

PYTHA GORAS

WISKUNDETIJDSCHRIFT VOOR JONGEREN

Kleinste n waarvoor $a_n = 5$ is

$n \approx 10^{125.857.689.874.791.897.769.333}$

55ste JAARGANG - NUMMER 3 - JANUARI 2016



twente academy

PRE-UNIVERSITY

MATHRACE

Ieder jaar organiseert Twente Academy tweemaal de Mathrace, waarbij leerlingen individueel of in groepjes wekelijks hun hoofd kunnen breken op wiskundige vraagstukken. De deelnemer en groep die aan het einde van de 8 weken de meeste punten hebben verdiend, winnen een gave prijs.

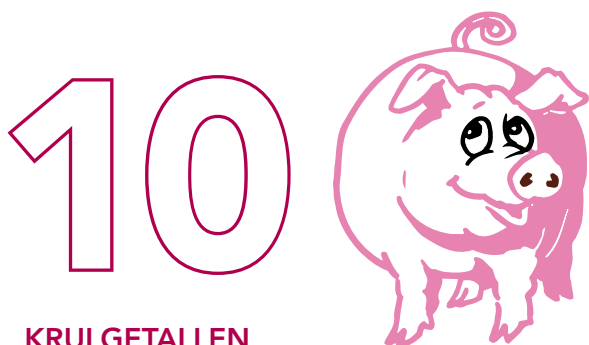
De opgaves worden gemaakt en nagekeken door studenten van Toegepaste Wiskunde van de Universiteit Twente.

Deelname aan de wedstrijd is gratis en kan via onderstaande website.

www.twenteacademy.nl/mathrace

UNIVERSITY OF TWENTE.

INHOUD



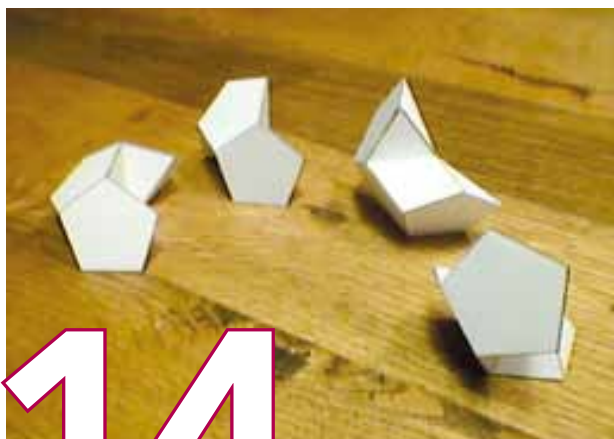
KRULGETALLEN

De vijfde aflevering in onze serie over getallenrijen gaat over een rij die tergend langzaam stijgt. Bewezen is dat elk natuurlijk getal in de rij voorkomt, maar de eerste 4 verschijnt pas op de 220ste plek in de rij. De eerste 5 laat zó lang op zich wachten, dat als je de rij tot daar zou uitschrijven, je meer papier nodig zou hebben dan er op de wereld aanwezig is.



BRUNHILDE EN DE EGEL

Je kent misschien de paradox van Achilles en de schildpad: Achilles gunt de schildpad een voorsprong, en lijkt hem vervolgens niet meer te kunnen inhalen. Hier vertellen we een variant: de paradox van Brunhilde en de egel.



EERLIJK DELEN

In dit artikel delen we een dodecaëder op in gelijke stukjes. Daarmee maken we vervolgens een leuke puzzel.



EN VERDER

- 2 Kleine nootjes
- 4 Morse en Fibonacci
- 7 Knippen, schuiven en draaien
- 9 Meetkunde zonder woorden
- 19 Journaal
- 25 De periode van een decimaal getal
- 28 Letterrekenen
- 30 Pythagoras Olympiade
- 33 App van de maand

Omslagillustratie: de OEIS-rij A090822 wordt recursief gedefinieerd met behulp van *krulgetallen*. Die naam, bedacht door Neil Sloane, is ontleend aan het feit dat de rij krult als het staartje van een varken.

■ **NIVEAUBALKJES** Sommige pagina's bevatten één of meer zwarte balkjes onder het paginanummer. Voor artikelen zonder balkje is geen specifieke voorkennis nodig. Artikelen met één balkje bevatten wiskunde uit de onderbouw. Artikelen met twee balkjes vereisen kennis uit de bovenbouw. Drie balkjes: net iets moeilijker.

KLEINE NOOTJES

■ door Jan Guichelaar

EN MET EN ENNEN

Kun je 2 schrijven met 2 tweeën, 3 met 3 drieën, 4 met 4 vieren en 5 met 5 vijven? Algemeen: kun je n schrijven met n n 'en? Je mag alleen maar aftrekken, delen en haakjes gebruiken.

VERSCHILLEN MINSTENS 5

Zet de cijfers 0 tot en met 9 zó op een rij, dat het verschil tussen twee opeenvolgende cijfers altijd minstens 5 is. Op hoeveel manieren kun je dit voor elkaar krijgen?

EIKELS VERZAMELEN

Er zijn drie eekhoorns: een bruine, een rode en een grijze. De bruine kan in één keer 3 eikels naar hun wintervoorraad brengen, de rode kan er in één keer 5 brengen, en de grijze 7. Op hoeveel manieren kunnen de drie eekhoorns 40 eikels naar hun hol brengen? Ze hoeven niet allemaal te lopen, en niet even vaak, maar wel moeten ze steeds hun maximum meenemen.

(Bron: www.insidemathematics.org)

BERGOP EN BERGAF

Wout rijdt op zijn racefiets een heuvel van 200 meter op in 36 seconden. Bergafwaarts doet hij er maar 18 seconden over. Hoe groot zijn de twee snelheden in kilometers per uur? Geen papier en rekenmachine gebruiken, gewoon uit het hoofd.

Kleine nootjes zijn eenvoudige opgaven die weinig of geen wiskundige voorkennis vereisen om opgelost te kunnen worden. De antwoorden vind je in het volgende nummer van *Pythagoras*.

VAKKEN VULLEN

Kees werkt net in de supermarkt. Om 's morgens vroeg in zijn eentje alle vakken te vullen, heeft hij een uur nodig. Kees en de twee even snelle vakkenvullers Aya en Olga doen er samen een kwartier over om alle vakken te vullen.

In hoeveel tijd kan Aya het alleen?

OPLOSSINGEN KLEINE NOOTJES NR. 2

Slang van drie. De slang die in het november-nummer was getekend, kan op 3 manieren in het rooster worden neergelegd (in het november-nummer stond abusievelijk 4 manieren).

De andere slangen zie je hieronder.



Hoeveel blokken? Je kunt er 10 maken:

$1 \times 1 \times 60$, $1 \times 2 \times 30$, $1 \times 3 \times 20$, $1 \times 4 \times 15$,
 $1 \times 5 \times 12$, $1 \times 6 \times 10$, $2 \times 2 \times 15$, $2 \times 3 \times 10$,
 $2 \times 5 \times 6$, $3 \times 4 \times 5$.

Toren tegen torentje. Witte toren: H2 → D2. Zwart torentje: E5 → E4. Witte toren: D2 → D3. Vervolgens drijft de witte toren het zwarte torentje steeds een veld verder naar een van de randen en ten slotte in de hoek H8. Dan staat de witte toren op G7 en het zwarte torentje op H8. Het zwarte torentje moet dan naar G8 of H7, waar hij door de witte toren geslagen wordt. In totaal 10 zetten van de witte toren.

Voetbalcompetitie. A-B: 1-0, A-C: 0-0, B-C: 1-0.

Concertzaal. Noem het aantal mensen dat in de zaal past x . Er geldt $\frac{3}{10}x + 300 = \frac{1}{2}x$, waaruit volgt dat $x = 1500$.

In onze moderne wereld van elektronische communicatiemiddelen is het goed eens even stil te staan bij de voorloper van al deze technieken. De oudste vorm van communicatie met elektronische hulpmiddelen is het seinen in morse. Over het coderen van woorden in morse gaat dit artikel.

■ door Jaap Klouwen

MORSE EN FIBONACCI

De Amerikaanse uitvinder en schilder Samuel Finley Breese Morse (1791-1872), die in 1837 het telegraafstelsel introduceerde, patenteerde zijn seincode in 1838. Het principe van de morsecode is eenvoudig: combinaties van kortdurende signalen (aangegeven door puntjes) en relatief langer durende signalen (weergegeven door streepjes) definiëren op eenduidige manier letters, cijfers en leestekens. In figuur 1 zie je het morsealfabet. In plaats van puntjes en streepjes kunnen we ook nullen en enen gebruiken. De '0' en de '1' noemen we (basis-) tekens in morse.

Je ziet aan figuur 1 dat letters uit maximaal vier tekens bestaan. Cijfers hebben in morse vijf tekens: '0' is bijvoorbeeld 11111, '1' is 01111 en '2' is 00111. Leestekens bestaan uit zes tekens. Het vraagteken is bijvoorbeeld 001100 en de punt is 010101. In dit artikel bekijken we alleen letters. Merk op dat de codes 0011, 0101, 1110 en 1111 geen betekenis hebben in morse.

DUBBELZINNIG Bij het coderen van een woord of een zin in morse zijn er verder nog de volgende bepalingen:

- (1) Gebruik enige 'ruimte' (lees: 'tijd') tussen de afzonderlijke letters.
- (2) Gebruik een iets grotere ruimte tussen afzonderlijke woorden in een zin.

Vanzelfsprekend zijn deze voorwaarden noodzakelijk voor een eenduidige 'vertaling' van een morsebericht naar een taal. Wat zou er gebeuren als we ons niet zouden houden aan voorwaarde (1)? De

morsecode ----- (oftewel 111111) kan dan zowel 'mot' als 'tom' betekenen. En voor -....- (01010) geldt dat zowel 'ar' als 'eten' bedoeld kan zijn. Wat te denken van het woord 'ezel' in morse? Zonder spaties wordt dat 0110000100. Er kan dan ook 'pi!', 'wiel', 'adel' of 'Emil' zijn bedoeld!

Opgave 1. Welk woord is in morse zonder spaties hetzelfde als pi?

Opgave 2. Een leerling-marconist seinde ooit het beroemde SOS-signaal ('save our souls') -....- (000111000) vanaf een schip in nood. In zijn opwinding vergat hij echter het onderscheid tussen de tekens aan te geven. Waar vroeg de marconist onbedoeld nog meer om?

Opgave 3. Welk ander spatieeloos morsewoord heeft dezelfde code als 'code'?

Bij het oplossen van de opgaven 1 tot en met 3 heb je waarschijnlijk bekeken welke en hoeveel mogelijke opdelingen er zijn van het totaal aantal morsetekens van dat woord. Als voorbeeld nemen we het woord dat er spatieeloos zo uit ziet: 1100. Dit kan enkel de letter 'z' betekenen, maar 1100 kunnen we ook splitsen in 11 en 00, ofwel 'mi'. Ook mogelijk is 110 en 0: 'ge' in morse.

a	.-	01
b	-...	1000
c	-.-	1010
d	-..	100
e	.	0
f	..-	0010
g	--.	110
h		0000
i	..	00
j	.---	0111
k	-.-	101
l	.-..	0100
m	--	11
n	-.	10
o	---	111
p	.-.-	0110
q	---.	1101
r	.-.	010
s	...	000
t	-	1
u	..-	001
v	...-	0001
w	.-.	011
x	-..-	1001
y	-.--	1011
z	--..	1100

Figuur 1

MOGELIJKHEDEN TELLEN Hoeveel opdelingen zijn er bij een gegeven aantal tekens? In figuur 2 is de systematiek aangegeven. Voor één teken ($n = 1$) is het duidelijk: er is maar één opdeling mogelijk (namelijk een 0 of een 1, dus een 'e' of een 't'). Voor twee tekens ($n = 2$) is het aantal mogelijkheden 2, namelijk die twee tekens achter elkaar gezet, en de splitting in twee keer één teken. Die laatste mogelijkheid is te zien als uitbreiding van het geval bij $n = 1$.

Voor $n = 3$ is het aantal opdelingen 4, namelijk: een rij van die drie tekens zelf; die ene mogelijkheid van $n = 1$ met twee tekens samen ervóór; en de twee mogelijke opdelingen van $n = 2$ met één teken ervóór. Voor $n = 4$ herhaalt zich dit principe van '1 + de vorige aantallen', dus $1 + 1 + 2 + 4 = 8$.

Noteren we met a_n het aantal mogelijke opdelingen van n morsetekens, dan geldt blijkbaar:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, \\ a_2 &= 1 + a_1 = 1 + 1 = 2, \\ a_3 &= 1 + a_1 + a_2 = 1 + 1 + 2 = 4, \\ a_4 &= 1 + a_1 + a_2 + a_3 = 1 + 1 + 2 + 4 = 8. \end{aligned}$$

Voor het woord 'mee' zijn er dus 8 verschillende opdelingen in morsetekens mogelijk.

SUPER-FIBONACCI Vanaf $n = 5$ gaat het anders, omdat we alleen letters bekijken, en die bestaan uit maximaal vier tekens. Er geldt voor $n \geq 5$:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} + a_{n-4}. \quad (*)$$

Opgave 4. Bereken de waarden van a_6 tot en met a_{15} . Bereken ook de verhouding a_n/a_{n-1} voor de waarden van n van 2 tot en met 15. Wat valt op?

De recursieve formule (*) doet denken aan de beroemde *rij van Fibonacci*, waarin elk getal de som van zijn twee voorgangers is:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

met $a_1 = a_2 = 1$. De Fibonaccigetallen zijn 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ... We zouden met enige fantasie de rij met morseopdelingen een 'super-Fibonacci' kunnen noemen: hij groeit alleen veel harder dan de gewone Fibonacci! Wellicht weet je dat de verhouding a_n/a_{n-1} in de Fibonacci-rij naar $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} \approx 1,618$ nadert, ook wel de *gouden snede* geheten. Om deze verhouding te vinden, moet je de vergelijking

$$x^2 = x + 1$$

n	opdelingen	a_n
1	1	1
2	2 1 1	2
3	3 2 1 1 2 1 1 1	4
4	4 3 1 2 2 2 1 1 1 3 1 2 1 1 1 2 1 1 1 1	8
5	4 1 3 2 3 1 1 2 3 2 2 1 2 1 2 2 1 1 1 1 4 1 3 1 1 2 2 1 2 1 1 1 1 3 1 1 2 1 1 1 1 2 1 1 1 1 1	15

Figuur 2

oplossen. Met de *abc*-formule vind je als oplossin-
gen $x = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{5}$.

We gaan hier verder niet dieper op in, maar als je er
meer over wilt weten, lees dan het artikel 'Priemge-
tallen en Fibonacci' van Bart Zevenhek, in *Pytha-
goras* 48-2 (november 2008); het is te vinden in ons
archief op www.pyth.eu.

Voor de super-Fibonaccirij geldt iets soortge-
lijks. De vergelijking die hierbij hoort, is

$$x^4 = x^3 + x^2 + x + 1.$$

We kunnen deze vierdegraadsvergelijking nog net
exact oplossen. Afgerond op drie decimalen is de
positieve oplossing $x \approx 1,928$. De tweede oplos-
sing is negatief: $x \approx -0,775$. Verder zijn er nog twee
complexe oplossingen.

TOT SLOT Met de kennis van het precieze aantal
morseopdelingen heb ik met behulp van Excel een
tabel gemaakt die bij input van een woord alle (!)
andere (spatieloze) morsevarianten geeft. Daarom
als afsluiting nog twee opgaven:

Opgave 5. Welke twee woorden hebben dezelfde
morsecode als 'tiende'?

Opgave 6. Welk ander woord heeft dezelfde
code als 'morse', afgezien van de mores van dit
verhaal? ■

ANTWOORDEN

Opgave 1. 'wie of 'wei'

Opgave 2. 'ijs'

Opgave 3. 'trots'

Opgave 4. 29, 56, 108, 208, 401, 773, 1490, 2872,

5536, 10671, $a_n/a_{n-1} \approx 1,928$.

Opgave 5. 'niks' en 'herts'

Opgave 6. 'toch'

Deze maand gaat de Nederlandse Wiskunde Olympiade 2016 van start met de eerste ronde op alle scholen in het land. Zo'n 200 onderbouwleerlingen die geselecteerd waren via de Kangoeroewedstrijd, hebben in oktober al een voorproefje gehad: toen vond op de Vrije Universiteit Amsterdam de Junior Wiskunde Olympiade plaats. Voor het oplossen van de opgaven was nauwelijks voorkennis nodig, maar wel vaak een creatieve ingeving. Zoals knippen, schuiven en draaien.

■ door Quintijn Puite en Birgit van Dalen

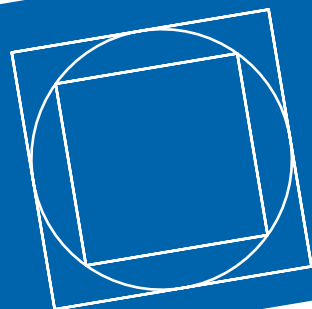
KNIPPEN, SCHUIVEN EN DRAAIEN



Hieronder zie je twee opgaven uit de Junior Wiskunde Olympiade 2015. Probeer ze eerst eens zelf op te lossen voordat je de bladzijde omslaat. En vraag ook eens aan je wiskundeleraar of aan je ouders hoe zij ze zouden oplossen. Wellicht dat zij de opgaven te lijf gaan met de stelling van Pythagoras, met de oppervlakteformule van een cirkel of met het invoeren van letters en het opstellen van een vergelijking. Maakt dat het makkelijker? Oordeel zelf maar, nadat je de uitwerkingen op de volgende pagina bekeken hebt.

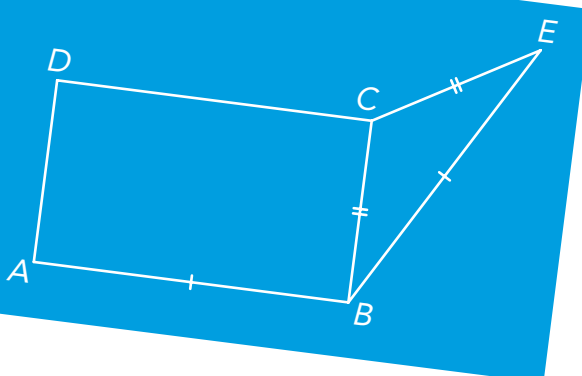
VIERKANT EN CIRKEL

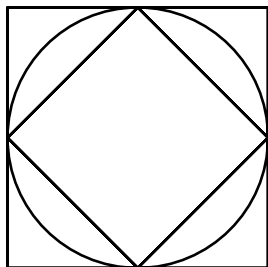
Door de vier hoekpunten van een vierkant met oppervlakte 1 tekenen we een cirkel. Om de cirkel tekenen we weer een vierkant, zodat alle zijden de cirkel raken. Wat is de oppervlakte van dit vierkant?



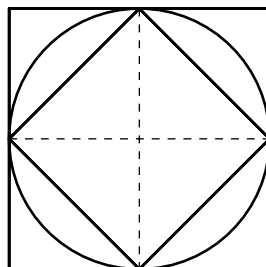
RECHTHOEK EN DRIEHOEK

Gegeven is een rechthoek $ABCD$ en een punt E . Er geldt dat lijnstukken BE en BA even lang zijn en ook dat lijnstukken CE en CB even lang zijn. Verder is de oppervlakte van rechthoek $ABCD$ vier keer zo groot is als de oppervlakte van driehoek BCE . De lengte van de zijde AD is 10. Wat is de lengte van de diagonaal AC ?





Figuur 1



Figuur 2

De sleutel van de eerste opgave (vierkant en cirkel) is dat je de vierkanten vrij kunt draaien, zolang de cirkel op z'n plek blijft. Door het draaien verandert er niets aan de grootte en dus ook niets aan de oppervlakte van een vierkant. We kunnen dus het binnenste vierkant draaien tot het met een punt naar boven staat, waarbij het nog steeds oppervlakte 1 heeft (zie figuur 1).

Wellicht zie je de oplossing nu al, op wonderbaarlijke wijze tevoorschijn getoerd door het draaien van het binnenste vierkant. We tekenen in figuur 2 nog even de diagonalen van het kleine vierkant met stippelijntjes. Nu blijkt het grote vierkant opgedeeld te zijn in acht gelijke driehoeken, waarvan het kleine vierkant er precies vier bevat. Dus het grote vierkant is twee keer zo groot als het kleine vierkant en heeft daarom oppervlakte 2.

Op naar de tweede opgave (rechthoek en driehoek). Nu gaan we niet draaien, maar schuiven, en wel met driehoek BCE . Omdat BE en BA even lang zijn, past deze driehoek precies op de bodem van de rechthoek, zoals in figuur 3. En omdat BC en CE even lang zijn, is het een gelijkbenige driehoek met zijn top precies boven het midden van zijde AB .

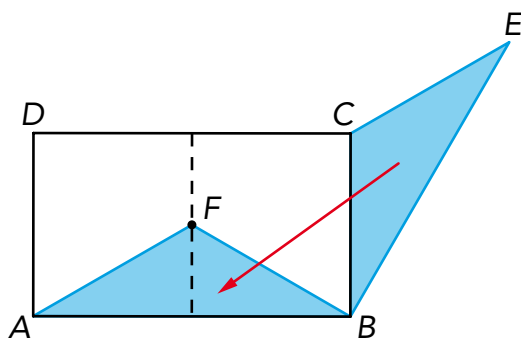
Wat zijn we hiermee opgeschoten? Het is handig dat driehoek BCE zich nu verplaatst heeft naar een positie binnen de rechthoek, want dat maakt het makkelijker om iets te doen met een ander gegeven uit de opgave: de oppervlakte van de rechthoek is vier keer zo groot als die van BCE . Dus ook de nieuwe driehoek ABF heeft een kwart van de oppervlakte van de rechthoek. Hiermee gaan we be-

palen waar punt F zich precies bevindt. Dit kan door de oppervlakteformule van een driehoek te gebruiken, maar het kan ook zonder. In figuur 4 zie je een rechthoek met zijn diagonalen en met gestippeld ook nog een extra horizontale en verticale lijn door het midden.

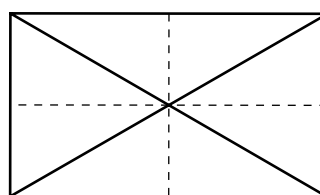
Door de diagonalen en de stippellijnen wordt de rechthoek in acht identieke driehoeken opgedeeld. Twee van zulke driehoeken vormen steeds een gebied begrensd door de diagonalen. Dus elk van de vier stukken die ontstaan door de diagonalen te tekenen, heeft dezelfde oppervlakte, namelijk een kwart van de oppervlakte van de rechthoek. Als we nu terugkijken naar figuur 3, zien we dat F dan wel het snijpunt van de diagonalen moet zijn.

Na al dit opknippen en schuiven kunnen we de vraag beantwoorden. De diagonaal AC is twee keer zo lang als het lijnstuk AF , omdat F op de diagonaal ligt, en het lijnstuk AF is op zijn beurt even lang als zijde BC van de rechthoek. Gegeven is dat AD en daarmee ook BC lengte 10 heeft, dus $AC = 20$.

EERSTE RONDE Ook de opgaven van de eerste ronde van de Wiskunde Olympiade in januari zijn vaak zonder moeilijke formules op te lossen. Als je een opgave over de oppervlakte van een figuur tegenkomt, grote kans dat je hem kunt kraken met wat knippen, draaien en schuiven. Wil je meer oefenen hiermee? Bekijk dan het hoofdstuk 'Knippen en plakken' in het boek *Successtrategieën voor de Wiskunde Olympiade* (zie www.wiskundeolympiade.nl). ■



Figuur 3



Figuur 4

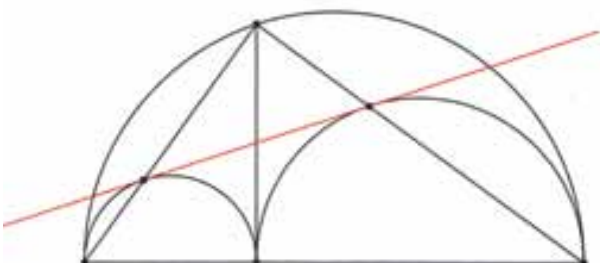
MEETKUNDE ZONDER WOORDEN

■ door Derk Pik

In de jaargangen 47 en 48 stond op de achterkant van elke *Pythagoras* een *sangaku*, een meetkundig probleem waarbij je uit een gegeven figuur de bewering moet halen die je vervolgens moet bewijzen.

Deze speciale vorm van het bedrijven van meetkunde is afkomstig uit Japan, waar wiskundige tabletten (de *sangaku's*) met meetkundige voorstellingen van de zeventiende tot en met de negentiende eeuw de Boeddhistische tempels en Shinto gebouwen versierden.

Ze dienden als offer aan de goden en als uitdaging aan kenners. Zo hebben ze niet alleen een wiskundige, maar ook een artistieke waarde. Over de geschiedenis van de *sangaku* kun je alles te weten komen in het prachtige Engelstalige boek *Sacred Mathematics* van Fukagawa Hidetoshi en Tony Rothman. Hier staan bovendien veel historische voorbeelden uitgewerkt op een moderne manier. Het boek is inmiddels ook op internet beschikbaar.



DE SANGAKU NU De *sangaku* is erg populair geworden en het begrip staat nu voor meetkundige problemen die zonder woorden duidelijk zijn aan de beschouwer. Er zijn in de loop der tijd algemeen aanvaarde spelregels ontstaan waar een *sangaku* aan moet voldoen. Er mogen geen getallen, verhoudingen enzovoort vooraf gegeven zijn en de wiskundige vormen in de figuur moeten nodig zijn voor de stelling. Verder is het wel geaccepteerd dat iets wat er uitziet als een vierkant, ook daadwerkelijk een vierkant is.

Het oplossen van een *sangaku* vergt dikwijls behoorlijk wat meetkundige kennis. Als je deze kennis niet hebt, kun je je toch nog verbazen over de mooie figuren en kun je vaak ook nog wel raden wat er met de figuur bedoeld was, maar kom je niet zomaar achter het echte bewijs.

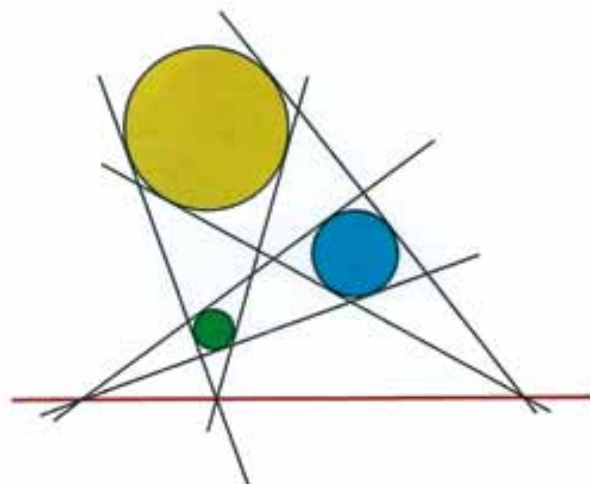


ZEBRABOEKJE In het vorig jaar verschenen zebraboekje *Sangaku's – schoonheid van de meetkunde zonder woorden* van Hans van Lint en Jeanne Breeman leer je vooral de achterliggende meetkunde kennen. Dit gaat op een nogal formele manier. Bij de meetkundestellingen hadden ze – net als bij de *sangaku's* – best wat van die vrolijke kleuren kunnen gebruiken. Kleuren kunnen bij bewijzen namelijk een grote meerwaarde hebben, zie bijvoorbeeld het boek *The First Six Books of The Elements of Euclid* van Oliver Byrne (afbeeldingen uit dat boek stonden vorige jaargang op de achterkant van *Pythagoras*.)

Toch is het een prachtig boek, omdat er zo veel leuke *sangaku's* in staan. Met alle uitleg leer je ze gaandeweg steeds sneller en beter doorgronden. Het is erg leuk dat je steeds wordt uitgenodigd om met het meetkundeprogramma *GeoGebra* te experimenteren. Het kan je dan overkomen dat *GeoGebra* het al wel weet, en jij nog niet!

De drie figuren op deze pagina komen uit het boek. Kun je bij elke *sangaku* bedenken welke stelling is uitgebeeld? En kun je dit vervolgens ook bewijzen? Nadat je het zebraboekje hebt gelezen, lukt het je vast wel. En wie weet kun je zelf ook nog een nieuwe *sangaku* bedenken! ■

Hans van Lint en Jeanne Breeman, *Sangaku's – schoonheid van de meetkunde zonder woorden*. Epsilon Uitgaven. € 10,-.



Jarenlang verzorgde Dion Gijswijt de Problemenrubriek van *Pythagoras*. In 2004 bedacht hij een krankzinnige getallenrij, met de bedoeling dat het tot een leuke puzzel voor zijn rubriek zou leiden. Omdat hij zijn eigen probleem niet kon oplossen (toch wat te moeilijk voor *Pythagoras*!), besloot hij het probleem op het forum van de OEIS te plaatsen. Het leidde tot serieus onderzoek en een artikel dat Dion samen met Fokko van de Bult, John Linderman, Neil Sloane en Allan Wilks schreef. In dit artikel legt Dion uit waar het om gaat.

■ door Dion Gijswijt

KRUL- GETALLEN

Bekijk eens het volgende rijtje getallen:

2, 1, 2, 3, 2, 3, 1, 2, 3, 2, 3, 1, 2, 3, 2, 3.

Dit rijtje eindigt in een *krul* bestaande uit het stuk '2, 3' dat aan het eind twee keer voorkomt:

2, 1, 2, 3, 2, 3, 1, 2, 3, 2, 3, 1, 2, 3, 2, 3, 2, 3, 2, 3.

De staart van het rijtje is als de staart van een varken die tweemaal rondkrult. Als je wat beter kijkt, zie je dat aan het eind het stuk '1, 2, 3, 2, 3' zelfs driemaal wordt herhaald:

2, 1, 2, 3, 2, 3, 1, 2, 3, 2, 3, 1, 2, 3, 2, 3.

Het *krulgetal* van dit rijtje is daarom 3.

Algemeen definiëren we het *krulgetal* van een eindig rijtje als het grootste aantal herhalingen van een stuk aan het eind. Dit stuk mag lang zijn, maar ook heel kort: 1, 1, 2, 1, 1, 2, 2, 2 heeft *krulgetal* 4, omdat het stuk '2' aan het eind viermaal wordt herhaald. Het herhalende gedeelte mag ook het hele rijtje beslaan: 1, 2, 3, 1, 2, 3 heeft *krulgetal* 2 omdat het stuk '1, 2, 3' zich aan het eind tweemaal herhaalt. Als er helemaal geen herhaling aan het eind plaatsvindt, dan is het *krulgetal* gelijk aan 1.

KRULGETALLEN IN DE OEIS In de *Online Encyclopedia of Integer Sequences* (OEIS) staat een rij die gebaseerd is op *krulgetallen*. De rij is te vinden onder nummer A090822. Het recept voor deze rij is als volgt. Begin met enkel '1'. Het volgende getal in de rij is daarna steeds het *krulgetal* van de rij tot nu toe: het *krulgetal* van '1' is 1, van '1, 1' is het 2, van '1, 1, 2' is het 1, enzovoort. Hieronder zie je hoe de eerste getallen van de rij worden uitgerekend. In roze is steeds aangegeven wat het vaakst herhalende stuk aan het eind is (als er meerdere mogelijkheden zijn, kiezen we het kortste stuk).

```

1
1, 1
1, 1, 2
1, 1, 2, 1
1, 1, 2, 1, 1
1, 1, 2, 1, 1, 2
1, 1, 2, 1, 1, 2, 2
1, 1, 2, 1, 1, 2, 2, 2
1, 1, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 3
1, 1, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 1
  
```




Opgave 1. Bereken nog enkele getallen uit de rij.

Het lijkt er misschien op dat de eerste negen getallen uit de rij zich blijven herhalen, maar schijn bedriegt. Nadat dit stuk zich heeft herhaald, volgt daarop namelijk geen 1 maar een 2, juist vanwege deze herhaling!

Als je zelf al wat meer getallen uit de rij hebt berekend, zul je je misschien afvragen of er in deze rij alleen maar getallen 1, 2 en 3 voorkomen. Met behulp van een computer (of flink met de hand doorrekenen) vind je echter na een tijdje een 4 en wel op de 220ste plek in de rij.

WAAR BLIJFT DIE 5? Toen ik deze rij in 2004 bedacht, vermoedde ik dat elk natuurlijk getal ergens in de rij moet voorkomen. De getallen 1, 2, 3 en 4 komen voor het eerst voor op posities 1, 3, 9 en 220 in de rij. Maar zelfs na het berekenen van miljoenen termen van de rij vertoonde de 5 zich nog steeds niet. De twijfel sloeg toe. Maar uiteindelijk, na een paar jaar, lukte het om te bewijzen dat de 5 ooit moet opduiken.

De 5 neemt echter wel zijn tijd. Bij het uitschrijven van de rij zou het heelal al zijn vergaan voordat we ooit een 5 tegenkwamen. De eerste keer dat 5 in de rij verschijnt, is namelijk pas rond de $10^{100.000.000.000.000.000.000}$ -ste positie! Dat getal is zo gigantisch groot, dat het niet zou passen in het gezamenlijke geheugen van alle computers ter wereld. Bedenk dat dit slechts de lengte is, de rij zelf is zeker niet uit te schrijven tot en met de eerste 5.

Dit alles is trouwens niets vergeleken bij hoe lang het duurt voordat de eerste 6 opduikt. Uiteindelijk is bewezen dat elk getal – hoe groot ook – ooit langskomt, maar het duurt ongelooflijk lang. Een ruwe schatting voor de eerste verschijning van een getal $m \geq 6$ is rond positie

$$2^{2^{3^4 \dots m-1}}.$$

Stelling. Elk positief geheel getal komt voor in de rij A090822.

Opgave 2. Stel dat ergens in de rij voor het eerst het getal 8 voorkomt. Beargumenteer dat de 7 dan al eerder in de rij voorkomt. Kun je ook laten zien dat er op de plek direct voor de 8 een 7 staat?

PATRONEN EN LIJM Als het onmogelijk is om de rij uit te schrijven tot en met de eerste 5, hoe kun je dan weten dat er überhaupt een 5 in de rij voorkomt? Het is je misschien al opgevallen dat de rij wat grillig is, maar toch ook veel regelmaat vertoont. Om het patroon wat duidelijker te maken, splitsen we de eerste 98 getallen op in een aantal brokken:

1, 1, 2
1, 1, 2, 2, 2, 3
1, 1, 2
1, 1, 2, 2, 2, 3, 2

1, 1, 2
1, 1, 2, 2, 2, 3
1, 1, 2
1, 1, 2, 2, 2, 3, 2, 2, 2, 3, 2, 2, 3, 3, 2

1, 1, 2
1, 1, 2, 2, 2, 3
1, 1, 2
1, 1, 2, 2, 2, 3, 2

1, 1, 2
1, 1, 2, 2, 2, 3
1, 1, 2
1, 1, 2, 2, 2, 3, 2, 2, 2, 3, 2, 2, 3, 3, 2, 2, 2, 3, 2

2, 3, 2

Het beginstuk '1, 1, 2' vind je door '1' te verdubbelen en er '2' achter te plakken. Het beginstuk bestaande uit de eerste negen getallen vind je door '1, 1, 2' te verdubbelen en er '2, 2, 3' achter te plakken. Het beginstuk van lengte 19 vind je door het beginstuk van lengte negen te verdubbelen en er '2' achter te plakken. Enzovoorts. Er kan worden bewezen dat dit patroon zich voortzet: telkens wordt een beginstuk van de rij tweemaal achter elkaar herhaald,



gevolgd door een stuk met alleen getallen groter dan 1 dat we *lijm* noemen. Hierboven zijn de stukken lijm vetgedrukt.

De eerste zes stukken lijm zijn:

2
2, 2, 3
2
2, 2, 3, 2, 2, 2, 3, 3, 2
2, 2, 3, 2
2, 2, 3, 2, 2, 2, 3, 3, 2, 2, 2, 3, 2, 2, 2, 3, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4

Met behulp van het bovenstaande patroon en deze eerste zes stukken lijm kun je achtereenvolgens weer de beginstukken van lengte

$2 \times 1 + 1 = 3,$
 $2 \times 3 + 3 = 9,$
 $2 \times 9 + 1 = 19,$
 $2 \times 19 + 9 = 47,$
 $2 \times 47 + 4 = 98,$
 $2 \times 98 + 24 = 220$

12

van de rij terugvinden.

Opgave 3. Zet de eerste zes stukken lijm achter elkaar zodat je een rijtje van lengte 42 krijgt. Kun je ook in deze rij een patroon ontdekken?

PATRONEN OP EEN HOGER PLAN We gaan een variant maken op de rij A090822. We beginnen nu met een 2 in plaats van een 1. Net als eerder is verder elk getal in de rij weer het krulgetal van het stuk ervoor, *behalve* wanneer het krulgetal gelijk is aan 1, dan *promoveert* de 1 tot een 2. We krijgen zo de volgende rij:

2, 2, 2, 3, 2, 2, 2, 3, 2, 2, 2, 3, 3, 2, 2, 2, ...

De gepromoveerde getallen zijn onderstreept. We noemen deze rij de 'tweede-orde rij'. Wat blijkt? De stukken lijm van A090822 vormen samen precies deze tweede-orde rij! Bovendien kun je aan de promotieplekken zien hoe de tweede-orde rij weer kan

worden opgeknipt in de stukken lijm: zet een knip vóór elke promotieplek. Dat dit daadwerkelijk het geval is, zullen we hier niet bewijzen.

Opgave 4. Bereken de eerste 42 getallen van de tweede-orde rij en houd bij welke getallen promoveren. Gebruik dit om de eerste 220 getallen van A090822 terug te vinden.

Opgave 5. Stel dat ergens in A090822 een 5 voorkomt. Waarom komt dan ook het stuk 4, 4, 4, 4, 5 voor?

Opgave 6. Als ergens in A090822 een stuk 4, 4, 4 voorkomt, dan komt 4, 4, 4 al eerder voor in de rij, en 4, 4 *nóg* eerder. Kun je dat beredeneren?

Met behulp van de tweede-orde rij (inclusief promoties) kunnen we veel verder in de rij A090822 kijken dan door domweg uitschrijven. Voordat we naar een 5 gaan zoeken, zullen we dit illustreren door uit te zoeken waar voor het eerst '4, 4' voorkomt. Dit zal veel eerder zijn dan de plek van de eerste 5. Als we de computer aan het werk zetten, dan vinden we in het beginstuk van lengte 31044 van de tweede-orde rij voor het eerst twee viere achter elkaar. In dat stuk vinden we 355 promoties en daarmee 355 stukken lijm van lengte 1, 3, 1, 9, 4, 24, 1, 3, ... Na 355 keer verdubbelen en lijm toevoegen vinden we uiteindelijk de eerste dubbele vier in A090822, en wel op positie 255.895.648.634.818. 208.370.064.452.304.769.558.261.700.170.817.472. 823.398.081.655.524.438.021.806.620.809.813.295. 008.281.436.789.493.636.145.

We zouden dezelfde strategie kunnen proberen om de eerste 5 te vinden: eerst de tweede-orde rij (inclusief promoties) uitrekenen tot en met de eerste 5, en daarna uitrekenen op welke plek de 5 staat in A090822. Helaas blijkt dat zelfs in de tweede-orde rij de 5 te lang op zich laat wachten. Hij verschijnt pas op positie 7.709.404.388.415.370.160.82 9.246.932.345.692.180. Hoe kunnen we dat zo pre-



cies weten? Het is immers onmogelijk om zo veel getallen van de tweede-orde rij te berekenen!

Onze rij A090822 kon worden gemaakt door het rijtje '1' te nemen en dat herhaald te verdubbelen, gevolgd door toevoegen van een stuk lijm. Het blijkt dat de tweede-orde rij eenzelfde structuur heeft, maar nu wordt er steeds verdrievoudigd gevolgd door toevoegen van *superlijm* bestaande uit getallen groter dan 2. Beginnend bij '2' vinden we '2, 2, 2, 3', dan '2, 2, 2, 3, 2, 2, 2, 3, 2, 2, 2, 3, 3', enzovoort. Als we de stukken superlijm achter elkaar plakken, vinden we de rij $\underline{3}, \underline{3}, \underline{3}, 3, 4, \underline{3}, \underline{3}, \underline{3}, 3, 4, \dots$. Deze derde-orde rij werkt weer precies als onze eerdere twee rijen, maar nu promoveren de getallen 1 en 2 allebei tot een 3. In de derde-orde rij vinden we voor het eerst een 5 op positie 343. Door naar de promoties te kijken, kunnen we de stukken superlijm achterhalen en daarmee (door herhaald te verdrievoudigen) de positie van de eerste 5 in de tweede-orde rij.

Het patroon van verdubbelen, verdrievoudigen, verviervoudigen enzovoorts met behulp van lijn, superlijn, supersuperlijn enzovoorts blijft eindeloos doorgaan. Hieruit volgt dat elk getal in de tweede-orde rij ook voorkomt (na veel verdubbelingen) in A090822. Elk getal in de derde-orde rij komt op zijn beurt (na een aantal verdrievoudigingen) voor in de tweede-orde rij. Elk getal in de vierde-orde rij komt ook voor in de derde-orde rij, enzovoort. Zo door redenerend volgt uiteindelijk dat elk geheel getal voorkomt in A090822, ook al duurt het fantastisch lang.

HET KRULVERMOEDEN De rij A090822 ontstond uit '1' door herhaald het krulgetal van de rij tot dan toe aan het eind toe te voegen. In plaats van met '1' kun je ook met iets anders starten, bijvoorbeeld met '2, 2'. Je vindt dan 2, 2, 2, 3, 1, ... Of je kunt starten met '2, 3, 2, 3', zodat je krijgt: 2, 3, 2, 3, 2, 2, 3, 1, ... Het lijkt erop dat waar je ook mee begint, je uiteindelijk weer een keer op een 1 uitkomt.

Opgave 7. Start met 2, 2, 2, 3, 2, 2. Na hoeveel stappen kom je op een 1 uit?

Opgave 8. Start met 2, 3, 2, 2, 2, 3, 2, 3. Als het goed is, kom je na 59 stappen uit op een 1.

We eindigen dit stuk met een open probleem:

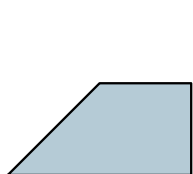
Vermoeden. Met welk rijtje je ook begint, het herhaald toevoegen van het krulgetal aan het eind, levert uiteindelijk een keer een 1 op.

Zelfs als we alleen beginnen met rijtjes bestaande uit tweeën en drieën, is het onbekend of we altijd op een 1 uitkomen. ■

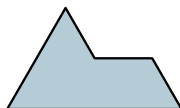
Dit artikel gaat over het opdelen van een gegeven figuur in een aantal congruente (dat wil zeggen: identieke) kleinere delen. We beginnen eenvoudig met figuren in het platte vlak. Dit gebruiken we als opstapje naar de ruimtelijke situatie. Uiteindelijk komen we uit bij de dodecaëder (gelijkzijdig twaalfvlak) en delen die ook op in gelijke stukjes.

■ door William Verspaandonk

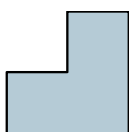
EERLIJK DELEN



Figuur 1



Figuur 2



Figuur 3

De tweedimensionale vormen die je in figuur 1, 2 en 3 ziet, kun je opdelen in vier congruente delen. Twee delen zijn congruent als ze precies op elkaar passen (de stukjes kunnen wel ten opzichte van elkaar gedraaid of gespiegeld zijn). Probeer ze maar eens op te lossen (hint: voor elke figuur geldt dat de vier ontstane delen dezelfde vorm hebben als de oorspronkelijke figuur); de oplossingen staan aan het eind van dit artikel.

14

Sommige figuren zijn simpel op te splitsen in gelijke delen. Neem bijvoorbeeld een vierkant. Door het over de diagonaal te snijden, ontstaan twee identieke driehoeken. Als je het vervolgens ook nog over de andere diagonaal snijdt, ontstaan vier identieke driehoeken.

Het is niet eenvoudig om figuren die een *onregelmatige* vorm hebben, zoals figuur 1, 2 en 3, te snijden in gelijke delen. Daarom gaan we ervan uit dat de figuren *regelmatig* zijn, zoals een vierkant. Alle zijden hebben dus dezelfde lengte en alle aangrenzende zijden maken dezelfde hoek met elkaar.

Regelmatige veelhoeken met een *oneven* aantal hoeken kun je in twee gelijke stukken verdelen door een lijn te trekken van een hoek tot het midden van de tegenover liggende zijde. Dit principe kun je herhalen om de figuur in meerdere identieke stukken op te delen.

Is het aantal hoeken *even*, dan snij je van hoek naar tegenover liggende hoek; via een hoofd diagonaal dus. In figuur 4 zie je een achthoek: die kun je in twee, vier (groen) of acht stukken (blauw) verdelen. De stukken hebben dan natuurlijk niet (zoals in figuur 1, 2 en 3) dezelfde vorm als de oorspron-

kelijke figuur. Als de figuur op deze manier in acht delen wordt gesneden, ontstaan acht gelijkbenige driehoeken (zoals de blauwe stukken). Van hieruit kun je driehoeken samenvoegen om zo bijvoorbeeld de groene stukken te krijgen. Laten we deze methode de *driehoeksmethode* noemen.

In plaats van te snijden van hoek naar hoek, kun je ook snijden van het midden van een zijde naar het midden van de tegenoverliggende zijde (zie figuur 5). En hetzelfde principe kun je ook toepassen vanaf elk willekeurig punt op een zijde (zie figuur 6). Door een combinatie te maken van de eerste methode (hoek-hoek) en de tweede (midden zijde-midden zijde) kunnen zelfs 16 congruente delen worden gevormd (zie figuur 7). De helft is gespiegeld. Als we dezelfde figuur willen opdelen in drie, vijf of zeven identieke stukken, wordt dit een stuk moeilijker, als het al mogelijk is.

PLATONISCHE LICHAMEN De eerste en tweede methode kun je goed op bepaalde ruimtelijke figuren toepassen. In het bijzonder kunnen de platonische lichamen zodanig worden gesneden, dat identieke stukjes ontstaan. Er zijn vele manieren mogelijk. Een kubus kun je bijvoorbeeld opdelen op de manier zoals we een vierkant opdeelden (twee keer over een diagonaal snijden). Hierdoor ontstaan na de eerste snede twee prisma's en na de tweede snede vier prisma's. De boven- en onderzijde van de prisma's zijn gelijkbenige driehoeken. Maar er zijn nog vele andere manieren om de kubus in congruente stukjes op te delen. Stel, we willen een kubus met afmetingen $2 \times 2 \times 2$ in twee identieke delen snijden. Dit kan bijvoorbeeld door de kubus precies door midden te snijden. Zo ontstaan twee balken met afmetingen $2 \times 2 \times 1$. Een andere, erg mooie manier is door van alle zijden een hoek af te snijden (zie figuur 8). Het snijvlak is dan een zeshoek (rood).

In figuur 9 en 10 zie je hoe je een kubus in drie identieke delen kan verdelen. In figuur 9 zijn de snijvlakken blauw en rood gekleurd. In figuur 10

zie je in rood twee piramides die samen een derde van het volume innemen. Het grondvlak van ieder van deze piramides is een zijvlak van de kubus. Met drie van zulke samengestelde piramides kun je een kubus vormen. Deze laatste manier lijkt veel op de driehoeksmethode. Hier gaan de randen van de snijvlakken van hoek naar hoek door het midden van de kubus. Zo ontstaan zes piramides. Laten we deze methode *piramidemethode* noemen.

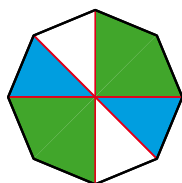
Je kunt je misschien wel voorstellen hoe je de piramidemethode kunt gebruiken voor de octaëder (regelmatig achthoek), dodecaëder (regelmatig twaalfvlak) en icosaeëder (regelmatig twintigvlak). Dit zijn drie van de vijf platonische lichamen. De kubus en de tetraëder (regelmatig viervlak, zie figuur 11) zijn de andere twee. Bij de tetraëder kun je de randen van het snijvlak niet van hoek naar hoek door het midden laten gaan, omdat er geen hoek tegenover een andere hoek ligt. De randen kunnen wel van een hoek tot het midden van de tetraëder lopen om zo piramides te vormen. Dit is te vergelijken met het toepassen van de driehoeksmethode op de gelijkzijdige driehoek. Trouwens, een andere mooie manier om een tetraëder in twee stukken

te delen zie je in figuur 12. Het snijvlak is rood gekleurd.

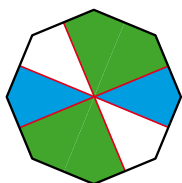
Voor de octaëder zie je in figuur 13 een vergelijkbare manier. Het snijvlak is een regelmatige zeshoek. Je vraagt je misschien af of er een verband bestaat tussen het snijvlak van de kubus in figuur 8 en dat van de octaëder in figuur 13. Jazeker, dit is in de kuboctaëder terug te vinden. Deze ruimtelijke figuur kun je zien als de doorsnede van een kubus met een octaëder. Door de figuur over zijn ribben in tweeën te delen, ontstaat de zeshoek.

De octaëder kan nog op een andere manier in tweeën worden gedeeld: snij de octaëder horizontaal doormidden. Er ontstaan zo twee piramides en het snijvlak is een vierkant. Ook hier is een verband te vinden met het vierkante snijvlak van de tetraëder. De octaëder kan in de tetraëder worden geplaatst zodat de twee snijvlakken samenvallen. De hoeken van de octaëder komen dan in het midden van de zijden van de tetraëder terecht.

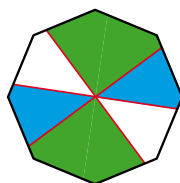
Twee platonische lichamen hebben we nog niet besproken: de dodecaëder en de icosaeëder. De rest van dit artikel draait om de dodecaëder. Volgende maand bespreken we de icosaeëder.



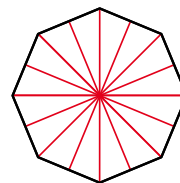
Figuur 4



Figuur 5



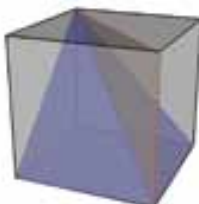
Figuur 6



Figuur 7



Figuur 8



Figuur 9



Figuur 10



Figuur 11



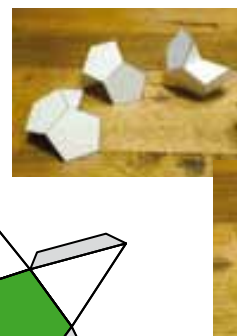
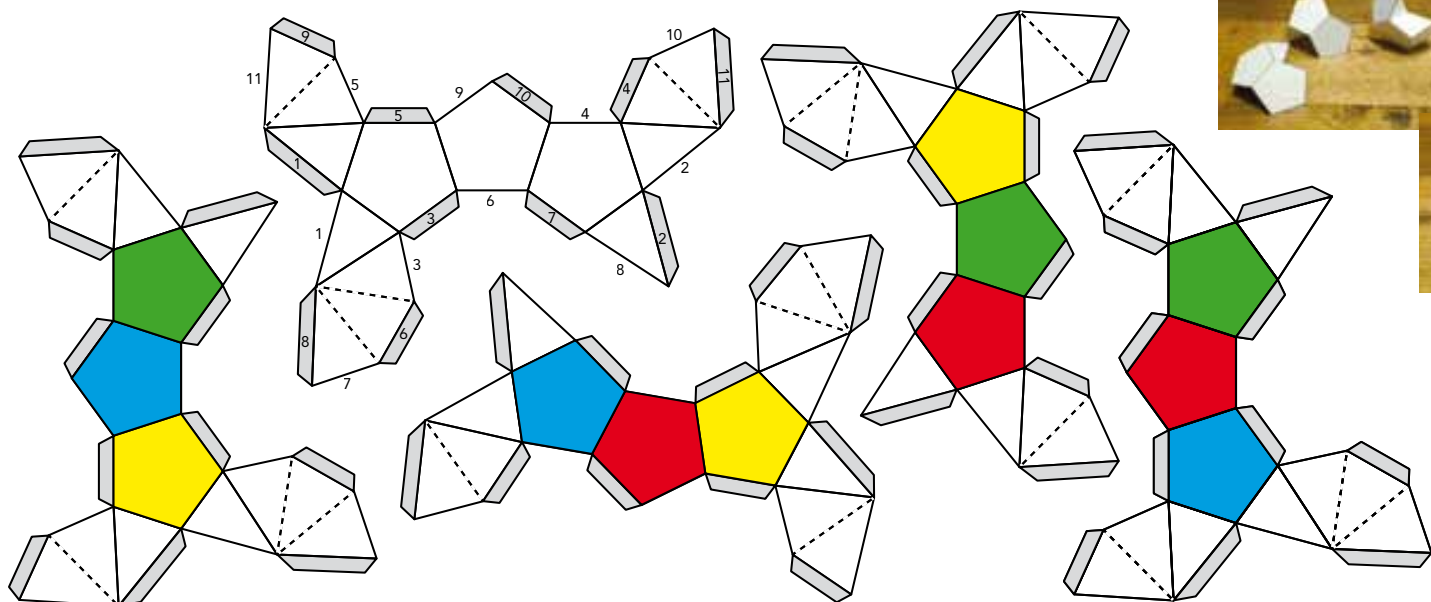
Figuur 12



Figuur 13

BOUWTEKENINGEN

Van beide constructies is een bouwtekening gegeven zonder kleur. De gekleurde bouwtekeningen vormen een puzzel worden gevormd. De bedoeling is om de figuur zo te vormen, dat geen van de aangrenzende vlakken dezelfde kleur h keningen is met nummers aangegeven welk lijmf lapje aan welke zijde moet worden vastgelijmd. In de tekeningen zijn betekent dat de vlakken die aan de lijnen grenzen, de andere kant uitgevouwen moeten worden. Vanwege de beperkte hier klein afgedrukt, maar met een kopieerapparaat kun je ze natuurlijk vergroten. De bouwplaten zijn ook te downlo



16

OPDELEN DODECAËDER De dodecaëder (zie figuur 14) bestaat uit twaalf gelijkzijdige vijfhoeken. Ook deze kunnen we opdelen zodat piramides ontstaan (piramidemethode). Het grondvlak van ieder van deze piramides is natuurlijk een van de vlakken van de dodecaëder. De randen van de snijvlakken lopen van een hoek naar de tegenoverliggende hoek. Hierbij wordt het midden van de figuur gepasseerd. De randen van de snijvlakken vormen de hoofddiagonalen van de dodecaëder.

Omdat we twaalf vlakken hebben, kunnen we de figuur met de piramidemethode opdelen in 2, 3, 4, 6 of 12 congruente stukken. In twaalfen delen is natuurlijk duidelijk. Voegen we de piramides

paarsgewijs samen, dan krijgen we zes delen. Als we drie piramides groeperen houden we vier delen over, enzovoort. Maar dit wil niet zeggen dat de delen automatisch allemaal identiek zullen zijn. Om dat voor elkaar te krijgen, moet je goed kijken naar hoe de vlakken ten opzichte van elkaar zijn gerangschikt. Kijk je naar de dodecaëder zelf, dan raak je snel de draad kwijt. Een slimmere methode is om een uitslag van de figuur te maken. Wat we willen, is dat er een herhalend patroon in voorkomt. Het aantal piramides dat we aan elkaar willen vastmaken, bepaalt het herhalend patroon. Het voordeel van deze methode is dat we vanuit de uitslag heel gemakkelijk de bouwtekeningen voor ieder samengesteld deel kunnen maken. We gaan de situaties bekijken waarbij drie piramides en vier piramides worden samengevoegd.

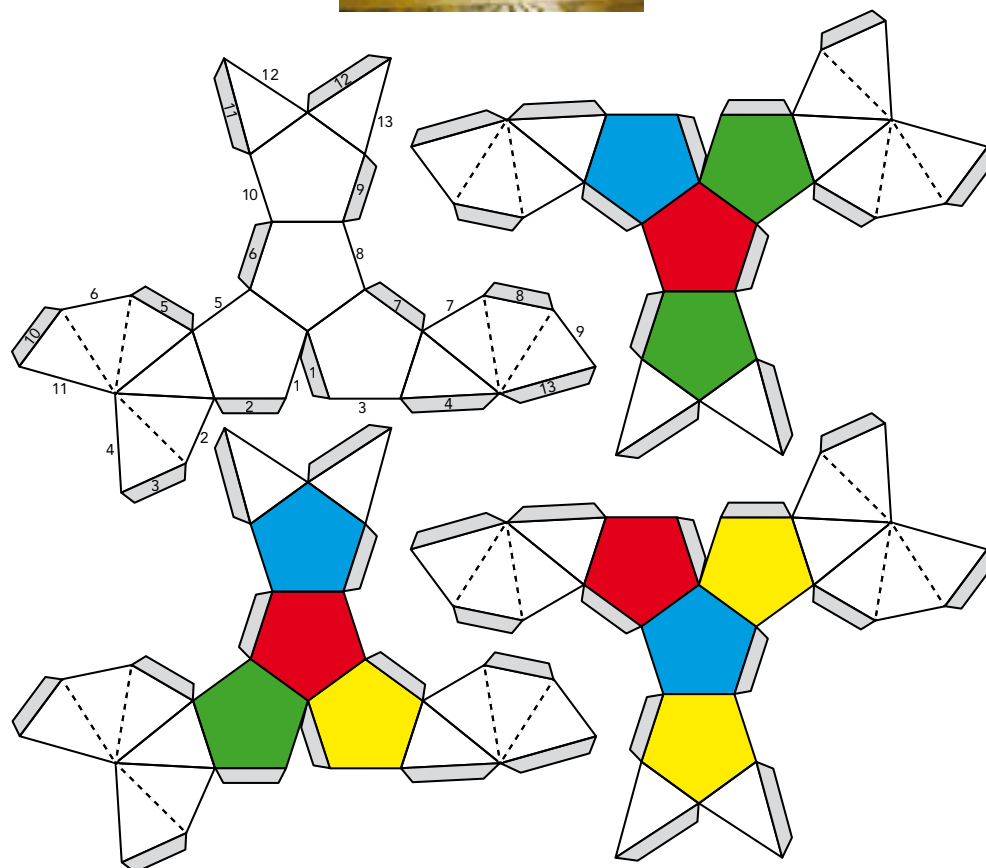
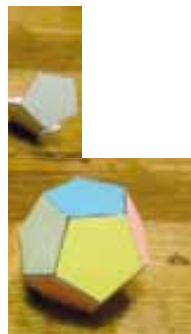
DRIE PIRAMIDES, VIER IDENTIEKE DELEN

Uitslagen kunnen op vele manieren worden gemaakt. De uitslagen die we hier laten zien, zijn er slechts een paar. Van de situatie waarbij drie piramides tot een geheel worden samengevoegd, zie je



Figuur 14

waarmee de dodecaëder kan
 eppen. In de kleurloze bouwte-
 eningen zijn sommige lijnen gestippeld. Dit
 zijn de bouwtekeningen
 van www.pyth.eu.



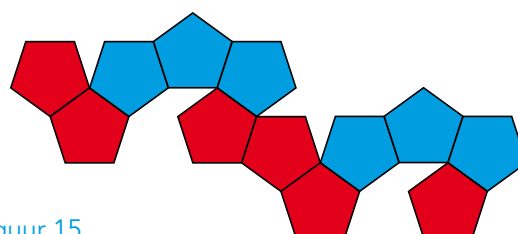
Links:
 drie piramides,
 vier identieke delen

Rechts:
 vier piramides,
 drie identieke delen

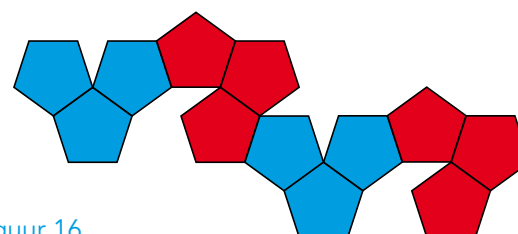
twee uitslagen in figuur 15 en 16. De uitslagen zijn
 identiek op de kleuren na. Als je ze uitknipt, kun je
 van beide een dodecaëder maken.

Zoals je kunt zien (figuur 15) worden drie op-
 eenvolgende vijfhoeken op dezelfde manier aan el-
 kaar verbonden. De twee rode vijfhoeken links in
 de uitslag kun je aan de rechter vijfhoek koppelen.
 Met dezelfde uitslag laten we zien dat drie pirami-
 des op nog een andere manier aan elkaar kunnen
 worden bevestigd (zie figuur 16). Met de eerste op-
 deling van de uitslag gaan we de dodecaëder opde-
 len. We hebben van de uitslag slechts drie opeen-
 volgende vijfhoeken van dezelfde kleur nodig, want
 alle vier delen zijn identiek. Van daaruit gaan we de
 bouwtekeningen maken van de samengevoegde pi-
 ramides.

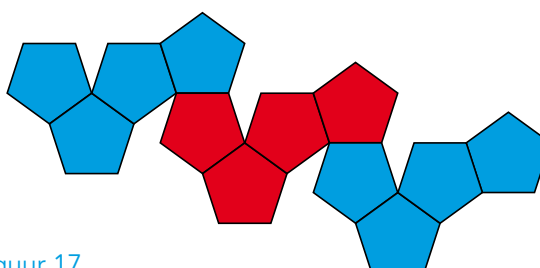
Om de drie aaneengesloten piramides te vor-
 men, moeten (in de bouwtekening) aan de vrije zij-
 den van de drie vijfhoeken gelijkbenige driehoeken
 komen. Dit zijn de snijvlakken. De gelijke zijden
 van de gelijkbenige driehoeken vormen de ribben
 die samenkomen in de top van de piramides. Nu
 weten we wel de lengte van de zijden van de vijf-



Figuur 15



Figuur 16



Figuur 17

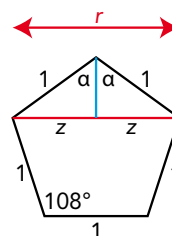
DE LENGTE VAN DE HOOFDDIAGONAAL VAN EEN DODECAËDER

Gegeven is een dodecaëder met ribben waarvan de lengte 1 is. We willen de lengte d van de hoofddiagonaal van deze dodecaëder berekenen. Het lijkt er misschien op dat daarvoor een enorme berg rekenwerk moet worden verzet, omdat er geen rechte hoeken te bekennen zijn. Maar met een truc blijkt het best mee te vallen: in de dodecaëder zit namelijk een kubus verstopt (zie figuur 18)! In elk vlak van de dodecaëder kun je een lijn tekenen zodat een kubus ontstaat. Voor het bepalen van de hoofddiagonaal van de dodecaëder volstaat het om de hoofddiagonaal van de kubus te berekenen.

Het enige dat we eerst nog moeten weten, is de lengte van de ribben van de kubus. Laten we eens kijken naar een vlak van de dodecaëder (zie figuur 19). In ieder vlak is een ribbe van de kubus te vinden, hier in rood weergegeven. We noemen deze r . De ribbe loopt van hoek naar hoek. Iedere twee aangrenzende zijden van de vijfhoek maken dezelfde hoek met elkaar. Deze hoek is 108° (reken maar na). Nu kun je r met de cosinusregel berekenen, maar het kan ook anders. Als we een hoek van de vijfhoek door midden delen, krijgen we twee rechthoekige driehoeken. Hiervan weten we een hoek en een zijde. De bekende hoek is de helft van 108° (omdat we de hoek van de vijfhoek doormidden hebben gedeeld); dit is $\alpha = 54^\circ$. En de bekende zijde is de zijde van de vijfhoek en deze is 1. Met de definitie van de sinus bepalen we de tegenoverliggende zijde. Noem de onbekende zijde z ; dan geldt $\sin(\alpha) = z/1 = z$ en dus $r = 2z = 2\sin(\alpha)$. (Dit is gelijk aan $(1 + \sqrt{5})/2$, het *gouden-snedegetal*, maar dat doet er voor ons niet toe.) Uit de stelling van Pythagoras volgt ten slotte: $d = r\sqrt{3}$. De ribbe van de piramide wordt $d/2$.



Figuur 18



Figuur 19

18 hoeken (omdat dit de ribben van de dodecaëder zijn en die hebben we zelf gekozen), maar we weten nog niet de lengte van de gelijke benen. Omdat de toppen van de piramides allemaal samenkomen in het midden van de dodecaëder, betekent dit dat de lengte van de ribben precies de helft is van de lengte van de hoofddiagonalen. Dus we hebben de lengte van de hoofddiagonalen van de dodecaëder nodig om zo de lengte van de ribben te bepalen. Omdat we de lengte van de zijden van de vijfhoeken weten, willen we van daaruit de lengte van de hoofddiagonalen bepalen (zie het kader hierboven). De bouwtekeningen staan op pagina 16. De constructie waarbij vier piramides aan elkaar vastzitten kan niet met de uitslagen van figuur 15 en 16 worden gemaakt. Daarvoor maken we een andere uitslag.

VIER PIRAMIDES, DRIE IDENTIEKE DELEN

Als we de dodecaëder willen opdelen in drie identieke delen met behulp van de piramidemethode, moeten vier piramides worden samengevoegd. Ook dit kan op verschillende manieren. In figuur 17 zie je een uitslag waaraan je kunt zien dat na ieder vierde vlak de uitslag herhaalt. Dit geeft een manier om vier piramides samen te voegen.

Willen we de ruimtelijke delen maken (die natuurlijk bestaan uit samengevoegde piramides), dan hebben we opnieuw de lengte van de hoofddiagonalen nodig (zie het kader). De bouwtekeningen van de samengevoegde piramides staan op pagina 17. ■

Hier zie je de oplossingen van de drie puzzels waarmee dit artikel begon. Als we de eis weglaten dat de stukken dezelfde vorm moeten hebben als de oorspronkelijke figuur, dan is voor de middelste figuur nog een andere oplossing te bedenken.



Formule voor π werkt ook in natuurkunde

Het getal π – de verhouding tussen de omtrek en de diameter van een cirkel – blijkt een onverwachte toepassing te hebben in de natuurkunde. Een formule uit de zeventiende eeuw om π te berekenen, vormt óók een beschrijving van de energiestaat van een waterstofatoom.

Zo'n energiestaat is een fenomeen uit de quantummechanica, een tak van de natuurkunde waarin heel kleine deeltjes worden bestudeerd. In de quantummechanica bestaat een manier om te benaderen hoeveel energie een deeltje bevat. Die methode wordt vaak gebruikt voor 'ingewikkelde' deeltjes, deeltjes waarvan de energiehoeveelheid niet op eenvoudige wijze exact te berekenen is. Voor waterstof, het simpelste atoom dat er bestaat, wordt die rekenmanier nooit gebruikt; waterstof is zo simpel dat je geen benaderingen nodig hebt.

De 78-jarige natuurkundige Carl Hagen van de universiteit van Rochester in New York gaf zijn studenten tijdens een college bij wijze van oefening toch de opdracht om de benaderingsmethode

toe te passen op waterstof en te vergelijken met de exacte waarden. Wat bleek? Naarmate de energie in het waterstofatoom toenam (atomen kunnen verschillende energiestadia hebben) werd de benaderingsmethode steeds nauwkeuriger. Dat was op zich al vreemd; normaal gesproken wordt de benadering juist steeds slechter als de energie toeneemt. Een van de studenten voerde de berekening voor steeds hogere energieniveaus uit en ontdekte dat de formule langzaam kroop naar het bekende 'product van Wallis', dat in 1655 door de Britse wiskundige John Wallis werd ontdekt. Het gaat hier om een product dat uit oneindig veel factoren bestaat en precies de uitkomst $\pi/2$ oplevert:

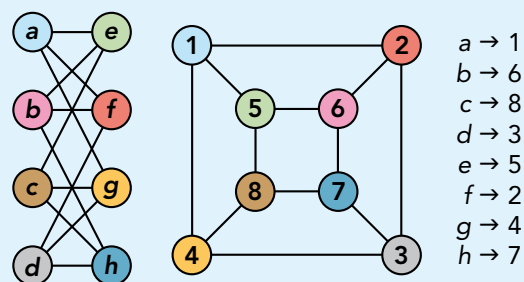
$$\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{6}{7} \dots = \frac{\pi}{2}.$$

Dat is een toevallig, maar mooi verband. Hagen: 'Dat een puur wiskundige formule uit de 17de eeuw toepasbaar blijkt op een fysisch fenomeen dat drie eeuwen later werd ontdekt, is erg bijzonder.' (MS)

Efficiënt netwerken vergelijken

Er is een doorbraak bereikt in het berucht hardnekkige probleem om te bepalen of twee grafen isomorf zijn. Een 'graaf' is niets anders dan een verzameling knooppunten met verbindingen ertussen. En 'isomorf' wil zoiets zeggen als: in wezen hetzelfde. De twee afgebeelde grafen zijn dat bijvoorbeeld: elk knooppunt van de linkergraaf kun je identificeren met een knooppunt van de rechtergraaf, zodanig dat alle knooppunten met precies dezelfde, overeenkomstige knooppunten verbonden zijn.

Voor grote grafen, met veel verbindingen, kan het knap lastig zijn om te zien of ze al dan niet hetzelfde zijn. Grafen zijn er in allerlei soorten en maten, en voor diverse types bestaan algoritmen die efficiënt kunnen bepalen of twee grafen isomorf zijn. Maar er is nog geen algoritme dat dit gegarandeerd voor alle grafen presteert. 'Efficiënt' betekent in dit verband dat de benodigde computertijd 'polynomiaal' toeneemt met de grootte van de klus. Als het algoritme niet efficiënt werkt, maar iets doet wat eigenlijk neerkomt op domweg alle mogelijkhe-



den uitproberen, neemt de computertijd exponentieel toe.

De gerenommeerde, van origine Hongaarse wiskundige László Babai claimt nu dat hij een 'semi-efficiënt' algoritme heeft gevonden, dat qua groei van de rekentijd tussen polynomiaal en exponentieel in zit. Gerhard Woeginger, wiskundige aan de Technische Universiteit Eindhoven, is enthousiast: 'Babai is in de zestig en heeft in zijn carrière al menig sterk resultaat bereikt. Hij is zo iemand die in dit stadium geen fouten maakt, hem vertrouw ik blindelings. Dit is de grootste doorbraak op dit gebied in tien jaar.' **Bron:** www.kennislink.nl (AJ)

Je kent misschien de paradox van de Griekse held Achilles die dapper doorloopt maar nooit op zijn bestemming lijkt aan te komen, en de paradox van Achilles en de schildpad waarin hij het langzame dier een voorsprong gunt, maar het vervolgens niet meer lijkt te kunnen inhalen. Hier vertellen we een fabel over nog weer een andere worsteling met het begrip oneindig: Brunhilde en de egel.

■ door Rik Biel

BRUNHILDE EN DE EGEL



20

De egel daagt de sportieve Brunhilde uit het Nibelungenlied uit tot een hardloophwedstrijd. Hij noemt de regels op. Ze zullen tegelijkertijd vertrekken vanaf het punt $(1, 0)$ op de x -as. Hun doel is de oorsprong $(0, 0)$. De egel mag over de x -as lopen. De weg die Brunhilde zal moeten afleggen, is de grafiek van de functie

$$f(x) = x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$$

voor $0 < x \leq 1$ (en verder definiëren we $f(0) = 0$).

Brunhilde heeft op school geleerd functies te onderzoeken en grafieken te tekenen. Ze ziet in dat deze sinusachtige kromme slingerend richting het doel gaat (zie figuur 1). De uitwijkingen $|f(x)|$ worden gaandeweg kleiner. Dit volgt uit de schatting

$$|f(x)| = \left|x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)\right| \leq x.$$

Haar pad is vanzelfsprekend langer dan de rechte lijn van de egel. Zij kan daarentegen veel sneller lopen dan hij. Ze stemt vol zelfvertrouwen toe. Wie zal er winnen?

DE WEDSTRIJD Ze gaan van start. De egel loopt in zijn eigen tempo. Hij zal het doel zonder problemen bereiken. Of toch niet? Het pad van Brunhilde slingert oneindig vaak heen en weer en snijdt de x -as in de punten waar $f(x) = 0$, ofwel $\sin(\pi/x) = 0$, dus in de punten $x = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$

Als de egel voor zich uit kijkt en de snijpunten zich naar het eind toe ziet verdichten, duizelt het hem even. Telkens als hij bij een punt $\frac{1}{n}$ komt, is er weer een volgend punt $\frac{1}{n+1}$ waar hij heen moet. En die rij punten houdt nooit op en komt niet uit op het beoogde doel. Het doel lijkt onbereikbaar.

De egel weet echter best dat dat niet zo is. Het zijn alleen zijn gedachten die blijven hangen in de oneindige rij. Niets houdt hem tegen om met een eindig aantal stappen het doel te bereiken. Sterker nog, een lijnstuk inclusief begin- en eindpunt kan niet eens door oneindig veel steeds groter wordende tussenpunten in stukken van positieve lengte worden verdeeld (zie het kader op pagina 21)!

PARADOX OF NIET? De egel komt uiteindelijk waar hij wil zijn. Brunhilde is er nog niet. De egel heeft gewonnen, en hij heeft zich niet eens gehaast!

HET GESLOTEN INTERVAL VERDEELD

Stel, we willen het interval $[0, 1]$ verdelen door middel van een oneindige dalende rij tussenpunten

$$1 = x_1 > x_2 > x_3 > x_4 > x_5 > \dots \geq 0$$

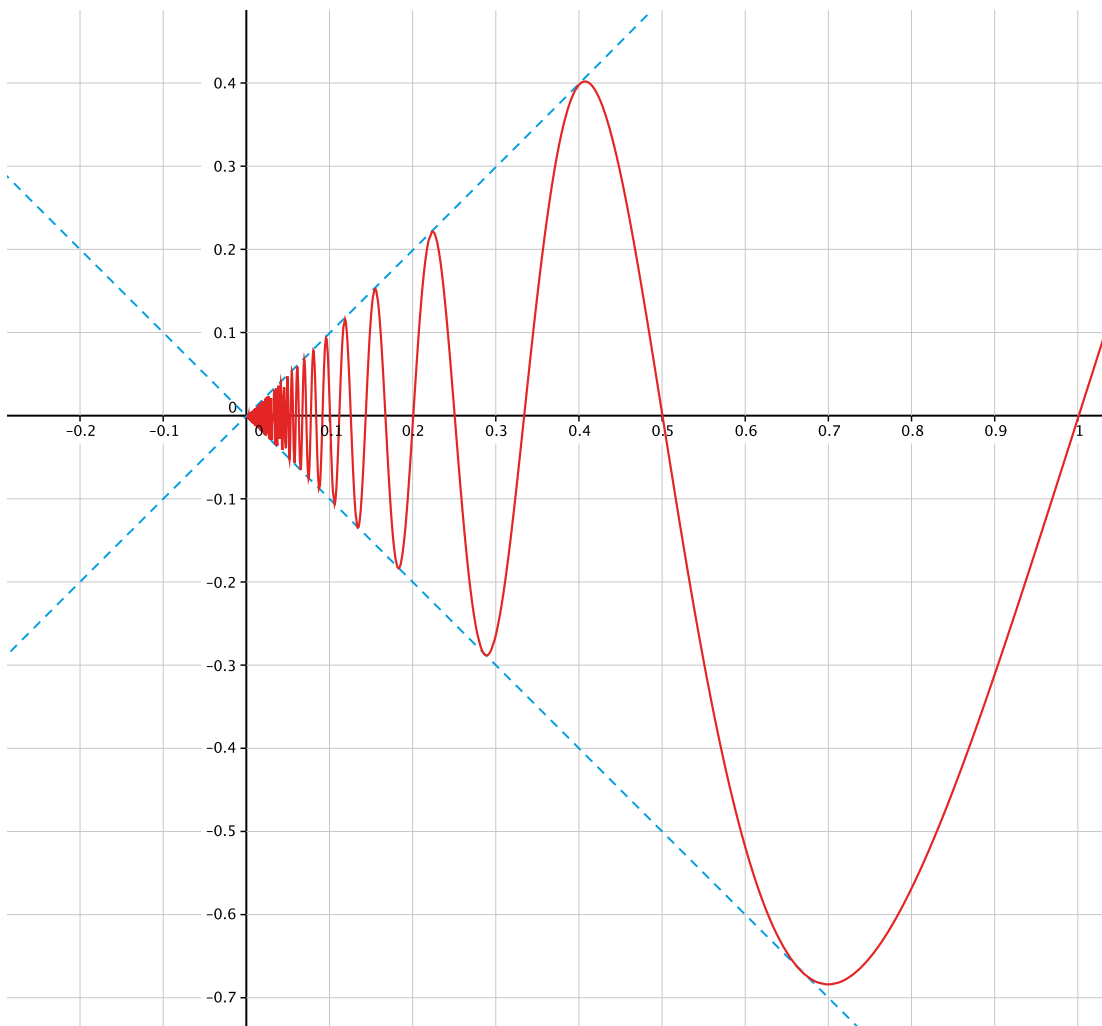
zó, dat

$$[x_2, x_1] \cup [x_3, x_2] \cup [x_4, x_3] \cup [x_5, x_4] \cup \dots = [0, 1].$$

Merk op dat geen enkele x_i gelijk is aan 0, want dan volgt $x_{i+1} < 0$.

Elk interval $[x_{i+1}, x_i]$ ligt in het interval $(0, 1]$, dus 0 ligt niet in de vereniging

$$[x_2, x_1] \cup [x_3, x_2] \cup [x_4, x_3] \cup [x_5, x_4] \cup \dots$$



Figuur 1 De grafiek van f

TWEE BEROEMDE PARADOXEN

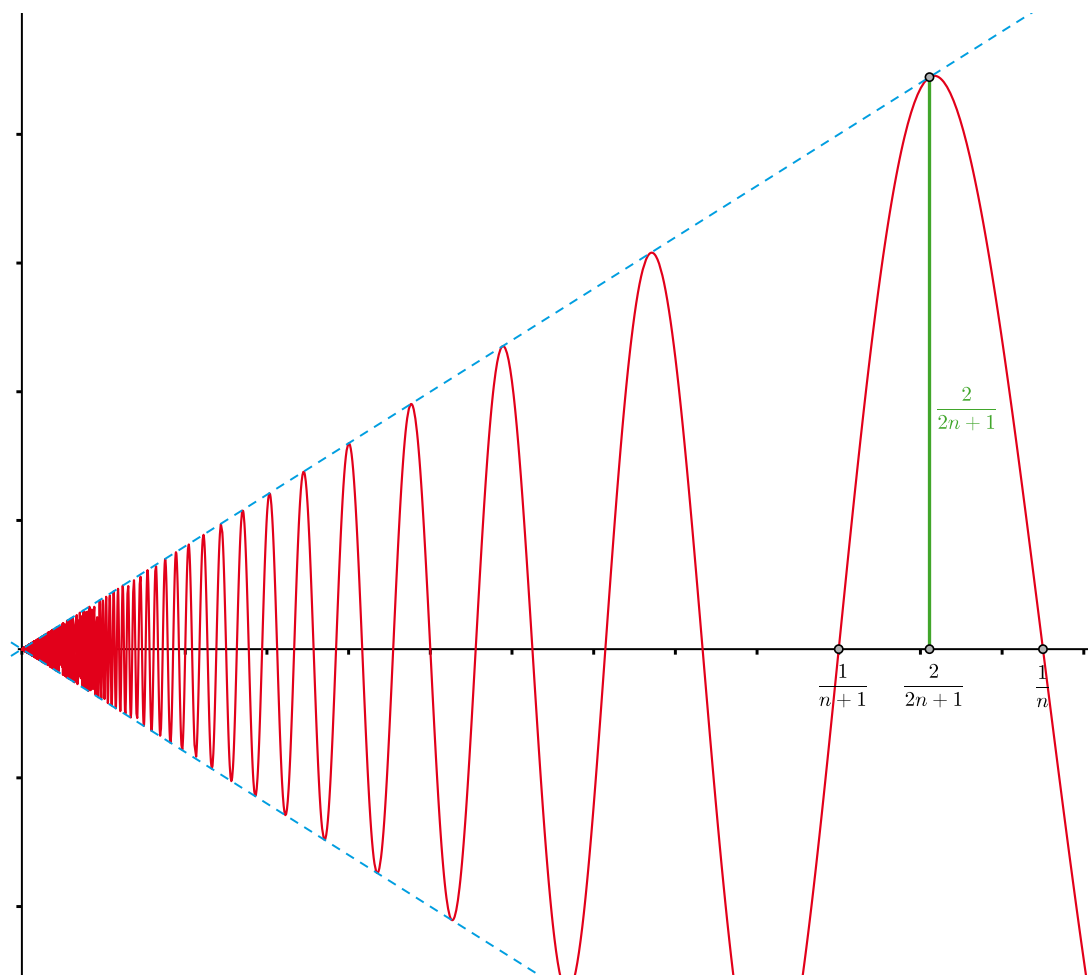
De Griek Zeno (490-430 voor Christus) heeft de volgende twee paradoxen bedacht waarmee hij ons laat nadenken over de gevolgen van het in oneindig veel stukken breken van een eindig interval.

DE PARADOX VAN DE DICHOTOMIE Achilles wil een bepaald traject afleggen. Hij staat bij de start, op de reële rechte gerepresenteerd door het punt 1, en ziet in de verte de finish liggen, corresponderend met het punt 0. Hij begint te rennen. Om bij de finish te komen zal hij toch eerst de helft van het traject moeten afleggen. Halverwege aangekomen moet hij eerst de helft van het resterende deel overbruggen om verderop te komen. Op driekwart van het traject volgt eerst de helft van het restant. Enzovoort. Zodoende loopt Achilles langs de punten $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$ ofwel de rij

$$x_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \quad n \geq 1.$$

Hij heeft oneindig veel punten en deeltrajecten voor zich. Hij nadert de finish tot op willekeurig korte afstand, maar hij komt daar niet aan. Althans, zo lijkt het, afgaand op de redenering. Ondertussen geloven we echter niet dat Achilles niet aankomt.

DE PARADOX VAN ACHILLES EN DE SCHILDPAD Achilles heeft de reputatie de snelste atleet van Griekenland te zijn. Desondanks durft de schildpad het tegen hem op te nemen, op voorwaarde dat hij een voorsprong krijgt. Achilles stemt toe. Ze gaan op hetzelfde moment van start. Wanneer Achilles het startpunt van de schildpad heeft bereikt, dan is die ondertussen vanzelfsprekend naar een volgend punt gelopen. Als Achilles dat punt bereikt, is de schildpad wederom een stukje verder. Enzovoort. Telkens wanneer Achilles aankomt op het punt waar zijn tegenstander even tevoren was, is die alweer doorgelopen. De schildpad houdt altijd een voorsprong. Achilles haalt hem nooit in. De schildpad wint de wedstrijd. Althans, zo lijkt het, afgaand op de redenering. Ondertussen geloven we echter niet dat de schildpad wint.



Figuur 2

Is er hier nu sprake van een paradox, net als bij de paradoxen van Zeno (zie het kader op pagina 22)? We zullen zien dat er hier iets heel anders aan de hand is: Brunhilde moet oneindig ver lopen!

De egel kijkt achterom en ziet Brunhilde aanstormen. Hoewel hun onderlinge afstand hemelsbreed heel klein is geworden, blijft ze doorhollen. Er komt geen eind aan. Hoe lang is het kronkelende pad eigenlijk? Terwijl ze rent, rekent hij haar het volgende voor.

Bekijk figuur 2. De boog van het ene snijpunt bij $x = \frac{1}{n}$ naar het volgende bij $x = \frac{1}{n+1}$ is langer dan de uitwijking in het tussenliggende punt $x = \frac{2}{2n+1}$. Daar is $\sin(\pi/x) = \pm 1$ en is de uitwijking

$$\left| f\left(\frac{2}{2n+1}\right) \right| = \left| \frac{2}{2n+1} \sin\left(\pi\left(n + \frac{1}{2}\right)\right) \right| = \frac{2}{2n+1}.$$

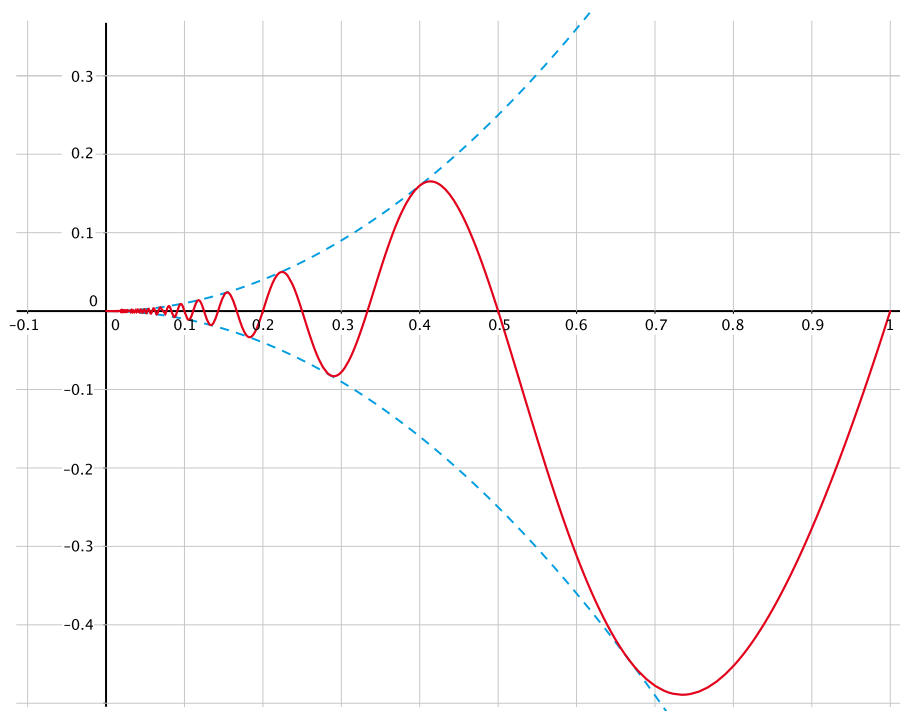
Die ene boog heeft minstens die lengte (en zelfs minstens tweemaal die lengte). Het hele pad is dus minstens zo lang als de som L van de schattingen $\frac{2}{3}, \frac{2}{5}, \frac{2}{7}, \frac{2}{9}, \dots$

Hoe groot is L ? De egel neemt telkens meerdere termen samen en gebruikt de eenvoudige ongelijkheid $\frac{1}{n} > \frac{1}{m}$ als $n < m$:

$$\begin{aligned} L &= \frac{2}{3} + \frac{2}{5} + \frac{2}{7} + \frac{2}{9} + \frac{2}{11} + \frac{2}{13} + \frac{2}{15} + \dots \\ &= \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{5} + \frac{2}{7}\right) + \left(\frac{2}{9} + \frac{2}{11} + \frac{2}{13} + \frac{2}{15}\right) + \dots \\ &> \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{8} + \frac{2}{8}\right) + \left(\frac{2}{16} + \frac{2}{16} + \frac{2}{16} + \frac{2}{16}\right) + \dots \\ &> \frac{2}{4} + \left(2 \cdot \frac{2}{8}\right) + \left(4 \cdot \frac{2}{16}\right) + \left(8 \cdot \frac{2}{32}\right) + \dots \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots = \infty. \end{aligned}$$

Dit verklaart waarom de egel niet kan verliezen. Zijn tegenspeelster heeft een oneindig lange weg voor zich. Brunhilde loopt rood aan van verbazing en woede. Er komt voor Brunhilde inderdaad geen eind aan. Althans, als ze op haar pad blijft. Gelukkig hoeft dat niet. Bij het volgende snijpunt slaat ze af, loopt recht op de egel af en feliciteert hem.

REVANCHE Brunhilde zint op wiskundige wraak. Verhit denkt ze na. Hoe kan ze de egel te slim af zijn? Met een ander pad dat op het eerste gezicht ook oneindig lang lijkt, maar het toch niet is. Ze bezint zich op de grafiek van de volgende functie (zie figuur 3):



Figuur 3 De grafiek van g , tussen de krommen $y = x^2$ en $y = -x^2$

$$g(x) = x^2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$$

voor $0 < x \leq 1$ (en verder definiëren we $g(0) = 0$).
De functies f en g hebben veel overeenkomsten,
maar er is een wezenlijk verschil in hun afgeleiden:

$$f'(x) = -\frac{\pi}{x} \cos\left(\frac{\pi}{x}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$$

en

$$g'(x) = -\pi \cos\left(\frac{\pi}{x}\right) + 2x \sin\left(\frac{\pi}{x}\right).$$

De eerste is onbegrensd, omdat de term $\frac{\pi}{x} \cos\left(\frac{\pi}{x}\right)$
voor kleinere x steeds grotere uitschieters geeft. De
tweede is begrensd:

$$|-\pi \cos\left(\frac{\pi}{x}\right) + 2x \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)| \leq \pi + 2.$$

Hier kan Brunhilde wel iets mee. Ze kan deze on-
gelijkheid gebruiken bij het schatten van de leng-
te van het pad: die is ten hoogste 6 (zie het onder-
staande kader). De weglengte van de egel is 1. Om
te winnen, moet Brunhilde dus 6 keer zo snel zijn
als hij. Dat gaat haar lukken. Op haar beurt daagt

zij hem nu uit.

De egel denkt even na. Hij kan de opzet van
Brunhilde wel raden en trapt er niet in. Dan stelt hij
haar een vraag. Waar denkt zij eigenlijk precies te
zijn nadat ze het pad met eindige lengte zal hebben
afgelegd? Ze antwoordt dat dat de oorsprong is.

Hij wijst haar erop dat de functie g apart gede-
finieerd is voor $x = 0$, en dat het punt eigenlijk niet
tot het pad behoort. Luchtig zegt ze dat deze defini-
tie van de functie g het probleem toch heus oplost.
Ze houdt vol dat ze toch echt uitkomt op dat punt.
Waar anders?

Hij vraagt vervolgens van welke kant ze het doel
dan wel denkt te bereiken: van rechts, van schuin
boven of schuin beneden? Er zijn namelijk oneindig
veel bochten. Die laten haar iedere keer van richting
veranderen. En hoe denkt ze dit te overleven?

Hij legt haar uit dat ze het pad kan volgen zo-
lang als het duurt, en dat er daar over het algemeen
geen gekke dingen gebeuren, behalve bij de boch-
ten. Daar moet ze steeds sneller van richting veran-
deren: de snelheid blijft begrensd, maar de versnel-
ling...

Hoe het met die twee verder gaat, laten we
open. ■

HET SCHATTEN VAN DE TOTALE LENGTE VAN HET PAD

De lengte van de grafiek van de functie g tussen $x = p$ en $x = 1$ kan worden berekend met

$$\int_p^1 \sqrt{1 + (g'(x))^2} dx.$$

Omdat $|g'(x)| \leq \pi + 2$, kunnen we de lengte van de kromme schatten met

$$\begin{aligned} \int_p^1 \sqrt{1 + (g'(x))^2} dx &\leq \int_p^1 \sqrt{1 + (2 + \pi)^2} dx = \\ (1 - p) \sqrt{1 + (2 + \pi)^2} &\leq (1 - p) \cdot 6 \leq 6. \end{aligned}$$

De lengte van het pad is de limiet van deze uitdrukking voor $p \rightarrow 0$ en dus ten hoogste 6.

In de vorige *Pythagoras* stond het artikel 'Breuken in decimalen' van Arnout Jaspers, voormalig hoofdredacteur van dit blad en tegenwoordig wiskunderedacteur van de website Kennislink. In dit vervolgartikel gaat hij dieper in op de periode van een breuk uitgeschreven als decimaal getal.

■ door Arnout Jaspers

DE PERIODE VAN EEN DECIMAAL GETAL

Neem een breuk en schrijf deze breuk als decimaal getal. Er zijn dan twee mogelijkheden: het aantal cijfers van het decimale getal is eindig, of het decimale getal bestaat uit een oneindige herhaling van een groepje cijfers (eventueel na een eindig beginstuk).

Het gaat ons in dit artikel om getallen van de tweede soort, bijvoorbeeld $\frac{3}{11} = 0,2\overline{7}$ of $\frac{13}{36} = 0,3\overline{61}$ (de streep boven een groepje cijfers geeft aan dat dat groepje oneindig vaak herhaald wordt). Is het mogelijk dat een breuk $1/Q$, met Q een niet al te groot natuurlijk getal, geschreven als decimaal getal een enorm lange periode heeft? Als je een paar voorbeelden bekijkt, lijkt het erop dat de periode nooit groter dan $Q - 1$ is:

- $\frac{1}{3} = 0,3\overline{}$ heeft periode 1 (< 3);
- $\frac{1}{6} = 0,1\overline{6}$ heeft periode 1 (< 6);
- $\frac{1}{7} = 0,1\overline{42857}$ heeft periode 6 (< 7);
- $\frac{1}{11} = 0,0\overline{9}$ heeft periode 2 (< 11);
- $\frac{1}{13} = 0,0\overline{76923}$ heeft periode 6 (< 13);
- $\frac{1}{17} = 0,0\overline{5882352941176470}$ heeft periode 16 (< 17).

Er is inderdaad een simpel bewijs dat de periode van een decimaal uitgeschreven breuk nooit groter is dan $Q - 1$, gebaseerd op de staartdeling van $1/Q$. Misschien kun je dit bewijs zelf vinden. Hint: let goed op de resten die bij het staartdelen onder de streep over kunnen blijven. Hier geven we een ander bewijs, waardoor een verrassend dwarsverband zal blijken met de fameuze Kleine Stelling van Fermat over priemgetallen.

BREUKEN VEREENVOUDIGEN In het artikel 'Breuken in decimalen' in het novembernummer hebben we gezien hoe je elk periodiek decimaal getal direct kunt opschrijven als een breuk:

Stelling. Elk periodiek decimaal getal $0,\overline{[n]}$ is gelijk aan $\frac{n}{999\dots9}$, waarbij het aantal negens in de noemer gelijk is aan het aantal cijfers van n . (De [haakjes] geven de cijfers van het getal n aan.)

In veel gevallen zal die breuk te vereenvoudigen zijn, namelijk als teller en noemer een of meer gemeenschappelijke priemfactoren hebben. Neem bijvoorbeeld het getal $0,4920915$. Volgens bovenstaande stelling is dit getal gelijk aan

$$\frac{4.920.915}{9.999.999}.$$

Deze breuk is te vereenvoudigen tot

$$\frac{1.640.305}{3.333.333}.$$

Omdat de noemer van de breuk in bovenstaande stelling altijd bestaat uit een getal met alleen maar cijfers 9, kunnen we een lijst maken met de priemfactoren die daarin voorkomen (een priemfactor is **rood** als hij voor het eerst voorkomt):

$$\begin{aligned} 9 &= 3^2 \\ 99 &= 3^2 \times 11 \\ 999 &= 3^3 \times 37 \\ 9.999 &= 3^2 \times 11 \times 101 \\ 99.999 &= 3^2 \times 41 \times 271 \\ 999.999 &= 3^3 \times 7 \times 11 \times 13 \times 37 \\ 9.999.999 &= 3^2 \times 239 \times 4.649 \\ 99.999.999 &= 3^2 \times 11 \times 73 \times 101 \times 137 \\ 999.999.999 &= 3^4 \times 37 \times 333.667 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
9.999.999.999 &= 3^2 \times 11 \times 41 \times 271 \times \mathbf{9.091} \\
99.999.999.999 &= 3^2 \times \mathbf{21.649} \times \mathbf{513.239} \\
999.999.999.999 &= 3^3 \times 7 \times 11 \times 13 \times 37 \times 101 \\
&\times \mathbf{9.901} \\
9.999.999.999.999 &= 3^2 \times \mathbf{53} \times \mathbf{79} \times \mathbf{265.371.653} \\
99.999.999.999.999 &= 3^2 \times 11 \times 239 \times \mathbf{4.649} \times \\
&\mathbf{909.091} \\
999.999.999.999.999 &= 3^3 \times \mathbf{31} \times 37 \times 41 \times 271 \\
&\times \mathbf{2.906.161} \\
9.999.999.999.999.999 &= 3^2 \times 11 \times \mathbf{17} \times 73 \times 101 \\
&\times 137 \times \mathbf{5.882.353} \\
99.999.999.999.999.999 &= 3^2 \times \mathbf{2.071.723} \times \\
&\mathbf{5.363.222.357} \\
999.999.999.999.999.999 &= 3^4 \times 7 \times 11 \times 13 \times \mathbf{19} \\
&\times 37 \times \mathbf{52.579} \times 333.667 \\
9.999.999.999.999.999.999 &= 3^2 \times \\
&\mathbf{1.111.111.111.111.111} \\
99.999.999.999.999.999.999 &= 3^2 \times 11 \times 41 \times 101 \\
&\times 271 \times \mathbf{3.541} \times 9.091 \times \mathbf{27.916}
\end{aligned}$$

Er zit een merkwaardige regelmaat in het optreden van de priemfactoren in deze lijst. Als een priemfactor P voor het eerst voorkomt in een noemer met N cijfers 9, komt P ook (en uitsluitend) voor in alle noemers met $2N, 3N, 4N, \dots$ cijfers 9.

Dus de factor 3 komt in alle noemers voor, omdat hij al in de noemer met maar één cijfer 9 zit, de factor 11 komt voor in de noemers 99, 9.999, 999.999, ..., omdat hij voor het eerst optreedt in 99, en de factor 73 komt voor in de noemers met 8, 16, 24, ... cijfers 9.

26

Als je het bewijs van deze regelmaat zelf wilt vinden, lees dan nu nog niet verder.

BEWIJS VAN DE REGELMAAT Getallen met alleen maar cijfers 9 (we noemen die voor het gemak *9-getallen*) zijn allemaal van de vorm $10^n - 1$. Stel nu, dat N het kleinste getal is, waarvoor $10^N - 1$ priemfactor P heeft. We bekijken nu de serie $10^N - 1, 10^{2N} - 1, 10^{3N} - 1, \dots$, ofwel in het algemeen $10^{mN} - 1$. Al deze 9-getallen hebben een factor $10^N - 1$, dus minstens één priemfactor P , aanzien

$$10^{mN} - 1 = (10^N - 1)(10^{(m-1)N} + 10^{(m-2)N} + \dots + 10^{2N} + 10^N + 1).$$

Je kunt zelf nagaan dat dit klopt; het is een veralgemening van het bekende 'merkwaardige product' $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ met $a = 10^N$ en $b = 1$. Er is nu bewezen: als $10^N - 1$ het kleinste 9-getal is met priemfactor P , hebben alle 9-getallen $10^{mN} - 1$ die ook.

Maar nu willen we nog bewijzen, dat dit ook de enige 9-getallen zijn met priemfactor P . We starten

weer bij de kleinste, $10^N - 1$, die je kunt schrijven als VP , met V een of ander geheel getal. Immers, P is een deler, dus is $10^N - 1$ een veelvoud van P . Er geldt dus:

$$10^N = VP + 1.$$

Bekijk nu de 9-getallen die op $10^N - 1$ volgen: $10^{N+1} - 1, 10^{N+2} - 1, \dots$ In het algemeen kijken we dus naar $10^{N+d} - 1$. We herschrijven dit als volgt:

$$\begin{aligned}
10^{N+d} - 1 &= 10^d \cdot 10^N - 1 = \\
&10^d(VP + 1) - 1 = 10^d \cdot VP + 10^d - 1.
\end{aligned}$$

Deel nu links en rechts door P :

$$\frac{10^{N+d} - 1}{P} = \frac{10^d \cdot VP}{P} + \frac{10^d - 1}{P} \quad (*)$$

Is het mogelijk, dat $10^{N+d} - 1$ priemfactor P bevat? In dat geval is het linkerlid van $(*)$ een geheel getal, dus dan moet het rechterlid ook een geheel getal zijn. Aan de rechterkant staan twee termen. De eerste is zeker geheel, want $10^d \cdot VP/P = 10^d \cdot V$, een geheel getal.

En de tweede term, $(10^d - 1)/P$? Die levert alleen een geheel getal op als de teller een factor P bevat, en het grappige is, dat die teller zelf een 9-getal is, namelijk $10^d - 1$. Maar we hadden nu juist aangenomen, dat $10^N - 1$ het kleinste 9-getal is met priemfactor P . Dus de tweede term kan slechts een geheel getal zijn als d groter is dan of gelijk aan N . En dit betekent op zijn beurt, dat tussen $10^N - 1$ en $10^{2N} - 1$ geen enkel 9-getal ligt met priemfactor P . Dezelfde redenering kan je gebruiken om te bewijzen dat geen enkel 9-getal tussen $10^{2N} - 1$ en $10^{3N} - 1$ een priemfactor P heeft, enzovoort.

WANNEER DEBUTEERT P ? Bekijk nogmaals de lijst met priemfactoren van de 9-getallen met 1, 2, ..., N cijfers 9. Dan valt nog iets op: de eerste keer dat een priemfactor P optreedt (de rode getallen), is altijd voor $P > N$. Met andere woorden: een kleine priemfactor moet 'op tijd' zijn debuut maken, voordat N groter is geworden dan hijzelf.

Althans, dit klopt voor zover de lijst strekt, maar geldt dit in het algemeen? Waarom zou een kleine priemfactor, zeg 23, alleen zijn debuut kunnen maken in de eerste tweeëntwintig 9-getallen?

Dit klopt echt, en wel omdat elke $10^{p-1} - 1$ deelbaar is door P (mits P niet 2 of 5 is, want dit zijn delers van 10, dus delers van elke macht 10^n , dus geen deler van enige macht $10^n - 1$). Dit volgt uit de Kleine Stelling van Fermat, die zegt dat voor elke a en p die relatief priem zijn, p een deler is van $a^{p-1} - 1$.

Dus wanneer precies een bepaalde priemfactor P zijn debuut maakt in de lijst is niet voorspelbaar, maar wél dat het op zijn laatst zal zijn bij het $(P - 1)$ -de 9-getal. Ook volgt hieruit, dat alle priemgetallen, behalve 2 en 5, in de lijst een keer aan de beurt komen.

PERIODE Dus wegens de Kleine Stelling van Fermat vertonen de priemfactoren van de 9-getallen een regelmaat, waarvan we nu gaan bewijzen dat die de maximale periode van een breuk, uitgeschreven als decimaal getal, bepaalt. We beperken ons in eerste instantie tot breuken van het type $1/Q$, met Q een priemgetal. Elke breuk r/Q heeft dan een even lange periode als $1/Q$. We beschrijven het bewijs aan de hand van een voorbeeld, om een omslachtige notatie te vermijden.

Neem als voorbeeld het periodieke decimale getal 0,142857 (we doen net alsof we nog niet weten dat dit $\frac{1}{7}$ is). De periode is 6, dus uit de stelling die we in de vorige *Pythagoras* hebben bewezen, volgt dat

$$0,142857 = \frac{142.857}{999.999}.$$

Ontbind teller en noemer in priemfactoren:

$$\frac{142.857}{999.999} = \frac{3^3 \times 11 \times 13 \times 37}{3^3 \times 7 \times 11 \times 13 \times 37}.$$

Wat een toeval! In teller en noemer komen alle factoren *behalve de 7* met elkaar overeen, zodat de breuk reduceert tot $\frac{1}{7}$. De vraag is nu, had dit ook voor het eerst kunnen gebeuren bij een periodiek decimaal getal met periode groter dan 6? Als je nogmaals van bovenaf door de lijst loopt, zie je dat 7 voor het eerst als priemfactor optreedt bij het zesde 9-getal, 999.999.

Sterker nog, wegens de Kleine Stelling van Fermat moet priemfactor 7 op zijn laatst zijn debuut maken in het zesde 9-getal (in het algemeen: priemfactor Q moet op z'n laatst optreden in het $(Q - 1)$ -de 9-getal). Dus er moet een decimaal getal met periode hoogstens 6 bestaan dat precies de breuk $\frac{1}{7}$ weergeeft.

Deze methode met de 9-getallen werpt nog wel een curieus probleempje op: we hadden al bewezen, dat als een factor Q zijn debuut maakt in het $(Q - 1)$ -de 9-getal, Q dan ook voorkomt in het $2(Q - 1)$ -de, $3(Q - 1)$ -de, ... 9-getal.

Terug naar ons voorbeeld: niet slechts het 6-de, maar ook het 12-de, 18-de, ... 9-getal hebben de factor 7. Dus moet er ook een decimaal getal met periode 12 (en 18, 24, ...) bestaan dat precies de breuk $\frac{1}{7}$ weergeeft, namelijk:

$$\frac{1}{7} = \frac{X}{999.999.999.999},$$

met X een getal van 12 cijfers.

Dit is op het eerste gezicht heel vreemd; de breuk $\frac{1}{7}$ zou twee verschillende decimale representaties hebben, een met periode 6 en een met periode 12? Dit kan natuurlijk niet waar zijn, en daarom bewijzen we dat ze in feite hetzelfde zijn:

$$\frac{1}{7} = \frac{142.857}{999.999} = \frac{142.857}{7 \times 142.857} = \frac{X}{999.999.999.999},$$

waaruit volgt dat

$$X = \frac{999.999.999.999 \times 142.857}{999.999}.$$

Bedenk dat $10^{2N} - 1 = (10^N - 1)(10^N + 1)$ en pas dit toe op 999.999.999.999 ($= 10^{12} - 1$):

$$X = \frac{999.999 \times (10^6 + 1) \times 142.857}{999.999} = (10^6 + 1) \times 142.857 = 142.857.142.857.$$

Zo vinden we:

$$\frac{1}{7} = \frac{X}{999.999.999.999} = \frac{142.857.142.857}{999.999.999.999} = 0,142857142857.$$

We zien dat het decimale getal met periode 12 eigenlijk periode 6 heeft, en identiek is aan de bekende decimale ontwikkeling van $\frac{1}{7}$. Dit werkt altijd vanwege de speciale eigenschap van 9-getallen dat $10^{2N} - 1 = (10^N - 1)(10^N + 1)$. Voor 9-getallen met $(Q - 1)$, $2(Q - 1)$, $3(Q - 1)$, ... cijfers 9 verloopt het bewijs vrijwel hetzelfde.

Tot nu toe hebben we aangenomen dat Q een priemgetal is. Als Q bestaat uit twee of meer priemfactoren ($Q = a \times b \times \dots$), is de breuk $1/Q$ te schrijven als $1/a \times 1/b \times \dots$. Voor elk van die factoren geldt dat de periode van hun decimale schrijfwijze respectievelijk maximaal $a - 1$, $b - 1$, ... is. De periode van $1/Q = 1/a \times 1/b \times \dots$ is dan hoogstens het kleinste gemene veelvoud van $a - 1$, $b - 1$, ... Dat is altijd kleiner dan $Q - 1$, want zelfs als $a - 1$, $b - 1$, ... geen enkele factor gemeen hebben, is het kleinste gemene veelvoud hoogstens $(a - 1)(b - 1) \dots < Q - 1$. De maximale periodelengte $Q - 1$ wordt dus alleen behaald door breuken $1/Q$ met Q een priemgetal.

Al deze redeneringen en bewijzen werken ook voor getallen met een ander grondtal dan 10. Alleen ontbreken dan andere priemfactoren in de nieuwe lijst, namelijk de delers van het nieuwe grondtal.

Al met al zien we dat de eigenschappen van de decimale representaties van breuken mede bepaald worden door de Kleine Stelling van Fermat, een mooi voorbeeld van de verrassende dwarsverbanden waar het in de wiskunde van wemelt. ■

LETTERREKENEN

■ door Klaas Pieter Hart

In de Britse krant *The Guardian* van 29 oktober 2015 stond een aardig stuk van Alex Bellos waarin een artikel uit 1993 werd aangehaald (beide artikelen staan online, zie de links aan het eind van dit stukje). In dat artikel werd uitgelegd dat het Engels en het Frans ‘triviale talen’ zijn. Nu zal iemand die net begonnen is een van die talen te leren, zeggen dat ze helemaal niet triviaal zijn. Die trivialiteit heeft echter niets met de moeilijkheid van het leren te maken, maar met iets totaal anders, namelijk met een tak van de algebra die *groepentheorie* heet.

Om uit te leggen wat talen en groepen met elkaar te maken hebben, bekijken we een speciaal voorbeeld: de *symmetriegroep* van een vierkant. In dat voorbeeld zal ook duidelijk worden waarom dit artikel de titel ‘Letterrekenen’ heeft.

SYMMETRIEËN Een *symmetrie* van een object is een transformatie die het object onveranderd laat. Een vierkant, bijvoorbeeld, heeft acht symmetrieën. Je kunt hem spiegelen in de twee diagonalen of in de verticale lijn door het midden of in de horizontale lijn door het midden. Ook kun je hem roteren over 90°, 180° of 270° (ook over 0°, dan laat je alle punten gewoon liggen). In totaal zien we dus acht manieren om het vierkant zó te bewegen dat het weer op zichzelf terecht komt.

Die bewegingen kun je samenstellen, dat wil zeggen: je kunt verschillende bewegingen achter elkaar uitvoeren. Het resultaat is altijd weer een van de acht bewegingen (in de illustratie op pagina 29 zie je dat een spiegeling in de diagonaal van linksboven naar rechtsonder, gevolgd door een spiegeling in de verticale lijn door het midden, hetzelfde is als een rotatie over 90° met de klok mee dan wel een rotatie over 270° tegen de klok in) en elke beweging heeft een *inverse*. Dit is wat ‘groep’ betekent: een aantal transformaties die je kunt samenstellen, met een transformatie die niets doet en waarin elke transformatie een inverse heeft.

In de algebra probeert men groepen zo zuinig mogelijk te beschrijven. Een veelgebruikte manier is met letters en relaties waar die letters aan moeten voldoen. De groep die bij het vierkant hoort (met hoekpunten A, B, C en D , tegen de klok in), kunnen we met twee letters beschrijven: S en R . Die letters staan voor een *spiegeling* en een *rotatie*: de spiege-

ling in de middelloodlijn van A en D (en dus ook van B en C) noemen we S , en de rotatie over 90° tegen de klok in noemen we R .

Door S en R achter elkaar uit te voeren, kunnen we allerlei bewegingen van ons vierkant maken. Omdat we de letters zien als transformaties, lezen we die samenstellingen van rechts naar links, dus $RSSRRSSRRRR$ staat voor: vier rotaties, dan drie spiegelingen, dan twee rotaties, dan twee spiegelingen en aan het eind nog een rotatie. Met behulp van deze rijtjes R -en en S -en, die we gewoon ‘woorden’ noemen, kunnen we alle transformaties van het vierkant maken. Hierbij hebben we ook nog een symbool nodig voor de transformatie die niets doet: dat is eigenlijk het woord zonder letters, maar om dat zichtbaar te maken noteren we dat als 1 .

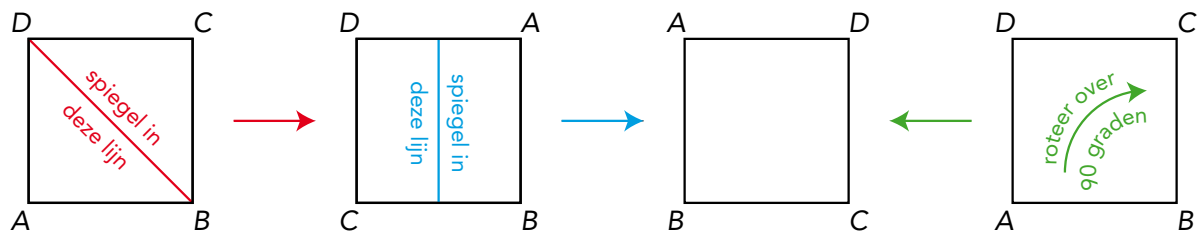
Opgave 1. Ga na dat we de transformaties van het vierkant als volgt kunnen beschrijven: $1, R, RR, RRR, S, SR, SRR$, en $SRRR$.

Er zijn natuurlijk veel meer woorden dan de acht in deze opgave; die geven allemaal transformaties van het vierkant. Elk woord hoort dus bij een van de acht korte woorden uit de opgave. Zo ook $RSSRRSSRRRR$. Welk woord dat is, gaan we nu uitrekenen.

Hierbij gebruiken we wat eigenschappen van S en R . Ten eerste: $RRRR$ komt neer op draaien over 360°, dus op niets doen. We kunnen de vier R -en dus schrappen; dat maakt het rijtje wat korter: $RSSRRSSS$. Verder komt twee keer spiegelen ook neer op niets doen, dus twee S -en naast elkaar mogen we ook schrappen; dat maakt ons rijtje nog korter: $RRRS$. Het effect van $RRRS$ bekijken we door alle hoekpunten te volgen:

$$\begin{aligned} A \rightarrow D \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C, & \quad B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A \rightarrow B, \\ C \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A, & \quad D \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D. \end{aligned}$$

Dat is de spiegeling in de lijn door B en D . Wie opgave 1 heeft gemaakt, weet dat we deze spiegeling ook als SR kunnen schrijven. Dus $RRRS$ (één spiegeling gevolgd door drie rotaties) doet hetzelfde als SR (één rotatie gevolgd door één spiegeling). Twee rijtjes letters die dezelfde transformatie opleveren, noemen we *equivalent* en we behandelen de woorden als gelijk: we schrijven dus $RRRS = SR$.



REKENEN Het feit dat twee keer spiegelen niets doet, noteren we nu als $SS = 1$, en omdat $RRRR$ ook niets doet, schrijven we ook $RRRR = 1$. We hebben nu dus drie eigenschappen/relaties waar onze symbolen aan voldoen: $SS = 1$, $RRRR = 1$ en $RRRS = SR$.

Het bijzondere is dat je met behulp van deze relaties elk woord kunt terugbrengen tot een van de acht in opgave 1. Bijvoorbeeld RRS , die kunnen we ook schrijven als $RRRRRS$ (vier R -en extra aan de linkerkant); zet nu even haakjes, $(RRR)(RRRS)$, en gebruik de derde relatie: $(RRR)(RRRS) = (RRR)(SR)$. Dit kan nog een keer: $(RRRS)R = (SR)R$. Conclusie: $RRS = SRR$.

Opgave 2. Laat zien dat $RS = SRRR$.

Opgave 3. Maak zelf een lang woord met R -en en S -en en gebruik de relaties om het terug te brengen tot een van de acht standaardwoorden.

Wat het bovenstaande laat zien, is dat je de bestuuring van de transformaties van het vierkant kunt vertalen naar het rekenen met letters. Zo kun je de algebra te hulp roepen in de meetkunde.

Opgave 4. Je kunt de transformaties van een regelmatige n -hoek met twee letters en drie relaties beschrijven. Zoek zelf uit hoe dat werkt.

TALen Het artikel uit 1993 heeft in feite twee titels: 'Quotients homophones des groupes libres' en 'Homophonic quotients of free groups'. De schrijvers hebben, gedeeltelijk voor de grap, het idee van letterrekenen met relaties losgelaten op het hele alfabet, A tot en met Z , en de woorden die je daarmee kunt maken. De relaties die ze gebruikten hebben niets met meetkunde te maken maar met klanken; de titels van het artikel verwijzen naar *homofonen*, dat zijn woorden die hetzelfde klinken.

Als de uitspraak van twee woorden gelijk is, dan noemen we die woorden 'equivalent'. In het Nederlands zou je dus bijvoorbeeld zeggen dat **WORDT** en **WORD** equivalent zijn en **WORDT** = **WORD** schrijven. In het Engels klinken de woorden **SCENT**, **CENT** en **SENT** gelijk en dat geeft drie relaties: **SCENT** = **CENT**, **SCENT** = **SENT** en **SENT** = **CENT**. In het Frans kun je onder meer **ALLER** = **ALLEZ**, **SOIE** = **SOI** en **AU** = **AUX** opschrijven.

Bij het rekenen mag je gelijke letters wegstrepen, maar alleen als ze aan dezelfde kant van het woord staan. Dus, als we zouden weten dat **NIET** = **GIET**, dan vinden we door wegstrepen dat **NIE** = **GIE**, **NI** = **GI** en **N** = **G**, maar als we weten dat **TIEN** = **NIET**, kunnen we niets wegstrepen. In het Engels kunnen we na wegstrepen concluderen dat **S** = 1 (uit **SCENT** = **CENT**), **C** = **S** (uit **CENT** = **SENT**) en dus ook **C** = 1. In het Frans vinden we **R** = **Z**, **E** = 1 en **X** = 1.

Het artikel uit 1993 is mooi in twee kolommen geschreven, de linkerkolom in het Frans, de rechterkolom in het Engels, en in elke kolom is te lezen dat de andere taal triviaal is en wel in de volgende betekenis. Er zijn in beide talen zoveel homofonen dat je heel veel relaties kunt opschrijven; met behulp daarvan kun je bewijzen dat elke letter equivalent is met 1 (het lege woord dus). En daarmee is elk woord equivalent met het lege woord. En dat is wat in de wereld van het letterrekenen triviaal wordt genoemd.

De grote vraag is nu: is het Nederlands ook triviaal? Ik ben er zelf nog niet helemaal uit en het is veel leuker om zelf aan de slag te gaan. Hier is alvast een beginnetje: we hadden al **WORDT** = **WORD**, maar er geldt ook **WORD** = **WORT** (wort is een tussenproduct dat bij bierbrouwen gevormd wordt). De conclusie is dus dat **D** = **T** = 1.

HET WOORDPROBLEEM Overigens zit achter dit letterrekenen een heel stuk niet-triviale wiskunde: in de meetkunde en kristallografie gaat het heel vaak om symmetrieën van allerlei objecten. Die kunnen net als bij het vierkant met een beperkt aantal letters weergegeven worden en het wordt vaak lastig om van twee woorden te zien of ze dezelfde transformatie bepalen. Dit heet het 'woordprobleem voor (half)groepen' en er is bewezen dat er geen universeel algoritme bestaat dat, gegeven een aantal relaties van alle woorden, kan besluiten of ze equivalent zijn met het lege woord. ■

LINKS Het artikel 'Mathematicians prove the triviality of English' van Alex Bellos: <http://goo.gl/z2UJNx>. Het artikel uit 1993, geschreven door Jean-François Mestre, René Schoof, Lawrence Washington en Don Zagier, staat hier: <http://goo.gl/ttut4X>.

PYTHAGORAS OLYMPIADE

■ door Matthijs Coster, Eddie Nijholt, Harry Smit, Michelle Sweering en Bas Verseveldt

Doe mee met de Pythagoras Olympiade! Elke aflevering bevat vier opgaven. De eerste twee zijn wat eenvoudiger; onder de goede inzendingen van leerlingen uit de klassen 1, 2 en 3 wordt een cadeaubon van Bol.com ter waarde van 20 euro verloot. De laatste twee zijn echte breinbrekers; onder de goede inzendingen van leerlingen (tot en met klas 6) wordt een bon van 20 euro verloot. Per aflevering wordt maximaal één bon per persoon vergeven.

Daarnaast krijgen leerlingen (tot en met klas 6) punten voor een *laddercompetitie*, waarmee eveneens een cadeaubon van Bol.com van 20 euro te verdienen valt. De opgaven van de onderbouw zijn 1 punt waard, de opgaven van de bovenbouw 2 punten. De leerling met de hoogste score in de laddercompetitie krijgt een bon. Zijn puntentotaal wordt weer op 0 gezet. Wie zes achtereenvolgende keren niets inzendt, verliest zijn punten in de laddercompetitie. Met de bovenbouwopgaven kun je ook een plaats in de finale van de Nederlandse Wiskunde Olympiade verdienen, mocht het via de voor-

ronden niet lukken:

aan het eind van elke jaargang worden enkele goed scorende leerlingen uitgenodigd voor de NWO-finale. Niet-leerlingen kunnen met de Pythagoras Olympiade meedoen voor de eer.



HOE IN TE ZENDEN? Inzenden kan alleen per e-mail. Stuur je oplossing (getypt of een scan of foto van een handgeschreven oplossing) naar pytholym@gmail.com. Je ontvangt een automatisch antwoord zodra we je bericht hebben ontvangen.

Voorzie het antwoord van een duidelijke toelichting (dat wil zeggen: een berekening of een bewijs). Vermeld je naam en adres; leerlingen moeten ook hun klas en de naam van hun school vermelden.

Je inzending moet bij ons binnen zijn vóór 1 maart 2016.

DE GOEDE INZENDERS VAN SEPTEMBER 2015

314: Arie Heikoop, Kampen; Levi van de Pol (klas 2), Ichthus College, Veenendaal; Pim Spelier (klas 6), Christelijk Gymnasium Sorghvliet, Den Haag.

315: Jan Bosma (klas 5), OSG Sevenwolden, Heerenveen; Arie Heikoop, Kampen; Lisan ten Hove (klas 2), Oostvaarders College, Almere; Pascal Kwanten, Almere; Peter van der Lecq, Utrecht; Niels van Mierlo (klas 4), Christelijk Gymnasium, Utrecht; Levi van de Pol (klas 3), Ichthus College, Veenendaal; Pim Spelier (klas 6), Christelijk Gymnasium Sorghvliet, Den Haag; Maarten Stremmer (klas 4), Guido de Brés, Rotterdam.

316: Jan Bosma (klas 5), OSG Sevenwolden, Heerenveen; Anton van Es (klas 5), Gymnasium Sorghvliet, Den Haag; Arie Heikoop, Kampen; Lisan ten Hove (klas 2), Oostvaarders College, Almere; Pascal Kwanten, Almere; Peter van der Lecq, Utrecht; Niels van Mierlo (klas 4), Christelijk Gymnasium, Utrecht; Levi van de Pol (klas 3), Ichthus College, Veenendaal; Pim Spelier (klas 6), Christelijk Gymnasium Sorghvliet, Den Haag; Maarten Stremmer (klas 4), Guido de Brés, Rotterdam.

317: Jan Bosma (klas 5), OSG Sevenwolden, Heerenveen; Anton van Es (klas 5), Gymnasium Sorghvliet, Den Haag; Arie Heikoop, Kampen; Lisan ten Hove (klas 2), Oostvaarders College, Almere; Arie van der Kraan, Nuth; Pascal Kwanten, Almere; Peter van der Lecq, Utrecht; Levi van de Pol (klas 3), Ichthus College, Veenendaal; Sandra Schenkel, Teruren; Pim Spelier (klas 6), Christelijk Gymnasium

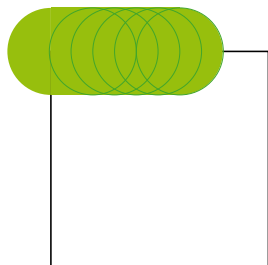
Sorghvliet, Den Haag.

Cadeaubonnen: Lisan ten Hove en Jan Bosma.

Stand laddercompetitie: Wouter Zijlstra (15 p; cadeaubon), Niels van Mierlo (15 p), Sander Engelberts (14 p), Frenk Out (14 p), Oscar Heijdra (13 p), Anton van Es (12 p), Jelmer Fiet (12 p), Wout Gevaert (12 p), Levi van de Pol (12 p), Eline Welling (12 p), Marinda Westerveld (11 p), Tara van Belkom (10 p), Reinier Schmiermann (9 p), Beaudine Smeekes (9 p), Rainier van Es (7 p), Sebastiaan Ceuppens (6 p), Tjard Langhout (6 p), Stef Rasing (6 p), Simon Roelandt (6 p), Pim Spelier (6 p), Michiel Versnel (6 p), Jan Bosma (5 p), Max Bosman (5 p), Ivo van Dijk (5 p), Lisan ten Hove (5 p), Merlijn Hunik (5 p), Laurens Hilbrands (4 p), Antonie Moes (4 p), Maarten Stremmer (3 p), Jelle Couperus (2 p), Maud van de Graaf (2 p), Rinze Hallema (2 p), Matthijs Pool (2 p), Sied Vrasdonk (2 p), Stijn van Bommel (1 p), Ludvine Bonvarlez (1 p), Kenny van Dijken (1 p), Famke Driessen (1 p), Tessa Engelberts (1 p), Tim Groot (1 p), Calista Hainaut (1 p), Gerben-Jan Hooijer (1 p), Boris Kloeg (1 p), Elisabeth Kuijper (1 p), Nora Lahlou (1 p), Bram van der Linden (1 p), Daphné Meyer-Horn (1 p), Lotte Middelberg (1 p), Leon van Mierlo (1 p), Hannah Nijssse (1 p), Alwin van der Paardt (1 p), Bram Pel (1 p), Youri Pouw (1 p), Olivier Segers (1 p), Jan Willem de Waard (1 p), Senne Willems (1 p).

OPGAVEN 322

Joep heeft in een computertekenprogramma een vierkant getekend. De lengte van een zijde van het vierkant is 5. Joep selecteert de *brush*-cirkel, met straal 1. Met deze *brush* volgt Joep het vierkant. Hoe groot is de oppervlakte van het gebied dat groen wordt gekleurd?

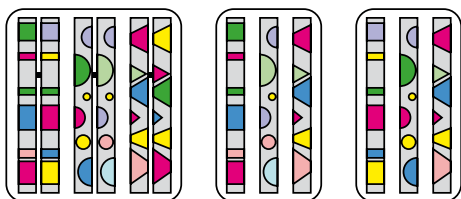


OPGAVEN 323

A en B zijn verzamelingen bestaande uit (niet alle) positieve, gehele getallen. Het kleinste getal dat in A zit, is 32. Het kleinste getal dat in B zit, is 63. Er geldt: als x en y in A zitten, zit ook $x + y$ in A , en als x en y in B zitten, zit ook $x + y$ in B . Laat zien dat er een getal bestaat dat in zowel A als B zit.

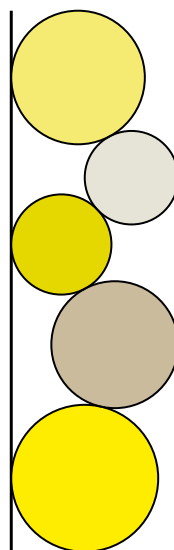
OPGAVEN 324

Een gewone menselijke cel bevat 23 paar chromosomen aan genetisch materiaal. Een geslachtscel, daarentegen, wordt gemaakt door van elk paar op een willekeurige manier één chromosoom te kiezen. Hieronder zijn drie schematische cellen met chromosomen weergegeven. De eerste cel bevat drie paren chromosomen. De tweede en derde cel zijn zogenaamde geslachtscellen. Van elk paar chromosomen bevatten ze slechts één chromosoom.



Stel dat een plaats delict zeven intacte geslachtscellen aan bewijsmateriaal oplevert. Wat is de kans dat het gehele genetische profiel van de persoon in kwestie achterhaald kan worden? Je mag aannemen dat elk van de 46 chromosomen verschillend is.

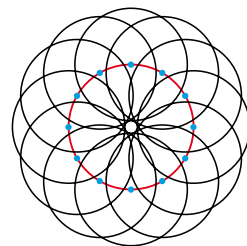
OPGAVEN 325



Karin ruimt de kerstballen op. Zij heeft 11 ballen met stralen oplopend van 13 tot en met 23 mm. Helaas, één kerstbal breekt. De resterende kerstballen stopt zij in een koker met een diameter van 50 mm. De volgorde is dusdanig dat de hoogte (gerekend vanaf de bodem van de koker) van alle kerstballen in de koker exact een geheel aantal mm is. Welke kerstbal is gebroken en tot hoe hoog zijn de kerstballen opgestapeld? Ga ervan uit dat de kerstballen in de koker terecht komen zoals aangegeven op het plaatje hiernaast.

OPLOSSING 314

Hiernaast zijn een rode cirkel en twaalf zwarte cirkels afgebeeld. De straal van de rode cirkel is 1, de stralen van de zwarte cirkels zijn 0,9. De middelpunten van de zwarte cirkels (blauw) liggen op de rode cirkel, op gelijke afstand van elkaar. Hoeveel snijpunten hebben de twaalf zwarte cirkels?



Oplossing. Het middelpunt van de rode cirkel noemen we O . Twee zwarte cirkels snijden elkaar één keer als de afstand tussen hun middelpunten 1,8 is en twee keer als de afstand kleiner is. Met de cosinusregel vinden we dat de afstand tussen twee middelpunten A en B gelijk is aan $\sqrt{(1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos \angle AOB)}$. Er geldt dat $\angle AOB$ de waarden 30° , 60° , 90° , 120° , 150° en 180° kan aannemen. De afstanden zijn dan respectievelijk $(\sqrt{6} - \sqrt{2})/2 \approx 0,5$, 1 , $\sqrt{2} \approx 1,4$, $\sqrt{3} \approx 1,7$, $(\sqrt{6} + \sqrt{2})/2 \approx 1,9$ en 2 . Elke cirkel snijdt dus 8 andere cirkels tweemaal. Dit geeft 16 snijpunten per cirkel. Elk snijpunt hoort bij twee cirkels. Het totale aantal snijpunten is dus $12 \times 16 : 2 = 96$. Merk op dat er niet meer dan twee cirkels door een punt gaan. Dan zouden er namelijk minstens drie verschillende middelpunten op een cirkel van straal 0,9 liggen, maar ze liggen al op de rode cirkel van straal 1.

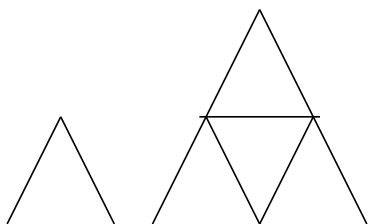
OPLOSSING 315

Met een pak speelkaarten kun je 'kaartenhuizen' maken. Uit onderstaande plaatjes blijkt:

- een kaartenhuis met 1 verdieping bestaat uit 2 kaarten;
- een kaartenhuis met 2 verdiepingen bestaat uit 7 kaarten.

Verder kun je nagaan dat een kaartenhuis met 3 verdiepingen uit 15 kaarten bestaat.

Hoeveel kaarten heb je nodig voor een kaartenhuis met 2015 verdiepingen?



Oplossing. We vullen het kaartenhuis aan met 2015 kaarten die we horizontaal onderaan leggen. De bovenste rij bestaat uit 1 driehoekje van drie kaarten, de tweede rij uit 2 driehoekjes van drie kaarten. In het algemeen bestaat de n -de rij nu uit n driehoekjes van drie kaarten. Het totale aantal kaarten is dus $1 \times 3 + 2 \times 3 + 3 \times 3 + \dots + 2015 \times 3 = (2015 \times 2016 \times 3)/2 = 6.093.360$. Hier moeten we nog de 2015 extra kaarten van aftrekken.

Het antwoord is dus 6.091.345.

In de OEIS is de rij a_n (= aantal benodigde kaarten voor een kaartenhuis met n verdiepingen) te vinden onder nummer A005449.

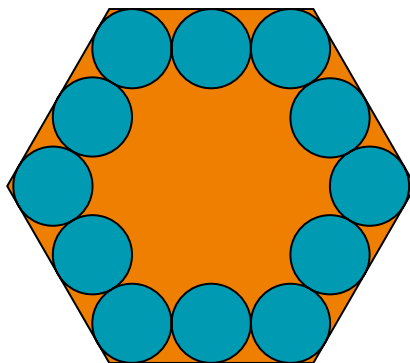
OPLOSSING 316

Een massieve, houten kubus met zijden van 4 cm wordt blauw geverfd. Daarna wordt de kubus in $4^3 = 64$ eenheidskubusjes gezaagd. Die 64 stukjes worden in een zak gestopt. Mark haalt willekeurig één kubusje uit de zak en laat hem als een dobbelsteen rollen. Wat is de kans dat er een blauwe zijde boven ligt?

Oplossing. Een kubus heeft zes zijvlakken. Het totale aantal zijvlakken van de eenheidskubusjes is $64 \times 6 = 384$. Elk zijvlak van de grote kubus wordt in 16 stukken gezaagd. Het aantal blauwe vlakken van de eenheidskubusjes is daarom $16 \times 6 = 96$. De kans dat er een blauwe zijde wordt gerold, is dus $\frac{96}{384} = \frac{1}{4}$.

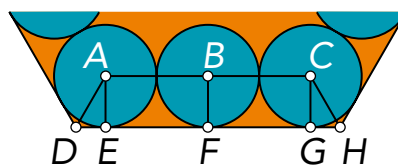
OPLOSSING 317

In een regelmatige zeshoek worden langs de rand twaalf identieke cirkels geplaatst die aan elkaar en aan de rand raken. De cirkels hebben straal 1. Bereken de lengte van een zijde van de zeshoek.



Oplossing. Bekijk de onderkant van de zeshoek zoals die hieronder is getekend. Er geldt $AE = BF = 1$ en $AB = 2$, want de straal van de blauwe cirkels is 1. Ook weten we $\angle AEF = \angle BFE = 90^\circ$. Hieruit volgt dat $ABFE$ een rechthoek is en $EF = AB = 2$. De hoeken van een regelmatige zeshoek zijn 120° . AD snijdt zo'n hoek doormidden. Dus $\angle ADE = 60^\circ$. Daarom is $DE = AE / \tan(60^\circ) = \frac{1}{\sqrt{3}}$. We weten nu dat $DF = DE + EF = \frac{1}{\sqrt{3}} + 2$. Door symmetrie is ook $FH = \frac{1}{\sqrt{3}} + 2$. De zijde van de zeshoek is dus

$$DH = 2 \times \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + 2 \right) = 4 + \frac{2}{\sqrt{3}}.$$



APP VAN DE MAAND: STRATA



Strata is een puzzel waarbij het om vlechten draait. Van een paar linten moet je een mooi weefpatroon maken. De kneep zit hem erin dat het patroon aan bepaalde eisen moet voldoen. Op elk kruispunt moet namelijk een specifieke kleur bovenop liggen om de puzzel op te lossen. Dat begint simpel, met maar vier kruispunten en twee kleuren. Daarna wordt het lastiger: met elk lint dat erbij komt worden de puzzels vele malen ingewikkelder.

Het spel vereist nadenkwerk; als je van tevoren goed kijkt naar welke lintkleuren je hebt en wat de eisen zijn van de vakjes, kan je een plan van aanpak maken. Daaraan kan de liefhebber zich sufrekenen. Als je lang genoeg nadenkt, is elke puzzel in één keer op te lossen. Gelukkig is dat geen verplichting. Elk gelegd lint is terug te nemen; zo kan je ook een paar dingen proberen om te kijken of het werkt. Je ontdekt dan langzamerhand wetmatigheden over de wirwar van linten op het veld.

Strata is verkrijgbaar voor Android, iOS en Windows Phone (niet gratis).



55ste jaargang nummer 3
januari 2016
ISSN 0033 4766

Pythagoras stelt zich ten doel jongeren kennis te laten maken met de leuke en uitdagende kanten van wiskunde. *Pythagoras* richt zich tot leerlingen van vwo en havo en alle anderen die jong van geest zijn.

Internet www.pyth.eu

Hoofdredacteur Derk Pik

Eindredacteur Alex van den Brandhof

Redactie Matthijs Coster,
Jeanine Daems, Jan Guichelaar,
Klaas Pieter Hart, Paul Levrie,
Marc Seijlhouwer

Vormgeving Grafisch Team Digipage,
Leidschendam

Druk Drukkerij Ten Brink, Meppel

Uitgever Koninklijk Wiskundig
Genootschap (KWG)

Management Pythagoras
Mark Veraar (KWG), Derk Pik

Lezersreacties en kopij

Bij voorkeur per e-mail; lezersreacties naar Jan Guichelaar, jan@pyth.eu en kopij naar Derk Pik, derk@pyth.eu. Eventueel per post naar Pythagoras, p.a. Centrum Wiskunde & Informatica, Postbus 94079, 1090 GB Amsterdam.

Abonnementen, bestellingen en mutaties

Abonneservice Pythagoras
Postbus 2238
5600 CE Eindhoven
Telefoon: 085 016 02 51
E-mail: abonnementen@pyth.eu

Abonnementsprijzen

(zes nummers per jaargang)
€ 35,00 (Nederland en België),
€ 37,00 (overige landen),
€ 20,00 (groepsabonnement NL/B),
€ 35,00 (geschenkabonnement NL/B),
€ 37,00 (geschenkabonnement overige landen).

Een geschenkabonnement stopt automatisch na één jaar. Overige abonnementen gelden tot wederopzegging. Zie www.pyth.eu voor verdere toelichtingen.

Aan dit nummer werkten mee

Rik Biel (biel0015@planet.nl),
Alex van den Brandhof
(alex@pyth.eu),
Matthijs Coster
(matthijs@pyth.eu),
Jeanine Daems
(jeanine@pyth.eu),
Birgit van Dalen
(birgit@wiskundeolympiade.nl),
Dion Gijswijt
(dion.gijswijt@gmail.com),
Jan Guichelaar (jan@pyth.eu),
Klaas Pieter Hart (kp@pyth.eu),
Arnout Jaspers
(arnoutjaspers@gmail.com),
Jaap Klouwen (j.klouwen@hva.nl),
Paul Levrie (paul@pyth.eu),
Eddie Nijholt
(eddie.nijholt@gmail.com),
Derk Pik (derk@pyth.eu),
Quintijn Puite
(quintijn@wiskundeolympiade.nl),
Harry Smit (h.j.smit@students.uu.nl),
Michelle Sweering
(sweer108@planet.nl),
Bas Verseveldt
(bas.verseveldt@hetnet.nl),
William Verspaandonk
(william_versepaandonk@hotmail.com).

Pythagoras wordt mede mogelijk gemaakt door de bijdragen van de onderstaande instituten en instellingen.



OEIS A090822

1, 1, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 1,
1, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 2, 1,
1, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 1, ...

Als je denkt dat deze getallenrij alleen maar uit enen, tweeën en drieën bestaat (in een of andere ondoorgrondelijke volgorde) dan vergis je je. Op pagina 10 lees je hoe je een term uit zijn voorgangers kunt bepalen. Erg verrassend feit: *élk* natuurlijk getal komt aan bod, maar als je de rij zou uitschrijven tot en met de eerste 5... nou ja, dat lukt gewoonweg niet.

