

PYTHA GORAS

WISKUNDETIJDSCHRIFT VOOR JONGEREN

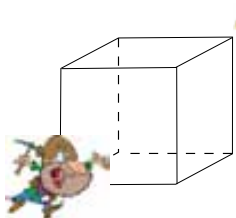


55ste JAARGANG - NUMMER 4 - FEBRUARI 2016



De goudzoeker

Je vindt het antwoord op
www.math.leidenuniv.nl/puzzels



Op de linker onderhoek van een kubus staat een goudzoeker. Het goudklompje waar hij hard naar op zoek is, bevindt zich diagonaal aan de andere kant van de kubus. Hij loopt over een ribbe van de kubus en kiest

vervolgens willekeurig één van de drie ribben die in deze hoek samenkomen en vervolgt zijn weg over deze ribbe (teruggaan is dus ook een optie). Het bewandelen van een ribbe kost hem steeds tien minuten.

Hoe lang doet de goudzoeker er gemiddeld over om bij het goudklompje te komen?

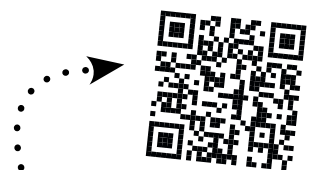
Kom naar de Open Dag op 5 maart

Wiskunde kun je doen om de schoonheid en abstractie van de wiskunde zelf. Maar ook de praktische problemen en toepassingen vormen vaak een grote uitdaging. Een combinatie van beide leidt vaak tot spectaculaire resultaten. Wil je meer weten over Wiskunde studeren aan de universiteit Leiden? Kom dan op **zaterdag 5 maart** naar de Open Dag in de Pieterskerk. Ook kan je **vrijdag 15 april** komen Proefstuderen op de faculteit Wiskunde en Natuurwetenschappen. Kijk voor meer informatie op unileidenbachelors.nl/wiskunde.



**Universiteit
Leiden**

Wiskunde en Natuurwetenschappen



Bij ons leer je de wereld kennen

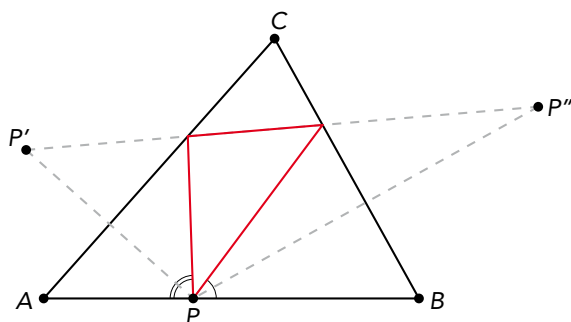
naar de website

INHOUD

8

DE KORTSTE WEG

We gaan op zoek naar antwoorden op vragen waarbij het steeds draait om het vinden – onder bepaalde voorwaarden – van de kortste weg tussen twee punten.



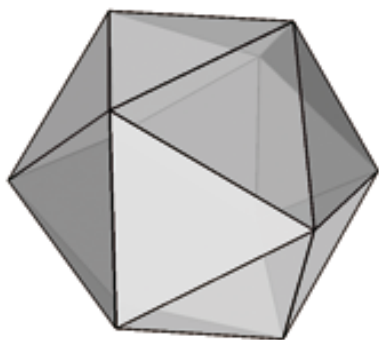
22

BONTE WAS

In november vond de Baltic Way plaats in Stockholm. Nederland nam met succes deel aan deze wiskundewedstrijd tussen elf Noord-Europese landen.

16

EERLIJK DELEN, DEEL 2



In het januarinummer hebben we een dodecaëder (gelijkzijdig twaalfvlak) opgedeeld in een aantal identieke piramides. In dit nummer doen we hetzelfde met de icosaeëder (gelijkzijdig twintigvlak).

EN VERDER

- 2 Kleine nootjes
- 4 Prijsvraag update
- 5 Wortels construeren
- 7 Wiskunde als topsport
- 12 De Albert-klok
- 15 Mersenne in de OEIS
- 20 Journaal
- 25 Genererende functies
- 30 Pythagoras Olympiade
- 33 App van de maand

Omslagillustratie: bij de 26ste editie van de wiskundewedstrijd Baltic Way ging een van de opgaven over was in drie kleuren, per kleur in één wasmand.

■ **NIVEAUBALKJES** Sommige pagina's bevatten één of meer zwarte balkjes onder het paginanummer. Voor artikelen zonder balkje is geen specifieke voorkennis nodig. Artikelen met één balkje bevatten wiskunde uit de onderbouw. Artikelen met twee balkjes vereisen kennis uit de bovenbouw. Drie balkjes: net iets moeilijker.

KLEINE NOOTJES

■ door Jan Guichelaar

GLAZEN VULLEN

Je hebt een fles die met 1 liter water gevuld is. Verder heb je drie lege glazen waar (tot de rand) 0,4 liter in kan en één glas waar (tot de rand) 0,3 liter in kan. Je wilt de drie glazen van 0,4 liter vullen met elk precies 0,2 liter water. Je mag glazen tot de rand vullen of leeggieten. Ook mag je een glas weer teruggieten in de fles. Hoe krijg je het voor elkaar?

AFVAL-TOERNOOI

Vier tennisers, A, B, C en D in volgorde van sterk naar zwak, spelen een afvaltoernooi. Een sterkere wint altijd van een minder sterke. In de eerste ronde speelt een willekeurig tweetal tegen elkaar; en dus de andere twee ook. Twee vallen er af. Dan is de finale. Hoe groot is de kans dat C tweede wordt?

ZONNE-SCHIJN NA REGEN?

Het regent om 12 uur 's middags. Wat is de kans dat 180 uur later de zon schijnt?

24-UURSKLOK

Een digitale 24-uursklok geeft in vier cijfers uren en minuten aan, bijvoorbeeld 07:45 (kwart voor acht 's ochtends) of 19:30 (half acht 's avonds). Bekijk de verschillen tussen elk tweetal opvolgende cijfers. Bij 07:45 zijn dat $7 - 0 = 7$, $7 - 4 = 3$ en $5 - 4 = 1$. Bij 19:30 zijn het $9 - 1 = 8$, $9 - 3 = 6$ en $3 - 0 = 3$. Op welke tijdstippen zijn deze verschillen alle drie gelijk?

OPLOSSINGEN KLEINE NOOTJES NR. 3

Vakken vullen. Noem alle vakken samen V . De 'vulsnelheid' V_K van Kees is dus $V/60$. Samen is de snelheid $V_S = V/15$. Dus voor de snelheid V_A van Aya en Olga geldt: $V_S = V_K + 2 \times V_A$. Dus $V/15 = V/60 + 2 \times V_A$. Hieruit volgt dat $V_A = V/40$. Aya kan dus alles vullen in 40 minuten.

En met en ennen. Het getal 2 kun je niet schrijven met 2 tweeën. Verder: $3 = 3 \times 3/3$ en vanaf $n = 4$: $n = n - (n - n)/n/n/n/.../n$, waarbij het aantal deeltkens $n - 3$ is. (Er zijn ook andere mogelijkheden.)

Verschillen minstens 5. Er zijn twee oplossingen: 5, 0, 6, 1, 7, 2, 8, 3, 9, 4 en dezelfde rij van achter naar voren.

Kleine nootjes zijn eenvoudige opgaven die weinig of geen wiskundige voorkennis vereisen om opgelost te kunnen worden. De antwoorden vind je in het volgende nummer van *Pythagoras*.



TWEE VAN DE VIJF?

Je hebt vijf gewichtjes die er gelijk uitzien. Je weet dat er twee iets lichter zijn dan de andere drie. Je mag drie keer met een balans wegen (evenwicht, links zwaarder of rechts zwaarder). Kun je met maximaal drie keer wegen bepalen welke de twee lichtere gewichtjes zijn?

3

Eikels verzamelen. Alleen de rode eekhoorn: $8 \times 5 = 40$. Alleen de bruine en de rode: $2 \times 5 + 10 \times 3$, $5 \times 5 + 5 \times 3$. Alleen de bruine en de grijze: $1 \times 7 + 11 \times 3$, $4 \times 7 + 4 \times 3$. Alleen de rode en de grijze: $5 \times 7 + 1 \times 5$. De bruine, de rode en de grijze: $1 \times 7 + 3 \times 5 + 6 \times 3$, $1 \times 7 + 6 \times 5 + 1 \times 3$, $2 \times 7 + 1 \times 5 + 7 \times 3$, $2 \times 7 + 4 \times 5 + 2 \times 3$, $3 \times 7 + 2 \times 5 + 3 \times 3$. Totaal: 11 mogelijkheden.

Bergop en bergaf. In een uur zitten 3600 seconden. Dat is 100 keer de tijd bergop. De snelheid bergop is dus 100×200 meter per uur, ofwel 20 kilometer per uur. De tijd bergaf is twee keer zo klein, dus de snelheid twee keer zo groot: 40 kilometer per uur.

PRIJSVRAAG

UPDATE

■ door Matthijs Coster

Tot 1 januari kon iedereen meedoen aan de speciale nieuwjaarsopgave van onze prijsvraag: bedenk een getallenrij waarin het getal 2016 voorkomt. We kregen 17 overwegend heel fraaie rijen binnen voor 1 januari. Daarvan vielen er direct al enkele af, omdat het de jury niet duidelijk was of 2016 voorkwam. Twee rijen bleken al in de OEIS voor te komen. Ook die rijen hebben we geschrapt. Maar er bleven toch nog acht rijen over.

In het novembern timer gaven we al aan dat 2016 een driehoeksgetal is. Maar het is eveneens een getal met een heleboel delers. Daardoor is 2016 op een heleboel manieren te schrijven als verschil van twee kwadraten. Immers, $u^2 - v^2 = (u - v)(u + v)$. Dit bracht de 14-jarige Levi van de Pol (Ichthus College, Veenendaal, klas 3) op het idee om een specifiek verschil van kwadraten te bekijken, namelijk $2016 = 45^2 - 3^2$, anders geschreven: $2016 + 9 = 2025$. Het viel hem op dat zowel de som van de cijfers van 2016 als 2016 plus deze som van de cijfers een kwadraat is. Zo kwam hij tot de rij a_n , waarvan de opeenvolgende elementen voldoen aan het voorschrift: ga uit van een (positief, geheel) getal x . Neem de som van de cijfers van x , zeg $S(x)$. Is $S(x)$ een kwadraat en is tevens $x + S(x)$ een kwadraat, dan nemen we x op in onze rij. De kleinste x die voldoet, is 27. Er geldt: $S(27) = 9 = 3^2$, en $27 + S(27) = 27 + 9 = 36 = 6^2$. Na 27 gaat de rij zo verder: 72, 135, 216, 315, 432, 720, 1080, 1512, 2016. En zie daar 2016. Levi heeft ook grotere getallen doorgerekend. Bijvoorbeeld $x = 3.101.112$ voldoet ook, immers $S(3.101.112) = 9 = 3^2$, en $3.101.112 + S(3.101.112) = 3.101.121 = 1761^2$.

Levi gaat na dat de som van de cijfers een 9-voud moet zijn. Volgens de zogeheten 'negen-

proef' geldt dat x en de som van de cijfers van x een negenvoud schelen. Een kwadraat is altijd een 9-voud of een 9-voud + 1, 9-voud + 4 of 9-voud + 7. Stel dat x niet een 9-voud is. Dan zijn zowel x als de som van de cijfers (kwadraat) 9-voud + 1, 9-voud + 4 of 9-voud + 7. Deze som is dan 9-voud + 2, 9-voud + 5 of 9-voud + 8. Dit is echter geen kwadraat. Derhalve zijn x en de som van de cijfers beide een 9-voud.

Levi krijgt een cadeaubon van 20 euro, maar we hebben zijn rij ook al opgestuurd naar Neil Sloane, de man achter de OEIS. Al binnen een paar dagen kregen we antwoord van Sloane. En wat denk je? Levi's getallenrij heeft een plek in de getallen-encyclopedie! Kijk maar gauw, hij heeft nummer A267918.

We hebben een eervolle vermelding voor Arild Oppeneer. Hij is nog maar 11 jaar en zond al heel snel een rij in: -1, 3, 2, 13, 15, 29, 44, 51, 95, 79, 174, 113, 287, 163, 440. Hij kreeg de rij door uit te gaan van de rij -1, 2, 15, 44, 95, 174, 287, 440, 639, 890, 1199, 1572, 2015. (Dit zijn de verschillen van opeenvolgende producten en sommen van een getal n en het kwadraat van n , zie A152015). Vervolgens plaatste hij de opeenvolgende verschillen tussen de betreffende getallen.

NOG MEEDOEN De wedstrijd gaat trouwens nog gewoon door tot 15 april. Iedereen kan blijven insturen (wellicht ten overvloede: het getal 2016 hoeft niet in je rij voor te komen!). Inmiddels hebben we al een paar hele fraaie rijen ontvangen, maar misschien weet jij een rij te bedenken die nóg fraaier is. Levi's rij is al opgenomen in de OEIS. Misschien de jouwe straks ook wel! Stuur in naar prijsvraag@pyth.eu. ■

In dit blad hebben we al vaker geschreven over meetkundige constructies. Bij zo'n constructie zijn de enig toegestane hulpmiddelen – naast gewoon een potlood – een passer en een liniaal zonder schaalverdeling. Met zo'n latje kun je dus wel rechte lijnen trekken, maar je kunt niet meten. In dit artikel bekijken we de constructie van wortels.

■ door Jeanine Daems

WORTELS CONSTRUEREN

Stel dat een lijnstuk van lengte 1 gegeven is. Kun je dan met een passer en een latje een lijnstukje van lengte $\sqrt{2}$ construeren? En hoe zit het met de constructie van $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ of de wortel uit een ander getal (dat geen kwadraat is, uiteraard)?

Het construeren van $\sqrt{2}$ is niet zo ingewikkeld, $\sqrt{2}$ is immers de lengte van de diagonaal van een vierkant met zijde 1. Dus als je van dat gegeven lijnstuk van lengte 1 een vierkant construeert, hoef je alleen de diagonaal nog te tekenen.

Opgave 1. Hoe kun je op een gegeven lijnstuk van lengte 1 een vierkant met zijde 1 construeren met passer en latje?

Het blijkt dat je ook alle andere wortels van de vorm $\sqrt{n}$ kunt construeren, en dat kan voor elke n met dezelfde constructie. Deze constructie komt al voor in *De Elementen* van Euclides (ca. 300 v. Chr.). Hiernaast zie je een plaatje uit het werk *De arithmetische en geometrische fundamenten* van Ludolph van Ceulen uit 1615. Hij construeert de zogenaamde 'middelevenredige', ofwel 'middel proportionael linie'. Dat komt in feite neer op het construeren van wortels, zoals we straks zullen zien.

Je kunt in het schuin gedrukte stukje tekst lezen dat de gezochte middelevenredige betekent dat de verhouding van het eerste gegeven lijnstuk tot het gezochte lijnstuk hetzelfde is als de verhouding van het gezochte lijnstuk tot het tweede gegeven lijnstuk. Met andere woorden: als er lijnstukken AB en BC gegeven zijn met lengtes a en b , dan zoeken we x waarvoor geldt:

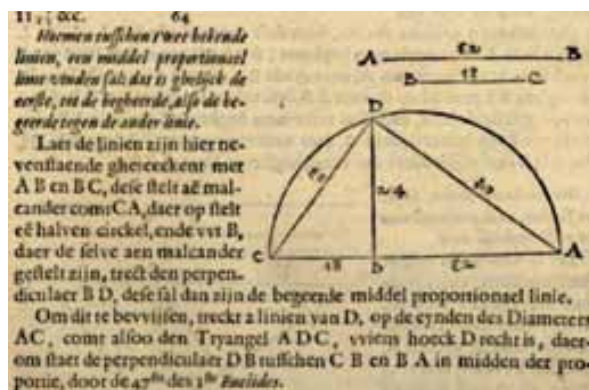
$$a : x = x : b.$$

Opgave 2. Controleer dat het voorbeeld dat Van Ceulen hier geeft, aan die eis voldoet.

Opgave 3. Beschrijf stap voor stap hoe Van Ceulen de middelevenredige construeert vanuit de twee gegeven lijnstukken. Check in elke stap dat het echt een constructie is, dat wil zeggen: dat het met alleen passer en latje kan worden uitgevoerd.

Opgave 4. Voer de constructie zelf uit voor lijnstukken van lengte 3 en lengte 7. Wat is de lengte van de middelevenredige die je gevonden hebt?

De stelling van Thales zegt: als je op een gegeven lijnstuk AC een halve cirkel tekent met dat lijnstuk als diameter en je kiest een willekeurig punt D op de cirkelboog, dan is hoek ADC een rechte hoek. (Deze bekende stelling bewezen we in het artikel 'Thales van Milete' in *Pythagoras* 52-6, juni 2013, te vinden in ons archief op www.pyth.eu.)

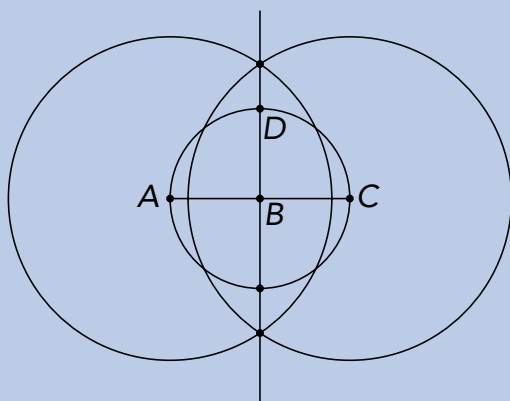


Opgave 5. Gebruik deze stelling en bewijs dat de constructie van Van Ceulen inderdaad de middelevenredige oplevert als je begint met willekeurige lijnstukken van lengte a en b .

Opgave 6. Als een lijnstuk van lengte 1 en een lijnstuk van lengte n gegeven zijn, kun je op deze manier dan een lijnstuk met lengte $\sqrt{n}$ construeren?

OPLOSSINGEN

Opgave 1. Verleng het gegeven lijnstuk AB van lengte 1 tot een lijnstuk AC van lengte 2 en construeer daarop de middelloodlijn. Pas met de passer op de middelloodlijn lengte 1 af (punt D), zoals hieronder te zien is. Herhaal dit nog een keer aan de andere kant om ook het vierde hoekpunt te vinden.



Opgave 2. $18/24 = 24/32$.

Opgave 3. Stap 1: leg AB en BC in elkaars verlengde en construeer AC . Dat kan door AB te verlengen en bij B het lijnstuk BC met de passer over te brengen. Stap 2: construeer de cirkel

met middellijn AC . Dat kan door eerst het midden van AC te bepalen met de middelloodlijn. Stap 3: construeer de loodlijn op AC door B en snijd deze met de cirkel. Het snijpunt noem je D . (De loodlijn construeren kan door eerst een cirkel met middelpunt B te tekenen, de snijpunten met lijn AC noemen we S en T . Construeer vervolgens de middelloodlijn op ST , die gaat dan vanzelf door B .) Lijnstuk BD is het gezochte lijnstuk.

Opgave 4. $3/x = x/7$, dus $x^2 = 21$, dus $x = \sqrt{21}$.

Opgave 5. Driehoek CBD is gelijkvormig met CDA , en ook driehoek DBA is gelijkvormig met CDA (ze hebben in beide gevallen een rechte hoek en een andere hoek gemeenschappelijk). Daarom zijn CBD en DBA gelijkvormig. Het gegeven lijnstuk CB noemen we a en AB noemen we b , en het gezochte lijnstuk BD noemen we x . Dan geldt vanwege de gelijkvormigheid $a : x = x : b$.

Opgave 6. In dat geval geldt $1/x = x/n$, ofwel $x^2 = n$, dus $x = \sqrt{n}$. ■

WISKUNDE ALS TOPSPORT



■ door Derk Pik

De veertigjarige Gerardo Soto y Koelemeijer is wiskundeleraar in Haarlem. Op jonge leeftijd werd hij vier keer achtereenvolgende Nederlands kampioen turnen. Zijn fascinatie voor sport en zijn liefde voor de wiskunde (en het wiskundeonderwijs) komen samen in zijn onlangs verschenen boek *Wiskundigen mogen niet huilen*. Het is al Koelemeijers derde boek; eerder verschenen van zijn hand de romans *Armelia* (2006) en *De gestolen kinderen* (2013).

Wiskundigen mogen niet huilen bevat vijf essays. Wat is wiskunde eigenlijk? Beschrijft het een werkelijkheid of gaat het om mentale constructies? In het eerste hoofdstuk kun je antwoorden vinden op deze vragen, beschouwd vanuit allerlei standpunten. Wanneer je door dit hoofdstuk een beetje thuis bent geraakt in deze materie, wordt het boek erg leuk. Je kan lezen over de vraag wat baby's van wiskunde weten, of ze kunnen tellen en, even verderop, hoe het gesteld is met dieren.

De levensloop van schaakgrootmeester Bobby Fisher wordt vergeleken met die van de algebraïsch meetkundige Alexander Grothendieck. Er zijn vele parallellen, zoals een onrustige jeugd en een jonge ontplooiing tot groot meesterschap. Je kunt meeleven met de wens van beiden om zich af te zonderen in hun eigen gedachtenwereld. En hoe dat resulteert in een kluizenaarsbestaan.

Hoe emotioneel mag een wiskundige eigenlijk zijn? Hebben emoties iets met wiskunde te maken?

Aan de hand van een andere vergelijking, tussen de Argentijnse voetballer Maradona en de Britse wiskundige Andrew Wiles, de kraker van de Laatste Stelling van Fermat, kun je lezen dat de buitenwereld heel iets anders verwacht van een voetballer dan van een wiskundige.

Het boek is heerlijk om te lezen en bevat vele sappige wetenswaardigheden. Je krijgt andere ideeën over hoe mensen wiskunde leren en over wiskundig onderzoek.

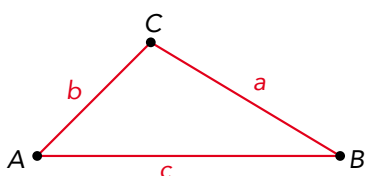
Tot slot: wat doet die koffievlek daar op de kaft van het boek? Hij lijkt zo echt – alsof er achteloos een koffiemok op het boek heeft gestaan –, dat je hem er wel af zou willen vegen. Volgens een onderwiskundigen veel gebruikt gezegde, bedacht door Alfréd Rényi, zijn wiskundigen machines die koffie omzetten in stellingen. Als lezer zou je er best een kring bij kunnen maken. Je bent in goed gezelschap. ■

Gerardo Soto y Koelemeijer, *Wiskundigen mogen niet huilen*. Amsterdam University Press. € 17,95.

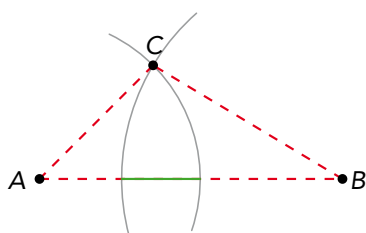
In het dagelijks leven zoeken we vaak naar de kortste weg om onze bestemming te bereiken en moeten we gebruikmaken van bestaande wegen en fietspaden. Maar de kortste weg is niet altijd de snelste. Er zijn ook onverwachte toestanden, zoals langzaam rijdend verkeer, files en ongelukken die vertraging of zelfs stilstand veroorzaken. Gelukkig bestaat er een abstracte wereld zonder deze complicaties. Daar kunnen we de kortste weg bepalen net zo precies als we willen.

■ door Dave Odegard

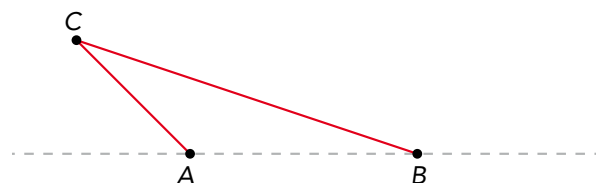
DE KORTSTE WEG



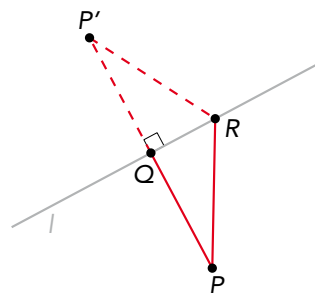
Figuur 1



Figuur 2



Figuur 3



Figuur 4

8

WAT IS DE KORTSTE WEG TUSSEN TWEE PUNTEN?

Als je tijdens een reis van A naar B een omleiding moet maken via C, is dat meestal geen aangename verrassing. De driehoek in figuur 1 geeft de omweg weer. Hopelijk zijn de wegen recht en dan zou je op een schaaltekening kunnen zien hoeveel verder je moet reizen.

Zoals gebruikelijk geven we de zijde tegenover A aan met a , tegenover B met b en tegenover C met c . De extra af te leggen afstand is gelijk aan $a + b - c$; dit is het groene stukje in figuur 2. Deze afstand kun je vinden met een passer, zoals in de figuur aangegeven. Kun je zelf de extra afstand tekenen in figuur 3? We reizen weer van A naar B.

Als punt C ergens op lijnstuk AB ligt, dan raken de twee cirkelbogen elkaar in dat punt, en is er geen omleiding. Uit onze ervaring en intuïtie zien we het rechte lijnstuk tussen A en B als de kortste weg van A naar B.

WAT IS DE KORTSTE WEG TUSSEN EEN PUNT P EN EEN LIJN L?

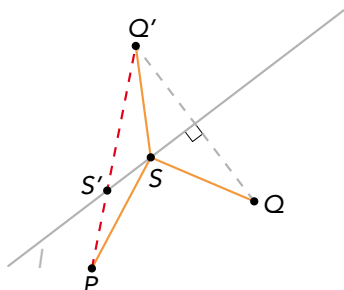
Stel, we kijken van boven naar de volgende situatie. Je gooit een tennisbal tegen een rechte muur en vangt hem weer

op. Het is een warme dag en je wilt niet veel lopen. Het gaat je alleen om het gooien en vangen. Op welk punt op de muur moet je mikken?

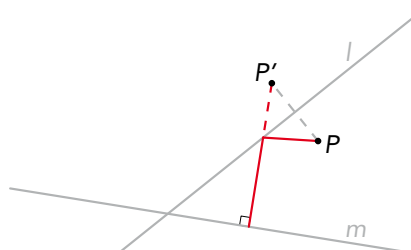
Het wordt wat makkelijker als je de muur vervangt door een spiegel met verhard glas. Nu kun je op je spiegelbeeld mikken. De bal keert dan net als het licht naar jou terug. In figuur 4 sta jij op punt P en mik je op je spiegelbeeld dat op punt P' lijkt te zijn. Als je naar punt R zou gooien en de bal kwam door een wonder naar je terug, dan was de afstand die de bal aflegde dezelfde als de afstand $PR + RP'$, en dus een langere omleiding dan de lengte van het (rechte) lijnstuk PP' . Je kunt proberen dit zelf te bewijzen met behulp van de stelling van Pythagoras.

WAT IS DE KORTSTE WEG VAN EEN PUNT P NAAR EEN PUNT Q VIA EEN LIJN L?

Als P en Q niet aan dezelfde kant van lijn l liggen, dan is het lijnstuk PQ de oplossing. We veronderstellen nu dat de punten wél aan dezelfde kant van l liggen. Teken dan het spiegelpunt Q' van Q in l . Als we nu een willekeurig punt S op de lijn l zetten, dan is de afstand van P naar Q via S gelijk aan de afstand van P naar Q' via S (zie figuur 5).



Figuur 5



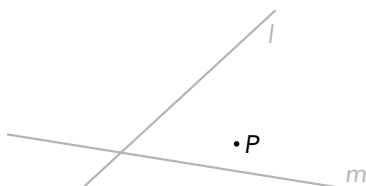
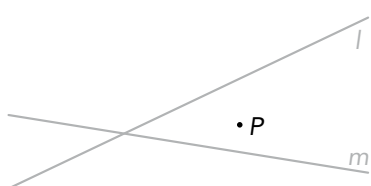
Figuur 6

Voor welke S is $PS + SQ'$ het kortst? Dit is voor $S = S'$ op het lijnstuk PQ' . De kortste weg van P naar Q' is het (rechte) lijnstuk PQ' , dus de kortste weg van P naar Q gaat dan ook via S' .

WAT IS DE KORTSTE WEG VAN EEN PUNT P VIA EEN LIJN l NAAR EEN LIJN m ? De kortste weg van een punt naar een lijn gaat via een loodrechte verbinding. Er zijn drie gevallen te onderscheiden.

Het eerste geval treedt op wanneer de hoek tussen de twee lijnen voldoende scherp is. Spiegel P in l , dan krijgen we P' . Trek een lijn door P' , loodrecht op m . In figuur 6 is de kortste weg de rode lijn.

Als je deze constructie probeert toe te passen op de situaties die in figuur 7 zijn getekend, zie je waarom er drie gevallen zijn. We hebben steeds het punt P , de lijn m en het snijpunt van l en m hetzelfde gehouden, en de hoek tussen l en m gevarieerd. Wat is er bijzonder aan de middelste situatie? Kun je, gegeven het punt P en de lijn m , de hoek tussen l en m bepalen, zodat deze bijzondere situatie optreedt?



Figuur 7

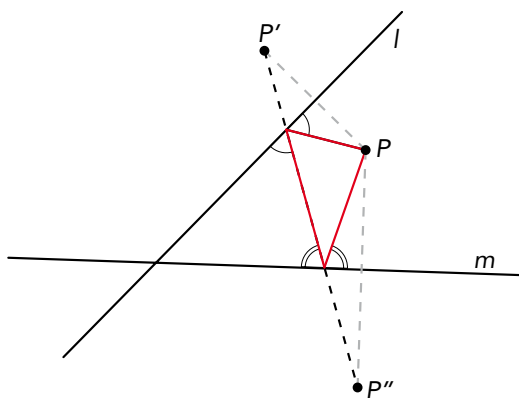
WAT IS DE KORTSTE WEG VAN EEN PUNT P VIA EEN LIJN l NAAR EEN LIJN m EN TERUG NAAR PUNT P ? Het is nu handig om

eerst de spiegelpunten P' en P'' te tekenen. Daarna trek je de kortste weg van P' naar P'' . Dit is lijnstuk $P'P''$. Het is nu niet moeilijk in te zien (met congruentie en z-hoeken) dat bij deze constructie de ingaande en uitgaande hoeken bij beide spiegels gelijk zijn.

Ook deze constructie kan niet altijd gemaakt worden zoals getekend in figuur 8. Als de hoek tussen de lijnen te groot wordt, is de kortste weg van P via de lijnen l en m gewoon heen en terug naar het snijpunt van de lijnen.

EEN SPECIALE RONDRIJ IN EEN DRIE-HOEK De centrale vraag van dit artikel is: wat is

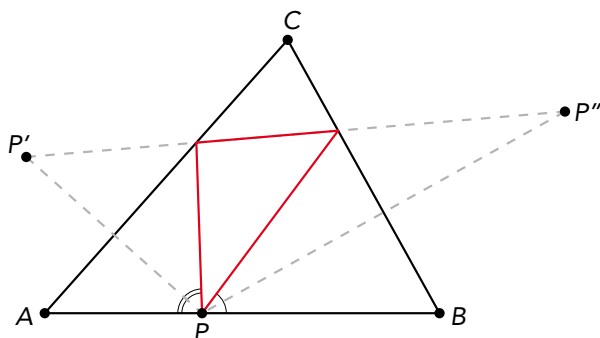
de kortste rondrit langs drie punten in een driehoek, één punt per zijde. Dus: van een punt op zijde c ga je naar een punt op zijde a , dan naar een punt op zijde b en tot slot keer je terug naar je oorspronkelijke punt. Van ons laatste antwoord zou je kunnen vermoeden dat dit een rondrit is die twee



Figuur 8

gelijke hoeken maakt op alle drie de zijden van de driehoek. In figuur 9 beginnen en eindigen we in P , maar zijn de in- en uitgaande hoeken bij P niet hetzelfde. Als we de driehoek twee keer spiegelen – we krijgen dan de driehoeken $A'BC$ en $A'B'C$ – zoeken we een punt P'' op het lijnstuk $A'B'$ zodat $AP = A'P''$ (de voorwaarde dat P'' het spiegelpunt is van P) en $\angle P_1 = \angle P_1''$. In dat geval is de hoek van inval bij P gelijk aan de uitgaande hoek bij P (zie figuur 10).

De constructie gaat als volgt (zie figuur 11). Teken de hoogtelijnen CE en CF (deze zijn uiteraard even lang). Trek de lijnen door AB en $A'B'$ en noem hun snijpunt D . Nu zijn de driehoeken $A'FC$ en AEC congruent, want $CA = CA'$, $\angle A = \angle A'$ en $\angle F = 90^\circ = \angle E$ (ZHH). Nu volgt dat $AE = A'F$; dit is het eerste wat we wilden aantonen. Omdat $CE = CF$, is driehoek CEF gelijkbenig en dus $\angle FEB = \angle EFA'$. We hebben laten zien dat punt E de gewenste eigenschappen heeft.



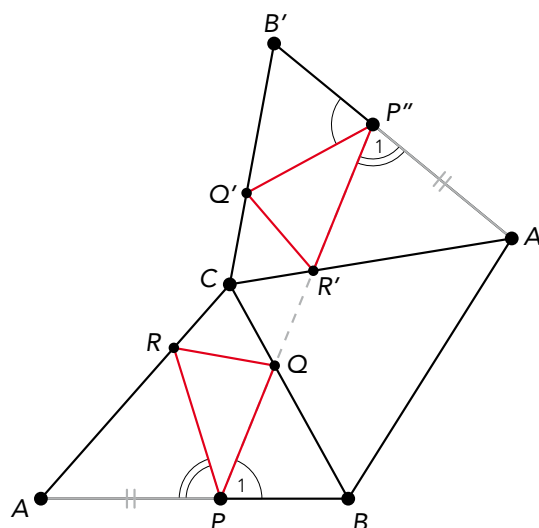
Figuur 9

IS DEZE SPECIALE RONDRIJG WEL DE KORTST MOGELIJKE?

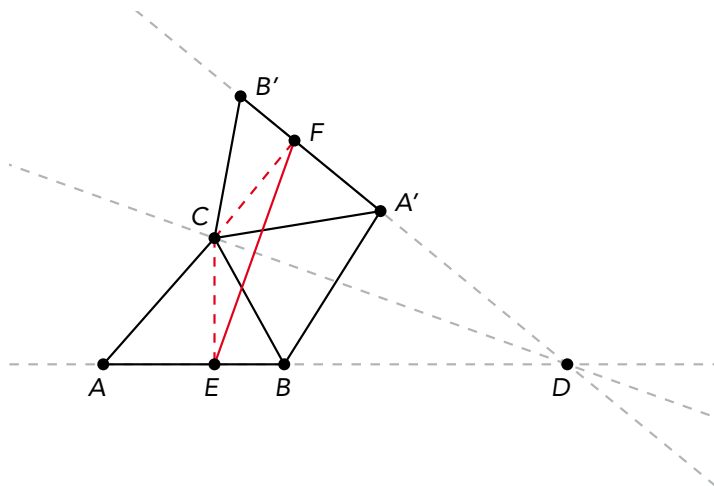
We hebben een rondrit geconstrueerd met overal gelijke in- en uitgaande hoeken. We kijken nog eens naar de dubbele spiegeling, maar nu zonder de eis dat de inkomende hoek bij P gelijk is aan de uitgaande, maar vanzelfsprekend wel met de voorwaarde dat $AP = A'P'$ (zie figuur 12).

Ten eerste merken we op dat $\angle PCP' = 2\angle ACB$. Dus waar je P ook kiest op AB , de drie hoeken van de gelijkbenige driehoek PCP' zijn voor elke keuze van P hetzelfde. Maar dan is $PP' = k \cdot CP$, voor een of andere constante k . Nu is CP het kleinst wanneer CP loodrecht op AB staat, dus wanneer CP hoogtelijn is van driehoek ABC . Maar dat was juist de constructie waarbij ook de inkomende hoek bij P gelijk is aan de uitgaande.

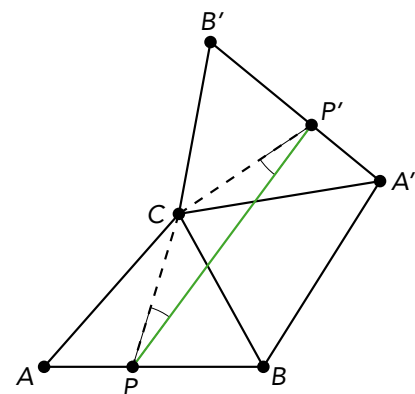
NU IS HET GENOEG! Tijd om naar het dagelijks leven terug te gaan voor een wandeling. En hoe langer, hoe beter... ■



Figuur 10



Figuur 11



Figuur 12

DE KORTSTE RONDRIJ – ANALYTISCH

Hieronder zie je een driehoek ABC met daarbinnen een rondrit met gelijke hoeken bij alle drie de zijden van de driehoek. We gaan laten zien hoe je de lengte van deze rondrit kunt uitdrukken in a, b, c, α, β en γ . Ga zelf na dat de volgende gelijkheden gelden:

$$\begin{aligned} y &= 180^\circ - x - \beta, \\ z &= 180^\circ - y - \gamma = x + \beta - \gamma, \\ x &= 180^\circ - z - \alpha = 2\gamma - x. \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat $x = \gamma$ en daarmee $y = \alpha$ en $z = \beta$. Driehoek ABC moet dus scherphoekig zijn. De sinusregel geeft de ongelijkheden

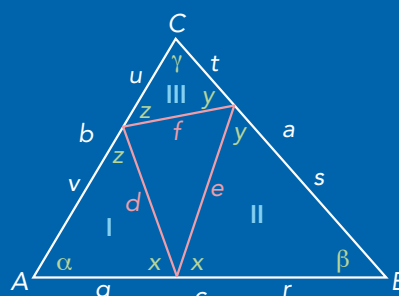
$$\frac{s}{\sin \gamma} = \frac{r}{\sin \alpha}, \quad \frac{u}{\sin \alpha} = \frac{t}{\sin \beta}, \quad \frac{v}{\sin \gamma} = \frac{q}{\sin \beta}.$$

Het is een leuke opgave om na te gaan dat we uit deze drie gelijkheden en de cosinusregel het volgende kunnen afleiden:

$$q = b \cos \alpha, \quad r = a \cos \beta, \quad s = c \cos \gamma, \quad t = b \cos \gamma, \quad u = a \cos \gamma, \quad v = c \cos \alpha.$$

Door dit in te vullen in de cosinusregel, vinden we $d = a \cos \alpha$, $e = b \cos \beta$ en $f = c \cos \gamma$. De gelijkvormige driehoeken I, II en III hebben dus schaalfactor $\cos \alpha$, $\cos \beta$ respectievelijk $\cos \gamma$. De lengte van de rondrit is dus de mooie uitdrukking

$$a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma.$$



DE ALBERT-KLOK

■ door Jaap Klouwen



Sinds enige tijd is er een grappige klok op de markt. Hij heet de 'Albert-klok' en is ontworpen door het Parijse bedrijf MNTNT, opgericht door de Duitser Axel Schindlbeck en de Fransman Frédéric Mauclore. De Albert-klok is een digitale klok en is bedoeld om spelenderwijs mee te leren rekenen. In verschillende moeilijkheidsgraden wordt de tijd weergegeven in twee rekensommetjes met de vier bewerkingen $+$, $-$, $\times$ en $:$. De Albert-klok is overigens vernoemd naar Albert Einstein, de rekenaar in absolute én relatieve tijd...

Op de foto op de linkerpagina staat de klok op 8 uur en 31 minuten, verstopt in twee rekensommetjes. Het is duidelijk: we moeten rekenen om de tijd te bepalen! Maar pas op, het rekenen wordt streng gedaan, waarbij de bewerkingen $\times$ en $:$ voorrang hebben op $+$ en $-$. Voor $\times$ en $:$ geldt dat ze gelijke prioriteit hebben; deze bewerkingen voer je gewoon uit van links naar rechts. Hetzelfde geldt voor $+$ en $-$.

De uitkomst van $8 - 4 \times 2$ is dus $8 - 8 = 0$, en niet $4 \times 2 = 8$. En $8 : 4 \times 2$ heeft als uitkomst $2 \times 2 = 4$, en niet $8 : 8 = 1$. De aloude rekenregel 'Meneer Van Dalen Wacht Op Antwoord', die in de uitvoering van de bewerkingen de volgorde Machtsverheffen, Vermenigvuldigen, Delen, Worteltrekken, Optellen en Aftrekken kende, gaat dus niet op. Het is maar dat je het weet, anders loopt je Albert-klok niet goed...

EEN PRECIEZERE KLOK Ik heb een variant op de Albert-klok gemaakt. Waarom zouden we niet een 'secondewijzer' toevoegen? De Albert-klok van MNTNT gebruikt twee keer drie cijfers. Met een secondewijzer komen er nog eens drie cijfers bij, waarmee ook weer een sommetje gemaakt moet worden. Helemaal leuk wordt het als we afspreken dat elk van de cijfers 1 tot en met 9 precies één keer gebruikt mag worden. Een voorbeeld:

9	:	3	+	5	h
4	$\times$	8	-	2	min
1	+	6	+	7	sec

Deze stand betekent: 8 uur, 30 minuten en 14 seconden.

We moeten nog wel een paar afspraken maken:

- De tijdstippen lopen van 00:00:00 tot en met 23:59:59.
 - De bewerkingen $+$, $-$, $\times$ en $:$ zijn toegestaan. Ze hoeven niet allemaal gebruikt te worden; één of meerdere bewerkingen mogen worden weggelaten.
 - Er worden geen haakjes gebruikt.
- Kunnen we alle tijdstippen met deze klok aangeven? Dat is een hele puzzel.

Opgave 1. Wat is het vroegste tijdstip dat je kunt maken?

Opgave 2. Wat is het laatste tijdstip dat je kunt maken?

Opgave 3. Je hebt bij de vorige opgave misschien gemerkt, dat het niet mogelijk is om het tijdstip 23:59:59 te maken. Lukt het wel als je ook mag machtsverheffen ($^$)? (Voorbeeld: $3 + 4^2 = 3 + 16 = 19$.)

Opgave 4. Is het tijdstip 12:34:56 mogelijk met de vijf bewerkingen $+$, $-$, $\times$, $:$ en $^$?

Opgave 5. Is het tijdstip 12:00:00 mogelijk met de vijf bewerkingen $+$, $-$, $\times$, $:$ en $^$?

Opgave 6. Als klap op de vuurpijl: is elk tijdstip mogelijk met de vijf bewerkingen $+$, $-$, $\times$, $:$ en $^$? Zo ja, bewijs dat. Zo nee, geef dan een onmogelijk tijdstip en leg uit waarom dat tijdstip niet te maken is.

OPLOSSINGEN

Opgave 1. Het vroegste tijdstip, 00:00:00, kun je als volgt maken:

8	-	7	-	1	h
2	×	3	-	6	min
9	-	4	-	5	sec

Uiteraard kunnen hierin de rijen worden verwisseld, de 7 en de 1 in rij 1, de 2 en de 3 in rij 2, of de 4 en de 5 in rij 3.

Opgave 2. Het laatste tijdstip dat je kunt maken is 23:59:56:

8	×	3	-	1	h
9	×	6	-	5	min
2	×	4	×	7	sec

Opgave 3.

8	×	3	-	1	h
9	×	7	-	4	min
2	^	6	-	5	sec

Opgave 4. Ja, het lukt zelfs zonder machtsverheffen:

9	:	1	+	3	h
5	×	8	-	6	min
2	×	4	×	7	sec

Oplossingen met machtsverheffen zijn:

4	+	9	-	1	h
5	×	8	-	6	min
2	^	3	×	7	sec

6	+	7	-	1	h
5	^	2	+	9	min
4	^	3	-	8	sec

Opgave 5. Een van de mogelijkheden is:

4	×	5	-	8	h
7	-	6	-	1	min
3	^	2	-	9	sec

Opgave 6. Nee, niet elk tijdstip is mogelijk. Bijvoorbeeld 11:52:52 is niet mogelijk. De enige vijf combinaties die 52 opleveren zijn:

- 2, 3, 7 ($7^2 + 3$)
- 2, 6, 9 ($6 \times 9 - 2$)
- 4, 6, 8 ($6 \times 8 + 4$)
- 4, 7, 8 ($7 \times 8 - 4$)
- 5, 7, 9 ($5 \times 9 + 7$)

Kiezen we hier twee combinaties uit (voor de minuten en de seconden), dan zijn alleen maar mogelijk:

- 159-723-468
- 135-269-478
- 123-468-579

Met zowel 159, 135 als 123 kan 11 (uur) niet worden gemaakt.

Tot slot: zou het helpen als we wél haakjes op onze klok zouden toelaten? Het tijdstip 11:52:52 kunnen we dan in ieder geval wel maken! ■

MERSENNE IN DE OEIS

■ door Alex van den Brandhof

Weet je wat het 49^{ste} getal van de volgende rij is?

3, 7, 31, 127, 8191, 131071, 524287, 2147483647,
2305843009213693951, ...

Een maand geleden wist niemand dat nog, want de gegeven rij toont de rij *Mersenne-priemgetallen*. Dat zijn priemgetallen van de vorm $2^n - 1$. Daarvan waren er tot begin januari 48 van bekend. Maar toen werd het 49^{ste} Mersenne-priemgetal gevonden: $2^{74.207.281} - 1$. Dit getal, bestaande uit 22.338.618 cijfers, is dus het 49^{ste} getal in bovenstaande rij. Tenminste, dat is *waarschijnlijk* zo. Er is een kleine kans dat er een Mersenne-priemgetal kleiner dan $2^{74.207.281} - 1$ in de zoektocht naar Mersenne-priemgetallen over het hoofd is gezien. Mocht dat zo zijn, dan vinden er in de rij dus wat verschuivingen plaats. In de *Online Encyclopedia of Integer Sequences* (OEIS) staat de rij van Mersenne-priemgetallen onder het nummer A000668. De OEIS geeft overigens alleen maar de eerste twaalf termen van de rij.

Sinds 1996 kan iedereen meedoen met het zoeken naar grote Mersenne-priemgetallen. Dat gebeurt via het project *Great Internet Mersenne Prime Search* (GIMPS). Curtis Cooper (University of Central Missouri) is een fanatieke deelnemer: behalve het huidige record vond hij drie keer eerder een priemrecord. Via GIMPS werden tot nog toe vijftien Mersenne-priemgetallen ontdekt. De elf grootste priemgetallen die we tot nu toe kennen, zijn allemaal van die vorm. Op de twaalfde plek, met 3.918.990 cijfers, staat het getal $19.249 \times 2^{13.018.586} + 1$.

ONEINDIG VEEL? Of de rij Mersenne-priemgetallen oneindig lang is, is een open vraag. De meeste wiskundigen vermoeden dat er inderdaad oneindig veel Mersenne-priemgetallen bestaan, maar een bewijs ontbreekt. De Britse wiskundige Marcus du Sautoy, auteur van de bekende boeken *Het symmetriemonster* en *The Music of the Primes*, ging onlangs in een interview voor de website plus.maths.org tegen de gangbare mening in: momenteel gelooft hij dat er slechts eindig veel Mersenne-priemgetallen bestaan. Het voornaamste onderzoeksgebied van Du Sautoy is groepentheorie, de theorie waarin symmetrieën van (hogerdimensionale) objecten worden bestudeerd. Verrassend genoeg vond

Du Sautoy een verband tussen de groepentheorie en de Mersenne-priemgetallen. Of hij dankzij dit verband kan bewijzen dat er maar eindig veel (of toch oneindig veel) Mersenne-priemgetallen bestaan, moeten we afwachten. Het zou in elk geval een enorme doorbraak betekenen.

VAAK IN DE OEIS Marin Mersenne (1588-1648) was een Franse monnik en naar hem zijn de priemgetallen van de vorm $2^n - 1$ vernoemd. Mersenne dacht dat $2^n - 1$ alléén priem is voor $n = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127$ and 257. Hij had het dus mis; niet alleen miste hij veel waarden van n waarvoor $2^n - 1$ priem is, ook omgekeerd vergiste hij zich twee keer: $2^{67} - 1$ en $2^{257} - 1$ zijn *niet* priem. Deze fouten zijn uiteraard vergeeflijk als je bedenkt dat Mersenne in de zeventiende eeuw leefde.

In 1989 schreven P.T. Bateman, J.L. Selfridge, en S.S. Wagstaff een artikel in het tijdschrift *American Mathematical Monthly* met de titel 'The New Mersenne Conjecture' ('het nieuwe Mersenne-vermoeden'). Dit vermoeden houdt het volgende in.

Voor elk oneven getal p geldt: als twee van onderstaande voorwaarden gelden, dan geldt de derde automatisch ook.

1. $p = 2^k \pm 1$ of $p = 4^k \pm 3$ voor een natuurlijk getal k .
2. $2^p - 1$ is een priemgetal (een Mersenne-priem).
3. $(2^p + 1)/3$ is een priemgetal.

De waarden van p waarvoor voorwaarde 1 geldt, staan in de OEIS onder nummer A122834. Ook de p 's waarvoor de voorwaarden 2 en 3 gelden hebben een aparte rij in de OEIS: A000043 respectievelijk A000978.

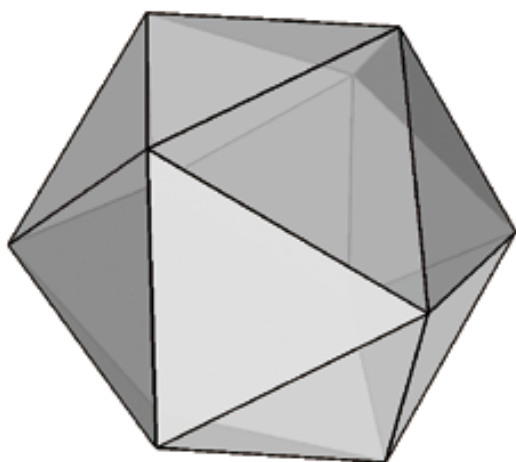
De waarden van p waarvan we momenteel weten dat aan alle drie de voorwaarden wordt voldaan, zijn 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61, 127. Dit rijtje staat in de OEIS onder nummer A107360. Een ander vermoeden luidt dat er géén getal p groter dan 127 is waarvoor alle drie de voorwaarden gelden. Ook de waarden van p waarvoor ten minste één van de voorwaarden geldt, zijn te vinden in de OEIS: A120334.

Je ziet: getallen die op de een of andere manier gelieerd zijn aan Mersenne, duiken vaak op in de getallenencyclopedie. Tik zelf 'Mersenne' maar eens in de zoekbalk van de OEIS en kijk op welke verrassingen je nog meer stuit. ■

In het januarinummer hebben we een dodecaëder (gelijkzijdig twaalfvlak) opgedeeld in een aantal identieke piramides. In dit nummer doen we hetzelfde met de icoesaëder (gelijkzijdig twintigvlak). De bouwtekeningen vind je op pagina 19.

■ door William Verspaandonk

EERLIJK DELEN DEEL 2

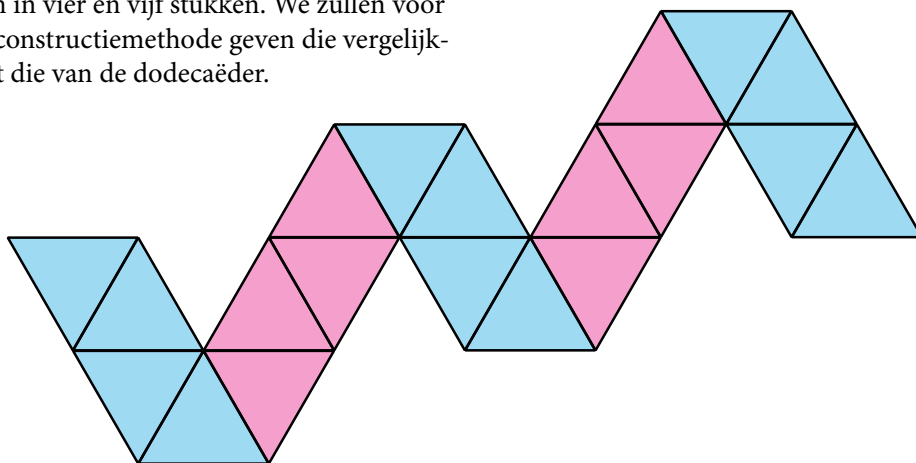


Figuur 1

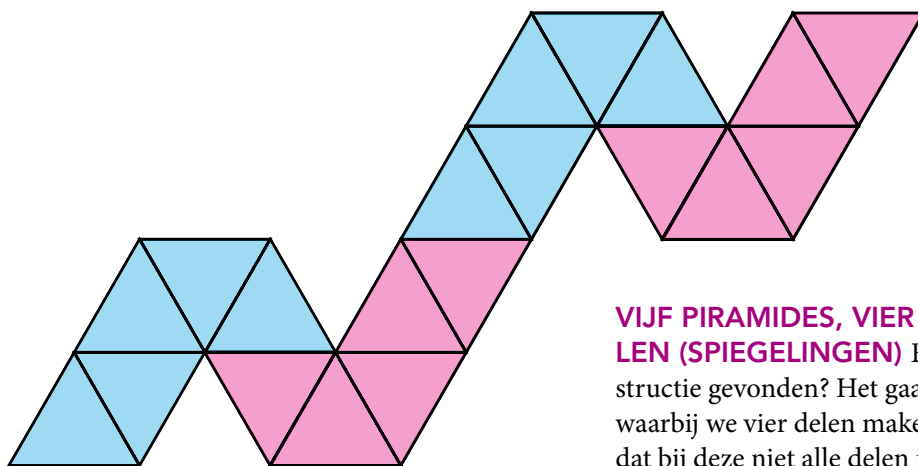
De piramides hebben elk een grondvlak dat bestaat uit een vlak van de icoesaëder. De randen van de snijvlakken lopen van een hoek naar de tegenoverliggende hoek en hierbij wordt door het midden van de icoesaëder gegaan. De randen van de snijvlakken vormen de hoofddiagonalen van de icoesaëder en de ribben van de piramides. In het kader op pagina 18 kun je zien hoe de hoofddiagonalen worden bepaald.

Met behulp van uitslagen wordt bepaald hoe de rangschikking moet zijn van de vijfhoeken ten opzichte van elkaar om zo de constructies te maken. De uitslagen hebben een herhalend patroon. Als verrassing blijkt dat de constructiemethode voor vijf delen nog een andere constructiemethode bevat!

Een icoesaëder is een ruimtelijk object dat is opgebouwd uit twintig gelijkzijdige driehoeken. Je ziet hem in figuur 1. In dit artikel gaan we de icoesaëder opdelen met de *piramidemethode*, zoals we die in het januarinummer hebben besproken. Het is mogelijk een icoesaëder op te delen in twee, vier, vijf, tien en twintig delen. De twee interessantste zijn de opdelingen in vier en vijf stukken. We zullen voor beide een constructiemethode geven die vergelijkbaar is met die van de dodecaëder.



Figuur 2



Figuur 3

VIER PIRAMIDES, VIJF IDENTIEKE DELEN

In figuur 2 zie je een uitslag waarin de herhalende structuur goed is te zien. Na iedere acht driehoeken herhaalt het patroon zich. Na iedere vier driehoeken kan de uitslag worden opgedeeld in gelijke stukken. Dat is in de kleuren blauw en rood weergegeven.

Zoals we al zeiden, bevat deze uitslag nog een andere constructie. Ik ben benieuwd of je deze ziet. Een hint: deze constructie heeft te maken met het volgende onderdeel, het opdelen van de icoesaëder in vier identieke delen.

VIJF PIRAMIDES, VIER IDENTIEKE DELEN

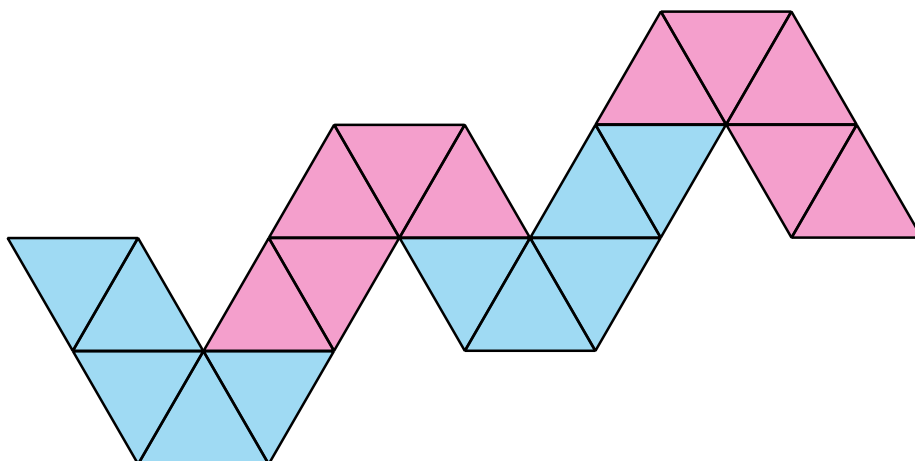
Voor het opdelen van de icoesaëder in vier delen gebruiken we de uitslag in figuur 3. Bij elk van de vier delen liggen vier driehoeken op een lijn en is een driehoek anders gerangschikt. De vier gekleurde delen zijn ook duidelijk ten opzichte van elkaar anders gerangschikt. Pas na tien driehoeken ontstaat de herhaling.

VIJF PIRAMIDES, VIER CONGRUENTE DELEN (SPIEGELINGEN)

En, heb je de extra constructie gevonden? Het gaat om een constructie waarbij we vier delen maken, maar met het verschil dat bij deze niet alle delen identiek zijn. Ze zijn slechts congruent. Bij de icoesaëder kunnen we een constructie maken waarbij twee delen ten opzichte van de andere twee te spiegelen zijn.

Als we teruggaan naar de uitslag voor het opdelen in vijf stukken, dan kun je daarin een patroon herkennen voor het opdelen in vier stukken (zie figuur 4). De twee buitenste delen zijn identiek en de twee binnenste delen ook. Je vraagt je misschien af of het mogelijk is om twee delen van de vorige constructie (vier identieke delen) te vervangen door twee gespiegelde delen van deze laatste constructie. Dat kan inderdaad, omdat de vormen van de samengestelde driehoeken (en dus van de piramides) hetzelfde zijn.

We hebben twee puzzels gemaakt waarbij de vorm (maar niet de kleur) van de puzzelstukjes van de ene puzzel gespiegeld is ten opzichte van de andere. Door twee puzzelstukjes van de ene te nemen en twee van de andere, heb je weer een nieuwe puzzel. Zo krijg je in totaal vier puzzels. Om het gemakkelijker te maken, zijn de delen van de puzzel gemerkt. Op deze manier hoef je zelf niet uit te zoeken met welke delen de puzzel kan worden gemaakt. Als je de markering weghaalt, wordt het wel een stuk uitdagender. ■



Figuur 4

BOUWTEKENINGEN

De bouwtekeningen op de rechterpagina (ook te vinden op www.pyth.eu) moet je eerst vergroten met een kopieerapparaat. Bij de icosaaëder die uit vier delen bestaat, zijn de bouwtekeningen gemerkt met een A of een B. Dit is ook gedaan bij de gespiegelde variant. De puzzels zijn onafhankelijk van elkaar op te lossen. Maar neem je van beide puzzels de stukjes die met een A zijn gemerkt, dan heb je een nieuwe puzzel. Hetzelfde geldt voor de stukjes die met een B zijn gemerkt.

DE LENGTE VAN DE HOOFDDIAGONAAL VAN EEN ICOSAËDER

Gegeven is een icosaaëder met ribben met lengte 2 (dat blijkt straks bij het rekenwerk een handige lengte te zijn). We willen de lengte d van de hoofddiagonaal berekenen. In de vorige Pythagoras zagen we dat bij de dodecaëder de kubus als handig hulpmiddel om de hoek kwam kijken. Dat blijkt bij de icosaaëder ook zo te zijn. De icosaaëder is zó in de kubus te plaatsen, dat bepaalde ribben evenwijdig lopen met de ribben van de kubus (zie figuur 5). In elk vlak van de kubus raakt een ribbe aan de icosaaëder. In rood zie je een vierkant waarvan zijden samenvallen met ribben van de icosaaëder. Ook zie je in rood de hoofddiagonaal van de icosaaëder. Dit is nu *niet* de hoofddiagonaal van de kubus.

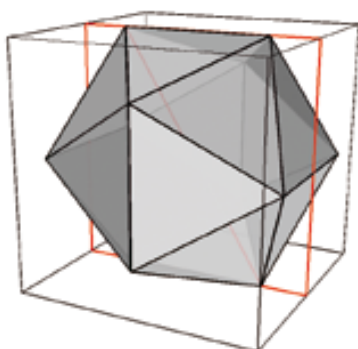
Figuur 6 toont een beter aanzicht. Hierin hebben we bepaalde maten aangegeven. De icosaaëder is opgebouwd uit gelijkzijdige driehoeken, waarvan de zijden lengte 2 hebben. De hoogte van de driehoeken is $\sqrt{3}$ (zie figuur 7). In figuur 6 zijn de hoogtes terug te vinden als de buitenste schuine lijnen. Waarom het midden-gedeelte en de linkerbovenhoek gekleurd zijn, zal straks duidelijk worden. Verder zie je in figuur 6 nog de waarde a die nu nog onbekend is. De horizontale zijden van het rode vierkant

hebben lengte $2a + 2 = 2(a + 1)$. Dat betekent dat de verticale zijden ervan ook deze lengte moeten hebben, het is immers een vierkant. De verticale zijden worden precies doormidden gedeeld door een ribbe van de icosaaëder. Dus ieder deel heeft een lengte van $a + 1$.

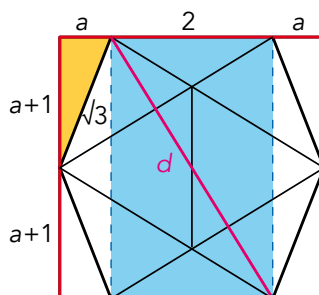
Met de stelling van Pythagoras kunnen we nu a berekenen. Bekijk de gele rechthoekige driehoek linksboven in figuur 6. De rechthoekzijden hebben lengte a en $a + 1$. Van de schuine zijde weten we dat die lengte $\sqrt{3}$ heeft. Lossen we de vergelijking $a^2 + (a + 1)^2 = (\sqrt{3})^2$ op, dan vinden we $a = (-1 + \sqrt{5})/2$. Hiermee wordt de lengte van de vierkantzijde $2a + 2 = 1 + \sqrt{5}$.

Hadden we voor de lengte van de icosaaëder-ribben de waarde 1 genomen (in plaats van 2), dan zou hier het gulden-snedegetal hebben bestaan, net als bij de dodecaëder!

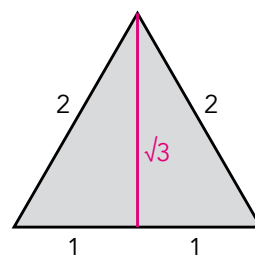
We zijn nu bijna klaar. Kijken we naar de blauwe rechthoek in figuur 6, die gevormd wordt door de stippellijnen met lengte $1 + \sqrt{5}$ en de ribben met lengte 2, dan moeten we hiervan de diagonaal bepalen. Dit is eveneens de gezochte hoofddiagonaal van de icosaaëder. Met de stelling van Pythagoras vinden we $d = \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$. De ribbe van de piramide wordt $d/2$.



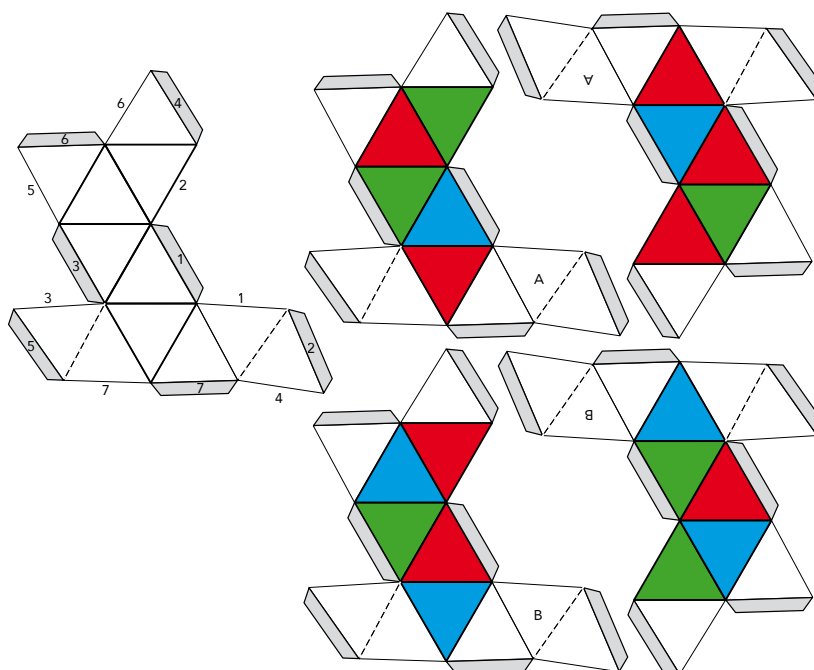
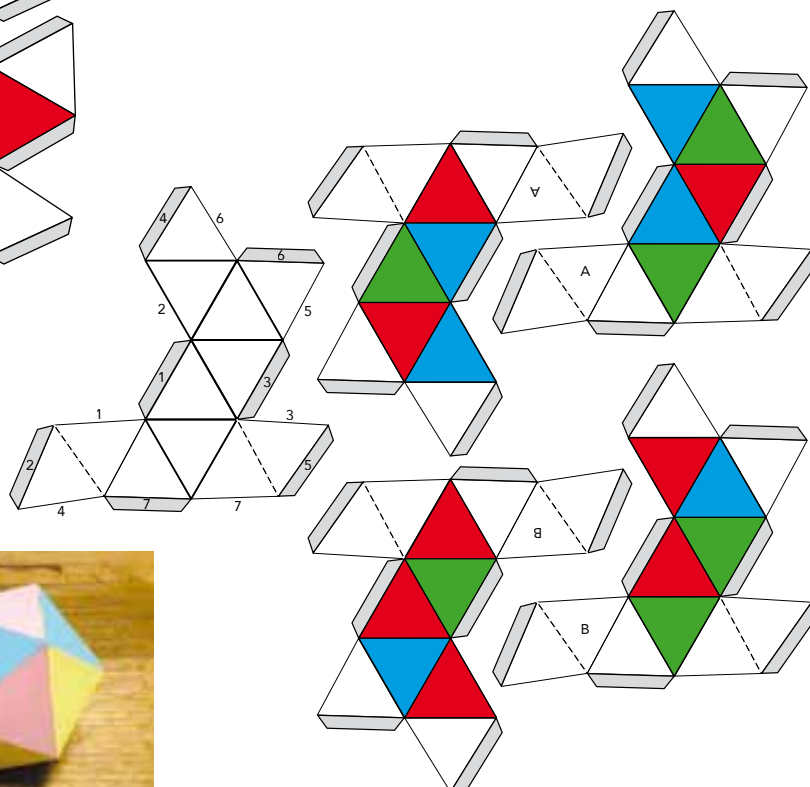
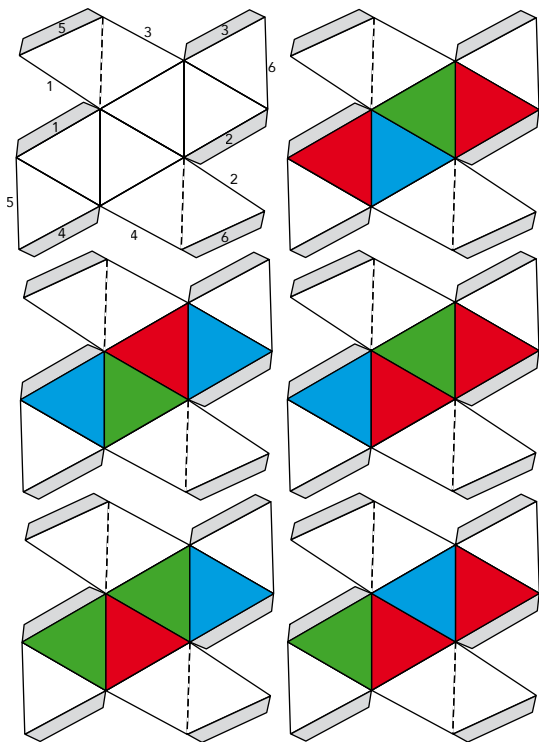
Figuur 5



Figuur 6



Figuur 7



Boven:
vier piramides,
vijf identieke delen

Midden:
vijf piramides,
vier identieke delen

Onder:
vijf piramides,
vier congruente delen

JOURNAAL

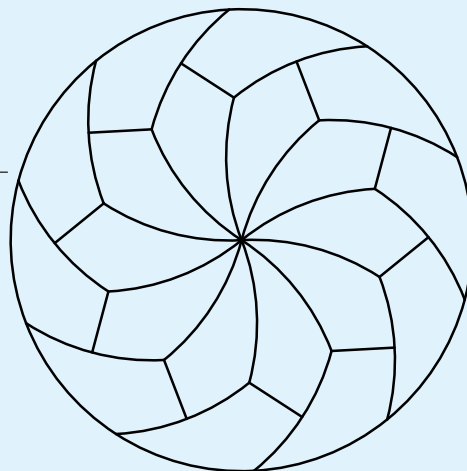
■ door Marc Seijlhouwer

Eindeloos pizza snijden

Iedereen een gelijk stuk pizza geven, ongeacht hoeveel mensen er zijn? Het kan nu, dankzij een nieuwe ontdekking om cirkels in gelijke delen te verdelen. Joel Anthony Haddley en Stephen Worsley, twee wiskundigen van de University of Liverpool, vonden een manier om een pizza netjes in gelijke delen te verdelen, op zo'n manier dat ze eenvoudig nog verder op te delen zijn.

Daarmee hebben ze een oneindige betegeling met congruente vormen (*monohedral tiling* in het Engels) gevonden. Ze hebben hiervoor een specifiek geval, waarin een pizza in twaalf gelijke delen opgedeeld werd, algemeen gemaakt zodat een pizza in willekeurig veel gelijke delen opgedeeld kan worden.

Het verdelen in twaalf stukken gaat op een verrassend simpele manier. Je begint met een verdeling in zes pizzapunten, maar in plaats van rechte lijnen zijn ze gebogen. Vervolgens snij je die pun-



ten doormidden, door een rechte lijn te trekken van de rand naar het midden van een snijlijn. De algemene manier werkt op eenzelfde manier, maar met andere beginsneden. Afhankelijk van het aantal plakken dat je vanuit het midden snijdt, krijg je uiteindelijk een pizzabetegeling van tegels met een oneven aantal gekromde hoeken. De mogelijkheden zijn eindeloos.

Een praktische toepassing zien Haddley en Worsley niet echt. 'Maar het is interessante wiskunde, en het levert mooie plaatjes op', vertelde een van hen aan het tijdschrift *New Scientist*.

20

Erdősgetal 1 kan nog steeds

Hoewel de legendarische wiskundige Paul Erdős al in 1996 overleed, is het nog steeds mogelijk om samen met hem een paper te publiceren. Het overkwam onlangs de Amerikaan Steve Butler, die met een onderzoek naar Egyptische breuken voortbouwde op werk dat Erdős vijftig jaar eerder begon.

Zo'n samenwerking met Erdős is een begeerd iets voor veel wiskundigen. Het levert namelijk Erdősgetal 1 op, een soort eretitel. Het Erdősgetal van een wiskundige geeft aan hoe ver hij of zij van het Hongaarse genie afstaat. Werk je direct met hem samen, dan krijg je Erdősgetal 1. Werk je samen met iemand die Erdősgetal 1 heeft, dan krijg je Erdősgetal 2, enzovoort. Het getal is een leuk grapje, maar laat ook goed zien hoe klein de wereld eigenlijk is; het is moeilijk een wiskundig onderzoeker te vinden met een hoog Erdősgetal.

Dat het jaren na zijn dood nog mogelijk is om samen te werken met Erdős komt mede door de productiviteit in zijn leven. Hij hield zich met enorm veel verschillende onderwerpen bezig, maar

maakte het onderzoek niet altijd 'af'. Daardoor zijn er nog fantastisch veel open problemen waar Erdős ooit aan begonnen is. Een van die problemen, waarmee Steve Butler dus het begeerde lage Erdősgetal kreeg, ging over Egyptische breuken. De oude Egyptenaren hielden zich veel bezig met het schrijven van breuken als som van breuken met teller 1 (zogeheten stambreuken). Zo is $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{47}{60}$. Erdős hield zich onder meer bezig met stambreuken die optellen tot een geheel getal. Erdős wilde bewijzen dat je elk geheel getal kon schrijven als som van stambreuken waarvan de noemers maximaal twee priemfactoren bevatten.

Hoewel hij er, samen met Ronald Graham, hard aan werkte, kwam Erdős nooit tot een oplossing. Butler zette het onderzoek van Erdős en Graham voort, samen met Graham. Uiteindelijk hebben ze niet Erdős oorspronkelijke vermoeden bewezen; wel lieten ze zien dat het lukt als de noemers hoogstens drie priemfactoren mogen hebben. Het artikel staat nu op naam van Erdős, Graham en Butler.

Profielwerkstukprijs

Heb je een profielwerkstuk over wiskunde gemaakt? Doe dan mee met Pythagoras' Profielwerkstukkenwedstrijd. Stuur een pdf van je werkstuk uiterlijk 28 februari naar profielwerkstuk@pyth.eu. Zie www.pyth.eu voor meer info.

P Y T H A
G O R A S
P R O F I
E L W E R
K S T U K
P R I J S

Oorzaak tijgerstrepen ontdekt

Met een computermodel denken wiskundigen door te hebben waarom een tijger verticale strepen op zijn lijf heeft: onderzoekers van de Amerikaanse universiteit Harvard hebben meerdere modellen voor dierstrepen bij elkaar gevoegd en ontdekten zo een berg aan details over streepvorming.

Naast de richting van de streep vonden de onderzoekers ook andere mechanismen, zoals het proces dat de hoeveelheid strepen beïnvloedt. Daarmee denken ze nu een bijna volledig model te hebben voor de *vorming* van dierenstrepen. Wat er precies gebeurt met de cellen van dieren waardoor strepen ontstaan, is nog niet helemaal duidelijk. Maar ze weten nu wel hoe een vacht of huid zich moet ontwikkelen, willen er specifieke strepen ontstaan.

Wiskundigen proberen al tientallen jaren dierenstrepen te verklaren. De beroemde wiskundige Alan Turing dankt zijn faam aan zijn computerpionierwerk, maar hij bedacht ook als eerste een wiskundige formule voor strepen. De formule liet zien dat strepen ontstaan doordat de hoeveelheid pigment heen en weer schommelt tijdens de vorming van een vacht of huid. Turing kon echter niet uitleggen waarom sommige dieren verticale strepen hebben (tijgers en zebra's), terwijl andere hun strepen horizontaal hebben (zoals zebra's).

De Harvard-mensen probeerden alle wiskundige kennis over strepen bij elkaar te rapen. Ze pak-

ten verschillende modellen van de afgelopen zestig jaar en voegden ze samen in één grote vergelijking. Daaruit konden ze vervolgens een paar bepalende voorwaarden voor streepvorming distilleren. Hoewel het nu nog zuiver theoretisch is, vermoeden ze dat het binnenkort mogelijk is om het model te vergelijken met de werkelijkheid. Door de huid van een tijger van heel dichtbij te bekijken, hopen de onderzoekers dat hun model overeenkomt met wat er met de streepmoleculen gebeurt in dieren.



Wiskunde verklaart humor

Een Canadese psycholoog heeft wiskunde gebruikt om te verklaren hoe grappig niet-bestaande woorden zijn. Daarmee denkt hij een manier gevonden te hebben om te voorspellen wat mensen grappig vinden.

Humor wordt vaak gezien als subjectief, maar de grappigheid van niet-bestaande woorden is universeel. Psychologische tests laten bijvoorbeeld zien dat mensen het geluid/woord 'kwak' grappiger vinden dan 'boe'. De Canadees wilde kijken waar de grappigheid van lettercombinaties 'm' in zat. Daarvoor kende hij niet-bestaande woorden een *entro-*

pie (een wiskundige maat) toe. Onzinwoorden met ongewone lettercombinaties, zoals 'finglam' hebben lage entropie, terwijl woorden die klinken alsof ze kunnen bestaan, zoals 'clester', hoge entropie hebben.

De woorden met een lage entropiescore werden door proefpersonen stevast grappiger gevonden. De proefpersonen moesten telkens uit twee woorden het grappigste woord kiezen. In één geval wist het model 92 procent van de keuzes juist te voorspellen. De onderzoekers concluderen dat humor universeel is dan vaak wordt aangenomen.

De Baltic Way is een internationale wiskundewedstrijd tussen elf Noord-Europese landen. Afgelopen november vond de 26ste editie plaats in Stockholm. Sinds een paar jaar is het traditie om een extra land uit te nodigen. Vorig jaar was dat Nederland en zo kwam het dat vijf Nederlandse middelbare scholieren in november op het vliegtuig naar Zweden stapten, op weg naar Baltic Way 2015.

■ door Julian Lyczak

BONTE WAS

Op 23 augustus 1989 vond in Estland, Letland en Litouwen een vreedzaam protest plaats tegen de Sovjet-Unie aan wie de drie Baltische staten precies vijftig jaar daarvoor hun onafhankelijkheid verloren. Over een afstand van ruim 600 kilometer werd een menselijke keten gevormd langs de hoofdsteden Riga, Tallinn en Vilnius. De demonstratie leverde de landen veel internationale publiciteit en dat zorgde uiteindelijk binnen een jaar voor de onafhankelijkheid van de drie landen.

Ter nagedachtenis aan dit protest dat tot de onafhankelijkheid leidde, werd in 1990 voor het eerst de 'Baltic Way' georganiseerd tussen Estland, Letland en Litouwen. In de afgelopen 25 jaar is de lijst met deelnemende landen stapsgewijs uitgebreid tot het huidige aantal van elf: naast de drie Baltische staten zijn dat Finland, Zweden, Noorwegen, Denemarken, IJsland (het eerste land dat de onafhankelijkheid van Estland, Letland en Litouwen erkende), Polen, Duitsland en Rusland. Nederland was dit jaar als twaalfde land te gast bij de Baltic Way.

Het concept van de wedstrijd is in al die jaren nagenoeg ongewijzigd gebleven. Ieder land stuurt vijf middelbare scholieren die als team gedurende vierenhalf uur aan twintig opgaven moeten werken. De charme van de wedstrijd is dus dat je als team voor ieder lid de juiste opgave moet uitzoeken.

Dit ging het Nederlandse team, bestaande uit Levi van de Pol, Michiel Versnel, Mieke Wessel, Reinier Schmiermann en Wietze Koops, goed af: ze werden vierde. Alleen Rusland, Polen en Estland bleven het Nederlandse team voor.

DRIE WASMANDEN Een van die twintig opgaven ging over rode, blauwe en groene kleren:

Binnen een gezin worden rode, blauwe en groene kleren gedragen. Er zijn drie identieke wasmanden; voor elke kleur één. Aan het begin van de eerste week zijn alle wasmanden leeg. Elke week produceert het gezin in totaal 10 kg aan was (waarbij de verdeling over de drie kleuren kan variëren). De was wordt per kleur in de juiste wasmand gestopt. Vervolgens wordt aan het eind van de week de zwaarste wasmand (of één van de zwaarste wasmanden, als er meerdere zijn) geleegd en wordt zijn inhoud gewassen. Wat is de minimale capaciteit die de wasmanden moeten hebben om te garanderen dat de was altijd in de juiste wasmand past?

Stel eens, om makkelijk te beginnen, dat de familie alleen maar rode kleren draagt. Dan zijn de groene en blauwe wasmanden dus altijd leeg. De rode wasmand bevat dan voor het wassen altijd 10 kg aan was en is na het wassen uiteraard leeg. In het bijzonder moet de capaciteit van die wasmand dus 10 kg zijn.

Er zijn natuurlijk ook andere situaties. Wat nu als er altijd evenveel rode, blauwe als groene was is? Dan krijgen we de situatie zoals die in tabel 1 is weergegeven. Daarin is aangegeven hoeveel was er steeds aan het begin van een week en aan het eind van die week in de manden zit; daarna wordt de inhoud van de zwaarste mand gewassen en begint de volgende week. In dit geval zien we dat de hoeveelheden was vanaf de derde week steeds hetzelfde

	begin van de week			eind van de week		
weeknr.	R	B	G	R	B	G
1	0	0	0	$\frac{10}{3}$	$\frac{10}{3}$	$\frac{10}{3}$
2	0	$\frac{10}{3}$	$\frac{10}{3}$	$\frac{10}{3}$	$\frac{20}{3}$	$\frac{20}{3}$
3	$\frac{10}{3}$	0	$\frac{20}{3}$	$\frac{20}{3}$	$\frac{10}{3}$	$\frac{30}{3}$
4	$\frac{20}{3}$	$\frac{10}{3}$	0	$\frac{30}{3}$	$\frac{20}{3}$	$\frac{10}{3}$

Tabel 1

zijn, maar steeds een mand opschuiven. Dus ook in deze situatie zijn wasmanden met een capaciteit van 10 kg voldoende groot.

Toch kunnen we in dit voorbeeld al zien dat er situaties zijn waarin zulke wasmanden te klein zouden zijn. Stel bijvoorbeeld dat in week 4 (de inhoud is aan het begin $\frac{20}{3}$, $\frac{10}{3}$ en 0) de hele familie die week alleen rode kleren draagt. Dan is er op eens $10 + \frac{20}{3} = 16\frac{2}{3}$ kg aan rode was aan het eind van de week. Dit levert dus een nieuwe ondergrens voor de benodigde capaciteit.

In tabel 2 zie je nog een voorbeeld. Hierna is er helemaal geen was meer, maar voordat je gaat wassen moet een wasmand toch 15 kg was aan kunnen. Als we vanaf week 2 (de situatie (0, 5, 0)) de was weer over de eerste twee wasmanden hadden verdeeld zodat we $(7\frac{1}{2}, 7\frac{1}{2}, 0)$ kregen, dan zien we dat we zelfs $17\frac{1}{2}$ kg per kleur kwijt moeten kunnen. We zouden echter nog een keer de eerste twee wasmanden even vol kunnen maken en dan weer wassen. Zo krijgen we zelfs de situatie zoals in tabel 3.

De inhoud lijkt nu steeds dichterbij 10 te komen en dan zou de minimale capaciteit in ieder geval 20 moeten zijn. Dat de inhoud van de middelste wasmand daadwerkelijk steeds dichterbij 10 kg komt te liggen, kunnen we als volgt zien: bekijk de situatie (0, w , 0) met $0 \leq w < 10$. Als we er weer 10 kg aan was bij stoppen en willen zorgen dat de totale was (dat is dus $10 + w$ kg) eerlijk verdeeld is over de twee eerste wasmanden, dan krijgen we de situatie $((10 + w)/2, (10 + w)/2, 0)$ en na het wassen is dat dus (0, $(10 + w)/2$, 0). In het bijzonder is $(10 + w)/2 > (w + w)/2 = w$, aangezien $10 > w$. Dus neemt de inhoud van de middelste wasmand per stap toe. Natuurlijk wel zolang het onder de 10 blijft, maar dat is zo, want $(10 + w)/2 < (10 + 10)/2 = 10$ aangezien $w < 10$. We kunnen zelfs nog meer zeggen: de

	begin van de week			eind van de week		
weeknr.	R	B	G	R	B	G
1	0	0	0	5	5	0
2	0	5	0	0	15	0

Tabel 2

	begin van de week			eind van de week		
weeknr.	R	B	G	R	B	G
1	0	0	0	5	5	0
2	0	5	0	$7\frac{1}{2}$	$7\frac{1}{2}$	0
3	0	$7\frac{1}{2}$	0	$8\frac{3}{4}$	$8\frac{3}{4}$	0
4	0	$8\frac{3}{4}$	0	$9\frac{3}{8}$	$9\frac{3}{8}$	0

Tabel 3

inhoud van de rode en blauwe wasmanden aan het eind van week n is $10 - 5/2^{n-1}$. Merk op dat dit zo is voor de weken 1 tot en met 4. Voor wie het bewijsprincipe van 'volledige inductie' kent: je kunt daarmee laten zien dat deze formule klopt voor iedere week door te gebruiken dat

$$\frac{10 + \left(10 - \frac{5}{2^{n-1}}\right)}{2} = 10 - \frac{5}{2^n}.$$

Als we dus maar lang genoeg door gaan, dan zien we dat de hoeveelheid was inderdaad steeds dichterbij 10 komt te liggen. Als er dan opeens een week zou zijn met alleen maar was voor de middelste wasmand, dan is iedere capaciteit onder de 20 dus te weinig. De minimale capaciteit is dus in ieder geval niet kleiner dan 20 kg.

Helaas zijn zelfs zulke wasmanden te klein. Dat blijkt uit de oplossing die gegeven werd door het Nederlandse team, die we hieronder zullen beschrijven. Als je er liever eerst zelf over nadenkt waarom wasmanden van 20 kg niet groot genoeg zijn, lees dan nog niet direct verder.

OPLOSSING Laten we M schrijven voor de minimale capaciteit die we moeten vinden. Een opgave als deze bestaat altijd uit twee delen:

- bewijzen dat – hoe de was iedere week ook over de drie kleuren verdeeld is – de wasmanden nooit vol raken als ze capaciteit M hebben;
- laten zien dat er een situatie is, waarin wasman-

den met capaciteit kleiner dan M niet voldoen (zoals we dat hierboven voor 20 hebben gedaan). Maar wat is nu die waarde van M ? Die blijkt 25 te zijn! We gaan nu eerst laten zien dat deze capaciteit voldoende is. Daarvoor voeren we eerst wat notatie in. Laat (r_i, b_i, g_i) de hoeveelheden rode, blauwe en groene was zijn aan het begin van week i . De totale hoeveelheid was op dat moment noteren we met $w_i = r_i + b_i + g_i$. Voor $i = 1$ zijn deze vier waarden allemaal 0. De eerste opmerking die je kan maken, is dat de totale hoeveelheid was niet heel erg snel kan groeien: in week i komt er 10 kg was bij en van de nieuwe hoeveelheid totale was wordt minstens $\frac{1}{3}$ deel gewassen. Dus vinden we $w_{i+1} \leq \frac{2}{3}(w_i + 10)$. Dit kunnen we nu herschrijven tot

$$w_{i+1} - 20 \leq \frac{2}{3}(w_i + 10) - 20 = \frac{2}{3}(w_i + 10 - 30) = \frac{2}{3}(w_i - 20).$$

Als we dit nu herhaaldelijk toepassen, vinden we

$$\begin{aligned} w_{i+1} - 20 &\leq \frac{2}{3}(w_i - 20) \\ &\leq \left(\frac{2}{3}\right)^2(w_{i-1} - 20) \leq \dots \\ &\leq \left(\frac{2}{3}\right)^i(w_1 - 20) = -20 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^i. \end{aligned}$$

Dus $w_{i+1} \leq 20(1 - (\frac{2}{3})^i)$, ofwel $w_i \leq 20(1 - (\frac{2}{3})^{i-1}) < 20$ voor $i \geq 2$. Er is dus na het wassen nooit meer dan 20 kg was over.

Nu kunnen we laten zien dat er nooit 15 kg of meer vuile was in een wasmand kan zitten aan het begin van de week. Dit bewijzen we uit het ongerijmde. Neem dus aan dat aan het begin van een gegeven week k een van de wasmanden ten minste 15 kg bevat. Het maakt natuurlijk niet uit welke wasmand dat is, dus laten we zeggen dat dit om groene was gaat en dat er zojuist een rode was is gedraaid. Dan geldt dus $g_k \geq 15$ en $r_k = 0$. Vóór het wassen was er blijkbaar minstens zoveel rode als groene was, anders hadden we geen rode was gedaan, dus voor het wassen was er minstens $2 \cdot 15 = 30$ kg aan vuile was. Sinds de vorige wasbeurt is daar natuurlijk 10 kg was bijgekomen, dus blijkbaar geldt $w_{k-1} \geq 20$. Maar we hadden net laten zien dat dat niet kan.

Dus blijkbaar is aan het begin van de week iedere mand met minder dan 15 kg was gevuld en aan het eind van de week zit in iedere mand minder

	begin van de week			eind van de week		
weeknr.	R	B	G	R	B	G
1	0	0	0	$\frac{10}{3}$	$\frac{10}{3}$	$\frac{10}{3}$
2	0	$\frac{10}{3}$	$\frac{10}{3}$	$\frac{50}{9}$	$\frac{50}{9}$	$\frac{50}{9}$
3	0	$\frac{50}{9}$	$\frac{50}{9}$	$\frac{190}{27}$	$\frac{190}{27}$	$\frac{190}{27}$

Tabel 4

dan 15 + 10 kg was. Manden met een capaciteit van 25 kg stromen dus nooit over (sterker nog, ze raken zelfs nooit vol)!

Nu moeten we dus laten zien dat wasmanden met een kleinere capaciteit mogelijk overvol zouden kunnen raken. We gaan laten zien dat we zulke wasmanden vol kunnen laten raken.

In het bewijs dat een capaciteit van 25 kg voldoende is, gebruikten we dat de totale hoeveelheid was aan het begin van de week nooit meer is dan 20 kg. Hoe zouden we daarbij in de buurt kunnen komen? In de afchatting daarvoor gebruikten we dat er minstens $\frac{1}{3}$ deel van de was wordt gewassen. Als nou alle drie de wasmanden even vol zitten aan het eind van de week, dan wassen we steeds precies $\frac{1}{3}$ van de totale was. Dan krijgen we tabel 4.

We vinden nu juist gelijkheid in alle afchattingen voor de w_i die we hierboven hadden gevonden: $w_{i+1} = \frac{2}{3}(w_i + 10)$ en dus $w_{i+1} - 20 = \frac{2}{3}(w_i - 20)$. Hiermee kunnen we op dezelfde manier laten zien dat $w_{i+1} - 20 = -20 \cdot (\frac{2}{3})^i$ en dus $w_i = 20(1 - (\frac{2}{3})^{i-1})$. Op deze manier komen we dus uiteindelijk heel dicht bij de 20 kg aan was.

De tweede stap in het eerste deel van het bewijs gebruikte dat er nooit 15 kg of meer was in een wasmand zit aan het begin van de week. Maar kunnen we wel willekeurig dicht bij die 15 komen? Bij het maken van bijna 20 kg aan was hadden we al twee wasmanden met bijna 10 kg. Als nu de volgende was gelijk wordt verdeeld over deze twee wasmanden, dan krijgen we dus tweemaal een gewicht dat nagenoeg 15 kg is. Hierna wordt uiteraard één van deze wasmanden geleegd. Als nu in de volgende week alle was in de nog gevulde wasmand terecht komt, dan krijgen we een wasmand met zo goed als 25 kg. Dit laat zien dat wasmanden met een capaciteit kleiner dan 25 kg echt overvol kunnen raken!

De conclusie is dus dat 25 kg de kleinste capaciteit is voor de wasmanden, zodat de familie altijd de was kwijt kan. ■

In onze serie over getallenrijen hebben we al diverse speciale rijen gezien. In deze aflevering staat de volgende vraag centraal: hoe kun je een rij getallen zo efficiënt mogelijk coderen? Het antwoord: met behulp van functies.

■ door Klaas Pieter Hart

GENERERENDE FUNCTIES



Je kunt rijen getallen op diverse manieren weergeven of definiëren. Je kunt de rij bijvoorbeeld *suggestief* opschrijven:

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$$

en hopen dat iedereen door heeft dat je $a_n = n$ bedoelt (dat zal bij dit makkelijke voorbeeld wel zo zijn!). De reden dat we bij $n = 0$ beginnen zal straks duidelijk worden.

Met de schrijfwijze $a_n = n$ heb je de rij weergegeven als een *formule*. Nog een voorbeeld van een getallenrij uitgedrukt als formule:

$$b_n = n!$$

Hier staat de rij van faculteiten.

Wat ook kan, is de rij *indirect* specificeren, zoals de bekende rij van Fibonacci. Die leg je vast door af te spreken dat $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, en

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \text{ voor } n \geq 2.$$

Je kunt er ook een *opgave* van maken: je hebt een heleboel (oneindig veel) 1- en 2-euromunten. Bepaal voor elke n het aantal manieren, E_n , waarop je met die munten het bedrag van n euro kunt maken. Dus $E_0 = 1$: je kunt op één manier tot 0 euro komen, namelijk door geen munten te nemen. Verder is $E_1 = 1$ (één 1-euromunt) en $E_2 = 2$ (één 2-euromunt of twee 1-euromunten). Wat is E_n ? We komen hier verderop in het artikel op terug.

FUNCTIES We gaan het over *nóg* een andere manier hebben, namelijk het verstoppertje van een rij in

een *functie*. Als voorbeeld nemen we de (flauwe) rij die gegeven is door $e_n = 1$ voor alle n . We schrijven daar de volgende uitdrukking bij op:

$$e_0 + e_1x + e_2x^2 + e_3x^3 + \dots$$

Dit is een som van oneindig veel termen. Met de sigma-notatie kunnen we deze som schrijven als

$$\sum_{n=0}^{\infty} e_n x^n.$$

Nu kunnen we vaak een betekenis hechten aan zo'n oneindige som en dat gaat als volgt. Schrijf de som van een beginstuk op en noem die $s_n(x)$. In ons voorbeeld wordt dat dus

$$s_n(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n.$$

In dit geval kunnen we s_n vereenvoudigen.

Opgave 1. Reken na dat $(1-x)s_n(x) = 1 - x^{n+1}$.

We concluderen:

$$s_n(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

Als we nu aannemen dat $|x| < 1$, dan geldt $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{n+1} = 0$ en dus $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = 1/(1-x)$. Dat vatten we samen als

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

We hebben de hele rij enen dus in de functie



$e(x) = 1/(1-x)$ verstopt!

Kunnen we de eerste rij ook in een functie verstoppen? Ja dat kan, kijk maar. We hebben

$$0 + x + 2x^2 + 3x^3 + \dots + nx^n + \dots$$

Die kunnen we in deelsommen verdelen. Eerst

$$0 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots$$

Dan houden we

$$x^2 + 2x^3 + \dots + (n-1)x^n + \dots$$

over en daar halen we

$$x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots$$

uit weg. Je ziet de bui al hangen: voor elke $n \geq 1$ krijgen we zo een som:

$$S_n(x) = x^n + x^{n+1} + x^{n+2} + \dots$$

26 en die som is eigenlijk gewoon $x^n \cdot e(x)$ (haal x^n maar buiten de haakjes). Kortom, we krijgen eigenlijk

$$e(x)(x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots).$$

Maar tussen de haakjes staat $S_1(x)$ weer en als we alles uitwerken, vinden we dus

$$\sum_{n=0}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$$

en dit geldt weer voor alle x met $|x| < 1$.

Kunnen we de faculteiten ook in een functie verstoppen? Nee, helaas niet. Als je gaat proberen aan

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$$

een betekenis te geven, dan kom je er al gauw achter dat de partiële sommen

$$s_n(x) = 1 + x + 2!x^2 + 3!x^3 + \dots + n!x^n$$

voor elke $x \neq 0$ niet naar een vaste waarde convergeren: als $x > 0$, groeien ze boven elk getal uit, en

als $x < 0$, gaan ze heel wild oscilleren.

Of misschien toch wel: we kunnen de rij van 'omgekeerde faculteiten', $1/(n!)$, namelijk verstoppen in e^x , want voor alle reële getallen geldt namelijk dat

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

en dan hebben we eigenlijk, stiekem, de faculteiten zelf ook meegenomen. Bij het *bewijs* dat e^x zo te schrijven is, komt heel wat meer kijken. Misschien doen we dat later nog eens.

FIBONACCI We gaan eerst laten zien dat je met behulp van functies ook formules voor rijen kunt opsporen. We nemen als voorbeeld de rij van Fibonacci. Eigenlijk kunnen we aan de definitie niet zoveel zien; hoe snel groeien de getallen F_n eigenlijk? Dat gaan we met behulp van de bijbehorende functie uitzoeken. We doen even alsof

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n$$

goed gedefinieerd is en gaan er mee spelen. We zetten de eerste twee termen apart:

$$F(x) = 0 + x + \sum_{n=2}^{\infty} F_n x^n$$

en we gebruiken de regel $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ voor $n \geq 2$:

$$F(x) = x + \sum_{n=2}^{\infty} (F_{n-1} + F_{n-2})x^n.$$

Nu splitsen we de som in twee sommen:

$$F(x) = x + \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-1}x^n + \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-2}x^n.$$

De laatste som is eigenlijk

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n x^{n+2}$$

(goed kijken!) en dat is $x^2 \cdot F(x)$. De eerste som is

$$\sum_{n=1}^{\infty} F_n x^{n+1}$$

en dat is $x \cdot F(x)$, want $F_0 = 0$. Kortom, we vinden dat



$$F(x) = x + x \cdot F(x) + x^2 \cdot F(x),$$

ofwel

$$F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}.$$

Wat kunnen we hiermee? Om dat te zien, moeten we er even aan rekenen. Ten eerste: we hebben de oplossingen van $1 - x - x^2 = 0$ nodig; dat zijn $\alpha = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ en $\beta = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$ (we geven ze een naam omdat we ze vaak gaan gebruiken). We kunnen de functie $F(x)$ nu ook zo schrijven:

$$F(x) = \frac{-x}{(\alpha - x)(\beta - x)}$$

(let op het minteken!). We schrijven de breuk als som van twee eenvoudigere breuken:

$$\frac{-x}{(\alpha - x)(\beta - x)} = \frac{a}{\alpha - x} + \frac{b}{\beta - x}.$$

Als we de rechterkant onder één noemer brengen, komt er

$$\frac{-x}{(\alpha - x)(\beta - x)} = \frac{a(\beta - x) + b(\alpha - x)}{(\alpha - x)(\beta - x)}.$$

Nu moet dus gelden dat $-x = a(\beta - x) + b(\alpha - x)$ voor *alle* $x \neq \alpha, \beta$, maar omdat het om uitdrukkingen van de eerste graad gaat, achteraf ook voor α en β zelf. Vul α maar in, je vindt $-\alpha = a(\beta - \alpha)$, en β invullen geeft $-\beta = b(\alpha - \beta)$. Conclusie:

$$a = \frac{\alpha}{\alpha - \beta} \quad \text{en} \quad b = \frac{-\beta}{\alpha - \beta}.$$

Dat vullen we netjes in, waarbij we $1/(\alpha - \beta)$ buiten de haakjes halen:

$$F(x) = \frac{1}{\alpha - \beta} \left(\frac{\alpha}{\alpha - x} - \frac{\beta}{\beta - x} \right).$$

Nu komt het: neem de eerste term en deel teller en noemer door α , je krijgt

$$\frac{1}{1 - \frac{x}{\alpha}}$$

en met wat we in het begin gezien hebben maken we daar

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{\alpha} \right)^n$$

van. Dit geldt als $|x/\alpha| < 1$, dus als $|x| < |\alpha|$. Evenzo vinden we

$$\frac{\beta}{\beta - x} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{\beta} \right)^n$$

als $|x| < |\beta|$. Nu geldt $x^2 + x - 1 = (x - \alpha)(x - \beta)$, dus $\alpha\beta = -1$. Hiermee kunnen we de formules een beetje opknappen door x/α te vervangen door $-\beta x$ en x/β door $-\alpha x$. En als we ook nog meenemen dat $\alpha - \beta = \sqrt{5}$, dan krijgen we

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-\beta x)^n - \sum_{n=0}^{\infty} (-\alpha x)^n \right).$$

Voor de laatste opknopbeurt schrijven we $\varphi = -\beta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$, dan geldt $-\alpha = \beta^{-1} = (-\varphi)^{-1}$. Conclusie:

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{n=0}^{\infty} (\varphi^n - (-\varphi)^{-n}) x^n.$$

Deze formule geldt voor alle x met $|x| < |\varphi^{-1}|$. Hiermee hebben we een expliciete formule voor de F_n gevonden:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (\varphi^n - (-\varphi)^{-n}).$$

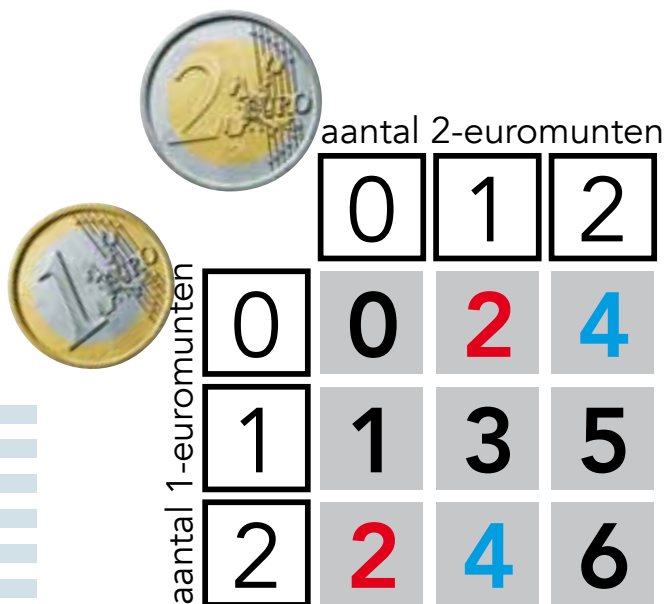
Kennelijk geeft de formule voor elke n een natuurlijk getal. Ook kunnen we hier goed zien hoe snel de Fibonacci-getallen groeien: omdat $\varphi > 1 > \varphi^{-1} > 0$, convergeren de machten $(-\varphi)^{-n}$ naar 0 en is F_n ongeveer gelijk aan $\varphi^n / \sqrt{5}$.

Je hebt $\varphi = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ vast wel herkend als de *gouden snede*. We hebben nu het bekende feit herontdekt dat F_{n+1}/F_n naar φ convergeert.

Overigens moeten we eigenlijk verifiëren dat onze formule voor F_n echt klopt. Dat kun je doen door eerst $n = 0$ en $n = 1$ in te vullen en daarna te controleren dat de formule ook aan de betrekking voor F_n voldoet.

EUROMUNTEN Hoe zit het met de euro's? Kunnen we een formule voor de getallen E_n uit het begin van het artikel maken? Ja, dat kan, en wel als volgt. Hiertoe lossen we eerst een tussenprobleem op.

Stel dat je twee van elk hebt. Wat kun je dan maken en hoe vaak? Dat kun je aflezen uit het product



$(1 + x + x^2)(1 + x^2 + x^4)$. Kijk maar, dat product is gelijk aan

$$1 + 1x + 2x^2 + 1x^3 + 2x^4 + 1x^5 + 1x^6. \quad (*)$$

De $2x^2$ is tot stand gekomen door $1 \cdot x^2$ en $x^2 \cdot 1$ bij elkaar op te tellen; die $1 \cdot x^2$ lezen we als '0 munten van 1 euro en 1 munt van 2 euro', want de *macht* van x in de eerste factor geeft het aantal 1-euromunten en de *macht* van x^2 het aantal 2-euromunten. De term $x^2 \cdot 1$ staat dus voor '2 munten van 1 euro en 0 munten van 2 euro'. De $2x^4$ is de som van twee termen $1 \cdot x^4 = 1 \cdot (x^2)^2$ (twee 2-euromunten) en $x^2 \cdot x^2$ (twee 1-euromunten en één 2-euromunt).

28

In (*) kun je dus aflezen dat je alle bedragen van 0 tot en met 6 euro kunt maken en hoe vaak: neem het getal bij de desbetreffende macht van x . Zie ook het schemaatje bovenaan deze pagina.

Opgave 2. Werk $(1 + x + x^2 + x^3)(1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8)$ uit om te zien wat je met drie 1-euromunten en vier 2-euromunten kunt maken, en hoe vaak.

Nu naar ons algemene probleem. Omdat we oneindig veel van beide muntsoorten hebben, nemen we het product van

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \text{en} \quad \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}.$$

Het resultaat is dan

$$\sum_{n=0}^{\infty} E_n x^n.$$

Als $|x| < 1$, zijn de sommen gelijk aan $1/(1 - x)$ en $1/(1 - x^2)$ en het product is

Als je twee 1-euromunten hebt en twee 2-euromunten, welke bedragen kun je dan samenstellen? Het blijkt dat je alle (geheeltallige) bedragen tot en met 6 euro kunt maken. Voor de bedragen van 2 en van 4 euro lukt het zelfs op twee manieren (2 euro kun je maken op de rood aangegeven manieren, en 4 euro op de blauw aangegeven manieren).

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)},$$

of ook

$$\frac{1}{(1-x)^2(1+x)}.$$

Net als bij de rij van Fibonacci kunnen we deze breuk als som van eenvoudige breuken schrijven. Reken na dat we er

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1-x} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1+x}$$

van kunnen maken. We weten al dat

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

en dus

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n.$$

De eerste term kunnen we met behulp van de functie voor $a_n = n$ uitwerken:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{1-x}{(1-x)^2}.$$

Dat is nu net

$$\frac{x}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-x}$$

en dat wordt dus

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n.$$

Nu vegen we alles bij elkaar in één grote som. de euro-functie $E(x)$ is dus gelijk aan

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2} + \frac{1}{4} (1 + (-1)^n) \right) x^n.$$

En daar staat een mooie formule voor de getallen E_n :

$$E_n = \frac{1}{2}(n+1) + \frac{1}{4}(1 + (-1)^n).$$

In de *Online Encyclopedia of Integer Sequences* is de rij E_n te vinden onder nummer A008619.



Opgave 3. Stel dat de *volgorde* waarin je de munten neerlegt van belang is. Het bedrag van 3 euro kun je dan op drie manieren neerleggen: $1 + 1 + 1$, $1 + 2$ en $2 + 1$. Op hoeveel manieren kun je n euro neerleggen? (Aanwijzing: als je $(x + x^2)^3$ uitschrijft, kun je zien wat je kunt maken, en hoe vaak, als je precies drie munten mag neerleggen.)

GENERERENDE FUNCTIES Wat we hierboven gedaan hebben, is een rij getallen aan een functie koppelen:

- de rij enen aan $1/(1 - x)$,
- de rij gegeven door $a_n = n$ aan $x/(1 - x)^2$,
- de rij 'omgekeerde faculteiten' ($1/(n!)$) aan e^x ,
- de rij Fibonacci-getallen aan $-x/(x^2 + x - 1)$,
- de rij euro-getallen aan $1/((1 - x)^2(1 + x))$.

De bijbehorende functie wordt de *genererende functie* van de rij genoemd omdat, zoals we hierboven gezien hebben, je soms die functie kunt maken zonder dat je de rij goed kent en dan achteraf uit de functie een formule voor je rij kunt maken.

Het is daarom handig als je van een paar standaardrijen de functies kent en van een paar standaardfuncties de rijen; dan kun je vaak je nieuwe rij in bekende uitdrukken.

Met behulp van differentiëren en integreren kun je nog veel meer problemen oplossen. Zo is bijvoorbeeld $1/(1 - x)^2$ de afgeleide van $1/(1 - x)$ en dan kun je de som voor de eerste krijgen door de som voor de tweede te differentiëren:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1}.$$

Dat is gelijk aan de som die we daarnet hadden gevonden (goed kijken).

STELLING VAN TAYLOR Als je heel goed kunt differentiëren, kun je de getallen rechtstreeks uit de functie halen. Kijk maar, als

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

dan vind je $f(0) = a_0$ door $x = 0$ in te vullen. Na één keer differentiëren staat er

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n x^{n-1}$$

en dus $f'(0) = 1 \cdot a_1$. Na twee keer differentiëren staat er

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot (n-1) \cdot a_n x^{n-2}$$

en dus $f''(0) = 2 \cdot 1 \cdot a_2$. Als je zo doorgaat, vind je na k keer differentiëren dat $f^{(k)}(0) = k! \cdot a_k$, ofwel $a_k = f^{(k)}(0)/k!$.

CAVEAT EMPTOR Als je het bovenstaande op e^x toepast krijg je, zoals verwacht, $a_k = 1/(k!)$. Dat betekent niet automatisch dat

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n.$$

Er zijn namelijk functies waarbij je door alle afgeleiden te bepalen een rij getallen kunt maken, maar waarbij de oneindige som niets met de gegeven functie te maken heeft. Dat betekent dat je, nadat je die getallen hebt gevonden, nog wel moet nagaan dat de som bij de functie past.

De Stelling van Taylor (zoek hem maar eens op) geeft voorwaarden waaronder het wél goed afloopt, en functies als e^x , $\sin x$, $\cos x$, $\sqrt{1+x}$ en nog veel meer voldoen aan die voorwaarden en zijn dus gelijk aan de bijbehorende oneindige sommen.

Opgave 4. Zoek eens uit welke rijen getallen verstopt zitten in $\sin x$, $\cos x$ en $\sqrt{1+x}$. Probeer ook eens de rij te vinden die bij de functie $1/\sqrt{1-4x}$ hoort.

UITDAGING Definieer $f(x) = e^{-1/x^2}$ als $x \neq 0$ en $f(0) = 0$. Ga na dat f willekeurig vaak differentieerbaar is en dat $f^{(k)}(0) = 0$ voor *alle* k . Het lijkt dus of in deze functie de rij nullen verstopt zit. Echter,

$$\sum_{n=0}^{\infty} 0x^n = 0$$

voor alle x , en dat is niet wat we willen. ■

PYTHAGORAS OLYMPIADE

■ door Matthijs Coster, Eddie Nijholt, Harry Smit, Michelle Sweering en Bas Verseveldt

Doe mee met de Pythagoras Olympiade! Elke aflevering bevat vier opgaven. De eerste twee zijn wat eenvoudiger; onder de goede inzendingen van leerlingen uit de klassen 1, 2 en 3 wordt een cadeaubon van Bol.com ter waarde van 20 euro verloot. De laatste twee zijn echte breinbrekers; onder de goede inzendingen van leerlingen (tot en met klas 6) wordt een bon van 20 euro verloot. Per aflevering wordt maximaal één bon per persoon vergeven.

Daarnaast krijgen leerlingen (tot en met klas 6) punten voor een *laddercompetitie*, waarmee eveneens een cadeaubon van Bol.com van 20 euro te verdienen valt. De opgaven van de onderbouw zijn 1 punt waard, de opgaven van de bovenbouw 2 punten. De leerling met de hoogste score in de laddercompetitie krijgt een bon. Zijn puntentotaal wordt weer op 0 gezet. Wie zes achtereenvolgende keren niets inzendt, verliest zijn punten in de laddercompetitie. Met de bovenbouwopgaven kun je ook een plaats in de finale van de Nederlandse Wiskunde Olympiade verdienen, mocht het via de voor-

ronden niet lukken:

aan het eind van elke jaargang worden enkele goed scorende leerlingen uitgenodigd voor de NWO-finale. Niet-leerlingen kunnen met de Pythagoras Olympiade meedoen voor de eer.



HOE IN TE ZENDEN? Inzenden kan alleen per e-mail. Stuur je oplossing (getypt of een scan of foto van een handgeschreven oplossing) naar pytholym@gmail.com. Je ontvangt een automatisch antwoord zodra we je bericht hebben ontvangen.

Voorzie het antwoord van een duidelijke toelichting (dat wil zeggen: een berekening of een bewijs). Vermeld je naam en adres; leerlingen moeten ook hun klas en de naam van hun school vermelden.

Je inzending moet bij ons binnen zijn vóór 30 april 2016.

DE GOEDE INZENDERS VAN NOVEMBER 2015

318: Jan Bosma (klas 5), OSG Sevenwolden, Heerenveen; Anton van Es (klas 5), Gymnasium Sorghvliet, Den Haag; Lisan ten Hove (klas 2), Oostvaarders College, Almere; Arie van der Kraan, Nuth; Pascal Kwanten, Almere; Johan van der Marck (klas 5), Murmellius Gymnasium, Alkmaar; Niels van Mierlo (klas 4), Christelijk Gymnasium, Utrecht; Corijn Rudrum (klas 5), RSG Pantarijn, Wageningen; Pim Spelier (klas 6), Christelijk Gymnasium Sorghvliet, Den Haag; Eline Welling (klas 4), Goois Lyceum, Bussum.

319: Lisan ten Hove (klas 2), Oostvaarders College, Almere; Corijn Rudrum (klas 5), RSG Pantarijn, Wageningen; Pim Spelier (klas 6), Christelijk Gymnasium Sorghvliet, Den Haag.

320: Pim Spelier (klas 6), Christelijk Gymnasium Sorghvliet, Den Haag.

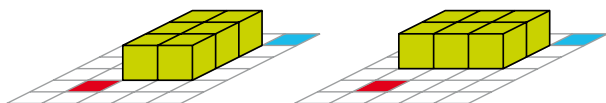
321: Anton van Es (klas 5), Gymnasium Sorghvliet, Den Haag; Arie van der Kraan, Nuth; Pascal Kwanten, Almere; Peter van der Lecq, Utrecht; Johan van der Marck (klas 5), Murmellius Gymnasium, Alkmaar; Corijn Rudrum (klas 5), RSG Pantarijn, Wageningen; Pim Spelier (klas 6), Christelijk Gymnasium Sorghvliet, Den Haag; Eline Welling (klas 4), Goois Lyceum, Bussum.

Cadeaubonnen: Lisan ten Hove en Corijn Rudrum.

Stand laddercompetitie: Niels van Mierlo (16 p; cadeaubon), Anton van Es (15 p), Eline Welling (15 p), Sander Engelberts (14 p), Frenk Out (14 p), Oscar Heijdra (13 p), Jelmer Firet (12 p), Levi van de Pol (12 p), Pim Spelier (12 p), Marinda Westerveld (11 p), Tara van Belkom (10 p), Reinier Schmiermann (9 p), Beaudine Smeekes (9 p), Rainier van Es (7 p), Lisan ten Hove (7 p), Jan Bosma (6 p), Sebastiaan Ceuppens (6 p), Tjard Langhout (6 p), Stef Rasing (6 p), Ivo van Dijck (5 p), Merlijn Hunik (5 p), Laurens Hilbrands (4 p), Antonie Moes (4 p), Corijn Rudrum (4 p), Johan van der Marck (3 p), Maarten Stremmer (3 p), Jelle Couperus (2 p), Rinze Hallema (2 p), Matthijs Pool (2 p), Stijn van Bemmelen (1 p), Ludvine Bonvarlez (1 p), Kenny van Dijken (1 p), Famke Driessen (1 p), Tessa Engelberts (1 p), Tim Groot (1 p), Calista Hainaut (1 p), Gerben-Jan Hooijer (1 p), Boris Kloeg (1 p), Nora Lahlou (1 p), Daphné Meyer-Horn (1 p), Lotte Middelberg (1 p), Leon van Mierlo (1 p), Alwin van der Paardt (1 p), Bram Pel (1 p), Youri Pouw (1 p), Olivier Segers (1 p), Jan Willem de Waard (1 p), Senne Willems (1 p).

OPGAVEN 326

Je hebt een ruitjespapier, waarvan één vierkantje rood en één vierkantje blauw is gekleurd. Verder heb je een blok met afmetingen $1 \times 2 \times 3$. Dat blok is geplaatst op het ruitjespapier zoals in het linkerplaatje. Een beweging bestaat uit een draaiing van 90° van het blok over een ribbe die raakt aan het ruitjespapier. Is het mogelijk om na een aantal draaiingen de situatie zoals in het rechterplaatje te bereiken? (Het ruitjespapier is groter dan hier afgebeeld; aan alle kanten lopen de ruitjes verder!)

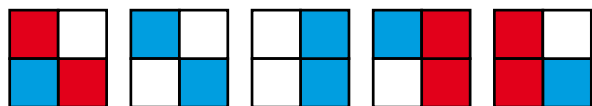


OPGAVEN 327

Gegeven zijn een geheel getal a van twee cijfers en een geheel getal b van vier cijfers. Alle cijfers in beide getallen zijn kleiner dan 9. Er geldt: $a^2 = b$. Indien alle cijfers met 1 verhoogd worden, klopt dit ook. Wat zijn de getallen a en b ?

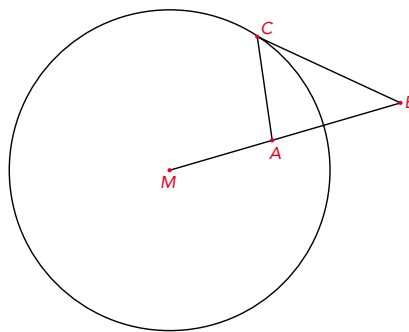
OPGAVEN 328

Een puzzelfabrikant wil een alternatief dominospel ontwerpen, uitgaande van vierkante stenen waarbij elke hoek in één van de drie kleuren rood, wit en blauw wordt geschilderd. Hoeveel verschillende stenen kun je zo maken? Twee stenen zijn hetzelfde als de ene door een draaiing in de andere kan overgaan. De eerste vier stenen hieronder zijn allemaal verschillend. De twee meest rechtse stenen zijn identiek.



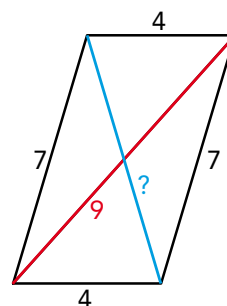
OPGAVEN 329

Gegeven is een cirkel met middelpunt M en straal 1. Neem een willekeurig punt B buiten de cirkel. Noteer met x de lengte van het lijnstuk MB . Plaats op het lijnstuk MB het punt A met $MA = 1/x$. We noemen B en A elkaars *geometrische inverse* ten opzichte van de cirkel. Neem ten slotte een willekeurig punt C op de cirkel en bewijs dat geldt: $BC/AC = x$.

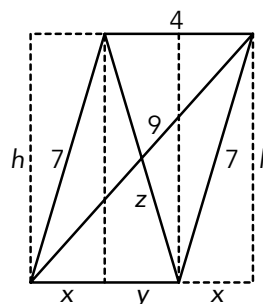


OPLOSSING 318

De zijden van het parallellogram hieronder hebben lengte 4 en 7, en een van de diagonalen heeft een lengte van 9. Bereken de lengte van de andere diagonaal.



Oplossing. Zie onderstaande figuur. Er geldt: $x + y = 4$. Uit de stelling van Pythagoras volgt: $x^2 + h^2 = 7^2$ en $(4 + x)^2 + h^2 = 9^2$. Door de eerste vergelijking in de tweede vergelijking te substitueren, vinden we $16 + 8x = 32$, ofwel $x = 2$ en $h^2 = 45$. Hieruit volgt $y = 2$. Voor de gevraagde diagonaal z geldt: $y^2 + h^2 = z^2$. We vinden: $z^2 = 2^2 + 45 = 49$, ofwel $z = 7$.



OPLOSSING 319

Wat is de langste rij getallen die je kunt construeren zó, dat

- de som van elke 2015 opeenvolgende getallen gelijk is aan -1 ,
- de som van elke 2016 opeenvolgende getallen gelijk is aan $+1$?

Oplossing. We geven de oplossing weer door $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$, waarbij we moeten nagaan wat de grootste waarde van n is. De som van de termen a_i tot en met a_{i+2015} noemen we S_i en de som van de termen a_i tot en met a_{i+2014} noemen we T_i . Dus $S_i = a_i + a_{i+1} + \dots + a_{i+2015}$ en $T_i = a_i + a_{i+1} + \dots + a_{i+2014}$. Er is gegeven dat $S_1 = S_2 = S_3 = \dots = S_{n-2015} = 1$ en $T_1 = T_2 = T_3 = \dots = T_{n-2014} = -1$. Door te kijken naar de verschillen, volgt $a_{2016} = S_1 - T_1 = 2$ en $a_1 = S_1 - T_2 = 2$. Dat geldt eveneens voor a_{2017} en a_2, a_{2018} en a_3, a_{2019} en $a_4, \dots, a_n$ en a_{n-2015} . Zo vinden we $a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_{2014} = 2$. Voor a_{2015} geldt: $-1 = T_1 = 2014 \cdot 2 + a_{2015}$, ofwel $a_{2015} = -4029$. Vervolgens zijn de daarop volgende 2014 waarden van a_k eveneens 2. Dus $n = 4029$ en $a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_{2014} = a_{2016} = \dots = a_{4029} = 2$, terwijl $a_{2015} = -4029$.

OPLOSSING 320

32

Je bent jarig en voor je staan evenveel kaarsen als dat je oud bent geworden (zeg n). Je blaast een aantal kaarsen uit. Daarbij blaas je zó willekeurig, dat de kans dat je 1, 2, 3, ..., n kaarsen uitblaast even groot is. Daarna zul je (hoogstwaarschijnlijk) opnieuw moeten blazen (zeg k kaarsen). Voor elk aantal kaarsen is de kans dat je dat aantal uitblaast gelijk aan $\frac{1}{k}$. Daarna zul je mogelijk nog een aantal keren moeten blazen totdat alle kaarsen zijn gedooft. Wat is de verwachtingswaarde van het aantal keren dat je zult moeten blazen?

Oplossing. We noteren met $E(n)$ de verwachting van het aantal keren dat je moet blazen. Voor één kaars is de situatie makkelijk: $E(1) = 1$. Voor twee kaarsen geldt dat er met kans $\frac{1}{2}$ één kaars wordt uitgeblazen en met kans $\frac{1}{2}$ twee kaarsen. Het verwachte aantal keer blazen is in het eerste geval 2 keer en in het tweede geval 1 keer. Dus $E(2) = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 = 1 + \frac{1}{2}$. Het lijkt er op dat $E(n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n}$. Om dit te bewijzen, moeten we nagaan dat $E(n) = E(n-1) + \frac{1}{n}$. Dit blijkt inderdaad zo te zijn, want na de eerste

keer blazen blijven nog k kaarsen branden, met $k \in \{0, \dots, n-1\}$, en al deze mogelijkheden hebben gelijke kans, namelijk $\frac{1}{n}$. Dus

$$\begin{aligned} E(n) &= 1 + \frac{1}{n} (E(1) + \dots + E(n-1)) = \\ &= 1 + \frac{1}{n} \left((1) + \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \dots \right. \\ &\quad \left. + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1}\right) \right) = \\ &= 1 + \frac{1}{n} \left(\frac{n-1}{1} + \frac{n-2}{2} + \frac{n-3}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} \right). \end{aligned}$$

We brengen nu de 1 binnen de haakjes, en schrijven vervolgens binnen de haakjes:

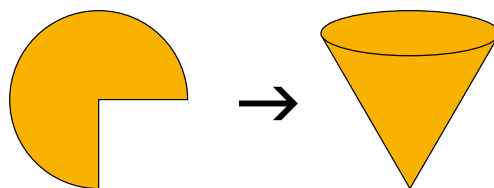
$$n = \frac{1}{1} + \frac{2}{2} + \frac{3}{3} + \dots + \frac{n}{n}.$$

Nu geldt:

$$\begin{aligned} E(n) &= \frac{1}{n} \left(\frac{n}{1} + \frac{n}{2} + \frac{n}{3} + \dots + \frac{n}{n-1} + \frac{n}{n} \right) = \\ &= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} = E(n-1) + \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

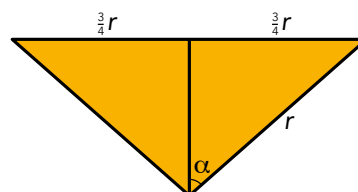
OPLOSSING 321

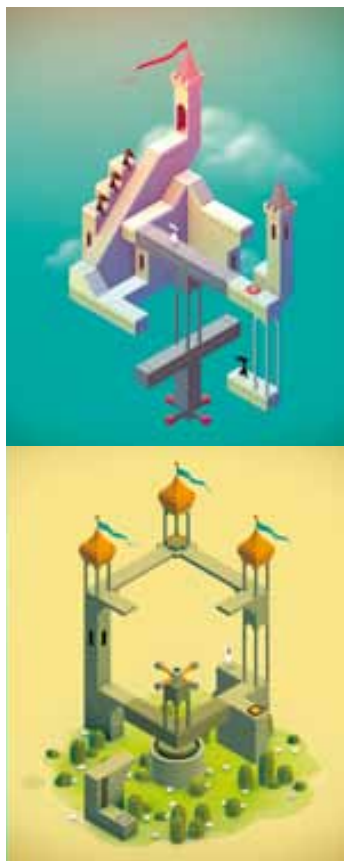
Uit een rond velletje papier wordt een taartpunt met een hoek van 90° geknipt. Vervolgens wordt het overgebleven papiertje tot een hoorntje gevouwen. Wat wordt de hoek in de punt van dit hoorntje?



Oplossing. We gaan uit van een rond velletje papier met straal r . De bovenkant van het hoorntje is een cirkel met omtrek $\frac{3}{4} \cdot 2\pi r = \frac{3}{2}\pi r$. De straal van deze cirkel is dus $\frac{3}{4}r$. We kunnen nu onderstaande doorsnede van het hoorntje tekenen.

Er geldt: $\sin \alpha = \frac{3r}{4r} = \frac{3}{4}$. De gevraagde hoek is $2\alpha = 2 \sin^{-1}(\frac{3}{4}) \approx 97,18^\circ$.





APP VAN DE MAAND: MONUMENT VALLEY

Monument Valley is een app waarbij je als prinses een surrealistische ontdekkingstocht maakt door een Escherlandschap. Je kunt aan wien en balken draaien, waardoor de zwaartekracht ineens een kwartslag draait of er een onmogelijke figuur ontstaat. Met de app verplaats je je in de meetkundige onmogelijkheden van Escher.

Het verhaaltje is simpel, om niet te zeggen raar. Gelukkig doet dat er totaal niet toe. De app moet het echt hebben van zijn grafische kwaliteit. De figuren zijn schitterend en de paleizen waar je een weg doorheen moet zoeken, zijn fantasievol gemaakt.

Monument Valley is verkrijgbaar voor Android, iOS en Windows Phone (€ 3,99).

PYTHAGORAS

55ste jaargang nummer 4
februari 2016
ISSN 0033 4766

Pythagoras stelt zich ten doel jongeren kennis te laten maken met de leuke en uitdagende kanten van wiskunde. *Pythagoras* richt zich tot leerlingen van vwo en havo en alle anderen die jong van geest zijn.

Internet www.pyth.eu

Hoofredacteur Derk Pik

Eindredacteur Alex van den Brandhof

Redactie Matthijs Coster,
Jeanine Daems, Jan Guichelaar,
Klaas Pieter Hart, Paul Levrie,
Marc Seijlhouwer

Vormgeving Grafisch Team Digipage,
Leidschendam

Druk Drukkerij Ten Brink, Meppel

Uitgever Koninklijk Wiskundig
Genootschap (KWG)

Management Pythagoras
Mark Veraar (KWG), Derk Pik

Lezersreacties en kopij
Bij voorkeur per e-mail; lezersreacties
naar Jan Guichelaar, jan@pyth.eu en
kopij naar Derk Pik, derk@pyth.eu.
Eventueel per post naar Pythagoras,
p.a. Centrum Wiskunde & Informatica,
Postbus 94079, 1090 GB Amsterdam.

**Abonnementen, bestellingen en
mutaties**

Abonneservice Pythagoras
Postbus 2238
5600 CE Eindhoven
Telefoon: 085 016 02 51
E-mail: abonnementen@pyth.eu

Abonnementsprijs

(zes nummers per jaargang)
€ 35,00 (Nederland en België),
€ 37,00 (overige landen),
€ 20,00 (groepsabbonnement NL/B),
€ 35,00 (geschenkabbonnement NL/B),
€ 37,00 (geschenkabbonnement
overige landen).

Een geschenkabbonnement stopt automatisch na één jaar. Overige abonnementen gelden tot wederopzegging. Zie www.pyth.eu voor verdere toelichtingen.

Aan dit nummer werkten mee

Alex van den Brandhof
(alex@pyth.eu),
Matthijs Coster
(matthijs@pyth.eu),
Jeanine Daems
(jeanine@pyth.eu),
Jan Guichelaar
(jan@pyth.eu),
Klaas Pieter Hart
(kp@pyth.eu),
Jaap Klouwen
(j.klouwen@hva.nl),
Paul Levrie (paul@pyth.eu),
Julian Lyczak
(julian_lyczak@hotmail.com),
Eddie Nijholt
(eddie.nijholt@gmail.com),
Dave Odegard
(dave@odegard.demon.nl),
Derk Pik (derk@pyth.eu),
Marc Seijlhouwer
(marc@pyth.eu),
Harry Smit (h.j.smit@students.uu.nl),
Michelle Sweering
(sweer108@planet.nl),
Bas Verseveldt
(bas.verseveldt@hetnet.nl),
William Verspaandonk
(william_versepaandonk@hotmail.com).

Pythagoras wordt mede mogelijk gemaakt door de bijdragen van de onderstaande instituten en instellingen.





OEIS A000668

3, 7, 31, 127, 8191,
131071, 524287,
2147483647,
2305843009213693951, ...

De getallen die je in bovenstaande rij ziet, kun je ook zo schrijven:
 $2^2 - 1, 2^3 - 1, 2^5 - 1, 2^7 - 1, 2^{13} - 1, 2^{17} - 1, 2^{19} - 1, 2^{31} - 1, 2^{61} - 1, \dots$
Dit zijn de eerste negen *Mersenne-priemgetallen*: priemgetallen van
de vorm $2^n - 1$. Vorige maand werd het 49ste Mersenne-priemgetal
gevonden: $2^{74.207.281} - 1$. Dit getal heeft ruim 22 miljoen cijfers en
is daarmee het grootste bekende priemgetal tot nog toe.