want in Griekenland gaat een minister van financiën niet zo lang mee. De laatste vijf jaar heeft het land er zes versleten. Het zijn roerige tijden. Misschien is Varoufakis alweer verdwenen zodra dit nummer van *Pythagoras* is verschenen. ■

25

BH	BV	VH	VB	HB	HV
-4/3	-1/3	-2	1	1	1

Tabel 1

BH	BV	VH	VB	HB	HV
-1	-1	-2	1	1	4/3

Tabel 2

BH	BV	VH	VB	HB	HV
-1	-1	-2	1	1	1

Tabel 3

In aflevering 14 van deze serie, die afgelopen februari in *Pythagoras* verscheen, schreven we over een probleem waarbij punten volgens bepaalde eisen in het platte vlak moeten worden geplaatst, waar onder anderen Paul Erdős zich mee bezig heeft gehouden. Naar aanleiding van dat artikel zijn diverse lezers zelf aan het rekenen geslagen. De resultaten van Aad van de Wetering vinden we zo bijzonder, dat we opnieuw een aflevering aan dit onderwerp besteden.

■ door Derk Pik

NOGMAALS GEHELE AFSTANDEN

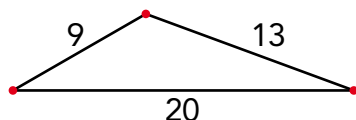


Het probleem is om zo veel mogelijk punten in het platte vlak te plaatsen, op zo'n manier dat de afstand tussen elk tweetal punten geheel is. We eisen dat er niet meer dan twee punten op een rechte lijn mogen liggen en niet meer dan drie punten op een cirkel. (In het artikel 'Uitsluitend gehele afstanden' in *Pythagoras* 54-4 (februari 2015) toonden we aan hoe je willekeurig veel punten op een grote cirkel kan plaatsen, waarbij alle onderlinge afstanden tussen de punten geheel zijn.)

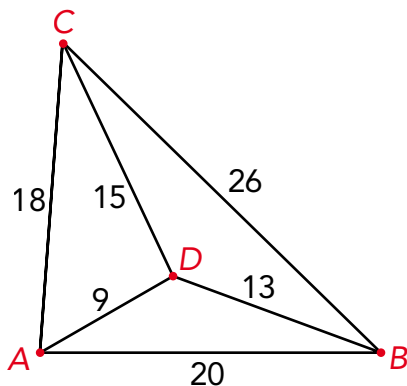
Het record staat op zeven: er is nog geen configuratie van acht punten bekend met bovenstaande eigenschappen.

Aad van de Wetering kwam met een origineel idee om nieuwe configuraties te vinden. Hij gebruikt de oppervlakte van de driehoeken die in de figuur ontstaan als je alle punten met lijnstukken verbindt. Deze oppervlaktes zijn dan te berekenen met de formule van Heron. Die formule zegt het volgende.

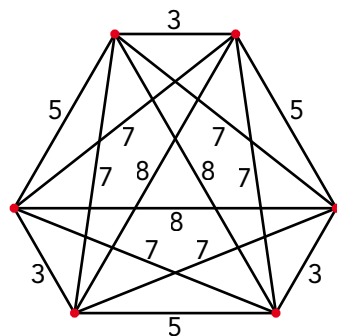
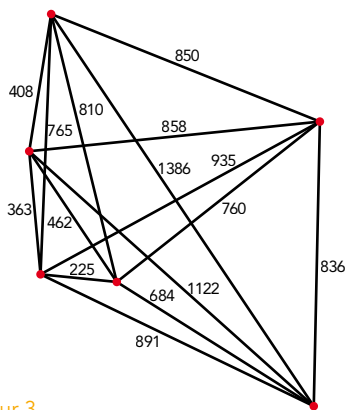
Formule van Heron. De oppervlakte van een driehoek met zijden a , b , c is gelijk aan $\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$.



Figuur 1



Figuur 2



De driehoek in figuur 1 heeft zijden $a = 13$, $b = 9$ en $c = 20$. Volgens de formule van Heron is de oppervlakte van deze driehoek gelijk aan $\frac{1}{4}\sqrt{42 \cdot 16 \cdot 24 \cdot 2} = 12\sqrt{14}$.

⁴ De benadering van Aad is erop gebaseerd dat uit de oppervlakte van elke driehoek een veelvoud moet komen van dezelfde wortel (eventueel $\sqrt{1}$).

Neem bijvoorbeeld figuur 2. Voor de vier driehoeken waaruit deze figuur bestaat geldt:

$$\begin{aligned}\text{opp}(\triangle ABC) &= 48\sqrt{14}, \\ \text{opp}(\triangle ABD) &= 12\sqrt{14}, \\ \text{opp}(\triangle ACD) &= 18\sqrt{14}, \\ \text{opp}(\triangle BCD) &= 18\sqrt{14}.\end{aligned}$$

Dit zijn allemaal veelvouden van $\sqrt{14}$. Als alle driehoeken als oppervlakte hetzelfde veelvoud hebben, moet nog wel gecontroleerd worden of de figuur daadwerkelijk te tekenen is.

Vervolgens heeft Aad met zes, zeven en meer punten alle mogelijke gehele lengtes onder een ze-

kere maximumlengte doorgerekend met de computer. De verzamelingen punten die hij zo vond, lagen helaas vaak op een grote cirkel, en dat mag niet volgens onze gestelde eisen.

Hij vond geen zevenpuntsverzameling die aan alle voorwaarden voldeed, maar wel een schitterende zespuntsverzameling waarbij alle afstanden verschillend zijn (zie figuur 3).

Verder vond hij nog de koordenzeshoek (dat wil zeggen: een zeshoek waarvan alle hoekpunten op een cirkel liggen) in figuur 4. Hier wordt dus weer niet aan de eis voldaan dat de punten niet allemaal op een cirkel mogen liggen, maar het bijzondere van deze ‘bijna-oplossing’ is dat de afstanden erg klein zijn.

Tot slot vond Aad ook nog de koordentwaalfhoek in figuur 5.

Wie weet lukt het Aad om, als hij de maximale lengte vergroot, het record te breken: een achtpuntsverzameling die aan alle voorwaarden voldoet. ■

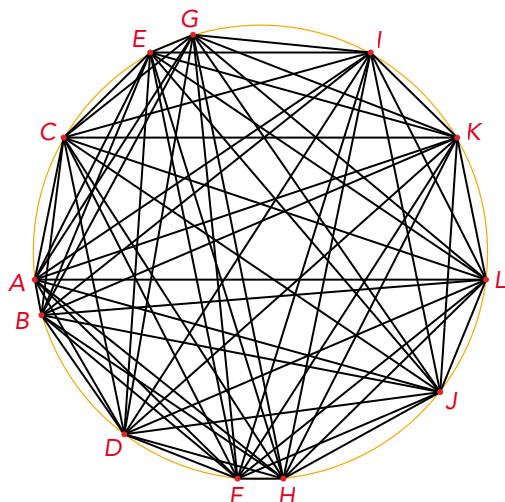


Figure 5 $AB = 31, AC = 125, AD = 154, AE = 220,$
 $AF = 245, AG = 252, AH = 275, AI = 350, AJ = 363,$
 $AK = 385, AL = 390, BC = 154, BD = 125,$
 $BE = 245, BF = 220, BG = 275, BH = 252, BI = 363,$
 $BJ = 350, BK = 390, BL = 385, CD = 261, CE = 105,$
 $CF = 330, CG = 143, CH = 350, CI = 275,$
 $CJ = 392, CK = 340, CL = 385, DE = 330,$
 $DF = 105, DG = 350, DH = 143, DI = 392,$
 $DJ = 275, DK = 385, DL = 340, EF = 375, EG = 40,$
 $EH = 385, EI = 190, EJ = 385, EK = 275, EL = 350,$
 $FG = 385, FH = 40, FI = 385, FJ = 190, FK = 350,$
 $FL = 275, GH = 391, GI = 154, GJ = 375, GK = 245,$
 $GL = 390, HI = 375, HJ = 154, HK = 330, HL = 245,$
 $IJ = 239, IK = 105, IL = 220, JK = 220, JL = 105,$
 $KL = 125.$

Afgelopen januari vond de eerste ronde van de Wiskunde Olympiade plaats. Er hebben dit jaar voor het eerst in de geschiedenis meer dan tienduizend leerlingen meegedaan. Deze 10.227 leerlingen zijn afkomstig van 354 scholen. Maar zij waren niet de enige deelnemers.

■ door Melanie Steentjes



DE NWO, VOOR JONG EN OUD!

Wat niet veel mensen weten, is dat niet alleen leerlingen van de middelbare school de eerste ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade hebben gemaakt, maar ook zo'n honderd werknemers van verschillende bedrijven die connecties hebben met de Wiskunde Olympiade. Zo hebben onder andere medewerkers meegedaan van de Rabobank, het CBS, Cito en Shell.

Bij deze 'Wiskunde Olympiade voor Bedrijven' vaardigt elk bedrijf drie medewerkers af. Zij krijgen niet twee, maar slechts één uur de tijd voor de opgaven. Het bedrijf waarvan de drie deelnemers bij elkaar de meeste punten hebben, wint. Er staat nogal wat op het spel, want natuurlijk wil niemand onderdoen voor zijn collega's. Een van de deelnemers, Paul van der Molen van Cito, heeft het zo ervaren:

'Het blaadje, de stilte, iedereen een tikje nerveus. Het gevoel van het maken van een examen komt weer terug. Ik had van tevoren een strategie uitgedacht: eerst de B-opgaven maken en dan de A-opgaven. De eerste B-opgave was een hele praktische: even stug doorrekenen en dan kwam het patroon vanzelf boven water. Door de spanning maakte ik toch een enorm stomme fout (ik ging optellen waar ik moest aftrekken) waardoor het patroon onnavolgbaar was. Je doorziet de opgave en je hebt de indruk te weten hoe je tot een oplossing moet komen. Er is dan geen moment dat je denkt: ik ga wel naar de volgende opgave. Dus ik begin gewoon weer van voren af aan en zie de stommitieit. Vanaf dat moment is het een eitje en rolt het antwoord eruit zoals ik verwacht had. De opluchting is groot: ik had het wel goed gezien maar ik was gewoon slordig. Het maken van deze opgaven is een zenuwslopend gebeuren waarbij zelfvertrouwen en trots heel dicht liggen bij faalangst en je neerleggen bij het feit dat er slimmere mensen zijn dan jij.'

We pakken de opgave waar Paul over schrijft er eens bij:

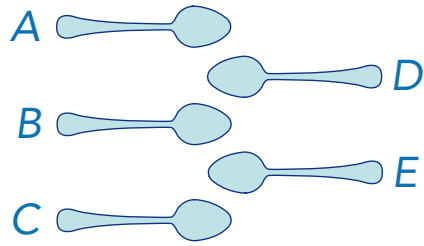
Julia maakt een getallenrij. Zij begint met twee zelfgekozen getallen. Daarna rekent ze steeds het volgende getal in de rij als volgt uit: als het laatste getal dat ze opgeschreven heeft b is en het getal daarvoor a , dan wordt het volgende getal $2b - a$. Het tweede getal in de rij van Julia is 55 en het honderdste getal is 2015. Wat is het eerste getal in haar rij?

Als we het eerste getal a noemen en het tweede getal b , is het derde getal $2b - a$. Het vierde getal is dan $2(2b - a) - b$ en als je dat uitwerkt, krijg je $3b - 2a$. We maken maar eens een tabelletje om te kijken of we deze opgave zo op kunnen lossen:

1e getal	a
2e getal	b
3e getal	$2b - a$
4e getal	$3b - 2a$
5e getal	$4b - 3a$
6e getal	$5b - 4a$

Daar lijkt wel een mooie regelmaat in te zitten! Het honderdste getal zal wel $99b - 98a$ zijn. Omdat b gelijk is aan 55, krijg je dat $5445 - 98a$ gelijk moet zijn aan 2015. En dan vind je dat $98a = 3430$. Een vervelende deling zonder je rekenmachine, maar als je dat netjes doet, krijg je $a = 35$, dus het eerste getal in de rij van Julia is 35.

Aan de uitwerking van de opgavenmakers kan je zien dat je de opgave kennelijk ook met een heel andere aanpak kan oplossen:



Als a , b , c drie opeenvolgende getallen uit de rij van Julia zijn, dan weten we dat $c = 2b - a$. Anders gezegd: $c - b = b - a$. Dit betekent dat het verschil tussen twee opeenvolgende getallen uit de rij steeds hetzelfde is, zeg d . Als het eerste getal uit de rij x is, dan is de rij dus gelijk aan $x, x + d, x + 2d, x + 3d, \dots$ Het tweede getal uit de rij is gelijk aan $55 = x + d$ en het honderdste getal is $2015 = x + 99d$. We zien dat $2015 - 55 = 98d$, dus $d = \frac{1960}{98} = 20$. Daarmee vinden we dat $55 = x + 20$, zodat $x = 35$. Het eerste getal uit de rij van Julia is dus 35.

Laten we nu eens kijken welk rijtje Paul vond. Hij schrijft dat hij de getallen ging optellen, dus hij vond als derde getal $2b + a$. Het vierde getal is dan $2(2b + a) + b = 5b + 2a$. Als we zo verder gaan en een tabel maken, krijg je:

1e getal	a
2e getal	b
3e getal	$2b + a$
4e getal	$5b + 2a$
5e getal	$12b + 5a$
6e getal	$29b + 12a$
7e getal	$70b + 29a$

Je kunt je voorstellen dat Paul hier niet vrolijk van werd. De getallen worden erg groot en een regelmaat zie je ook niet één-twee-drie. Gelukkig had hij door dat zijn strategie niet verkeerd was.

LEPELS Na afloop van de wedstrijd bij de Rabobank zag ik veel mensen nog napraten over de opgaven. Een van de A-opgaven was:

Vijf verdachten worden ondervraagd over de volgorde van aankomst op de plaats van een misdrijf. Ze doen de volgende uitspraken.

Aad: 'Ik was er als eerste.'

Bas: 'Ik was er als tweede.'

Carl: 'Ik was er als derde.'

Dave: 'Van Aad en Bas kwam er één voor mij en één na mij binnen.'

Erik: 'Van Bas en Carl kwam één voor mij en één na mij binnen.'

Bekend is dat precies één van de verdachten gelogen heeft.

Wie kwam er als vierde binnen?

A) Aad B) Bas C) Carl D) Dave E) Erik

De deelnemers probeerden met behulp van theelepels aan elkaar uit te leggen hoe ze tot de oplossing waren gekomen. De linker lepels in bovenstaande figuur stellen Aad, Bas en Carl voor en de rechter Dave en Erik.

De opstelling van de lepels maakt direct duidelijk dat Aad, Bas of Carl wel moeten liegen, want anders zouden Dave en Erik beiden liegen en er ligt er precies één.

Laten we eens beginnen bij Aad. Als Aad liegt, dan spreken Bas en Carl de waarheid (want er ligt maar precies één iemand). Maar dan kan Erik nooit ook de waarheid spreken; dat theelepeltje past er dan immers niet tussen.

Dan Bas. Als Bas liegt, moet er iemand anders als tweede zijn aangekomen. Dat kan Dave zijn. Erik kan het niet zijn, want dan komt hij voor Bas en Carl aan. Dus Dave komt in dit geval als tweede aan, Carl als derde. Erik moet dan als vierde aankomen, want dat komt hij na Carl aan en voor Bas. Bas is dan dus de laatste die aankomt. We hebben een oplossing!

Kan Carl ook liegen? Dan spreken Aad en Bas dus de waarheid, maar dan kan Dave nooit ook de waarheid spreken. Dus Bas liegt en de vierde die aankomt is Erik.

Als je goed naar de lepels kijkt, kun je nog sneller zien wie liegt: de lepel die Dave voorstelt, kan daar alleen liggen als Aad of Bas liegt. En de lepel die Erik voorstelt, kan daar alleen liggen als Bas of Carl liegt. Omdat er maar één persoon liegt, moet Bas wel liegen.

Het is leuk om te zien dat het niet uitmaakt of je nu jong bent of wat ouder, of je nu meedoet aan de eerste ronde op school of bij de Wiskunde Olympiade voor Bedrijven: heel veel mensen hebben plezier in het puzzelen aan opgaven van de eerste ronde. ■

PYTHAGORAS OLYMPIADE

■ door Matthijs Coster, Eddie Nijholt en Harry Smit

Doe mee met de Pythagoras Olympiade! Elke aflevering bevat vier opgaven. De eerste twee zijn wat eenvoudiger; onder de goede inzendingen van leerlingen uit de klassen 1, 2 en 3 wordt een cadeaubon van Bol.com ter waarde van 20 euro verloot. De laatste twee zijn echte breinbrekers; onder de goede inzendingen van leerlingen (tot en met klas 6) wordt een bon van 20 euro verloot. Per aflevering wordt maximaal één bon per persoon vergeven.

Daarnaast krijgen leerlingen (tot en met klas 6) punten voor een *laddercompetitie*, waarmee eveneens een cadeaubon van Bol.com van 20 euro te verdienen valt. De opgaven van de onderbouw zijn 1 punt waard, de opgaven van de bovenbouw 2 punten. De leerling met de hoogste score in de laddercompetitie krijgt een bon. Zijn puntentotaal wordt weer op 0 gezet. Wie zes achtereenvolgende keren niets inzendt, verliest zijn punten in de laddercompetitie. Met de bovenbouwopgaven kun je ook een plaats in de finale van de Nederlandse Wiskunde Olympiade verdienen, mocht het via de voor-

ronden niet lukken:

aan het eind van elke jaargang worden enkele goed scorende leerlingen

uitgenodigd voor de NWO-finale. Niet-leerlingen kunnen met de Pythagoras Olympiade meedoen voor de eer.



HOE IN TE ZENDEN? Inzenden kan alleen per e-mail. Stuur je oplossing (getypt of een scan of foto van een handgeschreven oplossing) naar pytholym@gmail.com. Je ontvangt een automatisch antwoord zodra we je bericht hebben ontvangen.

Voorzie het antwoord van een duidelijke toelichting (dat wil zeggen: een berekening of een bewijs). Vermeld je naam en adres; leerlingen moeten ook hun klas en de naam van hun school vermelden.

Je inzending moet bij ons binnen zijn vóór 30 september 2015.

DE GOEDE INZENDERS VAN FEBRUARI 2015

302: Wouter Andriessen (klas 4), Leielandscholen Campus Vlaanderen, Kortrijk; Oscar Heijdra (klas 4), Goois Lyceum, Bussum; Arie van der Kraan, Nuth; Pascal Kwanten, Almere; Niels van Mierlo (klas 3), Christelijk Gymnasium, Utrecht; Levi van de Pol (klas 2), Ichthus College, Veenendaal; Pim Spelier (klas 5), Christelijk Gymnasium Sorghvliet, Den Haag; Paul van de Veen, Enschede; Robert van der Waall, Hilversum; Wouter Zijlstra (klas 5), Koningin Wilhelmina College, Culemborg.

303: Wouter Andriessen (klas 4), Leielandscholen Campus Vlaanderen, Kortrijk; Stijn van Bommel, Woerden; Sebastiaan Ceuppens (klas 4), Goois Lyceum, Bussum; Sander Engelberts (klas 4), Goois Lyceum, Bussum; Rainier van Es (klas 5), Zwijsen College, Veghel; Rinze Hallema (klas 1), Stedelijk Gymnasium, Leeuwarden; Merlijn Hunik (klas 4), Grotius College, Delft; Arie van der Kraan, Nuth; Lotte Middelberg (klas 4), Goois Lyceum, Bussum; Niels van Mierlo (klas 3), Christelijk Gymnasium, Utrecht; Bram Pel (klas 3), Goois Lyceum, Bussum; Levi van de Pol (klas 2), Ichthus College, Veenendaal; Youri Pouw (klas 1), Minkema College, Woerden; Stef Rasing (klas 3), Goois Lyceum, Bussum; Pim Spelier (klas 5), Christelijk Gymnasium Sorghvliet, Den Haag; Paul van de Veen, Enschede; Robert van der Waall, Hilversum; Jan Willem de Waard (klas 1), Minkema College, Woerden; Eline Welling (klas 3), Goois Lyceum, Bussum; Senne Willems (klas 4), Koninklijk Atheneum, Tervuren; Wouter Zijlstra (klas 5), Koningin Wilhelmina College, Culemborg.

304: Wouter Andriessen (klas 4), Leielandscholen Campus Vlaanderen, Kortrijk; Sebastiaan Ceuppens (klas 4), Goois Lyceum, Bussum; Sander Engelberts (klas 4), Goois Lyceum, Bussum; Rainier van Es (klas 5), Zwijsen College, Veghel; Oscar Heijdra (klas 4), Goois Lyceum, Bussum; Merlijn Hunik (klas 4), Grotius College, Delft; Pascal Kwanten, Almere; Antonie Moes (klas 3), Goois Lyceum, Bussum; Stef Rasing (klas 3), Goois Lyceum, Bussum; Pim Spelier

(klas 5), Christelijk Gymnasium Sorghvliet, Den Haag; Paul van de Veen, Enschede; Eline Welling (klas 3), Goois Lyceum, Bussum; Wouter Zijlstra (Klas 5), Koningin Wilhelmina College, Culemborg.

305: Wouter Andriessen (klas 4), Leielandscholen Campus Vlaanderen, Kortrijk; Sander Engelberts (klas 4), Goois Lyceum, Bussum; Levi van de Pol (klas 2), Ichthus College, Veenendaal; Pim Spelier (klas 5), Christelijk Gymnasium Sorghvliet, Den Haag; Paul van de Veen, Enschede; Robert van der Waall, Hilversum.

Cadeaubonnen: Stef Rasing en Sander Engelberts.

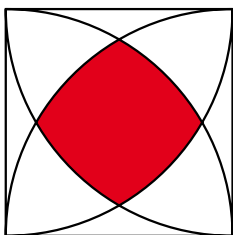
Stand laddercompetitie: Wouter Andriessen (18 p; cadeaubon), Levi van de Pol (16 p), Wouter Zijlstra (15 p), Frenk Out (14 p), Pim Spelier (11 p), Sander Engelberts (11 p), Oscar Heijdra (11 p), Niels van Mierlo (11 p), Wout Gevaert (12 p), Marinda Westerveld (11 p), Tara van Belkom (10 p), Eline Welling (9 p), Nathan van 't Hof (9 p), Reinier Schmiermann (9 p), Beaudine Smeekes (9 p), Sebastiaan Ceuppens (6 p), Tjard Langhout (6 p), Simon Roelandt (6 p), Michiel Versnel (6 p), Max Bosman (5 p), Ivo van Dijk (5 p), Merlijn Hunik (5 p), Stef Rasing (5 p), Laurens Hilbrands (4 p), Antonie Moes (4 p), Anton van Es (3 p), Rainier van Es (3 p), Jelle Couperus (2 p), Sietse Couperus (2 p), Maud van de Graaf (2 p), Phillip de Groot (2 p), Yvette Keij (2 p), Matthijs Pool (2 p), Sied Vrasdonk (2 p), Marc Zuurbier (1 p), Stijn van Bommel (1 p), Simon de Best (1 p), Ludivine Bonvarlez (1 p), Johanna Bult (1 p), Maarten Clercx (1 p), Kenny van Dijken (1 p), Famke Driessen (1 p), Tessa Engelberts (1 p), Tim Groot (1 p), Calista Hainaut (1 p), Rinze Hallema (1 p), Gerben-Jan Hooijer (1 p), Boris Kloeg (1 p), Elisabeth Kuijper (1 p), Nora Lahlou (1 p), Bram van der Linden (1 p), Daphné Meyer-Horn (1 p), Lotte Middelberg (1 p), Hannah Nijse (1 p), Alwin van der Paardt (1 p), Bram Pel (1 p), Youri Pouw (1 p), Olivier Segers (1 p), Senne Willems (1 p), Jan Willem de Waard (1 p).

OPGAVE 310

Anton, Bert en Carel nemen het tegen elkaar op in een aantal tests. Als je de beste bent in zo'n test, dan krijg je x punten, de tweede krijgt y punten, en de laatste krijgt z punten. De getallen x , y en z zijn geheel en $x > y > z$. Anton eindigde met 20 punten, Bert met 10, en Carel met 9. In geen enkele test werden er gelijke scores behaald. In de algebratest was Anton de op één na beste. Wie was er de op één na beste in de meetkundetest?

OPGAVE 311

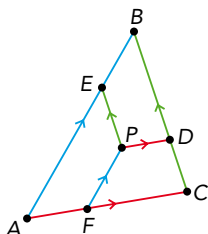
Hieronder is een vierkant getekend met vier kwarten van cirkels, met middelpunten in de hoekpunten. De lengte van de zijde is 6. Bepaal de oppervlakte van het rode gebied.



OPGAVE 312

Gegeven is een scherphoekige driehoek ABC en een punt P hierbinnen. We trekken een lijn door P evenwijdig met BC . Het snijpunt van deze lijn met AB noemen we E . Evenzo trekken we een lijn door P evenwijdig met AC ; diens snijpunt met BC is D . Ten slotte trekken we een lijn door P evenwijdig met AB ; diens snijpunt met AC is F . Laat zien dat geldt

$$\frac{BE}{AB} + \frac{CD}{BC} + \frac{AF}{AC} = 1.$$



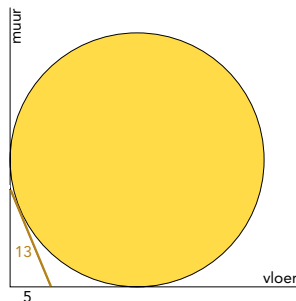
OPGAVE 313

Zoals je weet, zijn de natuurlijke getallen alle positieve, gehele getallen: 1, 2, 3, 4, 5, ...

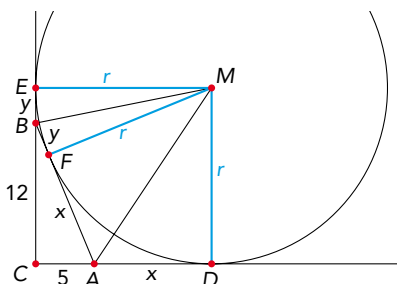
Geef een oneindige rij natuurlijke getallen die aan de volgende eisen voldoet: het bevat een 1, maar ook twee keer een 1 achter elkaar, en ook drie keer een 1 achter elkaar, enzovoort. (Let op: met 'drie keer een 1 achter elkaar' bedoelen we niet '111', maar '1, 1, 1') Verder bevat het een 2, twee keer een 2 achter elkaar, drie keer een 2 achter elkaar, enzovoort. Evenzo voor 3, 4, 5, en zo verder voor elk natuurlijk getal.

OPLOSSING 302

Tegen een muur leunt een plankje met een breedte van 13 cm. Een zijaanzicht zie je hieronder. De onderzijde van het plankje is 5 cm verwijderd van de muur. Op de vloer ligt een strandbal die raakt aan het plankje én aan de muur. Wat is de diameter van de strandbal?



Oplossing. Hieronder zijn de strandbal (middelpunt M en straal r) en het plankje (AB) weergegeven. De punten D , E en F zijn de raakpunten van de strandbal met respectievelijk de vloer, de zijwand en het plankje. Uit $AB = 13$ en $AC = 5$ volgt m.b.v. Pythagoras dat $BC = 12$. De driehoeken ADM en AFM zijn congruent, immers: de zijde AM hebben ze gemeenschappelijk en verder geldt $MF = MD$ en $\angle ADM = \angle AFM$. Stel $AD = x$, dan is ook $AF = x$. Evenzo zijn de driehoeken BEM en BFM congruent. Daaruit volgt $BE = BF = y$. Nu geldt $r = x + 5 = y + 12$ en $x + y = 13$. Hieruit volgt $x = 10$, $y = 3$ en $r = 15$. De diameter van de bal is dus 30 cm.



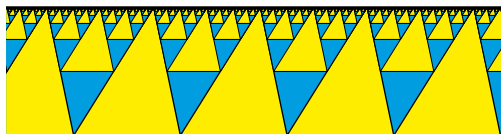
OPLOSSING 303

Neem vier positieve getallen die optellen tot 10. Bijvoorbeeld 1, 2, 2 en 5. Als je die vier getallen met elkaar vermenigvuldigt, krijg je een nieuw getal (in ons voorbeeld: $1 \times 2 \times 2 \times 5 = 20$). Wat is het grootste getal dat je op deze manier kunt verkrijgen?

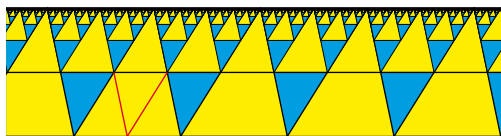
Oplossing. Het grootste getal dat je kunt verkrijgen is $\frac{5}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{5}{2} = \frac{625}{16} = 39,0625$. Als de vier getallen geheel moeten zijn (wat niet gegeven was in de opgave, maar waar sommige lezers van uit zijn gegaan, en wat eerlijk gezegd ook de bedoeling was), is het grootste getal dat je kunt verkrijgen 36. Dat is het product van 2, 2, 3 en 3. Het product van 2, 2, 2 en 4 is 32 en dat is kleiner dan 36. Het product van elk ander viertal is nog kleiner, omdat 2, 2, 2, 4, en 2, 2, 3, 3 de enige combinaties zijn waarin het getal 1 niet voorkomt. Mèt het getal 1 is het verkregen getal ten hoogste 27: het product van 1, 3, 3 en 3.

OPLOSSING 304

Een *fractal* is een figuur die ontstaat door voortdurende herhaling van eenzelfde patroon op steeds kleinere schaal. In de fractal hieronder zijn alle driehoeken gelijkvormig. Wat is de verhouding tussen de gele en de blauwe oppervlakte?



Oplossing. We tekenen precies halverwege de fractal een horizontale lijn (zie onderstaande figuur). De figuur boven deze lijn is exact de originele fractal, maar dan verkleind met een factor 2, maar de verhouding geel : blauw is identiek. Onder de lijn is de verhouding geel : blauw gelijk aan 3 : 1 (het driehoekje met de rode rand maakt dit duidelijk). Dit is dan tevens de verhouding die geldt voor de gehele fractal.



OPLOSSING 305

37 is een priemgetal. Als je achter 37 een willekeurig aantal enen plaatst, bijvoorbeeld, 371, of 3711, of 37111, enzovoort, is dat getal nooit priem. Toon dat aan.

Oplossing.

$$371 = 7 \times 53,$$

$$3711 = 3 \times 1237,$$

$$37111 = 37 \times 1003,$$

$$371111 = 13 \times 28547,$$

$$3711111 = 3 \times 1237037,$$

$$37111111 = 37 \times 1003003.$$

Dit patroon herhaalt zich, omdat $111 = 3 \times 37$ en

$$111111 = 7 \times 13 \times 1221.$$

ELK GETAL OVERDEKT AANVULLING

In het artikel 'Elk getal overdekt' in de vorige *Pythagoras* stond op pagina 28: 'Dus het verschil $a - 2^n$ is niet priem: het is deelbaar door een van de priemgetallen 3, 7, 5, 17, 13 of 241.' Lieven De Backer maakte ons erop attent dat we hier te kort door de bocht zijn gegaan. Immers, 3 is ook een veelvoud van 3, maar 3 is wel priem. Voor een waterdicht bewijs moet dus nog een laatste stap worden gedaan. Met behulp van Excel wist Lieven te bewijzen dat $a - 2^n$ altijd minstens twee keer zo groot is als 3, 7, 5, 17, 13 of 241, waarmee we rond zijn.

Een andere methode is door nog een congruentie toe te voegen. De Chinese Reststelling zegt dat

$$x \equiv 2.036.812 \pmod{5.592.405}$$

$$x \equiv 3 \pmod{31}$$

zeker een oplossing heeft.

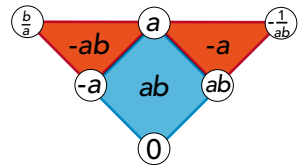
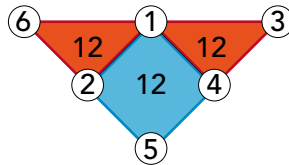
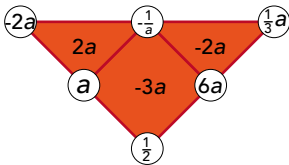
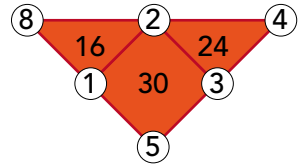
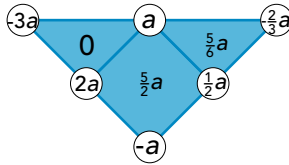
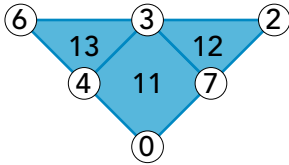
Nu is 2^n voor elke n congruent met een van de getallen 1, 2, 4, 8, of 16 $\pmod{31}$ (want $2^5 = 32 \equiv 1 \pmod{31}$). Omdat $x \equiv 3 \pmod{31}$, is $x - 2^n$ dus congruent met een van de getallen 2, 1, 30, 26, 18 $\pmod{31}$. En de getallen 3, 7, 5, 17, 13, 241 zijn congruent met 3, 7, 5, 17, 13, 24 $\pmod{31}$, en die zijn alle verschillend van de vorige vijf. Dus $x - 2^n$ kan nooit gelijk zijn aan een van de getallen 3, 7, 5, 17, 13, 241 $\pmod{31}$. Dat is wat we nog moesten bewijzen.

Onze rekenkundige rij ziet er nu iets anders uit. De kleinste x is 18.814.027 en de modulus is 173.364.555, dus de rij wordt

$$18.814.027 + 173.364.555k \quad (k = 2, 4, 6, \dots).$$

OPLOSSING SOM- EN PRODUCTPUZZELS

Hier zie je de oplossingen van de som- en productpuzzels uit de vorige *Pythagoras*.



54ste jaargang nummer 6
juni 2015
ISSN 0033 4766

Pythagoras stelt zich ten doel jongeren kennis te laten maken met de leuke en uitdagende kanten van wiskunde. *Pythagoras* richt zich tot leerlingen van vwo en havo en alle anderen die jong van geest zijn.

Internet www.pyth.eu

Hoofdredacteur Derk Pik

Eindredacteur Alex van den Brandhof

Redactie Matthijs Coster,
Jeanine Daems, Jan Guichelaar,
Klaas Pieter Hart, Paul Levrie,
Marc Seijlhouwer

Vormgeving Grafisch Team Digipage,
Leidschendam

Druk Drukkerij Ten Brink, Meppel

Uitgever Koninklijk Wiskundig
Genootschap (KWG)

Management Pythagoras
Mark Veraar (KWG), Derk Pik

Lezersreacties en kopij

Bij voorkeur per e-mail; lezersreacties naar Jan Guichelaar, jan@pyth.eu en kopij naar Derk Pik, derk@pyth.eu. Eventueel per post naar Pythagoras, p.a. Centrum Wiskunde & Informatica, Postbus 94079, 1090 GB Amsterdam.

Abonnementen, bestellingen en mutaties

Abonneeservice Pythagoras
Postbus 2238
5600 CE Eindhoven
Telefoon: 085 016 02 51
E-mail: abonnementen@pyth.eu

Abonnementsprijs

(zes nummers per jaargang)
€ 28,00 (Nederland en België),
€ 30,00 (overige landen),
€ 18,00 (groepsabbonnement NL/B),
€ 28,00 (geschenkabbonnement NL/B),
€ 30,00 (geschenkabbonnement overige landen).

Een geschenkabbonnement stopt automatisch na één jaar. Overige abonnementen gelden tot wederopzegging. Zie www.pyth.eu voor verdere toelichtingen.

Aan dit nummer werkten mee

Alex van den Brandhof
(alex@pyth.eu),
Matthijs Coster
(matthijs@pyth.eu),
Jeanine Daems
(jeanine@pyth.eu),
Robbert Fokkink
(r.j.fokkink@tudelft.nl),
Jan Guichelaar
(jan@pyth.eu),
Klaas Pieter Hart
(kp@pyth.eu),
Luuk Hoevenaars
(luuk.hoevenaars@hu.nl),
Jaap Klouwen
(j.klouwen@hva.nl),
Paul Levrie
(paul@pyth.eu),
Eddie Nijholt
(eddie@pyth.eu),
Rudi Penne
(rudi.penne@uantwerpen.be),
Derk Pik (derk@pyth.eu),
Marc Seijlhouwer
(marc@pyth.eu),
Harry Smit
(h.j.smit@students.uu.nl),
Melanie Steentjes
(melanie@wiskundeolympiade.nl).

Pythagoras wordt mede mogelijk gemaakt door de bijdragen van de onderstaande instituten en instellingen.





To inscribe a circle in a given square.

Make ————
and ————
draw || ————
and || ————
(B. 1. pr. 31.)



∴ is a parallelogram;
and since ———— (hyp.)
—————
∴ is equilateral (B. 1. pr. 34.)

In like manner, it can be shown that

are equilateral parallelograms;
∴ ———— = ———— = ———— = ————
and therefore if a circle be described from the concourse
of these lines with any one of them as radius, it will be
inscribed in the given square. (B. 3. pr. 16.)

Q. E. D.



Bron: Oliver Byrne, *The First Six Books of The Elements of Euclid*, Taschen.